12. *Anwendungen*
der Statik und Dynamik monozyklischer Systeme
auf die Elastizitätstheorie.
Erwiderung auf Hrn. P. Ehrenfests Bemerkung;
von H. Reissner.

Im Januarheft dieses Jahrganges der Annalen der Physik¹⁾ p. 210 berichtet Herr Ehrenfest in dankenswerter Weise einen Rechenfehler, der sich in meine 1902 veröffentlichte, in der Überschrift zitierte Abhandlung²⁾ eingeschlichen hatte.

Glücklicherweise betrifft die Richtigstellung dieses Fehlers nur den Abschnitt p. 56, 57 u. 58 jener Arbeit und läßt nicht nur alles andere unverändert, sondern beseitigt auch einen gewissen Widerspruch mit dem Ergebnis der dort folgenden Seiten. Auf p. 59—62 und in der Anmerkung auf p. 61 habe ich nämlich ausgeführt, daß die Entropie des ein vollkommen elastisches Mittel darstellenden monozyklischen Systems bei adiabatischer, wenn auch mit endlicher Geschwindigkeit erfolgender Zustandsänderung konstant bleibt, wenn die zyklische Koordinate in den Koeffizienten nicht vorkommt. Für die positive Umkehrung dieser Behauptung habe ich dort allerdings nur implizite einen Beweis auf p. 75 gegeben, den ich im folgenden ausführlich erörtern werde.¹

Dieser Beweis wird gleichzeitig zeigen, daß dieselben Bedingungen für den positiven adiabatischen Entropiezuwachs, wie für das Vorhandensein einer Energie zerstreuernden Reibung gelten, so daß eins ohne das andere nicht bestehen kann.

1) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 1. p. 210. 1906.

2) H. Reissner, Ann. d. Phys. 9. p. 44. 1902.

Zum Beweise mögen zunächst noch einmal einige Ansätze aus meiner ersten Abhandlung wiederholt werden.

Die Gesamtenergie des Volumenelementes eines vollkommenen Gases kann angesetzt werden in der Form:

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} m a \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m \delta \dot{p}^2$$

wo $a = 1/b = \alpha v^{\gamma-1}$, $\gamma = c_p/c_v$ dem Verhältnis der spezifischen Wärmen, p das Volumen des Elementes, m die Masse desselben, p die zyklische Koordinate und der Koeffizient des Produktes $\dot{p}\dot{p}$ der Einfachheit wegen gleich Null gesetzt ist.

Der Entropiezuwachs in der Zeiteinheit wird dann nach Hertz' Prinzipien p. 248

$$(2) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{2c_v m}{q},$$

wo $q = m a \dot{p}$ das zyklische Moment bedeutet.

Die auf die zyklische Koordinate p wirkende Kraft $\mathfrak{P}$, durch deren Arbeit Wärme zugeführt wird, nimmt, wenn wir a unabhängig von p , δ abhängig von p voraussetzen, den Wert an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial E}{\partial p} = \dot{q} - \frac{\partial E}{\partial p}, \\ &= \dot{q} - \frac{1}{2} m \frac{\partial \delta}{\partial p} \dot{p}^2, \end{aligned}$$

woraus wir bei adiabatischer Zustandsänderung also für $\mathfrak{P} = 0$ erhalten

$$(3) \quad m a \dot{p} = q = q_0 + \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{2} m \frac{\partial \delta}{\partial p} \dot{p}^2 dt$$

und nach (2)

$$(2a) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{m^2 c_v \frac{\partial \delta}{\partial p} \dot{p}^2}{q_0 + \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{2} m \frac{\partial \delta}{\partial p} \dot{p}^2 dt},$$

wo $t = 0$ die Anfangszeit, $t = T$ der betrachtete Zeitpunkt ist.

Dieser Ausdruck für die Entropieänderung ist dann wesentlich positiv, wenn $\partial \delta / \partial p$ positiv ist, wenn also der Koeffizient δ

des Quadrates der Ausdehnungsgeschwindigkeit $\dot{p}^2$ der Gesamtenergie mit dem Anwachsen der zyklischen Koordinate in der Zeit immer zunimmt.

Die vom System nach dem Parameter ausgeübte Kraft P' , d. h. der äußere Druck ergibt sich, wenn man b unabhängig von p voraussetzt und endliche Parametergeschwindigkeit berücksichtigt, zunächst für beliebige Zustandsänderung zu:

$$(4) \quad P' = \frac{\partial E}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{p}} \right) = - \frac{q^2}{2m} \frac{\partial b}{\partial p} - m b \ddot{p} - m \frac{\partial b}{\partial p} \dot{p} \dot{p}.$$

Für adiabatische Zustandsänderung hat man Gleichung (3) in Gleichung (4) einzusetzen und erhält

$$(4a) \quad \left\{ \begin{aligned} P' &= - \frac{1}{2} m \frac{\partial b}{\partial p} \left[q_0 + \int_0^x \frac{1}{2} m \frac{\partial b}{\partial p} \dot{p}^2 dt \right]^2 \\ &\quad - \ddot{p} m b - \dot{p} b \frac{\partial b}{\partial p} \left[q_0 + \int_0^x \frac{1}{2} m \frac{\partial b}{\partial p} \dot{p}^2 dt \right]. \end{aligned} \right.$$

Man ersieht zunächst aus Gleichung (4a), daß ein in dp/dt lineares Glied auftritt, wenn b von p abhängig ist, und daß die durch dieses Glied gegebene Kraft der Bewegung entgegenwirkt, also eine Reibung darstellt, wenn $\partial b / \partial p$ dauernd größer als Null ist. Für das Auftreten der Reibung sind also dieselben Bedingungen maßgebend, wie für die positive Entropieänderung.

Daß in den obigen Gleichungen bestimmte über die Vergangenheit genommene Integrale auftreten, rührt offenbar davon her, daß man weder die Entropie S noch den äußeren Druck P' durch das Volumen und dessen Änderungsgeschwindigkeit und -beschleunigung allein ausdrücken kann, sondern daß man dazu offenbar entweder noch die vorhergegangenen Werte dieser Größen einführen muß, oder durch Differentiation der Gleichungen die Zeitabgeleiteten des äußeren Druckes und der Entropie hineinbringen und die bestimmten Zeitintegrale herauszuschaffen hat. Ersterer ist jedenfalls der physikalische, letzterer der mathematische Weg.

Der Koeffizient δ enthält nun noch nach Voraussetzung die zyklische Koordinate selbst, die physikalischer Messung unzugänglich ist und deshalb noch ersetzt werden muß. Der Einfachheit wegen möge eine lineare Beziehung für das betrachtete Zeitintervall angenommen und gesetzt werden:

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 p,$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial p} = \delta_1,$$

wo δ_0 und δ_1 Konstanten sind.

Dann enthält nur noch δ selbst die zyklische Koordinate und diese kann durch meßbare Größen ersetzt werden durch das Zeitintegral:

$$p = p_0 + \int_0^t \dot{p} dt.$$

Hierin kann für die zyklische Geschwindigkeit $\dot{p}$ aus Gl. (3) wieder eingesetzt werden:

$$\dot{p} = \frac{q}{m a} = \frac{b}{m} \left[q_0 + \int_0^t \frac{1}{2} m \delta_1 \dot{p}^2 dt \right],$$

wodurch für p jetzt nur Konstanten und die meßbare Veränderliche p (in δ) eintreten.

Entsprechend den obigen Auseinandersetzungen möchte ich den Satz des Hrn. Ehrenfest auf die folgende Form bringen:

Die adiabatischen Änderungen der sichtbaren Koordinate eines Monozykels liefern nur dann eine Analogie zu den Erscheinungen der inneren Reibung und der einseitigen Entropieänderung idealer Gase bei adiabatischer Zustandsänderung, wenn die zyklische Koordinate in mindestens einem der Koeffizienten der Gesamtenergie auftritt.

Eine andere, schwer zu entscheidende Frage ist, ob denn eigentlich bei adiabatischer Expansion eines vollkommenen Gases wirklich innere Reibung auftritt und ob nicht bei dem bekannten Thomson-Jouleschen Ausdehnungsversuch ins Vakuum die Bedingung der Adiabase bei dem Stoß auf die Wände verletzt wird. In letzterem Sinne wird bekanntlich diese Frage von der kinetischen Gastheorie entschieden und

könnte auch von der zyklischen Theorie, wie ich in meiner oben zitierten Arbeit p. 60 ff. gezeigt habe, ebenso aufgefaßt werden.

Jedenfalls ist durch die vorliegenden Auseinandersetzungen gezeigt, daß das angenähert *monozyklische System wohl in der Lage ist, irreversible Vorgänge darzustellen.*

Übrigens ist die Definition des Monozykels $\partial E / \partial \psi = 0$ für unendlich langsame Zustandsänderung im obigen Beispiel nicht verletzt.

(Eingegangen 25. Februar 1906.)