Zweite Abtheilung.

Chemie und Physik.**Berechnung der Versuche mit Wackenroder's aräometrischem Probegläse;**

vom
Prof. Dr. Schrön in Jena.

Wackenroder's Abhandlung über die Bestimmung des specifischen Gewichts der Flüssigkeiten (*Archiv der Pharmacie* 2. R. Bd. 19. S. 261 ff.) veranlafste mich, bei Benutzung derselben für meine Vorträge über mathematische Physik in dessen pharmaceutischem Institute die Formeln zu entwickeln, welche zur Berechnung der Versuche erforderlich wären, die mit dem aräometrischen Probegläse ausgeführt werden. Die Anwendung des letzteren erregte mein Interesse um so lebhafter, je mehr mir die Vorzüge des Probegläses für diesen Zweck hervortraten, wenn es in der Weise gebraucht wird, welche in obiger Abhandlung sich auseinander gesetzt findet. Zwar erscheinen die hierzu nöthigen Formeln beim ersten Anblick zusammengesetzter und deren Entwicklung weitläuftiger, als es für die Anwendung wünschenswerth sein möchte; allein einige Aufmerksamkeit, welche jener Entwicklung und dieser Anwendung, so wie besonders der angefügten Uebersicht geschenkt wird, dürfte wohl zeigen, daß die Berechnung selbst viel einfacher ist, als der Umfang der Formeln vermuthen liefs, daß durch Hülftafeln die bequemste Berechnung erzielt ist, und daß das Ergebnifs eine Genauigkeit liefert, welche bei der Einfachheit des Versuchs eine belohnende genannt werden dürfte. Dazu kommt, daß der beabsichtigte Grad der Genauigkeit des Resultats die Wahl zwischen den verschiedenen Formeln entscheidet, indem für die einfachste, wie für die zusammengesetzteren man weifs, bis auf wie viel Decimalstellen das gefundene specifische Gewicht Sicherheit gewährt. Auch hat man zwischen zweierlei Methoden die Wahl, je nachdem man bei jedem Versuch drei Wä-

gungen, die des leeren, des mit Wasser und des mit der Flüssigkeit gefüllten Glases ausführt, oder nur die letztere Wägung und die beiden ersten durch Rechnung ersetzt, nachdem man ein für allemal das Gewicht des leeren und des mit Wasser gefüllten Probeglases bestimmt hat, und für den wiederholt und zu verschiedenen Zeiten gemachten Gebrauch des letzteren anwendet.

Erste Methode.

Es werden die drei Gewichte des leeren, des mit Wasser und des mit der Flüssigkeit gefüllten Glases bei demselben Barometer- und Thermometerstande bestimmt.

Es bezeichne

bei der Temperatur t und dem Barometerstande b

G das Gewicht des leeren, nämlich mit Luft gefüllten Glases,

A das Gewicht des mit Wasser gefüllten Glases, und

F das Gewicht des mit der Flüssigkeit gefüllten Glases, von welcher das specifische Gewicht bestimmt werden soll;

ferner bei derselben Temperatur t , jedoch im luftleeren Raume

G^1 das Gewicht des luftleeren Glases,

A^1 das Gewicht des mit Wasser,

F^1 das Gewicht des mit der Flüssigkeit gefüllten Glases,

a das Gewicht der Luft im Glase und

g das Gewicht eines, der Glasmasse gleichen Luftvolumens, wobei diese beiden Luftvolumina eine, dem Barometerstande b entsprechende Dichtigkeit besitzen.

Nun ist das gesuchte specifische Gewicht bei der Temperatur t :

$$s = \frac{F^1 - G^1}{A^1 - G^1}$$

nämlich das Gewicht der Flüssigkeit dividirt durch das Gewicht des Wassers bei gleichem Volumen und im luftleeren Raume gewogen, weil ein Körper in der Luft so viel an Gewicht verliert, als das Gewicht eines gleichen Luftvolumens beträgt. Deshwegen wird auch

$F^1 = F + a + g$, $A^1 = A + a + g$ und $G^1 = G + g$
sein müssen, woraus durch entsprechende Subtraction folgt

$$F^1 - G^1 = F - G + a \text{ und } A^1 - G^1 = A - G + a$$

und, wenn man diese Werthe für $F^1 - G^1$ und $A^1 - G^1$
in obiger Formel für s substituirt,

$$s = \frac{F - G + a}{A - G + a}$$

erhalten wird. Diesem Bruche kann man jedoch eine,
für die bequemere Berechnung und für die nachfolgenden
Betrachtungen geeignetere Form geben, wenn man

$$1. \alpha = \frac{a}{A - G}$$

setzt und für das genäherte spezifische Gewicht

$$1. \sigma = \frac{F - G}{A - G}$$

den Werth von

$$2. k = \frac{1 - \sigma}{\sigma}$$

aus der am Ende angefügten Tafel entnimmt. Auf solche
Weise wird nämlich

$$3. s = \sigma(1 + \alpha k)$$

stets bis auf fünf Decimalstellen genau und selbst unter den
ungünstigsten Umständen die sechste Decimalstelle von
 s nur um $1\frac{3}{4}$ Einheiten unsicher werden *).

*) Der Beweis für diese Formel 3. und ihre Eigenschaften
kann durch folgende mathematische Entwicklung geführt
werden. Zunächst ist

$$s = \frac{F - G + a}{A - G + a} = \frac{F - G}{A - G} \left\{ \frac{1 + \frac{a}{F - G}}{1 + \frac{a}{A - G}} \right\}$$

wie aus der Auflösung dieser Klammer erhellt.

Setzt man nun zur einfacheren Bezeichnung das zweite
Glied im Zähler

$$\frac{a}{F - G} = \beta,$$

so erhält man unter Berücksichtigung der Formeln 1. und
1. sofort:

$$s = \sigma \left\{ \frac{1 + \beta}{1 + \alpha} \right\}.$$

Bestimmung des Werthes von α .

Zur Anwendung dieser Formel 3. ist noch der Werth von

$$\alpha = \frac{a}{A - G}$$

der Formel 1. zu ermitteln.

Vorläufig *abgesehen von Temperatur und Luftdruck* ist a das Gewicht der Luft, und

$A - G$ das Gewicht des Wassers,

beides vom innern Volumen des Glases; folglich α das specifische Gewicht der Luft, wenn das des dichtesten Wassers = 1 gesetzt ist, und es würde sein

$$4. \alpha = \frac{1}{769,5025} = 0,001299541 = \frac{1}{\omega}^*)$$

woraus nach Division des Zählers durch den Nenner entsteht

$$s = \sigma [1 + (\beta - \alpha) - \alpha(\beta - \alpha) + \alpha^2(\beta - \alpha) - + \dots].$$

Zur Bestimmung der Gröfse $(\beta - \alpha)$ aber folgt aus Formel I. der Werth von $F - G = \sigma (A - G)$, und durch diesen mit Rücksicht auf Formel 1., der Werth von

$$\beta = \frac{a}{F - G} = \frac{a}{\sigma(A - G)} = \frac{\alpha}{\sigma},$$

welcher in $(\beta - \alpha)$ und überdies k für $\frac{1 - \sigma}{\sigma}$ gesetzt giebt

$$(\beta - \alpha) = \frac{\alpha}{\sigma} - \alpha = \alpha \left\{ \frac{1}{\sigma} - 1 \right\} = \alpha \left\{ \frac{1 - \sigma}{\sigma} \right\} = \alpha k$$

und deshalb

$$s = \sigma [1 + \alpha k - \alpha^2 k + \alpha^3 k - + \dots].$$

Nun erreicht aber k höchstens den Werth $+\frac{1}{2}$, und es ist, wie weiter unten dargethan werden wird, das Maximum von $\alpha = 0,00134$; folglich wird im Maximum $\alpha k = + 0,00067 \dots$, $\alpha^2 k = + 0,00000 088 \dots$, $\alpha^3 k = + 0,00000 00011 \dots$. Setzt man nun auch noch für den ungünstigsten Fall $s = 2$, so wird

$$\sigma(-\alpha^2 k + \alpha^3 k - + \dots) = + 2 \cdot 0,00000 088 \dots = + 0,00000 176 \dots$$

Es wird demnach unter diesen hier angenommenen nachtheiligsten Umständen s in der sechsten Decimalstelle um $1\frac{3}{4}$ Einheiten unsicher, wenn man die Glieder $-\alpha^2 k + \alpha^3 k - + \dots$ vernachlässiget und

$$s = \sigma(1 + \alpha k)$$

setzt, wie in Formel 3. geschehen ist.

*) Es wiegt nämlich 1 Cub. C. Luft bei $0,76^m$ Luftdruck und

Für genauere Berechnung des specifischen Gewichts s ist aber die Rücksicht auf Temperatur und Luftdruck erforderlich und dann für dasselbe innere Volumen des Glases und für dieselbe Temperatur t

a das Gewicht im leeren Raume von einem Volumen Luft, welche eine dem Luftdrucke b entsprechende Dichte hat, und

A—G das Gewicht des Wassers in der Luft unter dem Luftdrucke b . Es war nämlich schon oben bemerkt worden, daß

$$A' = A + a + g \text{ und } G' = G + g$$

sei, mithin muß auch

$$A = A' - a - g \text{ und } G = G' - g$$

und nach ausgeführter Subtraction

$$A - G = (A' - G') - a$$

sein. Das Gewicht $(A' - G')$ des Wassers im leeren Raume um das Gewicht a eines gleichen Luftvolumens vermindert giebt das Gewicht $(A' - G') - a$ des Wassers in der Luft oder das diesem gleiche Gewicht $(A - G)$.

Ferner mit derselben Rücksicht auf Temperatur und Luftdruck kann und muß (nach obiger Note) von $\frac{1}{\omega}$ betrachtet werden: der Zähler 1 als 1 Gramme, d. h. als das Gewicht von ω Cub. Centim. Luft bei 0° C. und im leeren Raume, wobei diese Luft eine, dem normalen Barometerstande

$$B = 0,76 = 336,905 \text{ par. Lin.},$$

entsprechende Dichte hat, und der Nenner ω als $\omega = 769,5025$ Gramme, d. h. als das Gewicht von ω Cub. C. Wasser von der größten Dichte bei 3,9 C. und im luftgefüllten Raume bei dem Normalbarometerstande B .

Nach diesen Erörterungen wird es nun leicht sein,

0° C. Wärme 0,001299541 Grm. nach Biot (*Traité I. 384 ff.*).

Es ist aber $0,001299541 = \frac{1}{769,5025} = \frac{1}{\omega}$, d. h. 1 Cub.

C. jener Luft wiegt $\frac{1}{\omega}$ Grm. od. ω Cub. C. jener Luft wiegen 1 Grm., oder so viel, als 1 Cub. C. Wasser von der größten Dichte bei 3,9 C. Wärme und 0,76 Barometerstand.

den zu bestimmenden Werth von $\alpha = \frac{a}{A-G}$ aus dem gegebenen Werthe von $\frac{1}{\omega}$ abzuleiten. Indem nämlich Zähler und Nenner in dem Bruche α auf dasselbe innere Volumen im Glase und in dem Bruche $\frac{1}{\omega}$ auf dasselbe Volumen von ω Cub. C. und zugleich die Zähler auf Luft und die Nenner auf Wasser sich beziehen; so sind rücksichtlich der Beschaffenheit dieser beiden Körper folgende Reductionen nöthig.

A. Zur Reduction von 1 auf a.

1. Wegen des Luftdruckes, indem die Luft bei 1 und a bezüglich eine, dem Luftdrucke B und b entsprechende Dichte hat. Bei demselben Volumen von ω Cubikcentimetern verhalten sich die Gewichte wie die Dichten, diese Dichten aber wie die drückenden Kräfte, welche hier durch die Barometerstände gemessen werden; mithin werden sich die Gewichte wie die Barometerstände verhalten und nach der Proportion $B : b = 1 \text{ Grm.} : x$ durch $x = \frac{b}{B} \cdot 1 \text{ Grm.} = \frac{b}{B} \text{ Grm.}$ das Gewicht von ω Cub. C. Luft von der Dichte bei b bestimmt sein.

2. Wegen der Temperatur der Luft, indem jene bei 1 und a bezüglich 0° und t° C. beträgt. Da sich nun die Luft vom Gefrierpunkte bis zum Siedepunkte um 0,375 ihres Volumens bei ersterem*) ausdehnt, so wird sie sich bei einer Temperaturerhöhung von 1° C. um $0,00375 = l$ und bei einer von t° C. um lt desselben ausdehnen, folglich von dem Volumen von ω Cub. C. in das Volumen von $(1 + lt) \omega$ Cub. C. übergehen.

*) Zwar beträgt nach den neueren Untersuchungen Rudberg's (*Poggend. Ann. Bd. 41. S. 271 ff.*) diese Ausdehnung der trockenen Luft 0,364 bis 0,365 nach 9 Versuchen, deren Resultate zwischen 0,3636 und 0,3654 liegen; allein zwei andere Versuche, bei welchen absichtlich das genaue Austrocknen der Luft unterlassen wurde, gaben 0,3840 und 0,3902, mithin mehr. Da nun die in Frage stehende Luft (a) keine ausgetrocknete ist, so dürfte die Dalton-Gay-Lussac'sche Zahl 0,375 im vorliegenden Falle die geeignetere sein.

Die Dichten werden sich dann umgekehrt wie diese Volumina, nämlich wie $(1 + lt) \omega : \omega$ oder wie $(1 + lt) : 1$ verhalten. Da sich aber bei demselben Volumen von ω Cub. C. die Gewichte wie die Dichten verhalten, so giebt die Proportion $(1 + lt) : 1 = \frac{b}{B}$ Grm. : x durch $x = \frac{1}{(1 + lt)} \cdot \frac{b}{B}$ Grm. das Gewicht von ω Cub. C. Luft bei der Temperatur t und von der Dichte bei b im leeren Raume.

B. Zur Reduction von ω auf (A—G).

1. Wegen des Luftdruckes, indem bei ω und (A—G) die Wägungen in der Luft bezüglich von einer Dichte bei B und b vorausgesetzt werden. Betrachtet man nun zunächst das Gewicht von 1 Cub. C. Wasser. Dieser wiegt in der Luft von der Dichte bei B auch 1 Grm., im leeren Raume aber um das Gewicht von 1 Cub. C. Luft von der Dichte bei B , nämlich um $\frac{1}{\omega}$ Grm. mehr, demnach $\left\{ 1 + \frac{1}{\omega} \right\}$ Grm. Dieses Gewicht wird aber in der Luft von der Dichte bei b um das Gewicht von 1 Cub. C. Luft von dieser Dichte vermindert werden. Nach A. 1. aber haben ω Cub. C. Luft mit der Dichte bei b das Gewicht $\frac{b}{B}$ Grm., folglich 1 Cub. C. dieser Luft $\frac{b}{\omega B}$ Grm., um welches Gewicht jenes von $\left(1 + \frac{1}{\omega} \right)$ Grm. vermindert werden muß. Demnach wiegt 1 Cub. C. Wasser $\left(1 + \frac{1}{\omega} - \frac{b}{\omega B} \right)$ Grm. in der Luft von der Dichte bei b , folglich ω Cub. C. Wasser in derselben Luft $\omega \left(1 + \frac{1}{\omega} - \frac{b}{\omega B} \right) = \left(\omega + 1 - \frac{b}{B} \right) = \left(\omega + \frac{B-b}{B} \right)$ Grm.

2. Wegen der Temperatur des Wassers, welche bei ω und (A—G) bezüglich 3,9 C. und $t^{\circ}\text{C}$. beträgt. Es bezeichne h die Dichte des Wassers bei $t^{\circ}\text{C}$. nach Hallström, wenn die bei 3,9 C = 1 gesetzt wird*). Um

*) Nach den neuesten Untersuchungen von Hallström, ver-

die zu diesen Rechnungen erforderlichen Hultszahlen zur Hand zu haben, sind die Werthe von h und deren Logarithmen in der hier erforderlichen Ausdehnung am Ende angefügt worden. Da nun bei gleichem Volumen von ω Cub. C. die Gewichte wie die Dichten sich verhalten; so wird nach der Proportion $1 : h = (\omega + \frac{B-b}{B})$

Grm. : x durch $x = h (\omega + \frac{B-b}{B})$ Grm. das Gewicht von ω Cub. C. Wasser bei der Temperatur t und in der Luft von der Dichte bei b gewogen bestimmt sein. Nach diesen Reductionen beträgt nun für dasselbe Volumen von ω Cub. C. das Gewicht der Luft bei der Temperatur t und von der Dichte bei b im leeren Raume

$$\frac{1}{(1 + 1t)} \cdot \frac{b}{B} \text{ Grm.}$$

und das Gewicht des Wassers bei der Temperatur t und in der Luft von der Dichte bei b gewogen

$$h \left\{ \omega + \frac{B-b}{B} \right\} \text{ Grm.}$$

Eben so müssen sich aber auch die Gewichte a und $(A-G)$ dieser Körper von derselben Beschaffenheit verhalten, wenn statt des gemeinschaftlichen Volumens von ω Cub. C. das gleiche Volumen im Innern des Glases angenommen wird. Demnach gilt die Proportion

$$a : (A-G) = \frac{1}{(1 + 1t)} \cdot \frac{b}{B} : h \left\{ \omega + \frac{B-b}{B} \right\},$$

in welcher die Quotienten der Vorderglieder dividirt durch die Hinterglieder einander gleich sind, d. h. es ist

bunden mit denen von Muncke und Stampfer, findet ersterer für die Temperatur, bei welcher das Wasser seine größte Dichte hat, $3,90^\circ \text{C.}$, mit dem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0,04^\circ \text{C.}$ (*Poggendorff's Annalen*, Band 34, S. 245) und giebt für verschiedene Temperaturen von 0° bis 100°C. eine Tabelle des Volumens und der Dichte des Wassers, wenn beide bei $0^\circ \text{C.} = 1$ gesetzt werden (a. a. O. S. 237). Aus dieser ist die angefügte Tabelle berechnet worden. Später fand Despretz (*Poggendorff's Annalen*, Bd. 41, S. 65), ohne jene Abhandlung zu kennen (a. a. O. S. 59), aus eigenen Versuchen 4°C. Wir glauben jener Zahl, als dem Resultate der Versuche mehrerer Experimentatoren, den Vorzug geben zu müssen.

$$\frac{a}{(A-G)} = \frac{\frac{1}{(1+lt)} \cdot \frac{b}{B}}{h \left\{ \omega + \frac{B-b}{B} \right\}} = \frac{b}{hB \left\{ \omega + \frac{B-b}{B} \right\} (1+lt)}$$

$$= \frac{b}{h(B\omega + B - b)(1+lt)} = \frac{b}{h[(\omega+1)\omega - b](1+lt)}$$

Man hat demnach statt des obigen Werthes 4. nunmehr mit Rücksicht auf Temperatur t und Luftdruck b die Formel

$$5. \alpha = \frac{b}{h[(\omega+1)B - b](1+lt)},$$

in welcher $B = 0,76 = 336,905$ par. Lin., $l = 0,00375$, $\omega = 769,5025$ ist und h aus jener Tabelle entnommen wird.

Um aber den Einfluss, welchen die Temperatur und der Luftdruck einzeln auf die Gröſſe von α ausüben, näher beurtheilen zu können, kann man

$$\alpha = \frac{1}{h(1+lt)} \times \frac{1}{\left\{ (\omega+1) \frac{B}{b} - 1 \right\}}$$

setzen, indem das Product dieser Brüche, nachdem Zähler und Nenner des zweiten mit b multiplicirt worden ist, die Formel 5. liefert.

Da nun für dieselbe Temperatur die Ausdehnung der Luft gröſſer ist, als die des Wassers, oder die Abnahme der Dichte h des letzteren; so wird eine *Zunahme der Temperatur* auch eine Vergröſſerung des Nenners $h(1+lt)$, und somit eine *Verkleinerung* des Bruches $\frac{1}{h(1+lt)}$ zur Folge haben, dessen grösster Werth für $t = 0$ als $\frac{1}{h} = \frac{1}{0,999882}$ hervorgeht, indem dabei vorausgesetzt wird, dafs bei einer Temperatur unter dem Gefrierpunkte keine derartigen Versuche angestellt werden.

Ferner wird eine *Abnahme des Luftdrucks* b den Bruch $\frac{B}{b}$ vergröſſern und dadurch ebenfalls eine Verkleinerung des Bruches $\frac{1}{\left\{ (\omega+1) \frac{B}{b} - 1 \right\}}$ bewirken, für

dessen größten Werth bei $b = 29''$, als einen der höchsten Barometerstände am Meeresufer, $\frac{1}{\left(770,5025 \cdot \frac{336,905}{348} - 1\right)}$ angenommen werden kann. Das Product dieser beiden Zahlenwerthe liefert aber

das *Maximum* von $\alpha = 0,00134255$.

Das *Minimum* von α hat eine unbestimmte Gränze, doch dürfte man wohl selten bei einer höheren Temperatur als $t = 30^\circ \text{C}$. Versuche anstellen, während $b = 24''$ ein tiefer Barometerstand auf höheren Bergen genannt werden kann. Für diese Werthe würde

$$\alpha = \frac{1}{0,995684(1 + 0,1125)} \cdot \frac{1}{\left\{770,5025 \cdot \frac{336,905}{288} - 1\right\}}$$

sein, oder

das *Minimum* von $\alpha = 0,00100270$ gesetzt werden können.

Das *Mittel* von diesen Extremen würde

$$= 0,00117262$$

sein und hervorgehen, wenn man $t = 15\frac{5}{8}^\circ \text{C} = 12^\circ,5 \text{ R}$, der bei Aräometern gebräuchlichen Normaltemperatur und $b = 26'' 9''',532$ annehmen würde. Will man daher den Einfluss von αk berücksichtigen, ohne jedoch seinen Werth nach Formel 5. zu berechnen; so kann man folgende Formel

$$\text{II. } s^1 = \sigma(1 + 0,00117262 k)$$

anwenden.

Zur Beurtheilung des hierbei begangenen Fehlers bedenke man, dass die Extreme von α von seinem Mittel um 0,00016993 abweichen, dass k im Maximum $\pm \frac{1}{2}$ und σ im Maximum 2 werden kann, folglich als größter Fehler in dem nach Formel II. berechneten s^1 nur $\pm \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,00016993 = \pm 0,00016993$ d. h. $1\frac{2}{3}$ Einheiten in der vierten Decimalstelle entstehen kann.

Wollte man aber für das specifische Gewicht nur σ nach Formel I. annehmen, so würde der größte Fehler $\pm \sigma \alpha k$ wegen Vernachlässigung des Gliedes αk betragen. Nun ist im Maximum $\sigma = 2$, $\alpha = 0,00134255$

und $k = \pm \frac{1}{2}$, folglich wäre als größter Fehler der Formel I. das Product $\pm \sigma \alpha k = \pm 0,00134255$ oder $1\frac{1}{2}$ Einheiten in der dritten Decimalstelle zu betrachten. Doch könnte in Formel I. und II. der Fehler auch 0 sein, wenn im Minimum $k=0$ wäre, welches freilich $\sigma=1$ voraussetzt.

Berechnet man aber α nach Formel 5. und das spezifische Gewicht s nach folgender Formel

$$\text{III. } s = \sigma \left\{ 1 + \frac{b k}{h [(\omega + 1) B - b] (1 + lt)} \right\};$$

so ist wegen Vernachlässigung der Glieder $-\alpha^2 k + \text{etc.}$ nach obiger Anmerkung zu Formel 3. nur ein Fehler von $1\frac{3}{4}$ Einheiten in der sechsten Decimalstelle zu befürchten.

Wollte man das Glied $-\alpha^2 k$ noch berücksichtigen, welches wohl die Formel zusammengesetzter machen, aber wegen der bequemen Berechnung von $\alpha^2 k$ aus αk die Rechnung unmerklich erschweren würde; so würde sogar die neunte Decimalstelle erst um 1 Einheit unsicher werden. Allein ein solcher Grad von Genauigkeit in der Berechnung würde durch die unvermeidlichen Fehler in der Bestimmung der Gewichte G, A und F und des Barometer- und Thermometerstandes vereitelt werden.

Durch diese Betrachtungen erhält man nun folgendes

Resultat.

Es giebt die Berechnung des specifischen Gewichts nach der Formel

$$\text{I. } \sigma = \frac{F - G}{A - G}$$

eine Unsicherheit in der dritten Decimalstelle bis auf $\pm 1\frac{1}{2}$ Einheiten in derselben, nach der Formel

$$\text{II. } s^1 = \sigma (1 + 0,0011726 k)$$

eine Unsicherheit in der vierten Decimalstelle bis auf $\pm 1\frac{1}{2}$ Einheit derselben, und nach der Formel

$$\text{III. } s = \sigma \left\{ 1 + \frac{b k}{h [(\omega + 1) B - b] (1 + lt)} \right\}$$

eine Unsicherheit in der sechsten Decimalstelle bis auf $\pm 1\frac{3}{4}$ Einheit derselben.

Dafs man für die genaueren Formeln auch die Wägungen und Messungen von G, A, F, t und b in entsprechender Weise genauer ausführen müsse, versteht sich von selbst.

Reduction wegen der Temperatur.

Bis jetzt war die Temperatur t nur in sofern, als sie auf α influirt, berücksichtigt, und bei den Gewichtsbestimmungen von G, A und F, und somit auch von (F—G) und (A—G) *dieselbe Temperatur t* vorausgesetzt worden, damit diese beiden Gewichte für völlig gleiche Volumina der Flüssigkeit und des Wassers gelten konnten. Da aber das specifische Gewicht der Flüssigkeiten Wasser von der grössten Dichte voraussetzt, so mufs auch das Gewicht (A—G) auf solches reducirt werden.

Zu dem Ende bezeichne, wenn h in der obigen Bedeutung genommen wird,

s allgemein den nach einer der Formeln I., II. oder III. gefundenen Werth, und

S das specifische Gewicht auf das dichteste Wasser = 1 bezogen, und bei der Temperatur t der Flüssigkeit; so wird man, da sich bei gleichem Volumen die Dichten wie die Gewichte verhalten, nach der Proportion $h : 1 = (A - G) : x$ durch $x = \frac{A - G}{h}$ das Gewicht des mit (F—G) gleichen Wasservolumens von der grössten Dichte erhalten, welches für (A—G) in obigen Werth von σ zu setzen ist. Dies giebt $\sigma = \frac{F - G}{A - G} \cdot h$ oder die Formel

$$\text{IV.}, S = sh$$

für t° Wärme der Flüssigkeit, Wasser von der grössten Dichte = 1 und den leeren Raum. Will man endlich auch das specifische Gewicht S_0 der Flüssigkeit bei 0°C. Wärme derselben bestimmen, so mufs man bei demselben Gewichte der Flüssigkeit das Volumen V bei t°C. und v bei 0°C. durch geeignete Versuche ermitteln. Da sich aber bei gleichen Gewichten die Vo-

lumina umgekehrt wie die Dichten verhalten; so erhält man nach der Proportion $v : V = S : x$ durch $x = \frac{sv}{v}$ die Formel

$$V., S_0 = \frac{sv}{v}$$

für 0° C. Wärme der Flüssigkeit, Wasser von der größten Dichte = 1 und den leeren Raum.

Setzt man für das Beispiel (*Archiv der Pharmacie* 2. R. Bd. 19. S. 267 u. 275), in welchem

G = 46,655 Grm. das Gewicht des leeren Glases,

A = 64,867 Grm. das Gewicht des mit Wasser und

F = 73,969 Grm. das Gewicht des mit Salpetersäure gefüllten Glases,

t = 15° C. und b = 0,74^m war, nach Muncke (*Baumgartner's Naturlehre. 6. Aufl. 1839. S. 435.*)

v = 1,0000 und V = 1,0155; so erhält man nach den verschiedenen Formeln durch die beigegefügte Berechnung derselben folgende Resultate.

$$\text{Nach Formel I., } \sigma = \frac{F-G}{A-G} = \frac{27,314}{18,212} = 1,499781,$$

$$\text{mithin nach Formel IV., } S = \sigma h = 1,498524$$

$$\text{und nach Formel V., } S_0 = \frac{sv}{v} = 1,521751$$

1,4363853	= log. (F-G)	
-1,2603576	= -log. (A-G)	
<hr/>		
0,1760277	= log. σ	$\sigma = 1,499781$
9,9996359-10	= log. h	
<hr/>		
0,1756636	= log. S	S = 1,498524
	$\frac{V}{v}$	
0,0066799	= log. $\frac{sv}{v}$	
<hr/>		
0,1823435	= log. S ₀	S ₀ = 1,521751

$$\text{Nach Formel II., } s' = \sigma (1 + 0,0011726 k) = 1,499194,$$

$$\text{mithin nach Formel IV., } S = s' h = 1,497938$$

$$\text{und nach Formel V., } S_0 = \frac{sv}{v} = 1,521156.$$

7,06915-10 = log α	0,1760277 = log σ	
9,52275-10n = log k	9,9998302-10 = log (1 + αk)	
6,59190-10n = log αk	0,1758579 = log s^1	$s^1 = 1,499194$
-0,00039075 = αk	9,9996359-10 = log h	
0,99960925 = 1 + αk	0,1754938 = log S	$S = 1,497938$
	0,0066799 = log $\frac{V}{v}$	
	0,1821737 = log S_0	$S_0 = 1,521156$

Nach Formel III.,

$$s = \sigma \left\{ 1 + \frac{b k}{h [(\omega + 1) B - b] (1 + lt)} \right\} = 1,499181$$

mithin nach Formel IV., $S = sh = 1,497925$

und nach Formel V., $S_0 = \frac{sv}{v} = 1,521142$.

2,98677 = log ($\omega + 1$)	9,86923-10 = log b
9,99081-10 = log B	9,52275-10n = log k
2,76758 = log ($\omega + 1$) B	-9,99964-10 = -log h
585,57 = ($\omega + 1$) B	-2,76703 = -log γ
0,74 = b	-0,02377 = -log (1 + lt)
584,83 = [($\omega + 1$) B - b] = γ	6,60154-10n = log αk
1,05625 = (1 + lt)	-0,00039952 = αk
0,1760277 = log σ	-0,99960048 = 1 + αk
9,9998264-10 = log (1 + αk)	
0,1758541 = log s	$S = 1,499181$
9,9996359-10 = log h	
0,1754900 = log S	$S = 1,497925$
0,0066799 = log $\frac{V}{v}$	
0,1821699 = log S_0	$S_0 = 1,521142$

Zugleich ersieht man, daß in diesem Beispiele σ erst in der 4. Decimalstelle um 6 Einheiten zu groß und s^1 erst in der 5. Decimalstelle nur um 1 Einheit zu groß erhalten wurde, weil σ und αk von ihren größten Werthen weit entfernt waren.

Wollte man auch die Correction von s wegen des fehlenden Gliedes $-\alpha^2 k$ bestimmen, so würde wegen $-\alpha^2 k = -\frac{(\alpha k)^2}{k}$ folgende einfache Rechnung die Correction $-\alpha^2 k \cdot \sigma = +0,00000072$ geben, so daß s in der 6. Decimalstelle nur um $\frac{3}{4}$ Einheiten zu klein war.

$$\begin{array}{rcl}
 3,20308 - 10 & = & 2 \log \alpha k = \log (\alpha k)^2 \\
 9,52275 - 10 & = & \log k \\
 \hline
 3,68033 - 10 & = & \log \alpha^2 k \\
 0,17603 & = & \log \sigma \\
 \hline
 3,85636 - 10 & = & \log \alpha^2 k \cdot \sigma \\
 + 0,00000072 & = & - \alpha^2 k \cdot \sigma
 \end{array}$$

Zweite Methode.

Es wird bei jedem Versuche nur das Gewicht des, mit der Flüssigkeit gefüllten Glases bestimmt, nachdem ein für allemal die Gewichte des leeren und des mit Wasser gefüllten Glases ermittelt worden sind.

Die vorige Methode setzt die Bestimmung der drei Gewichte G, A und F bei derselben Temperatur und unter demselben Luftdrucke voraus. Sollen jedoch für genauere Untersuchungen diese Wägungen wiederholt werden, so ist folgende Methode genauer und bequemer.

Bezeichnet nämlich ferner

bei der Temperatur τ und unter dem Luftdrucke β

G_1 das Gewicht des leeren nur Luft enthaltenden Glases und

A_1 das Gewicht des mit Wasser gefüllten Glases, dagegen bei $31,9^\circ \text{C.}$ und im leeren Raume

G_0 das Gewicht des luftleeren Glases und

A_0 das Gewicht des mit Wasser gefüllten Glases; so kann man G_1 und $(A_1 - G_1)$ bezüglich auf G_0 und $(A_0 - G_0)$ nach Formel VI. und VII. reduciren, aus den, durch Wiederholung dieses Verfahrens erhaltenen Werthen von G_0 und $(A_0 - G_0)$ das arithmetische Mittel nehmen und dieses zur Reduction auf G und $(A - G)$ nach Formel VIII. und IX. für Formel III. anwenden.

Auf solche Weise werden die letzteren Gewichte diejenige Genauigkeit erhalten können, welche für die der Formel III. inwohnende Schärfe gewünscht werden muß; man wird ferner für jedes, mit demselben Glase zu bestimmende specifische Gewicht einer Flüssigkeit wiederholt das Gewicht F suchen und auch aus den dadurch erhaltenen Zahlen für s das Mittel nehmen

können, ohne zugleich auch die Gewichte G und A bestimmen und einen, nur schwierig zu bewahrenden, unveränderlichen Thermometer- und Barometerstand voraussetzen zu müssen; wenn man die nun zu entwickelnden Reductionen, nämlich für jedes Glas die von G_1 und $(A_1 - G_1)$ auf G_0 und $(A_0 - G_0)$ und für jede Wägung von F die von G_0 und $(A_0 - G_0)$ auf G und $(A - G)$, ausführt, welche ebenfalls einfacher sind, als die zusammengesetzteren Formeln auf den ersten Blick vermuthen lassen.

1. Reduction von G_1 auf G_0 .

Es bezeichne

g_1 das Gewicht des, mit der Glasmasse gleichen Volumens Luft von der Dichte bei β , der Temperatur τ und im leeren Raume, so daſs aus mehr erwähnten Gründen

$G_1 + g_1$ das Gewicht des luftleeren Glases im leeren Raume bei der Temperatur τ , aber auch zugleich bei der Temperatur $3,^{\circ}\text{C.}$ und nach der obigen Bedeutung von G_0 sofort

$G_0 = G_1 + g_1$ sein wird, weil im leeren Raume das Gewicht eines Körpers durch Veränderung seiner Temperatur nicht geändert wird.

Bei der fraglichen Reduction kommt es daher allein auf die Bestimmung von g_1 an, bei welcher (*Archiv der Pharmacie* 2. R. Bd. 19. S. 273)

$\sigma_0 = 2,642$ die Dichte des weissen, bleifreien Fensterglases bei $3,^{\circ}\text{C.}$ und

σ_1 die bei $\tau^{\circ}\text{C.}$ Wärme,

$m = 0,00002673$ die cubische Ausdehnung dieses Glases für 1°C. ,

$n_1 = \tau - 3,9$, endlich

v_0 und v_1 das Volumen der Glasmasse bezüglich bei $3,^{\circ}\text{C.}$ und τ Wärme bedeuten mag.

Da sich nun bei gleichen Gewichten die Volumina umgekehrt wie die Dichten verhalten, so wird nach der Proportion $v_1 : v_0 = (1 + mn_1) : 1 = \sigma_0 : \sigma_1$ sofort

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{1 + mn_1}.$$

Es verhalten sich aber die Gewichte G_1 Grm. der Glasmasse und eines derselben gleichen Wasservolumens bei 3,9°C. Wärme und 0,76 Luftdruck wie ihre Dichten, wodurch nach der Proportion $\sigma_1 : 1 = G_1 \cdot x$ durch $x = \frac{G_1}{\sigma_1}$ Grm. des Gewichts eines mit der Glasmasse gleichen Volumens dieses Wassers erhalten wird. Nun beträgt das Volumen von 1 Grm. solchen Wassers 1 Cub. C., folglich das Volumen der Glasmasse auch $\frac{G_1}{\sigma_1}$ Cub. C.

Da aber, wie schon oben bemerkt, 1 Cub. C. Luft von 0°C. Wärme und einer Dichte bei $B = 9,76$ im leeren Raume $\frac{1}{\omega}$ Grm. wiegt, so wiegen $\frac{G_1}{\sigma_1}$ Cub. C. dieser Luft $\frac{G_1}{\sigma_1 \omega}$ Grm., ferner bei einem Luftdruck $= \beta$, wie oben unter A. 1., entwickelt, $\frac{G_1 \beta}{\sigma_1 \omega B}$ Grm., endlich bei τ Wärme, wie oben unter A. 2., ermittelt $\frac{G_1 \beta}{\sigma_1 \omega B (1 + \tau)}$ Grm., oder wenn man für σ_1 obigen Werth substituiert, $\frac{G_1 \beta (1 + m n_1)}{\sigma_0 \omega B (1 + \tau)}$ Grm. Dieses Gewicht ist aber der gesuchte Werth von g_1 , wodurch man wegen $G_0 = G_1 + g_1$ erhält,

$$\text{VI.}, G_0 = G_1 \left\{ 1 + \frac{\beta (1 + m n_1)}{\sigma_0 \omega B (1 + \tau)} \right\} \text{ Grm.},$$

in welcher Formel $m = 0,00002673$, $n_1 = \tau - 3,9$, $\sigma_0 = 2,642$, $\omega = 769,5025$, $B = 0,76 = 336,905$ p. L., $l = 0,00375$ und β und τ durch Beobachtungen gegeben sind.

2. Reduction von $(A_1 - G_1)$ auf $(A_0 - G_0)$.

Um $(A_1 - G_1)$ Grm. Wasser unter dem Luftdrucke β und bei $\tau^\circ\text{C.}$ Wärme auf den leeren Raum und die Temperatur 3,9°C. zu reduciren, wird man zunächst wie oben unter B 1. und 2., zu verfahren und dabei mit h_1 die Dichte des Wassers bei $\tau^\circ\text{C.}$ zu bezeichnen haben.

Dort (B. 1.) betrug unter dem Luftdrucke b von 1 Cub. C. Wasser bei $3,9^\circ \text{C}$. Wärme das Gewicht $\left\{1 + \frac{1}{\omega} - \frac{b}{\omega B}\right\}$ Grm.; folglich wird es unter dem Luftdrucke β betragen $\left\{1 + \frac{1}{\omega} - \frac{\beta}{\omega B}\right\}$ Grm. Ferner wird man, wie in B. 2., zur Reduction von $3,9^\circ \text{C}$. auf $\tau^\circ \text{C}$. nach der Proportion $1 : h_1 = \left\{1 + \frac{1}{\omega} - \frac{B}{\omega B}\right\}$ Grm. : x durch $x = h_1 \left\{1 + \frac{1}{\omega} - \frac{\beta}{\omega B}\right\}$ Grm. das Gewicht von 1 Cub. C. Wasser für β und τ erhalten. Es haben demnach 1 Grm. dieses Wassers das Volumen

$$h_1 \left\{1 + \frac{1}{\omega} - \frac{\beta}{\omega B}\right\} = \frac{1}{h_1 (\omega B + B - \beta)} = \frac{\omega B}{h_1 [(\omega + 1) B - \beta]}$$

Cub. C. und somit $(A_1 - G_1)$ Grm. dieses Wassers das Volumen $\frac{(A_1 - G_1) \omega B}{h_1 [(\omega + 1) B - \beta]}$ Cub. C.

Nun wiegt, wie oben bemerkt worden ist, 1 Cub. C. Luft bei dem Normalbarometerstande B und 0°C . Wärme $\frac{1}{\omega}$ Grm. Für den Luftdruck β aber folgt, wie

bei A. 1., nach der Proportion $B : \beta = \frac{1}{\omega}$ Grm. : x das

Gewicht $x = \frac{\beta}{\omega B}$ Grm. und für die Temperatur τ , wie

bei A. 2., nach der Proportion $(1 + 1\tau) : 1 = \frac{\beta}{\omega B}$ Grm. : x

das Gewicht $\frac{\beta}{\omega B (1 + 1\tau)}$ Grm. Es wird demnach für die

gleichen Barometer- und Thermometerstände β und τ ein, dem obigen Volumen von $(A_1 - G_1)$ Grm. Wasser

gleiches Volumen Luft auch $\frac{(A_1 - G_1) \omega B}{h_1 [(\omega + 1) B - \beta]} \cdot \frac{\beta}{\omega B (1 + 1\tau)}$

Grm. $= \frac{(A_1 - G_1) \beta}{h_1 [(\omega + 1) B - \beta] (1 + 1\tau)}$ Grm. wiegen, und um

dieses Gewicht wird sich das von $(A_1 - G_1)$ Grm. Wasser im luftleeren Raume vermehren und in

$$(A_1 - G_1) + \frac{(A_1 - G_1) \beta}{h_1 [(\omega + 1) B - \beta] (1 + 1r)} \text{ Grm. übergehen.}$$

Dieses wird man endlich zur Reduction auf 3,9° C., wie in B. 2., mit der Dichte h_1 multipliciren müssen, wodurch folgende gesuchte Formel entsteht

$$\text{VII., } (A_0 - G_0) = (A_1 - G_1) \left\{ h_1 + \frac{\beta}{[(\omega + 1) B - \beta] (1 + 1r)} \right\} \text{ Grm.}$$

3. Reduction von G_0 auf G .

Erinnert man sich der Bedeutung von G_1 , G_0 und G und entwickelt aus der Formel VI die Gröfse G_1 ; so entsteht

$$G_1 = \frac{G_0}{\left\{ \frac{\beta (1 + mn_1)}{\sigma_0 \omega B (1 + 1r)} \right\}} \text{ Grm.,}$$

nämlich eine Formel, nach welcher man das Gewicht des luftleeren Glases im leeren Raume und bei 3,9° C. Wärme auf das Gewicht des leeren, nur Luft enthaltenden Glases in der Luft bei τ °C. Wärme und unter dem Luftdrucke β reduciren könnte. Da nun hier dieselbe Reduction ausgeführt werden soll, nur dafs die Temperatur t und der Luftdruck b ist; so wird man nur G_1 , τ , n_1 und β mit G , t , n und b zu vertauschen haben, um als gesuchte Formel zu erhalten

$$\text{VIII., } G = \frac{G_0}{\left\{ 1 + \frac{b (1 + mn)}{\sigma_0 \omega B (1 + 1t)} \right\}} \text{ Grm.,}$$

in welcher $n = t - 3,9$, b und t durch Beobachtungen gegeben sind und die übrigen constanten Gröfsen dieselben Werthe wie in Formel VI haben.

4. Reduction von $(A_0 - G_0)$ auf $(A - G)$.

Ganz eben so wird bei der Bedeutung der Gröfsen $(A_1 - G_1)$, $(A_0 - G_0)$ und $(A - G)$ aus der Formel VII durch Entwicklung von $(A_1 - G_1)$ entstehen

$$(A_1 - G_1) = \frac{(A_0 - G_0)}{\left\{ h_1 + \frac{\beta}{[(\omega + 1) B - \beta] (1 + 1r)} \right\}} \text{ Grm.}$$

für die Reduction des Wassergewichts im leeren Raume bei $3,9^{\circ}\text{C.}$ auf das in der Luft von der Dichte bei β und bei $\tau^{\circ}\text{C.}$ Wärme. Hieraus folgt aber, wenn man A_1 , G_1 , β , τ und h_1 mit A , G , b , t und h vertauscht, die gesuchte Formel zur Reduction auf das Wassergewicht in der Luft von der Dichte bei b und bei $t^{\circ}\text{C.}$ Wärme, nämlich

$$\text{IX.}, (A-G) = \frac{(A_0-G_0)}{\left\{ h + \frac{b}{[(\omega+1)B-b](1+lt)} \right\}} \text{ Grm.},$$

in welcher, wie Anfangs h , die Dichte des Wassers bei $t^{\circ}\text{C.}$ bezeichnet.

Man habe z. B. bei $\tau = 21^{\circ}\text{C.}$ und $\beta = 27'' 2'''$ erhalten

$G_1 = 46,6648$ Grm. und $A_1 = 64,8975$ Grm.,
zu einer andern Zeit bei $\tau = 9^{\circ}\text{C.}$ und $\beta = 28'' 3'''$
dagegen

$G_1 = 46,6447$ Grm. und $A_1 = 64,8432$ Grm.;

so ergibt sich nach Formel VI durch nachstehende Berechnung

$G_0 = 46,6854$ Grm. aus dem ersten Versuche und
 $G_0 = 46,6670$ Grm. aus dem zweiten Versuche durch
eine ähnliche Berechnung, daher

$G_0 = 46,6762$ Grm. im Mittel.

Nach Formel VII dagegen folgt durch nachstehende Berechnung

$(A_0-G_0) = 18,2190$ Grm. aus dem ersten Versuche und
 $(A_0-G_0) = 18,2181$ Grm. aus dem zweiten Versuche
durch eine ähnliche Berechnung,
daher

$(A_0-G_0) = 18,21855$ Grm. im Mittel.

Aus diesen mittleren Werthen von G_0 und (A_0-G_0) werden dann für jede Wägung einer Flüssigkeit in diesem Probegläse nach den Formeln VII und IX die erforderlichen Werthe von G und $(A-G)$ berechnet, ohne letztere durch Wägung ermitteln zu müssen.

Man habe bei $b = 0,74$ und $t = 15^\circ \text{C.}$ nur $F = 73,969$ Grm. bestimmt; so folgt durch nachstehende Berechnung

$G = 46,655$ Grm. nach Formel VIII,

$(A-G) = 18,212$ Grm. nach Formel IX und dadurch

$(F-G) = 27,314$ Grm.

Diese beiden, für $b = 0,74$ und $t = 15^\circ \text{C.}$ geltenden Zahlen geben dann die Größen von σ , s' und s , wie in dem Beispiele für die erste Methode berechnet worden ist.

Die vier oben erwähnten Berechnungen aber sind:

1. Berechnung der Formel

$$\text{VI.}, G_0 = G_1 \left\{ 1 + \frac{\beta(1 + mn_1)}{\sigma_0 \omega B(1 + l\tau)} \right\} \text{Grm.},$$

wenn $G_1 = 46,6648$ Grm., $\beta = 27'' 2'''$, $\tau = 21^\circ \text{C.}$,
 $n_1 = \tau - 3,9 = 17,1$, $m = 0,00002673$, $\sigma_0 = 2,642$,
 $\omega = 769,5025$, $B = 336,905$ und $l = 0,00375$ ist.

5,42700 - 10 = log m	0,0001917 = log (1 + δ)
1,23300 = log n_1	1,6689894 = log G_1
6,66000 - 10 = log mn_1	1,6691811 = log G_0
1,000457 = 1 + mn_1	46,6854 = G_0
1,07875 = 1 + $l\tau$	
2,51322 = log $\beta = \log 326$	
0,00020 = log (1 + mn_1)	
-0,42193 = -log σ_0	
-2,88621 = -log ω	
-2,52751 = -log B	
-0,93292 = -log (1 + $l\tau$)	

$$6,64485 - 10 = \log \left\{ \frac{\beta(1 + mn_1)}{\sigma_0 \omega B(1 + l\tau)} \right\} = \log \delta$$

$$1,0004414 = 1 + \delta$$

2. Berechnung der Formel

$$\text{VII.}, (A_0 - G_0) = (A_1 - G_1) \left\{ h_1 + \frac{\beta}{[(\omega + 1)B - \beta](1 + l\tau)} \right\} \text{Grm.},$$

wenn $(A_1 - G_1) = 18,2327$ Grm. und für $\tau = 21^\circ \text{C.}$
 noch $h_1 = 0,998083$ ist.

2,88677 = log ($\omega + 1$)	0,998083 = h_1
2,52751 = log B	0,001166 = ϵ
5,41428 = log ($\omega + 1$) B	0,999249 = $h_1 + \epsilon$

259588	$= (\omega + 1) B$	1,2608510	$= \log (A_1 - G_1)$
- 326	$= -\beta$	9,9996738-10	$= \log (h_1 + \varepsilon)$
259262	$= (\omega + 1) B - \beta$	1,2605248	$= \log (A_0 - G_0)$
2,51322	$= \log \beta$	18,2190	$= (A_0 - G_0)$
-5,41374	$= -\log [(\omega + 1) B - \beta]$		
-0,03292	$= -\log (1 + 1\tau)$		

$$7,06656-10 = \log \left\{ \frac{\beta}{[(\omega + 1) B - \beta] (1 + 1\tau)} \right\} = \log \varepsilon$$

3. Berechnung der Formel

$$\text{VIII.}, G = \frac{G_0}{\left\{ 1 + \frac{b(1 + mn)}{\sigma_0 \omega B (1 + 1t)} \right\}} \text{ Grm.,}$$

wenn $G_0 = 46,6762$ Grm., $b = 0,74$, $t = 15^\circ \text{C.}$, $m = 0,00002673$,
 $n = t - 3,9 = 11,1$, $\sigma_1 = 2,642$, $\omega = 769,5025$, $B = 0,76$ und
 $1 = 0,00375$ ist.

5,42700-10	$= \log m$	1,0004536	$= 1 + \zeta$
1,04532	$= \log n$	1,6690955	$= \log G_0$
6,47232-10	$= \log mn$	-0,0001970	$= -\log (1 + \zeta)$
1,0002967	$= 1 + mn$	1,6688985	$= \log G$
1,05625	$= 1 + 1t$	46,655	$= G$
9,86923-10	$= \log b$		
0,00013	$= \log (1 + mn)$		
-0,42193	$= -\log \sigma_0$		
-2,88621	$= -\log \omega$		
-9,88081-10	$= -\log B$		
-0,02377	$= -\log (1 + 1t)$		

$$6,65664-10 = \log \left\{ \frac{b(1 + mn)}{\sigma_0 \omega B (1 + 1t)} \right\} = \log \zeta$$

4. Berechnung der Formel

$$\text{IX.}, (A - G) = \frac{(A_0 - G_0)}{\left\{ h + \frac{b}{[(\omega + 1) B - b] (1 + 1t)} \right\}} \text{ Grm.,}$$

wenn $(A_0 - G_0) = 18,21855$ und für $t = 15^\circ \text{C.}$ noch $h = 0,999162$ ist.

2,88677	$= \log (\omega + 1)$	0,001198	$= \varepsilon_1$
9,83081-10	$= \log B$	0,999162	$= h$
2,76578	$= \log (\omega + 1) B$	1,000360	$= h + \varepsilon_1$
585,57	$= (\omega + 1) B$	1,2605138	$= \log (A_0 - G_0)$
-0,74	$= -b$	-0,0001563	$= -\log (h + \varepsilon_1)$
584,83	$= [(\omega + 1) B - b] = \gamma$	1,2603575	$= \log (A - G)$
9,86923-10	$= \log b$	18,212	$= (A - G)$
-2,76703	$= -\log \gamma$		
-0,02377	$= -\log (1 + 1t)$		

$$7,07843-10 = \log \left\{ \frac{b}{\gamma (1 + 1t)} \right\} = \log \varepsilon_1$$

Die Berechnung der weitläufigeren Formeln III und VI bis IX kann jedoch durch Anwendung zweier Hülftafeln noch sehr vereinfacht werden.

Zu dem Ende sei

$$\alpha_1 = \frac{b}{(\omega + 1)B - b}, \alpha_2 = \frac{1}{h(1 + 1t)}, \lambda_1 = \frac{b}{\omega B} \text{ und } \lambda_2 = \frac{1}{1 + 1t}$$

wobei allgemein b den Barometerstand in Pariser Lini- und t die Temperatur der Reaumur'schen oder der hunderttheiligen Scale bezeichnet und für jeden Werth von b oder t der entsprechende von α_1 , α_2 , λ_1 und λ_2 aus den angefügten Hülftafeln entnommen werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen werden folgende Verwandlungen leicht verständlich sein.

Es war

$$\text{III.}, s = \sigma \left\{ 1 + \frac{bk}{h[(\omega + 1)B - b](1 + 1t)} \right\},$$

folglich ist auch

$$s = \sigma \left\{ 1 + \frac{b}{[(\omega + 1)B - b]} \cdot \frac{1}{h(1 + 1t)} \cdot k \right\}$$

und man hat

$$\text{IIIa.}, s = \sigma (1 + \alpha_1 \alpha_2 k) \text{ Grm.}$$

Ferner war

$$\text{VI.}, G_0 = G_1 \left\{ 1 + \frac{\beta(1 + mn_1)}{\sigma_0 \omega B(1 + 1\tau)} \right\},$$

folglich ist auch

$$G_0 = G_1 \left\{ 1 + \frac{(1 + mn_1)}{\sigma_0} \cdot \frac{\sigma}{\omega B} \cdot \frac{1}{(1 + 1\tau)} \right\}$$

und man hat

$$\text{VIa.}, G_0 = G_1 \left\{ 1 + \frac{(1 + mn_1) \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_0} \right\} \text{ Grm.}$$

Hierauf war

$$\text{VII.}, (A_0 - G_0) = (A_1 - G_1) \left\{ h_1 + \frac{\beta}{[(\omega + 1)B - \beta] + (1 + 1\tau)} \right\},$$

folglich ist auch

$$(A_0 - G_0) = (A_1 - G_1) h_1 \left\{ 1 + \frac{\beta}{[(\omega + 1)B - \beta]} \cdot \frac{1}{h_1(1 + 1\tau)} \right\}$$

und man hat

$$\text{VII}^a, (A_0 - G_0) = (A_1 - G_1) h_1 (1 + \alpha_1 \alpha_2) \text{ Grm.}$$

Dann war

$$\text{VIII, } G = \frac{G_0}{\left\{ 1 + \frac{b(1+mn)}{\sigma_0 \omega B(1+t)} \right\}},$$

folglich ist auch

$$G = \frac{G_0}{\left\{ 1 + \frac{(1+mn)}{\sigma_0} \cdot \frac{b}{\omega B} \cdot \frac{1}{(1+t)} \right\}}$$

und man hat

$$\text{VIII}^a, G = \frac{G_0}{\left\{ 1 + \frac{(1+mn) \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_0} \right\}} \text{ Grm.}$$

Endlich war

$$\text{IX, } (A-G) = \frac{(A_0 - G_0)}{\left\{ h + \frac{b}{[(\omega+1)B-b](1+t)} \right\}},$$

folglich ist auch

$$(A-G) = \frac{(A_0 - G_0)}{h \left\{ 1 + \frac{b}{[(\omega+1)B-b]} \cdot \frac{1}{h(1+t)} \right\}}$$

und man hat

$$\text{IX}^a, (A-G) = \left\{ \frac{(A_0 - G_0)}{h(1 + \alpha_1 \alpha_2)} \right\} \text{ Grm.}$$

Die Berechnung der, zu den Formeln III und VI bis IX gegebenen Beispiele stellt sich nun nach den Formeln III^a und VI^a bis IX^a mit Benutzung der Hülftafeln für α_1 , λ_1 , α_2 und λ_2 ganz einfach folgendermaßen:

Für III war $t = 15^\circ \text{C.}$, $b = 0,74^m = 27''.4''',04$ und $\sigma = 1,499781$.

Dafür geben die Hülftafeln $k = -0,333^*)$, $\alpha_1 = 0,001265$ und $\alpha_2 = 0,948$.

*) Für die Werthe von k sind drei Decimalstellen zureichend und deren Interpolationen sehr bequem.

Es ist daher nach III^a

$$\begin{aligned} s &= 1,499781(1-0,001265.0,948.0,333) \\ &= 1,499781(1-0,000400) \\ &= 1,499781.0,999600 = 1,499181 \text{ wie dort.} \end{aligned}$$

Für VI und VII war im ersten Versuche $\tau = 21^\circ \text{C.}$, $\beta = 27'' 2'''$, $G_1 = 46,6648$ Grm. und $A_1 = 64,8975$ Grm., und dabei $m = 0,00002673$ und $\sigma_0 = 2,642$ angenommen worden.

Demnach wird $n_1 = \tau - 3,9 = 17,1$ und nach den Hülftafeln $h_1 = 0,998083$, $\alpha_1 = \lambda_1 = 0,001258$, $\alpha_2 = 0,929$ und $\lambda_2 = 0,927$.

Es ist daher nach VI^a

$$\begin{aligned} G_0 &= 46,6648 \left\{ 1 + \frac{(1+0,00002673.17,1).0,001258.0,927}{2,642} \right\} \\ &= 46,6648 \left(1 + \frac{1,000457.0,001166}{2,642} \right) \end{aligned}$$

$= 46,6648.1,000441 = 46,6854$ Grm. wie dort,
und nach VII^a

$$\begin{aligned} (A_0 - G_0) &= 18,2327.0,998083(1+0,001258.0,929) \\ &= 18,2327.0,998083.1,001169 \\ &= 18,2190 \text{ Grm. wie dort.} \end{aligned}$$

Im zweiten Versuche war aber $\tau = 9^\circ \text{C.}$, $\beta = 28'' 3'''$, $G_1 = 46,6447$ Grm. und $A_1 = 64,8432$ Grm., demnach $n_1 = \tau - 3,9 = 5,1$, $h_1 = 0,999813$, $\alpha_1 = \lambda_1 = 0,001308$, $\alpha_2 = 0,968$ und $\lambda_2 = 0,967$.

Es ist daher nach VI^a

$$\begin{aligned} G_0 &= 46,6447 \left\{ 1 + \frac{(1+0,00002673.5,1).0,001308.0,967}{2,642} \right\} \\ &= 46,6447 \left(1 + \frac{1,000136.0,001265}{1,642} \right) \end{aligned}$$

$= 46,6447.1,000179 = 46,6670$ Grm. wie dort,
und nach VII^a

$$\begin{aligned} (A_0 - G_0) &= 18,1985.0,999813(1+0,001308.0,968) \\ &= 18,1985.0,999813.1,001266 \\ &= 18,2181 \text{ Grm. wie dort.} \end{aligned}$$

Für VIII und IX war $t = 15^\circ \text{C.}$, $b = 0,74^m = 27'' 4''' 04$, $G_0 = 46,6762$ Grm. und $(A_0 - G_0) = 18,21855$ Grm. und dabei ebenfalls $m = 0,00002673$ und $\sigma_0 = 2,642$ angenommen worden.

Demnach wird $n = t - 3,9 = 11,1$, $h = 0,999162$,
 $\alpha_1 = \lambda_1 = 0,001265$, $\alpha_2 = 0,948$ und $\lambda_2 = 0,947$.

Es ist daher nach VIII^a

$$G = \frac{46,6762}{\left\{ \frac{1 + 0,00002673 \cdot 11,1}{2,642} \cdot 0,001265 \cdot 0,947 \right\}}$$

$$= \frac{46,6762}{\left(1 + \frac{1,0002967 \cdot 0,001198}{2,642} \right)} = \frac{46,6762}{1,000453} = 46,655 \text{ Grm. wie dort,}$$

und nach IX^a

$$(A - G) = \frac{18,21855}{0,999162(1 + 0,001265 \cdot 0,948)}$$

$$= \frac{18,21855}{0,999162 \cdot 1,001199} = 18,212 \text{ Grm. wie dort.}$$

Uebersicht.

Um Alles, was für die Anwendung zu wissen nöthig ist, bequem übersehen zu können, sind folgende Bemerkungen, als praktische Resultate dieser ganzen Abhandlung, den Hülftafeln vorangestellt worden:

Erste Methode. Wenn bei einem Stande von t^0 des Thermometers und b Pariser Linien des Barometers

G das Gewicht des leeren,

A das Gewicht des mit Wasser, und

F das Gewicht des mit der Flüssigkeit gefüllten

Glases bezeichnet; so ist das specifische Gewicht derselben

I., $\sigma = \frac{F - G}{A - G}$ (gröfster Fehler $\pm 1\frac{1}{3}$ Einheiten in der dritten Decimalstelle),

II., $s' = \sigma (1 + 0,0011726 k)$ (gröfster Fehler $\pm 1\frac{2}{3}$ Einheiten in der vierten Decimalstelle),

III., $s = \sigma (1 + \alpha_1 \alpha_2 k)$ (gröfster Fehler $\pm 1\frac{3}{4}$ Einheiten in der sechsten Decimalstelle),

IV., $S = sh$ auf Wasser von der gröfsten Dichte $= 1$ und

V., $S_0 = \frac{SV}{v}$ zugleich auf 0°C . Wärme der Flüssigkeit reducirt, wobei die Werthe von k , h , α_1 und α_2 aus den Hülftafeln und die von V und v durch Versuche erhalten werden, indem bei demselben Gewichte der Flüssigkeit V das Volumen bei t° und v das bei 0° bedeutet.

Zweite Methode. Wenn das Gewicht des leeren und des mit Wasser gefüllten Glases bezüglich mit

G_1 und A_1 bei τ° Wärme und β Par. Lin. Luftdruck und mit

G_0 und A_0 bei $3,0^\circ\text{C}$. Wärme und im luftleeren Raume bezeichnet wird; so ist

$$\text{VI}^a, G_0 = G_1 \left\{ 1 + \frac{(1 + mn_1) \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_0} \right\} \text{Grm.},$$

$$\text{VII}^a, (A_0 - G_0) = (A_1 - G_1) h_1 (1 + \alpha_1 \alpha_2) \text{Grm.},$$

$$\text{VIII}^a, G = \frac{G_0}{\left\{ \frac{(1 + mn) \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_0} \right\}} \text{Grm. und}$$

$$\text{IX}^a, (A - G) = \left\{ \frac{(A_0 - G_0)}{h (1 + \alpha_1 \alpha_2)} \right\} \text{Grm.}$$

Hierbei bezeichnet:

σ_0 die Dichte des gebrauchten Glases bei $3,0^\circ\text{C}$. und m die kubische Ausdehnung desselben für 1°C . und in obigen Beispielen ist für weißes bleifreies Fenster-glas $\sigma_0 = 2,642$ und $m = 0,00002673$.

Ferner ist:

$n = t - 3,9^\circ\text{C}$. oder $n_1 = \tau - 3,9^\circ\text{C}$. und die Zahlen h , α_1 , α_2 , λ_1 , λ_2 werden aus den Hülftafen entnommen.

Aus den Wägungen bei τ und β von G_1 und A_1 berechnet man G_0 und $(A_0 - G_0)$ nach den Formeln VI^a und VII^a , nimmt aus wiederholten Wägungen die beiden arithmetischen Mittel und wendet sie für jede in demselben Glase bei t und b gewogene Flüssigkeit zu den Formeln I bis V an. Jede Flüssigkeit erfordert dann bloß die Bestimmung des Gewichts F mit Zuziehung der Formeln VII^a und IX^a , und die als Mittel

aus mehreren Versuchen erhaltenen genauen Werthe von G_0 und $(\Lambda_0 - G_0)$ verlangen und erleichtern zugleich die genaue, auch wohl wiederholte Wägung von F und machen die zweite Methode zur genaueren und bequemerem.

Werthe von $k = \frac{1-\sigma}{\sigma}$ und deren Logarithmen.

σ	k	Log. k	σ	k	Log. k
0,670	+0,49254	9,69244	0,840	+0,19048	9,27984
675	48148	68258	845	18343	26348
680	47059	67264	850	17647	24667
0,685	+0,45985	9,66262	0,855	+0,16959	9,22940
690	44928	65251	860	16279	21163
695	43885	64232	865	15607	19332
0,700	+0,42857	9,63202	0,870	+0,14943	9,17442
705	41844	62163	875	14286	15490
710	40845	61114	880	13636	13470
0,715	+0,39860	9,60054	0,885	+0,12994	9,11376
720	38889	58983	890	12360	09200
725	37931	57900	895	11732	06937
0,730	+0,36986	9,56804	0,900	+0,11111	9,04576
735	36054	55696	905	10497	02108
740	35135	54574	910	09890	8,99520
0,745	+0,34228	9,53438	0,915	+0,09290	8,96800
750	33333	52288	920	08696	93930
755	32450	41122	925	08108	90892
0,760	+0,31579	9,49940	0,930	+0,07527	8,87662
765	30719	48741	935	06352	84210
770	29870	47524	940	06383	80502
0,775	+0,29032	9,46288	0,945	+0,05820	8,76493
780	28205	45033	950	05263	72125
785	27388	43757	955	04712	67321
0,790	+0,26582	9,42459	0,960	+0,04167	8,61979
795	25786	41139	965	03627	55954
800	25000	39794	970	03093	49035
0,805	+0,24224	9,38424	0,975	+0,02564	8,40894
810	23457	37027	980	02041	30980
815	22699	35601	985	01523	18266
0,820	+0,21951	9,34146	0,990	+0,01010	8,00437
825	21212	32658	995	00503	7,70115
830	20482	31137	1,000	0,00000	— ∞
835	19761	29580			

σ	k	Log. k	σ	k	Log. k
1,00	0,00000	— ∞	1,38	-0,27536	9,43991
01	-0,00990	7,99568	39	28058	44805
02	01961	8,29243	40	28571	45593
1,03	-0,02913	8,46428	1,41	-0,29078	9,46357
04	03846	58503	42	29577	47096
05	04762	67778	43	30070	47813
1,06	-0,05660	8,75285	1,44	-0,30556	9,48509
07	06542	81571	45	31035	49185
08	07407	86967	46	31507	49841
1,09	-0,08257	8,91682	1,47	-0,31973	9,50478
10	09091	95861	48	32432	51098
11	09908	99597	49	32886	51701
1,12	-0,10714	9,02996	1,50	-0,33333	9,52288
13	11504	06087	52	34210	53416
14	12281	08922	54	35065	54487
1,15	-0,13043	9,11539	1,56	-0,35897	9,55506
16	13793	13966	58	36709	56177
17	14530	16226	60	37500	57403
1,18	-0,15254	9,18339	1,62	-0,38272	9,58288
19	15966	20321	64	39024	59134
20	16667	22185	66	39759	59944
1,21	-0,17355	9,23943	1,68	-0,40476	9,60720
22	18033	25606	70	41176	61465
23	18699	27182	72	41860	62180
1,24	-0,19355	9,28679	1,74	-0,42529	9,62868
25	20000	30103	76	43182	63530
26	20635	31460	78	43820	64168
1,27	-0,21260	9,32756	1,80	-0,44444	9,64782
28	21875	33995	82	45055	65374
29	22481	35181	84	45652	65946
1,30	-0,23077	9,36318	1,86	-0,46237	9,66499
31	23664	37409	88	46809	67033
32	24242	38458	90	47368	67549
1,33	-0,24812	9,39466	1,92	-0,47917	9,68048
34	25373	40437	94	48454	68533
35	25926	41373	96	48980	69002
1,36	-0,26471	9,42376	1,98	-0,49495	9,69456
37	27070	43248	2,00	50000	69897

Werthe von h
 oder die Dichte des Wassers bei $t^{\circ}\text{C.}$, wenn die größte
 Dichte bei $3,9^{\circ}\text{C.} = 1$ gesetzt wird.

$t^{\circ}\text{C.}$	h	Diff.	$\log h$	Diff.
0	0,999882		9,9999487	
1	0,999932	50	9,9999704	217
2	0,999962	30	9,9999835	131
3	0,999988	26	9,9999948	113
3,9	1,000000	12		52
4	0,699994	6	0,0000000	26
5	0,999985	9	9,9999974	39
6	0,999963	22	9,9999935	96
		37	9,9999839	160
7	0,999926	50	9,9999679	217
8	0,999876	63	9,9999462	274
9	0,999813	76	9,9999188	330
10	0,999737	90	9,9998858	391
11	0,999617	103	9,9998467	448
12	0,999544	115	9,9998019	499
13	0,999429	128	9,9997520	457
14	0,999301	139	9,9996963	604
15	0,999162	152	9,9996359	661
16	0,999010	162	9,9995698	704
17	0,998848	175	9,9994994	761
18	0,998673	186	9,9994233	809
19	0,998487	197	9,9993424	857
20	0,998290	207	9,9992567	900
21	0,998083	219	9,9991667	953
22	0,997864	228	9,9990714	992
23	0,997636	239	9,9989722	1041
24	0,997397	248	9,9988681	1080
25	0,997149	259	9,9987601	1129
26	0,996890	268	9,9986472	1167
27	0,996622	277	9,9985305	1207
28	0,996345	285	9,9984098	1233
29	0,996060	376	9,9982855	1640
30	0,995684		9,9981215	

Werthe von α_1 und λ_1 *).

Baro- meter " "	α_1 oder λ_1	Baro- meter " "	α_1 oder λ_1	Baro- meter " "	α_1 oder λ_1	Baro- meter " "	α_1 oder λ_1
24 0	0,001111	25.3	0,001169	26.6	0,001227	27.9	0,001285
1	1115	4	1173	7	1231	10	1288
2	1119	5	1176	8	1234	11	1292
3	1122	6	1180	9	1238	28.0	1296
4	1126	7	1184	10	1242	1	1300
5	1130	8	1188	11	1246	2	1304
6	1134	9	1192	27.0	1250	3	1308
7	1138	10	1196	1	1254	4	1311
8	1142	11	1200	2	1258	5	1315
9	1146	26.0	1203	3	1261	6	1319
10	1149	1	1207	4	1265	7	1323
11	1153	2	1211	5	1269	8	1327
25.0	1157	3	1215	6	1273	9	1331
1	1161	4	1219	7	1277	10	1335
2	1165	5	1223	8	1281	11	1338

Werthe von α_2 und λ_2 .

Thermo- meter		α_2	λ_2	Thermo- meter		α_2	λ_2	Thermo- meter		α_2	λ_2
C	R			C	R			C	R		
0	0	1,000	1,000	11	8,8	0,961	0,960	21	16,8	0,929	0,927
1	0,8	0,996	0,996	12	9,6	0,957	0,957	22	17,6	0,926	0,924
2	1,6	0,993	0,993	13	10,4	0,954	0,954	23	18,4	0,923	0,921
3	2,4	0,989	0,989	14	11,0	0,951	0,950	24	19,2	0,920	0,917
4	3,2	0,985	0,985	15	12,0	0,948	0,947	25	20,0	0,917	0,914
5	4,0	0,982	0,982	16	12,8	0,944	0,943	26	20,8	0,914	0,911
6	4,8	0,978	0,978	17	13,6	0,941	0,940	27	21,6	0,911	0,908
7	5,6	0,974	0,974	18	14,4	0,938	0,937	28	22,4	0,908	0,905
8	6,4	0,971	0,971	19	15,2	0,935	0,933	29	23,2	0,905	0,902
9	7,2	0,968	0,967	20	16,0	0,932	0,930	30	24,0	0,903	0,899
10	8,0	0,964	0,964								

*) Die Werthe von α_1 und λ_1 weichen erst in der siebenten Decimalstelle um 1 bis 2 Einheiten von einander ab und können daher in den sechs ersten als gleich betrachtet werden. Es sind überhaupt in diesen Hülftafeln die Zahlen mit so vielen Decimalstellen eingetragen worden, als die Berechnung sehr genauer Versuche und namentlich mit solchen Wagen erfordert, deren Empfindlichkeit 1:1000000 ist. Nur für k sind die fünf, den fünfstelligen Logarithmen entsprechenden Decimalstellen beibehalten worden, obschon nur drei angewendet werden, wie auch in dem Beispiele zu der Formel III^a geschehen ist.