Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine n normali di uno S_{n-1} .

(Memoria I di FEDERICO AMODEO, a Napoli.)

Hanno trattato delle curve ellittiche, in relazione alle corrispondenze univoche che possono esistere fra i punti delle stesse, specialmente i signori KÜPPER ⁽¹⁾, HARNACK ⁽²⁾, HURWITZ ⁽³⁾, KLEIN ⁽⁴⁾ ⁽⁸⁾, BIANCHI ⁽⁵⁾, WEYR ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾, SEGRE ⁽⁹⁾ ⁽¹¹⁾, CASTELNUOVO ⁽¹⁰⁾, SCHÖNFLIESS ⁽¹²⁾. I quali hanno considerata la

⁽¹⁾ KÜPPER, *Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung, und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage*. Abhandl. d. k. böhm. Gesell. d. W., 1873. Oppure Math. Ann., Bd. 24, pag. 1-41, 1884.

⁽²⁾ HARNACK, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritter Ordnung*. Math. Ann., Bd. 9, 1876, pag. 1-54.

⁽³⁾ HURWITZ, *Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben insbesondere über die Schliessungsproblem*. Math. Ann., Bd. 15, 1879, pag. 8.

⁽⁴⁾ KLEIN, *Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals ersten Gattung*. Math. Ann., Bd. 17, pag. 133, 1880.

⁽⁵⁾ BIANCHI, *Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung*. Math. Ann., Bd. 17, pag. 234, 1880.

⁽⁶⁾ WEYR, *Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemein ebenen Curve dritter Ordnung*. Sitzungsberichte d. k. Akad. d. W., pag. 837-872. Wien, 1883.

⁽⁷⁾ WEYR, *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf der Curve vom Geschlechte eins*. Ibid., pag. 436-482. 1884.

⁽⁸⁾ KLEIN, *Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modelnfunktionen der N^{ten} Stufe*. Abhandl. d. kgl. Sächs. Gesell. d. W., Bd. 13, 1885.

⁽⁹⁾ SEGRE, *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes*. Math. Ann., Bd. 27, pag. 295. 1886.

⁽¹⁰⁾ CASTELNUOVO, *Geometria sulle curve ellittiche*. Atti della r. Acc. di Torino, vol. 24, pag. 4-22. 1888.

⁽¹¹⁾ SEGRE, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*. Atti d. r. Acc. di Torino, vol. 24. 1889.

⁽¹²⁾ SCHÖNFLIESS, *Ueber eine specielle Classe von Configurationen auf den elliptischen Normalcurven n^{ten} Ordnung*. Math. Ann., Bd. 35, pag. 527-540. 1890.

questione sotto diversi aspetti, dapprima limitandosi alle curve ellittiche del terzo ordine (KÜPPER, HURWITZ, HARNACK, WEYR, BIANCHI, SEGRE), poi passando alla curva ellittica gobba del quarto ordine (HARNACK), a quella di quinto ordine dello spazio a quattro dimensioni (BIANCHI), ed infine estendendosi alle curve ellittiche normali di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni (KLEIN, SEGRE, CASTELNUOVO, SCHÖNFLIESS). Fra tutti, solo il sig. SEGRE ha esaminate le corrispondenze univoche singolari che esistono sulle curve armoniche ed equianarmoniche di cui la rappresentazione analitica fu incidentalmente notata dal KLEIN ⁽¹⁾.

Lo studio delle corrispondenze univoche sulle curve ellittiche è stato per lo più fatto sulle curve del terzo ordine, quindi non sono state ancora citate molte proprietà inerenti alla maggior dimensione dello spazio in cui la curva è immersa. Fanno eccezione SEGRE, CASTELNUOVO e SCHÖNFLIESS, dei quali il primo ha specialmente considerate le rigate generate da queste corrispondenze, l'altro le involuzioni razionali od ellittiche d'ordine e dimensione qualunque, il terzo una speciale classe di configurazioni su queste curve.

Noi abbiamo cercato di completare possibilmente lo studio di queste corrispondenze dal punto di vista generale, ed abbiamo maggiormente tenuto presenti i lavori dei signori WEYR e SEGRE. I risultati in parte sono noti, altri no, e fra questi è notevole una certa estensione dei poligoni di STEINER.

Perchè il lavoro non perda la sua unità di concetto, abbiamo creduto opportuno di non omettere qualche dimostrazione, anche se fosse nota al lettore per i lavori citati.

In una seconda Memoria, che già abbiamo terminata, tratteremo specialmente delle corrispondenze singolari.

§ 1. Considerazioni generali.

1. Siano Γ^n , Γ'^n due curve ellittiche distinte o sovrapposte normali di ordine n , di uno S_{n-1} , fra i punti delle quali sia stabilita una corrispondenza univoca qualunque, ed m , m_1 rispettivamente due loro $[n-3]$ ⁽²⁾ $(n-2)$ -secanti (che indicheremo per brevità con $[n-3]_s$) scelti ad arbitrio; proiettando

⁽¹⁾ KLEIN, *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen von sieben und achten Grade*. Math. Ann., Bd. 15, pag. 279, 1879.

⁽²⁾ Seguendo SCHUBERT (*Acta mathematica*, vol. 8, pag. 97, 1886) indicheremo con $[n-r]$ uno spazio di dimensione $n-r$ (per $r > 1$) contenuto nello S_{n-1} .

da m , m_1 rispettivamente i punti delle curve Γ^n , Γ'^n si hanno due fasci (m) , (m_1) di $[n-2]$, ciascuno dei quali sega ulteriormente la curva in un altro punto. Nel fascio (m_1) si considerino come corrispondenti gli $[n-2]$ che proiettano due punti A' , B' di Γ'^n i cui omologhi A , B di Γ^n sono in uno $[n-2]$ del fascio (m) ; si avrà nel fascio (m_1) una corrispondenza $(2, 2)$, di cui i quattro $[n-2]$ uniti sono quelli che corrispondono agli $[n-2]$ del fascio (m) che hanno colla curva Γ^n due punti comuni consecutivi fuori di m .

Quindi: *per ogni $[n-3]_s$ di una curva ellittica Γ^n normale di ordine n passano soltanto quattro $[n-2]$ tangenti alla curva.*

Se nella corrispondenza $(2, 2)$ del fascio (m_1) oltre a quei $[n-2]$ uniti ve ne fosse un altro, se cioè, preso ad arbitrio l' $[n-3]_s$ m di Γ^n , si assume per $[n-3]_s$ m_1 di Γ'^n uno degli ∞^{n-3} $[n-3]_s$ che stanno in un medesimo $[n-2]$ con due punti A' , B' , i cui omologhi A , B di Γ^n stanno in un $[n-2]$ con m , ogni $[n-2]$ del fascio (m_1) sarà unito, cioè proietterà da m_1 due punti di Γ'^n i cui omologhi su Γ^n sono in un $[n-2]$ del fascio (m) . In tal caso i fasci (m) , (m_1) sono riferiti proiettivamente fra loro.

2. Siano A , B , C tre punti di Γ^n ed A' , B' , C' i loro omologhi nella corrispondenza stabilita fra i punti delle curve Γ^n , Γ'^n , e sia m un $[n-4]_s$ di Γ^n appartenente coi punti A , B , C ad uno stesso $[n-2]$ α , ed m_1 un $[n-4]_s$ di Γ'^n appartenente coi punti A' , B' , C' ad uno stesso $[n-2]$ α' . Se alla coppia AB si fa corrispondere la coppia $A'B'$ assumendo come $[n-3]$ rispettivi di proiezione dei punti corrispondenti delle curve gli $[n-3]_s$ mC , m_1C' , resta stabilita una proiettività fra i fasci (mC) , (m_1C') , nella quale gli $[n-2]$ $\alpha \equiv mABC$, $\alpha' \equiv m_1A'B'C'$ sono corrispondenti. Facendo invece corrispondere alla coppia BC la coppia $B'C'$ ed assumendo come $[n-3]$ di proiezione gli $[n-3]_s$ $m.A$, m_1A' , fra i fasci di $[n-2]$ (mA) , (m_1A') si stabilirà un'altra proiettività in cui gli $[n-2]$ α , α' sono pure corrispondenti; di guisa che, nelle due stelle di $[n-2]$, dai sostegni m , m_1 , ai due fasci (mA) , (mC) corrispondono nell'altra due fasci ad essi proiettivi (m_1A') , (m_1C') , in modo che all' $[n-2]$ α comune ai primi due fasci corrisponde l' $[n-2]$ α' comune ai secondi. Dunque le due stelle (m) , (m_1) sono fra loro omograficamente riferite mediante la corrispondenza univoca fra le curve Γ^n , Γ'^n , e perciò ad ogni $[n-2]$ che proietta una terna di punti di Γ^n , corrisponde nell'altra un $[n-2]$ che proietta la terna di punti omologhi di Γ'^n .

Passando dalle stelle alle forme di $3.^a$, $4.^a$, ... $(n-2)^{ma}$ specie, che hanno per sostegno un $[n-5]_s$, un $[n-6]_s$, ..., un punto della curva, con egual ragionamento si perviene al seguente teorema:

Date due curve Γ^n, Γ'^n , distinte o sovrapposte, ellittiche normali di ordine n di uno stesso S_{n-1} , se fra i punti di esse è stabilita una corrispondenza univoca qualunque, ai gruppi di r punti ($r < n$) della curva Γ^n , contenuti in $[n-2]$ che passano per un $[n-r-1]_s$ fissato ad arbitrio sopra di essa, corrispondono nell'altra curva Γ'^n gruppi di r punti che sono contenuti in $[n-2]$ che passano per uno qualunque di $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$ della curva Γ'^n .

I due $[n-r-1]_s$ di Γ^n, Γ'^n si possono dire $[n-r-1]_s$ omologhi di proiezione; si osservi però che, viceversa, ad un $[n-r-1]_s$ di proiezione della curva Γ'^n corrispondono $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$ di proiezione nella curva Γ^n , quindi noi diremo che le due varietà costituite da questi $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$ di Γ^n e Γ'^n sono varietà omologhe di proiezione.

In particolare per $r = n-1$ si ha:

Date due curve Γ^n, Γ'^n ellittiche normali di ordine n distinte o sovrapposte in uno stesso S_{n-1} , se fra i punti di esse è stabilita una corrispondenza univoca qualunque, ai gruppi di $n-1$ punti contenuti in $[n-2]$ che passano per un determinato punto fisso M di Γ^n , corrispondono in Γ'^n gruppi di $n-1$ punti contenuti in $[n-2]$ che passano per un determinato punto fisso M' di Γ'^n .

I due punti si diranno analogamente centri omologhi di proiezione.

3. Per $r = 2$ si ha pure che, alle coppie di punti della curva Γ^n contenute in $[n-2]$ che passano per un $[n-3]_s$ fissato ad arbitrio sopra di essa, corrispondono nella curva Γ'^n coppie di punti contenute in $[n-2]$ che passano per uno qualunque di $\infty^{n-3} [n-3]_s$ della curva Γ'^n ⁽¹⁾.

Assumiamo $n-2$ diverse posizioni degli $[n-3]_s$ $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}$ di Γ'^n , gli $n-2$ fasci $(m_1), (m_2), (m_{n-2})$ che si otterranno saranno fra loro proiettivi; e le corde $A'B', \dots$, risultano come intersezioni di $n-2$ $[n-2]$ corrispondenti, e perciò descrivono una superficie rigata M_2^{n-2} razionale dell'ordine $n-2$ normale (cioè immersa nello S_{n-1} e non decomposta); la quale si appoggia agli $[n-3]_s$ $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}$, e quindi a tutti gli $\infty^{n-3} [n-3]_s$ che si appoggiano ad $A'B'$. E quindi:

Le infinite, ∞^1 , corde di una curva Γ^n ellittica di ordine n di uno S_{n-1} , che si appoggiano ai punti di uno $[n-3]_s$ di Γ^n esternamente alla curva, costituiscono una superficie rigata M_2^{n-2} razionale normale dell'ordine $n-2$,

(1) SEGRE, *Remarques*, etc. (vedi loc. cit.).

la quale è incidente alla varietà degli $\infty^{n-3} [n-3]_s$ che si appoggiano ad una delle sue generatrici.

Per $n = 4$ si ha in particolare:

Le corde di una curva gobba ellittica del 4.º ordine, che si appoggiano ad una corda fissa di questa in punti esterni alla curva, incontrano ∞^1 corde di questa e costituiscono una schiera rigata del 2.º ordine; le infinite corde a cui queste si appoggiano costituiscono un'altra schiera rigata del medesimo ordine incidente alla prima.

4. Nella proiettività considerata fra i fasci (m) (m_1) di $[n-2]$, ai quattro $[n-2]$ tangenti che da m si possono condurre alla curva Γ^n corrispondono i quattro $[n-2]$ tangenti che da m_1 si possono condurre alla curva Γ'^n ; cosicchè le due quaterne di $[n-2]$ tangenti sono fra loro proiettive, cioè le due curve hanno lo stesso invariante assoluto. Fra i punti di una curva ellittica si può sempre stabilire una corrispondenza univoca (basta, per es., proiettare da un suo $[n-3]_s$ i punti di essa su sè stessa); ne risulta che *le quaterne di $[n-2]$ tangenti che da un $[n-3]_s$ variabile dell'ennica si possono condurre alla curva stessa sono fra loro proiettive.* E quindi:

Se fra i punti di due enniche ellittiche normali di un S_{n-1} si può stabilire una corrispondenza univoca, le quaterne di $[n-2]$ tangenti che ad esse si possono condurre da un arbitrario $[n-3]_s$ sono fra loro proiettive.

5. Un'assegnata corrispondenza univoca fra i punti delle curve Γ^n , Γ'^n fa corrispondere ad ogni gruppo di r punti g_r dell'una un determinato gruppo g'_r dell'altra, e questi gruppi individuano le due varietà di $[n-r-1]_s$ omologhe di proiezione che fanno corrispondere fra loro i due gruppi g_r , g'_r ⁽¹⁾.

Gli ∞^{r-1} gruppi di r punti g_r determinati da ciascuna varietà sopra la rispettiva curva costituiscono un'altra varietà di $[r-1]_s$ incidente a quella di proiezione. E queste due varietà di $[r-1]_s$ sono varietà omologhe di proiezione per un'altra corrispondenza fra i punti delle due curve in cui sono omologhi i gruppi di $n-r$ punti determinati sulle curve dalle suddette varietà di $[n-r-1]_s$. Si ha quindi il teorema:

Se F , F' sono rispettivamente due varietà omologhe di $\infty^{r-1} [r-1]_s$ delle curve Γ^n , Γ'^n individuate da una data corrispondenza univoca fra i punti delle curve, esse sono pure varietà omologhe di proiezione per un'altra corrispondenza fra i punti delle curve.

⁽¹⁾ Per le proprietà delle involuzioni razionali individuate dai gruppi g_r sopra ognuna delle curve cfr. CASTELNUOVO (loc. cit.).

6. Se gli r punti di un gruppo g_r divengono infinitamente vicini, anche i loro corrispondenti divengono infinitamente vicini, cosicchè agli $[n-2]$ r -osculanti condotti dall' $[n-r-1]_s$ m di Γ^n a questa curva corrispondono gli $[n-2]$ r -osculanti che da un $[n-r-1]_s$ m_i della omologa varietà di proiezione si possono condurre alla curva Γ'^n . E perciò, assegnata la corrispondenza univoca, se si vuol costruire la varietà di proiezione degli $[n-r-1]_s$ di Γ^n omologa a quella individuata da un $[n-r-1]_s$ m di Γ^n , si conduca per m un $[n-2]$ r -osculante alla curva Γ^n , e se A' è il punto di Γ'^n omologo nella corrispondenza data al punto A di osculazione di quello $[n-2]$, tutti gli $[n-2]$ che r -osculano la curva Γ'^n in A' individuano gli ∞^{n-r-1} $[n-r-1]_s$ della varietà cercata.

Se il gruppo contiene $n-1$ punti, con questa costruzione si trova in Γ'^n il centro M_i di proiezione omologo ad un centro di proiezione M di Γ^n .

7. Due punti M, M_i di una medesima ennica ellittica o di due enniche distinte di uno S_{n-1} si possono sempre considerare come centri omologhi di proiezione di una corrispondenza univoca fra i punti della curva.

Difatti, se A, A' sono i punti di osculazione di due $[n-2]$ $(n-1)$ -osculanti, condotti alla curva rispettiva da M, M_i , assumendo A, A' come punti omologhi nella corrispondenza fra i punti della curva, saranno M, M_i due centri omologhi di proiezione di questa corrispondenza.

Due centri omologhi di proiezione, in una corrispondenza fra i punti di due curve, non sono in generale punti corrispondenti. Supponiamo che in particolare lo fossero; cioè che presi ad arbitrio su Γ^n $n-1$ punti $ABC...L$ ed i loro omologhi $A'B'C'...L'$ su Γ'^n , gli $[n-2]$ individuati da questi gruppi segassero le curve rispettivamente in due punti omologhi M, M' ; allora ogni altra coppia, come per es. L, L' , può assumersi come coppia di centri omologhi di proiezione per la stessa corrispondenza fra i punti delle due curve; ed inoltre le corde $ML, M'L'$, possono assumersi come assi omologhi di proiezione. In tal caso gli elementi dello spazio S_{n-1} , in cui sono immerse le due curve, sono riferiti fra loro in modo che a due forme di $(n-2)^{ma}$ specie $(M), (L)$ corrispondono due forme di $(n-2)^{ma}$ specie $(M'), (L')$ ad esse rispettivamente proiettive, e tali che la forma di $(n-3)^{ma}$ specie (ML) comune alle prime corrisponde alla forma di $(n-3)^{ma}$ specie $(M'L')$ comune alle seconde; perciò lo spazio S_{n-1} è riferito collinearmente a sè stesso. E quindi si ha il teorema:

Una corrispondenza univoca fra i punti di due enniche normali ellittiche di uno S_{n-1} , tale che ad n punti contenuti in un $[n-2]$ della prima

corrispondono nell'altra n punti pure contenuti in un $[n-2]$ è collineare ⁽¹⁾.

E quindi risulta che due centri omologhi di proiezione o sono sempre punti omologhi (quando la corrispondenza fra i punti delle due curve fa parte di una collineazione fra gli spazi delle due curve) o non lo sono mai.

In particolare:

Una corrispondenza univoca fra due enniche tale che ad un punto singolare dell'una (punto di osculazione di un $[n-2]$ n -osculante) corrisponde un punto singolare dell'altra è collineare.

8. Abbiamo osservato (n.º 4) che se si può stabilire fra due enniche ellittiche normali di uno S_{n-1} una corrispondenza univoca le due curve hanno lo stesso invariante assoluto.

Reciprocamente: *Se due enniche ellittiche hanno lo stesso invariante assoluto, fra i punti di esse è possibile stabilire delle corrispondenze univoche.*

Dimostreremo questo teorema riferendoci a due quartiche di uno S_3 ⁽²⁾.

Si voglia che P, P' siano due punti corrispondenti delle due quartiche Γ^4, Γ'^4 dello S_3 ; proiettiamoli rispettivamente da due corde di Γ^4, Γ'^4 sulle stesse curve in due punti singolari L, L' ; allora dalla corrispondenza voluta si passa ad una seconda corrispondenza, che ha per punti omologhi due punti singolari, e quindi deve essere contenuta in una collineazione fra gli elementi nello S_3 . Siano l, l' le tangenti alle curve in L, L' , le quali, come è noto, passano rispettivamente per un vertice A del tetraedro polare di Γ^4 , e per un vertice A' del tetraedro polare di Γ'^4 ; siano MNP i punti di contatto della curva Γ^4 con i tre piani tangenti $\mu\nu\pi$ che da l le si possono condurre, e $\mu'\nu'\pi'$, $M'N'P'$ i piani ed i punti omologhi della curva Γ'^4 ; e siano infine λ, λ' i piani iperosculatori in L, L' . È noto che i punti $LMNP, L'M'N'P'$ stanno rispettivamente nelle facce α, α' dei tetraedri polari opposte rispettivamente ai vertici A, A' , e che essi sono tutti punti singolari delle curve Γ^4, Γ'^4 e perciò le tangenti in essi alle curve passano rispettivamente per A, A' .

Per ipotesi le quaterne dei piani tangenti condotte da una corda qualunque di ciascuna curva alla curva stessa sono proiettive fra loro, perciò i due fasci di piani $\lambda\mu\nu\pi, \lambda'\mu'\nu'\pi'$ debbono essere proiettivi: si supponga che

⁽¹⁾ Questo teorema fu dimostrato sinteticamente dal KÜPPER per $n=3$ (Math. Ann., Bd. 24, pag. 32) ed analiticamente dal SEGRE per n qualunque. (Cfr. *Remarques*, etc. Math. Ann., Bd. 27.)

⁽²⁾ La dimostrazione di questo teorema è stata fatta geometricamente dal SEGRE sulle cubiche ellittiche (cfr. Atti di Torino, loc. cit.).

essi siano proiettivi nell'ordine:

$$l(\lambda\mu\nu\pi) \wedge l(\lambda'\mu'\nu'\pi'). \quad (1)$$

Un punto qualunque Q di Γ^4 è proiettato da l secondo un piano χ a cui corrisponde nel fascio (l) un piano χ' che determinerà su Γ^4 due punti Q', Q'' , armonicamente separati dal punto A' e dalla faccia α' del tetraedro polare di Γ^4 ; uno di essi si può far corrispondere a Q e sia Q' . Allora, se ai punti $ALMNQ$ di S_3 si fanno corrispondere i punti $A'L'M'N'Q'$, è individuata una omografia fra gli elementi di S_3 ; nella quale al piano LMN corrisponderà il piano $L'M'N'$; al piano π il piano π' ; alle rette lmn , le rette $l'm'n'$; ed al secondo punto d'intersezione Q_1 della retta AQ colla curva Γ^4 corrisponderà il punto Q'' (poichè $A\alpha Q Q_1$, $A'\alpha' Q' Q''$ sono armonici). Cosicchè in questa omografia alla curva Γ^4 , la quale passa per L, M, N , tocca in questi punti rispettivamente le rette l, m, n , ha λ per piano iperosculatore in L , e passa per Q , Q_1 corrisponderà la curva Γ^4 . Dunque ogni modo di ordinare i piani $\mu'\nu'\pi'$, sì da soddisfare la (1), a causa della doppia scelta del punto che deve corrispondere a Q , dà luogo a due corrispondenze univoche fra i punti di Γ^4 e Γ^4 in cui L e L' sono punti corrispondenti, ed a $\lambda\mu\nu\pi$ corrispondono $\lambda'\mu'\nu'\pi'$ appunto in quell'ordine.

Si ha dunque la seguente proposizione:

Date su due enniche ellittiche Γ^n, Γ^n normali di uno S_{n-1} , distinte o sovrapposte, due punti qualunque A, A' , si costruiscano gli altri punti di contatto $BCD, B'C'D'$ delle curve Γ^n, Γ^n rispettivamente con le rigate razionali dell'ordine $n-2$ individuate in ciascuna curva dalle tangenti in A, A' ; se m, m' sono due $[n-3]$, che si appoggiano rispettivamente a queste tangenti, saranno $m(ABCD), m'(A'B'C'D')$ le tetradi di piani tangenti condotte da m, m' alle curve Γ^n, Γ^n . Supposto che sia:

$$m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'B'C'D'), \quad (2)$$

esisteranno due corrispondenze perfettamente determinate fra Γ^n e Γ^n in cui A ed A' (B e B' , C e C' , D e D') saranno punti corrispondenti e che saranno proiettate da m, m' secondo due fasci di $[n-2]$ riferiti fra loro appunto nella proiettività (2).

Se il gruppo $m(ABCD)$ è armonico si avrà pure:

$$m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'B'D'C'),$$

e se il gruppo $m(ABCD)$ è equianarmonico si avrà pure:

$$m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'C'D'B'), \quad m(ABCD) \overline{\wedge} m'(A'D'B'C'),$$

e quindi le curve ellittiche armoniche ed equianarmoniche si possono riferire fra loro in quattro ed in sei modi differenti. E perciò:

Date su due curve ellittiche proiettive, distinte o sovrapposte, due punti qualunque come omologhi in una corrispondenza univoca fra i punti delle curve, il numero delle corrispondenze che restano individuate è due, se le curve non sono singolari, quattro se sono armoniche, sei se sono equianarmoniche ⁽¹⁾.

§ 2. Discussione delle diverse corrispondenze univoche che possono aversi sopra una curva ellittica.

9. Pel caso in cui le due enniche sono sovrapposte possiamo pervenire al teorema del numero precedente anche nel seguente modo. Sia data una corrispondenza univoca sopra una curva Γ^n ellittica dell'ordine n normale di uno S_{n-1} (il che è sempre possibile, n.º 4); proiettiamola da un $[n-3]$, m della curva e facciamo corrispondere nel fascio di $[n-2]$, che risulta, ad ogni $[n-2]$ che incontri la curva in A, B' , i due $[n-2]$ che proiettano i punti A', B' ad essi omologhi nella corrispondenza; sarà nel fascio (m) individuata una corrispondenza $(2, 2)$, la quale avrà quattro $[n-2]$ uniti, ciascuno dei quali o passa per una coppia di punti corrispondenti (in generale non involutoria) o per un punto unito o per due punti uniti della corrispondenza.

Qualora però si possa scegliere l' $[n-3]$, proiettante m in modo che si appoggi a due corde della curva Γ^n , l'una che congiunga due punti A, B e l'altra che congiunga i punti A', B' ad essi omologhi (come avviene, per es., quando A fosse un punto unito della corrispondenza ed m un qualunque $[n-3]$, che si appoggi alla tangente alla curva in A ; oppure come avviene quando A, B fossero due punti omologhi le cui tangenti si appoggino allo stesso $[n-3]$, oppure quando A, B fossero due punti uniti), allora a tutte le coppie di punti non omologhi giacenti in $[n-2]$ proiettanti corrispondono (cfr. n.º 1) coppie di punti ad essi omologhi giacenti in $[n-2]$ uscenti da m ; quindi gli $[n-2]$ corrispondenti del fascio (m) formano una proiettività.

Nel fascio (m) si avranno solamente due $[n-2]$ uniti, ciascuno dei quali o proietta una coppia di punti uniti, che può ridursi anche ad uno quando

⁽¹⁾ SEGRE, *Corrispondenze univoche*, loc. cit., n.º 4.

Annali di Matematica, tomo XIX.

$l'[n-2]$ è tangente alla curva, oppure proietta una coppia involutoria della corrispondenza.

In questo caso, qualunque sia la omografia che si ottiene, dovendo una coppia di punti infinitamente vicini della corrispondenza sulla curva avere per omologhi una coppia di punti pure infinitamente vicini, i quattro punti di contatto degli $[n-2]$ tangenti del fascio (m) devono corrispondersi fra loro, e perciò nella omografia di $[n-2]$ del fascio (m) i quattro $[n-2]$ tangenti, che indicheremo con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devono formare una tetrade riferita proiettivamente a sè stessa.

10. Può accadere che ciascuno degli $[n-2]$ tangenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ corrisponda a sè stesso, ed allora la omografia (m) è una identità e quindi la corrispondenza o è formata tutta di punti uniti, oppure è costituita dalla proiezione della curva su sè stessa fatta dall' $[n-3]_s m$, nel qual caso *le coppie di elementi corrispondenti sono tutte involutorie e sono riferite univocamente agli $[n-2]$ del fascio, e perciò la corrispondenza è razionale. Essa avrà per punti uniti i quattro punti A, B, C, D , nei quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ toccano la curva.*

Viceversa: Ogni corrispondenza univoca della curva Γ^n con quattro punti uniti, diversa dall'identità, è una proiezione della curva Γ^n su sè stessa fatta da infiniti suoi $[n-3]_s$.

Infatti sia A un punto unito di una corrispondenza univoca $\mathbf{C}$ di Γ^n , ed m uno $[n-3]_s$ di Γ^n che si appoggia alla tangente in A ; proiettando da m questa corrispondenza si avrà in (m) una omografia binaria di $[n-2]$, che avrà oltre $l'[n-2]$ unito $m A$, per $[n-2]$ uniti quelli che passano per gli altri tre punti uniti della corrispondenza, e quelli possono essere almeno due; perciò l'omografia avrà almeno tre $[n-2]$ uniti, e quindi è una identità e la corrispondenza $\mathbf{C}$ non è che la proiezione della curva Γ^n fatta da m su sè stessa. Indicheremo una qualunque di queste corrispondenze razionali ed involutorie con la lettera $\mathbf{J}$.

Una $\mathbf{J}$ è individuata da una coppia di elementi corrispondenti AA' . Difatti la corda AA' determina la varietà di $\infty^{n-3} [n-3]_s$ che ad essa si appoggiano e quindi la rigata M_2^{n-2} le cui generatrici individuano sulla curva tutte le altre coppie.

11. Se la tetrade $\alpha\beta\gamma\delta$ non è singolare può aversi solamente:

$$\alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \beta\alpha\delta\gamma \overline{\wedge} \gamma\delta\alpha\beta \overline{\wedge} \delta\gamma\beta\alpha.$$

Ognuna di queste tre proiettività fa corrispondere in doppio modo delle coppie di $[n-2]$ della omografia (m) ; quindi la omografia (m) è involutoria. Ve-

dremo in seguito (n.° 20) che le corrispondenze stesse sono *involutorie* e che esse sono prive di punti uniti: queste involuzioni si dicono *involuzioni fondamentali* delle curve ellittiche; noi le indicheremo con **F**.

Oltre di queste due specie di corrispondenze involutorie non ve ne possono essere altre; perchè, se vi fosse una corrispondenza involutoria che avesse almeno un punto unito A , proiettandola da un $[n-3]_s$ sulla curva in modo che A si proietti in un punto singolare della curva, si avrebbe una corrispondenza contenuta in una collineazione dello S_{n-1} ; la quale dovrebbe essere pure involutoria e quindi il suo asse che passa per A determinerebbe nell'incontro con Γ^n altri tre punti uniti e perciò la corrispondenza involutoria sarebbe una **J**.

12. Se la tetrade $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ è *equianarmonica*, oltre alle proiettività dette (10, 11), si avrebbe:

$$\alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \alpha\gamma\delta\beta \overline{\wedge} \alpha\delta\beta\gamma,$$

se α è un $[n-2]$ unito, ed altre analoghe se fossero uniti o β , o γ , o δ .

Ognuna di queste proiettività è ciclica del 3.° ordine; quindi la corrispondenza **C** sulla curva Γ^n deve essere essa stessa ciclica del 3.° ordine, oppure del 6.° ordine.

La omografia (m) avrà oltre α un altro $[n-2]$ unito, che determina nella corrispondenza **C** della curva o due altri punti uniti, oppure una coppia di punti che si corrispondono in doppio modo. Il cubo della corrispondenza **C** determina nell'omografia (m) l'identità, e quindi **C**³ deve essere l'identità, oppure una **J**: perchè fosse identità gli altri due punti d'intersezione del secondo $[n-2]$ unito con la curva devono essere punti uniti della corrispondenza; perchè possa essere una **J**, quei punti debbono essere fra loro coniugati. Cosicchè la corrispondenza ciclica del 3.° ordine ha tre punti uniti, quella del 6.° ordine ha un sol punto unito, una coppia involutoria, ed un ciclo del 3.° ordine. Indicheremo queste corrispondenze singolari rispettivamente con le lettere **T** ed **S**.

13. Se la tetrade $\alpha\beta\gamma\delta$ è *armonica*, oltre alle proiettività dette in 10 e 11, potrà aversi:

$$\alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} \beta\alpha\gamma\delta,$$

oppure:

$$\alpha\gamma\beta\delta \overline{\wedge} \gamma\beta\delta\alpha, \quad \alpha\delta\beta\gamma \overline{\wedge} \delta\beta\gamma\alpha.$$

Le prime due proiettività hanno una coppia $\alpha\beta$ o $\gamma\delta$ che si corrisponde in doppio modo; quindi sono involuzioni iperboliche che hanno per elementi uniti,

gli elementi dell'altra coppia $\gamma\delta$ o $\alpha\beta$; perciò la corrispondenza della curva che è proiettata da questa involuzione ha due punti uniti, ed una coppia involutoria: e poichè il suo quadrato è proiettato da m secondo la identità, senza che essa stessa possa essere identità (chè altrimenti la corrispondenza sarebbe involutoria), la corrispondenza deve essere ciclica del 4.° ordine.

Le seconde due proiettività sono cicliche del 4.° ordine, quindi le corrispondenze potrebbero essere cicliche del 4.° ordine o cicliche dell'8.° ordine, ed avrebbero nei due $[n - 2]$ uniti dell'omografia ciclica (m) o due coppie involutorie o una coppia involutoria ed una coppia di punti uniti, non potendo avere tutti e quattro i punti uniti.

Ma ciclica dell'8.° ordine non può essere, perchè la sua quarta potenza, che è proiettata da m secondo l'identità di $[n - 2]$, avendo altri punti uniti, oltre i punti di contatto di $\alpha\beta\gamma\delta$ colla curva, deve essere essa stessa identità. Può dunque questa corrispondenza essere solamente ciclica del 4.° ordine. Il suo quadrato è proiettato da m secondo una involuzione quadratica, ed esso stesso, avendo per punti uniti i quattro punti contenuti negli $[n - 2]$ uniti della omografia, è una involuzione razionale **J**, che ha per coppie di punti le coppie di punti di contatto degli $[n - 2]$ $\alpha\beta, \gamma\delta$.

Queste corrispondenze si aggruppano con quelle ottenute dalle due precedenti proiettività, e noi le indicheremo in seguito con la lettera **Q**.

14. Se **C** è una corrispondenza qualsiasi di Γ^n singolare o non, e **J** una qualunque delle corrispondenze razionali di Γ^n , diversa da quella il cui sistema di assi possa proiettare la **C** secondo una omografia di $[n - 2]$, proiettando da uno m degli $[n - 3]_s$ di proiezione della **J**, tanto la **J** che la **C**, si avranno in (m) sovrapposte una identità ed una corrispondenza (2, 2). I quattro $[n - 2]$ uniti della corrispondenza (2, 2) proiettano o un punto unito di **C** o una coppia comune a **J** ed a **C**; quindi se gli elementi uniti di **C** sono k , le coppie comuni a **C** ed a **J** sono $4 - k$. Cioè:

*Le coppie di punti corrispondenti comuni a una corrispondenza univoca di Γ^n con k punti uniti ed a una corrispondenza razionale **J** sono $4 - k$.*

E viceversa; se le coppie comuni ad una **C** ed una **J** sono $4 - k$, i punti uniti di **C** sono k .

Teniamo inoltre presente che se **C**, **C**₁ sono due corrispondenze univoche sovrapposte, esse hanno tante coppie di elementi corrispondenti comuni, quanti sono i punti uniti del prodotto **C****C**₁⁻¹ o del prodotto **C**⁻¹**C**₁.

Applicando a due corrispondenze razionali **J**, poichè esse non possono avere coppie comuni, chè altrimenti coincidono, ne segue che:

Il prodotto di due involuzioni razionali è una corrispondenza priva di punti uniti.

Moltiplicando dunque una data corrispondenza razionale $\mathbf{J}$ per un'altra corrispondenza razionale $\mathbf{J}$ variabile si hanno infinite corrispondenze, prive di punti uniti; indicheremo una qualunque di queste corrispondenze col simbolo $\mathbf{E}$. Vedremo (n.° 20) che le involuzioni fondamentali $\mathbf{F}$ fanno parte di questo sistema di corrispondenze.

15. Riepilogando e ricordando il n.° 8: *Sopra una curva ellittica qualsiasi si hanno sempre due sistemi di corrispondenze univoche; le involuzioni razionali $\mathbf{J}$, le quali possono essere proiettate secondo una identità di $[n-2]$, o secondo una involuzione quadratica di $[n-2]$, e le corrispondenze prive di punti uniti $\mathbf{E}$, che sono sempre proiettate secondo una corrispondenza $(2, 2)$ ad eccezione di tre fra esse, le involuzioni fondamentali $\mathbf{F}$, che possono essere proiettate in infiniti modi secondo una involuzione quadratica di $[n-2]$. Sulle curve armoniche, oltre questi due sistemi di corrispondenze vi sono due altri sistemi di corrispondenze $\mathbf{Q}$ cicliche del 4.° ordine, l'uno inverso dell'altro, che possono essere proiettate secondo una involuzione di $[n-2]$, oppure secondo una omografia ciclica del 4.° ordine. Sulle curve equianarmoniche, oltre le corrispondenze $\mathbf{J}$ ed $\mathbf{E}$, vi sono quattro altri sistemi di corrispondenze singolari, a due a due inversi fra loro, dei quali una coppia sono di corrispondenze $\mathbf{T}$ cicliche del 3.° ordine, ed un'altra di corrispondenze $\mathbf{S}$ cicliche del 6.° ordine. Eccetto le involuzioni razionali $\mathbf{J}$, tutte le altre corrispondenze sono ellittiche ⁽¹⁾.*

(1) Se per rappresentare ogni punto di una curva ellittica di ordine n , si fa uso dell'integrale ellittico di 1.ª specie, di periodi ω, ω' , disteso sulla curva a partire da un punto singolare sino a quel punto, le corrispondenze univoche razionali $\mathbf{J}$ sono rappresentate dalla relazione:

$$u' \equiv -u + C, \quad (1)$$

ove C è una costante qualunque; le corrispondenze univoche $\mathbf{E}$ sono rappresentate dalla relazione:

$$u' \equiv +u + C. \quad (2)$$

Sulle curve ellittiche armoniche i due sistemi di corrispondenze singolari $\mathbf{Q}$ sono rappresentati dalle relazioni:

$$u' \equiv iu + C \quad (3)$$

$$u' \equiv -iu + C. \quad (4)$$

ove i rappresenta la radice quarta dell'unità, $\sqrt{-1}$.

Sulle curve ellittiche equianarmoniche i due sistemi di corrispondenze $\mathbf{T}$ cicliche del

§ 3. Proprietà del gruppo di corrispondenze univoche non singolari delle curve ellittiche.

16. Dati due $[n-3]$, m , m' della curva Γ^n le generatrici delle due rigate dell'ordine $n-2$ M_2^{n-2} , $M_2'^{n-2}$ che passano per ogni punto A_i della curva segano la curva in due altri punti A , A' , che sono punti corrispondenti di una corrispondenza ellittica $\mathbf{E}$.

Difatti, indicando con $\mathbf{J}(A A_i)$ la involuzione razionale individuata dalla coppia di punti $A A_i$, il prodotto

$$\mathbf{J}(A A_i) \mathbf{J}(A_i A') \equiv \mathbf{E}(A A').$$

Dalla quale relazione si ricava ancora:

$$\mathbf{J}(A A_i) \mathbf{E}(A A') \mathbf{J}(A A_i) \equiv \mathbf{J}(A_i A') \mathbf{J}(A A_i) \equiv \mathbf{E}(A' A),$$

e questa mostra che ogni corrispondenza $\mathbf{E}$ è trasformata nella sua inversa $\mathbf{E}^{-1}$ da qualunque corrispondenza razionale $\mathbf{J}$.

E quindi, se si tien fissa la coppia $A A'$, al variare di m , essa sarà proiettata sulla curva in coppie $B' B$, $C' C$, ... di punti corrispondenti della $\mathbf{E}^{-1}$; cioè saranno $A A'$, $B B'$, $C C'$, ..., tutte le coppie della corrispondenza $\mathbf{E}$.

Da ciò si ha il seguente teorema:

Una $\mathbf{E}$ è individuata da una sua coppia. E quindi;

Ogni $\mathbf{E}$ è in infiniti modi il prodotto di due $\mathbf{J}$; poichè ogni punto arbitrario A_i della curva Γ^n determina con $A A'$ rispettivamente le due involuzioni $\mathbf{J}(A A_i)$, $\mathbf{J}(A_i A')$ che danno per prodotto quella corrispondenza $\mathbf{E}(A A')$.

17. Volendo distinguere fra loro le corrispondenze di uno stesso sistema, apporremo al simbolo adottato un indice diverso. Essendo $\mathbf{J} \mathbf{J}_i \equiv \mathbf{E}$, si ha pure $\mathbf{J} \mathbf{E} \equiv \mathbf{J}_i$, ovvero $\mathbf{E} \mathbf{J}_i \equiv \mathbf{J}$, e quindi:

3.º ordine, inversi fra loro, sono rappresentati dalle relazioni:

$$u' \equiv \alpha u + C \quad (5)$$

$$u' \equiv \alpha^2 u + C, \quad (6)$$

ove α rappresenta una radice terza dell'unità; e i due sistemi di corrispondenze $\mathbf{S}$ cicliche del 6.º ordine sono rappresentati da:

$$u' \equiv -\alpha u + C \quad (7)$$

$$u' \equiv -\alpha^2 u + C. \quad (8)$$

Oltre di questi sistemi di corrispondenze non ve ne sono altri (vedi KLEIN, Mathematische Annalen, Bd. 15, pag. 279; SEGRE, *Corrispondenze univoche*, loc. cit., pag. 4).

Il prodotto di una corrispondenza razionale J per una corrispondenza ellittica E , o di una E per una J è una corrispondenza razionale J .

Si ha pure $J_1 J_2 J_3 \equiv J$, $J_1 J_2 J_3 J_4 \equiv E$, $E_1 E_2 \equiv E$, ecc.; cioè:

Il prodotto di un numero pari di corrispondenze razionali è una corrispondenza univoca E ; il prodotto di un numero dispari di corrispondenze razionali è pure una corrispondenza razionale; il prodotto di due o più corrispondenze ellittiche E è pure una corrispondenza ellittica E .

Si ha infine: *Il prodotto di più corrispondenze razionali J e di più corrispondenze ellittiche E è una J oppure una E , secondo che il numero dei fattori J compresi nel prodotto è dispari o pari (WEYR, Ueber, etc., loc. cit., n.º 15).*

Difatti sia il prodotto:

$$\underbrace{E E \dots E}_k \text{ volte} \underbrace{J J \dots J}_i \text{ volte} \underbrace{E E \dots E}_{k'} \text{ volte} \underbrace{J J \dots J}_{i'} \text{ volte} \underbrace{E E \dots E}_{k''} \text{ volte} \underbrace{J J \dots J}_{i''} \text{ volte},$$

ove per semplicità abbiamo trascurato gl'indici per distinguere le diverse corrispondenze; esso è equivalente, pel teorema precedente, a

$$\underbrace{E J J \dots J}_i \text{ volte} \underbrace{E J J \dots J}_{i'} \text{ volte} \underbrace{E J J \dots J}_{i''} \text{ volte}, \dots$$

il quale è pure equivalente a

$$\underbrace{J_1 J \dots J}_i \text{ volte} \underbrace{J_2 J \dots J}_{i'} \text{ volte} \underbrace{J_3 J \dots J}_{i''} \text{ volte} \equiv J_{\Sigma i \text{ volte}}$$

e quindi è una J o una E secondo che Σi è dispari o pari.

18. Se J , J_1 sono due assegnate corrispondenze razionali sarà il prodotto:

$$J J_1 J \equiv J_2,$$

cioè equivalente ad un'altra corrispondenza razionale J_2 , la quale è la trasformata di J_1 mediante J ; quindi:

Proiettando una involuzione razionale J_1 da uno $[n-3]_s$ p sulla curva si ha un'altra involuzione razionale J_2 ; oppure: se più coppie di punti di una curva ellittica 1^n sono contenute in $[n-2]$ che passano per un medesimo $[n-3]_s$ m della curva, queste saranno proiettate sulla curva da un $[n-3]_s$ p in coppie di punti, che sono pure contenute in $[n-2]$ che passano per un altro $[n-3]_s$ m' della curva.

I punti uniti della J_1 devono essere proiettati nei punti uniti della J_2 , e quindi:

Proiettando da un $[n-3]_s$ della curva i punti di contatto di una rigata razionale di ordine $n-2$ si hanno sulla curva quattro punti, le cui tangenti appartengono ad una medesima rigata razionale di ordine $n-2$, in generale diversa dalla prima.

La corrispondenza J_1 può essere proiettata nella corrispondenza J_2 in quattro modi differenti, e quindi vi sono quattro diversi sistemi di $[n-3]_s$, che proiettano le coppie di punti contenute in $[n-2]$ con m , nelle coppie di punti contenute in $[n-2]$ con m' .

Se A, B, C, D sono i punti uniti di J_1 e si suppone che la J_1 trasformi l'elemento unito A in uno qualunque degli altri tre, la J_1 sarà trasformata in sè stessa. E perciò: una corrispondenza razionale J_1 può essere proiettata in sè stessa da tre diversi sistemi di $[n-3]_s$, cioè da quelli che si appoggiano alle tre corde che congiungono uno dei punti uniti di J_1 agli altri tre.

19. Se AA', BB' sono due coppie di una corrispondenza E , le corde $AB', A'B$ sono generatrici di una medesima rigata razionale M_2^{n-2} . Difatti, la corrispondenza razionale J , individuata dalla coppia AB' , deve trasformare E nella sua inversa E^{-1} , e poichè già trasforma A in B' , dovrà trasformare A' in B ; quindi $A'B$ è una seconda coppia di $J(AB')$. Da ciò si ricava che ogni $[n-2]_s$ che passa per la corda AB' determina sulla curva un $[n-3]_s$ che sta in un altro $[n-2]$ insieme alla corda $A'B$. E si può anche dire:

Se AA', BB' sono due coppie qualunque di una corrispondenza univoca E , gli $[n-2]$ che passano per un $[n-4]_s$ e rispettivamente per le corde $AB', A'B$ si segano ulteriormente in un altro punto della curva, e quindi hanno in comune un $[n-3]_s$ della curva.

Per questa proprietà la corrispondenza ellittica E_1 , che è individuata dalla coppia di punti AB , avrà pure per coppia di punti omologhi $A'B'$; quindi ciascuna delle due corrispondenze E, E_1 trasforma l'altra in sè stessa, ed il loro prodotto è commutativo; si ha cioè:

$$E^{-1}E, E \equiv E_1.$$

Il prodotto di un numero qualunque di corrispondenze ellittiche E è sempre commutativo.

Dalla costruzione delle corrispondenze ellittiche E risulta pure:

Se un punto della corrispondenza ellittica E è unito, tutti i suoi punti sono uniti, e la E è una identità.

20. Sia AA' la coppia che individua la corrispondenza E ; proiettandola da uno degli $[n-3]_s$ che si appoggiano alla tangente in A' , se si indica

con A'' la proiezione di A sulla curva, sarà $A'A''$ un'altra coppia di $\mathbf{E}$, e quindi $AA'A''$ sono elementi che si corrispondono successivamente in $\mathbf{E}$. Se le tangenti in A, A' si appoggiano al medesimo sistema di $[n-3]_s$ della curva, con la costruzione precedente si troverebbe che A'' coincide con A , cioè che la coppia AA' è involutoria. Applicando in tal caso la costruzione della corrispondenza $\mathbf{E}$, data nel n.º 16, ogni altra coppia BB' che da essa si ottiene deve pure essere involutoria. Dunque:

Se gli elementi che individuano una $\mathbf{E}$ sono punti di contatto di una medesima rigata razionale M_2^{n-2} colla curva Γ^n , questa coppia è involutoria, e tutte le coppie della corrispondenza $\mathbf{E}$ sono involutorie.

E siccome al punto A si possono far corrispondere ciascuno dei tre altri punti di contatto della curva Γ^n con la rigata M_2^{n-2} che la tocca in A , possiamo concludere ciò che abbiamo affermato al n.º 14, che *al sistema delle corrispondenze ellittiche $\mathbf{E}$ appartengono le tre involuzioni fondamentali $\mathbf{F}$ della curva Γ^n ⁽¹⁾.*

Se A, B, C, D sono i quattro punti di contatto della curva con la rigata razionale M_2^{n-2} le tre involuzioni fondamentali sono $\mathbf{F}(AB), \mathbf{F}(AC), \mathbf{F}(AD)$, e per ciascuna di esse un'altra coppia è data dai rimanenti punti di contatto (n.º 11 e 18); quindi *ciascuna delle tre involuzioni fondamentali è il prodotto delle altre due.*

21. Se AA', BB' sono coppie di una $\mathbf{F}$ non solamente le coppie $AB', A'B$ appartengono ad una medesima corrispondenza razionale $\mathbf{J}$ che trasforma la $\mathbf{F}$ in sè stessa, ma anche (per la corrispondenza in doppio modo della coppia $BB')$ $AB, A'B'$ appartengono ad un'altra corrispondenza $\mathbf{J}$, che trasforma la $\mathbf{F}$ in $\mathbf{F}$. Quindi:

Ogni involuzione fondamentale $\mathbf{F} \equiv AA', BB'$ è trasformata in sè stessa da tutte le involuzioni razionali del tipo $(AB', A'B)$, e del tipo $(AB, A'B')$. Ovvero:

⁽¹⁾ Dalla relazione che rappresenta il sistema delle corrispondenze $\mathbf{E}$ si ottengono le tre involuzioni fondamentali quando alla costante si attribuiscono gli speciali valori:

$$\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega + \omega'}{2};$$

ove ω, ω' rappresentano i periodi delle funzioni ellittiche, e quindi esse sono rappresentate da:

$$u' = u + \frac{\omega}{2}, \quad u' = u + \frac{\omega'}{2}, \quad u' = u + \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Due coppie AA', BB' di una corrispondenza ellittica E individuano una involuzione razionale $I \equiv AB', A'B$ che trasforma la E nella sua inversa; e due coppie AA', BB' di una F individuano due corrispondenze razionali $I \equiv AB', A'B$ $I_1 \equiv AB, A'B'$ che la trasformano in sè stessa.

22. Il sistema delle corrispondenze E insieme all'identità ed alle tre involuzioni fondamentali, ed il sistema delle corrispondenze razionali involutorie I , sono legati fra loro dalle seguenti relazioni:

Ogni E trasforma un'altra E , nella stessa E . Ogni I trasforma una E nella sua inversa, e trasforma una F in sè stessa; ogni E trasforma una I in un'altra I , e solamente la F e la identità trasformano ciascuna I nella stessa I .

Perciò possiamo dire che il sistema delle E ed il sistema delle I sono per le curve ellittiche ciò che sono per le curve razionali un fascio di omografie unite e un fascio di involuzioni armoniche ad esse ⁽¹⁾.

Tutte le corrispondenze E ed I formano un gruppo, di cui un sottogruppo infinito è quello formato dalle sole E , e di questo un sottogruppo finito è quello formato dalle tre involuzioni fondamentali F ⁽²⁾.

§ 4. Teoremi diversi.

23. Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ è un n -gono gobbo semplice inscritto in Γ^n ed $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n$ sono i punti d'incontro della curva con gli $[n-2]$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ opposti ad $A_1 A_2 \dots A_n$, saranno $A_1 A'_1, A_2 A'_2, A_3 A'_3, \dots, A_n A'_n$ coppie di punti omologhi di una medesima E ⁽³⁾.

Difatti proiettando la coppia $A_1 A'_1$, che individua la E , dall' $[n-3]$ individuato dai vertici $A_3 A_4 \dots A_n$ dell' n -gono inscritto in Γ^n sulla curva, si hanno gli $[n-2]$ α_2, α_1 , i quali segano la curva in $A'_2 A_2$, e quindi sarà $A_2 A'_2$ un'altra coppia di E ; così si ragionerebbe per tutte le altre coppie.

Il primo n -gono è circoscritto al secondo.

Oppure, facendo uso della rappresentazione parametrica (n.º 15, nota), se $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono i parametri degli n punti $A_1, A_2, \dots, A_n$ ed $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$

(1) Vedi le mie *Lezioni sulle omografie binarie*, 2ª edizione, Napoli, Pellerano, 1889.

(2) Questi teoremi si possono tradurre in altrettanti teoremi sulle rigate individuate dalle corrispondenze ellittiche E . (Vedi n.º 26.)

(3) Questo teorema è stato enunciato solo per $n=3$ dal WEYR, loc. cit.

i parametri degli n punti $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$, si deve avere, come è noto,

$$\left. \begin{aligned} u_2 + u_3 + \dots + u_n &\equiv -u'_1 \\ u_1 + u_3 + \dots + u_n &\equiv -u'_2 \\ \cdot & \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} &\equiv -u'_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

da cui si ricava

$$u_i = u'_i + C \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad C = \frac{u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n}{n-1}). \quad (2)$$

24. Se $A_1 A'_1$ sono elementi di una coppia di una $\mathbf{F}$, anche $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3, \dots A_n A'_n$ sono coppie della medesima $\mathbf{F}$. In tal caso deve aversi:

$$\frac{u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n}{n-1} \equiv \frac{P}{2} \quad (P \equiv \omega, \omega', \omega + \omega'),$$

e quindi

$$u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n = \frac{n-1}{2} P.$$

Perciò; se n è dispari, gli n punti $A'_1, A'_2, \dots A'_n$ stanno in un $[n-2]$; se n è pari, non stanno in un $[n-2]$; ed allora trasformando le (1) mediante le (2) si ha pure:

$$u'_2 + u'_3 + \dots + u'_n = -u_1, \text{ ecc.,}$$

cioè l'ennagono $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ è pure circoscritto all'ennagono $A_1 A_2 \dots A_n$. Si ha quindi il teorema:

In una curva ellittica normale Γ^n di ordine pari gli n punti, che corrispondono ad n punti presi ad arbitrio sulla curva Γ^n in una involuzione fondamentale $\mathbf{F}$, formano un n -gono gobbo semplice inscritto e circoscritto a quello formato dai primi punti.

In particolare per $n = 4$.

Quattro punti presi ad arbitrio sopra una curva ellittica normale del 4.^o ordine ed i loro coniugati in una qualunque delle tre involuzioni fondamentali sono vertici di due tetraedri di MÖBIUS.

Sempre nell'ipotesi di n pari, indicando con $A''_1 A''_2 \dots A''_n$, $A'''_1 A'''_2 \dots A'''_n$, i coniugati dei medesimi punti $A_1 A_2 \dots A_n$ nelle altre due involuzioni fondamentali, i quattro ennagoni gobbi che risultano sono a due a due inscritti e circoscritti l'uno all'altro, e quindi il precedente teorema si completa nel modo seguente:

Se $A_1 \dots A_n$ sono n punti presi ad arbitrio sopra una curva ellittica normale di ordine pari, ed $A'_1 \dots A'_n$, $A''_1 \dots A''_n$, $A'''_1 \dots A'''_n$ sono i loro rispettivi coniugati nelle tre involuzioni fondamentali, questi gruppi di punti sono vertici di quattro n -goni, che a due a due formano sei coppie di n -goni circoscritti ed inscritti l'uno all'altro.

25. Ritornando ad n qualunque, se i punti $A_1 A'_1$ sono punti coniugati di una involuzione fondamentale F , e per essi tiriamo due corde che si appoggiano ad un medesimo $[n-3]_s$, questi incontrano la curva nei punti $A_2 A'_2$ di un'altra coppia della F ed anche le corde $A_1 A_2$, $A'_1 A'_2$ si appoggeranno ad un sistema di $[n-3]_s$ della curva (n.º 21). Abbiamo cioè due sistemi di $\infty^{n-3} [n-3]_s$ individuati dalle corde $A_1 A_2$, $A'_1 A'_2$. Per un $[n-4]_s$ p della curva passa un $[n-3]_s$ del primo ed uno del secondo sistema i quali segano la curva ulteriormente in due punti $A_3 A'_3$ che sono punti di una coppia di F , perchè gli $[n-2]_s$ $p A_1 A_2 A_3$, $p A'_1 A'_2 A'_3$ passano per l' $[n-3]_s$ $p A_1$ e proiettano la coppia $A_2 A'_2$ sulla curva in $A_3 A'_3$. Cosicchè per ogni $[n-4]_s$ arbitrario si individua una coppia $A_r A'_r$ di F .

Quindi se indichiamo con $A_4 A_5 \dots A_n$ gli $n-3$ punti della curva Γ^n che individuano l' $[n-4]_s$ saranno $A_3 A_4 A_5 \dots A_n$, $A'_3 A'_4 A'_5 \dots A'_n$ i due $[n-3]_s$ dei due sistemi; scambiando ora, in questi gruppi di punti, l'indice 3 rispettivamente con 4, 5, ... n , si ha che presi gli $n-2$ punti $A_3 A_4 \dots A_n$ che insieme ad $A_1 A_2$ stanno in uno stesso $[n-2]_s$, se, per i gruppi che si ottengono escludendo ogni volta un vertice A_r , si fa passare un $[n-3]_s$ che si appoggi alla corda $A_1 A'_2$, e quindi anche ad $A_2 A'_1$, questo segnerà la curva nell'elemento A'_r coniugato di A_r nella stessa involuzione fondamentale F . E quindi:

$n-1$ coppie arbitrarie di una involuzione fondamentale F , $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2$, ..., $A_r A'_r$, ..., $A_{n-1} A'_{n-1}$, individuano una n^{ma} coppia $A_n A'_n$, la quale è la proiezione di ciascuna delle coppie precedenti dall' $[n-3]_s$ individuato da $n-2$ punti presi da tutte le rimanenti $n-2$ coppie uno in ciascuno; oppure: scelti ad arbitrio $n-3$ elementi fra gli elementi delle $n-1$ coppie, ma in modo che due non siano coniugati, e conducendo per essi gli $[n-3]_s$ che si appoggiano alle corde, che congiungono un punto A_r di una delle due rimanenti ai punti A_s , A'_s dell'altra, questi segano la curva nella n^{ma} coppia.

Ovvero altrimenti:

$n-1$ coppie di una involuzione fondamentale F , $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3$, ..., $A_{n-1} A'_{n-1}$, individuano una n^{ma} coppia $A_n A'_n$ tale che, scelti ad arbitrio $n-3$ punti fra gli elementi delle coppie, ma in modo che due non siano coniugati,

$l'[n-3]_s$ che passa per essi e si appoggia alla corda che congiunge un punto A_r di una delle due rimanenti coppie ad un punto A_s dell'altra, e $l'[n-3]_s$ che passa per gli elementi coniugati di quelli e si appoggia alla corda $A_r A'_s$ si segano ulteriormente in un punto della n^{ma} coppia. Se il primo $[n-3]_s$ si appoggia ad $A_r A'_s$ ed il secondo ad $A_r A_s$, questi si segano nel punto della curva coniugato al precedente nella corrispondenza F .

Per $n=4$ si ha in particolare:

Se $A_1 A'_1, A_2 A'_2, A_3 A'_3$ sono tre coppie di una involuzione fondamentale di una quartica gobba ellittica, queste ne individuano una quarta $A_4 A'_4$, la quale è la proiezione di ognuna delle coppie date da una corda che congiunge due punti non coniugati delle altre due coppie; ovvero è la intersezione della curva con le corde che passano per A_3 (o per A'_3) e sono direttrici delle rigate razionali di ordine $n-2$ individuate da $A_1 A_2, A_1 A'_2$; e finalmente la corda direttrice della rigata razionale individuata da $A_1 A_2$ che passa per A_3 , e quella della rigata individuata da $A_1 A'_2$ che passa per A'_3 si segano in un punto della coppia $A_4 A'_4$.

26. L'ordine della rigata, le cui generatrici congiungono i punti omologhi di una corrispondenza ellittica E , si può ottenere dal numero delle generatrici che si appoggiano ad un $[n-3]_s$ della curva. Se questo ha comune colla curva i punti $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$, ad esso si appoggiano le rette che congiungono i punti P_i ($i=1, 2, \dots, n-2$) ai loro corrispondenti nella E e nella inversa E^{-1} , ed inoltre le rette che congiungono le quattro coppie comuni alla corrispondenza E ed alla J di cui quell' $[n-3]_s$ è un elemento di proiezione. Quindi: *La superficie rigata K_2^n formata dalle congiungenti, i punti omologhi di una corrispondenza ellittica E è dell'ordine $2n$.*

Questo numero si riduce alla metà quanto si tratta di una delle tre involuzioni fondamentali. Poichè le corde che congiungono i punti comuni all' $[n-3]_s$ ed alla curva Γ^n coi loro corrispondenti si riducono ad $n-2$, e la involuzione quadratica secondo cui è proiettata la F ha solamente due $[n-2]$ doppi, e quindi vi sono solo altre due generatrici che si appoggiano all' $[n-3]_s$ di proiezione fuori della curva. Perciò: *le rigate individuate dalle tre involuzioni fondamentali sono dell'ordine n* ⁽¹⁾.

(1) Delle rigate individuate dalle corrispondenze sulle curve ellittiche hanno a lungo trattato il sig. SEGRE (Atti R. Acc. di Torino, vol. 21, e Math. Ann., Bd. 24) ed in particolare, per $n=4$, HARNACK (*Ueber Darstellung der Raumcurve 4.0, 1. S. und ihres Sekantensystem durch doppelt periodische Funktionen* (Math. Ann., Bd. 12, pag. 72) e per $n=3$ (WEYR, *Ueber*, etc., loc. cit.).

§ 5. Poligoni inscritti in Γ^n .

27. Siano $1, 2, 3, \dots, 2m-1$ degli $[n-3]_s$ fissi di una curva ellittica normale Γ^n , ed X_1 un punto variabile della curva Γ^n ; questo punto sia proiettato dall' $[n-3]_s$ 1 in X_2 , e questo da 2 in $X_3, \dots$, e finalmente X_{2m-1} da $2m-1$ in X_{2m} , sarà $X_1 X_{2m}$ una coppia di una corrispondenza, che, essendo il prodotto di $2m-1$ J, è pure una J (n.º 17); e perciò la corda $X_1 X_{2m}$ sarà pure essa una generatrice di una superficie rigata M_2^{n-2} razionale dell'ordine $n-2$. Cosicchè:

Se un poligono semplice di $2m$ vertici, inscritto nella curva ellittica normale Γ^n di uno S_{n-1} , varia in modo che $2m-1$ suoi lati si appoggiano a $2m-1$ $[n-3]_s$ fissi della curva, il $2m$.º lato si appoggerà ad un sistema determinato di spazi siffatti della curva Γ^n . Oppure:

Se un poligono semplice di $2m$ vertici inscritto in Γ^n varia in modo che $2m-1$ suoi lati descrivono $2m-1$ rigate razionali dell'ordine $n-2$, il $2m$.º lato descriverà anch'esso una rigata razionale dello stesso ordine.

Fra questi poligoni ve ne sono 4 per i quali il lato $X_1 X_{2m}$ è tangente alla curva Γ^n , e quindi essi diventano poligoni di $2m-1$ vertici inscritti in Γ^n . Si ha quindi:

Dati in una curva Γ^n $2m-1$ $[n-3]_s$ arbitrarii si possono inscrivere alla curva quattro $(2m-1)$ -goni i cui lati si appoggiano rispettivamente ai $2m-1$ spazi fissi.

28. Se gli $[n-3]_s$ sono in numero di $2m$, i punti $X_1 X_{2m+1}$ sono corrispondenti in una E , e quindi X_1, X_{2m+1} o non coincidono mai o coincidono sempre; perciò:

Dati sopra una curva ellittica normale Γ^n di un S_{n-1} $2m$ spazi $[n-3]_s$, in generale non vi è nessuno $2m$ -gono semplice inscritto in essa i cui lati si appoggino rispettivamente ai $2m$ spazi dati; ma se ve n'è uno, ve ne sono infiniti.

Le diagonali $X_k X_l$ (per k ed l diversi fra loro ed $= 1, 2, 3, \dots, 2m$) del $2m$ -gono, se $k-l$ è un numero pari, descrivono una superficie rigata ellittica dell'ordine $2n$, e se $k-l$ è un numero dispari, descrivono una rigata razionale dell'ordine $n-2$; e quindi di tutte le $m(2m-1)$ corde, che congiungono a due a due i vertici di quel $2m$ -gono, m^2 descrivono delle rigate razionali dell'ordine $n-2$, ed $m(m-1)$ descrivono delle rigate ellittiche dell'ordine $2n$ ⁽¹⁾.

(1) Per ogni punto passano $2m-1$ corde, delle quali m descrivono rigate razionali ed $m-1$ descrivono rigate ellittiche, perciò in tutto si hanno m^2 corde nel primo caso ed $m(m-1)$ nel secondo.

29. Se i punti $X_1 X_2 \dots X_p$ di un p -gono inscritto in Γ^n si considerano, nell'ordine in cui si seguono, come elementi corrispondenti di $p - 1$ corrispondenze ellittiche $\mathbf{E}$, si ha:

Se $p - 1$ lati di un poligono semplice inscritto in Γ^n descrivono $p - 1$ rigate ellittiche dell'ordine $2n$, anche l'ultimo lato descriverà una rigata ellittica dell'ordine $2n$. Se, al variare di X_1 , succede che una volta X_{p+1} coincide con X_1 , ciò succederà sempre.

Tenendo conto che anche le diagonali di questo poligono descrivono delle rigate ellittiche, si ha:

Da p punti arbitrarii di una curva ellittica normale Γ^n di uno S_{n-1} sono determinate $\frac{p(p-1)}{2}$ rigate ellittiche K_2^{2n} , e vi sono infiniti poligoni inscritti alla curva Γ^n i cui lati sono generatrici delle medesime rigate.

Osserviamo in ultimo che se di $p - 1$ lati di un poligono variabile inscritto in Γ^n , alcuni descrivono delle rigate dell'ordine $n - 2$, e i rimanenti delle rigate dell'ordine $2n$, l'ultimo lato descriverà una rigata razionale dell'ordine $n - 2$ o ellittica dell'ordine $2n$, secondo che il numero delle rigate dell'ordine $n - 2$, descritte dai lati del poligono, sono dispari o pari.

§ 6. Corrispondenze cicliche e poligoni di Steiner.

30. Se $X_1 X_2 \dots X_m$ sono punti distinti che si corrispondono successivamente in una corrispondenza ellittica $\mathbf{E}$, al variare di X_1 la corda $X_1 X_{m+1}$ descrive in generale una rigata ellittica K_2^{2n} dell'ordine $2n$. Quindi se una volta coincidono X_1 e X_{2m+1} , coincideranno sempre ed allora la corrispondenza è ciclica dell'ordine m .

31. Ogni punto di Γ^n appartiene ad un unico ciclo e lo determina.

Se i punti di un ciclo si proiettano da un arbitrario $[n - 3]_s$ della curva sulla curva stessa, si avranno i punti di un ciclo della corrispondenza inversa $\mathbf{E}^{-1}$ (vedi n.º 16), e quindi scrivendolo nell'ordine inverso si ha un ciclo di $\mathbf{E}$. Si faccia variare la proiezione del primo punto del gruppo cambiando l' $[n - 3]_s$, e si otterranno tutti i cicli della corrispondenza $\mathbf{E}$. Qualora l' $[n - 3]_s$ proietti un punto del ciclo in un punto del ciclo stesso, tutto il ciclo si proietterà nel suo inverso.

Scelti due cicli qualunque $X_1 X_2 \dots X_m, Y_1 Y_2 \dots Y_m$ si deve, proiettando X_1 in Y_m , ottenere da X_2 il punto Y_{m-1} , da X_3 il punto Y_{m-2} , ecc.; ov-

vero proiettando X_1 in Y_{m-1} ottenere $Y_{m-2}, Y_{m-3}, \dots$ da $X_2, X_3, \dots$; quindi in m modi diversi si può ottenere il secondo ciclo come proiezione del primo. Perciò le m^2 congiungenti i punti di due cicli sono ad m ad m le generatrici di m rigate razionali dell'ordine $n - 2$. Ovvero:

Le coppie di punti, presi da due cicli differenti di una medesima corrispondenza ciclica E dell'ordine m , che hanno la somma degli indici congrua ad un numero costante, sono coniugati in una medesima involuzione razionale J . E quindi: I punti di due cicli di una medesima corrispondenza ciclica dell'ordine m si possono considerare come coniugati in m diverse involuzioni razionali.

32. Se scegliamo, come assi di queste m involuzioni, gli m $[n - 3]_s$ della curva Γ^n che passano per un medesimo arbitrario $[n - 4]_s$, O della curva, questi segheranno ordinatamente Γ^n in altri punti $Z_1 Z_2 \dots Z_m$, che, presi nell'ordine considerato, sono elementi di un ciclo di E . Infatti per l'operazione fatta si ha il seguente quadro, in cui nella stessa colonna stanno gli elementi contenuti nello stesso $[n - 2]$.

O			O			O		
X_1	$X_2 \dots$	X_m	X_1	$X_2 \dots$	X_m	X_1	$X_2 \dots$	X_m
Y_m	$Y_{m-1} \dots$	Y_1	Y_{m-1}	$Y_{m-2} \dots$	$Y_m, \dots$	Y_1	$Y_m \dots$	Y_2
Z_1	$Z_1 \dots$	Z_1	Z_2	$Z_2 \dots$	Z_2	Z_m	$Z_m \dots$	Z_m

cioè per l' $[n - 3]_s$ OZ_1 passano gli $[n - 2]$ $OZ_1 X_1 Y_m$, $OZ_1 X_2 Y_{m-1}, \dots$; per l' $[n - 3]_s$ OZ_2 passano gli $[n - 2]$ $OZ_2 X_1 Y_{m-1}$, $OZ_2 X_2 Y_{m-2}, \dots$ ecc.; quindi gli $[n - 2]$ $OZ_1 X_1 Y_m$, $OZ_2 X_1 Y_{m-1}, \dots$ passano per l' $[n - 3]_s$ OX_1 e proiettano il ciclo $Y_m Y_{m-1} \dots Y_1$ nel ciclo $Z_1 Z_2 \dots Z_m$. Lo stesso si dirà per gli $[n - 3]_s$ OX_2 , $OX_3, \dots$, e per gli $[n - 3]_s$ OY_m , $OY_{m-1}, \dots$, ecc. Dunque, i tre cicli sono tali che ciascuno è la proiezione in m modi di un altro mediante gli $[n - 3]_s$ che passano per uno di ∞^{n-4} $[n - 4]_s$ della curva e per un punto del terzo ciclo.

Si noti che al variare di O il terzo ciclo $Z_1 Z_2 \dots Z_m$; varia sulla curva; sicchè la proprietà precedente si riferisce a tre cicli qualsiasi della corrispondenza in esame. Cioè dati tre cicli arbitrarii della corrispondenza E vi sono ∞^{n-4} $[n - 4]_s$ che congiunti con due punti qualsiasi, presi da due differenti cicli dei tre, danno un $[n - 2]$ che passa per un punto del terzo ciclo; questi appartengono ad m sistemi diversi.

Analogamente, dati i tre cicli $X_1 \dots X_m$, $Y_1 \dots Y_m$, $Z_1 \dots Z_m$ se si scelgono

gli $m [n-3]_s$ in modo che passino per il punto Z_1 e per un medesimo $[n-5]_s$, P arbitrario, questi segheranno la curva in m punti $V_1 V_2 \dots V_m$ che appartengono ad un altro ciclo di E ; ed i quattro cicli sono tali che gli $[n-2]$ che passano per tre punti presi fra tre cicli diversi e per uno di $\infty^{n-5} [n-5]_s$, P , segano la curva in un punto del rimanente ciclo.

In generale: Siano $r-1$ cicli della corrispondenza E scelti ad arbitrio, gli $[n-2]$, che passano per $r-1$ punti presi in tutti questi cicli, uno in ciascuno, e per uno arbitrario $[n-r-1]_s$, segano la curva in punti che appartengono ad un r^{mo} ciclo della stessa corrispondenza E . E questi cicli sono tali che gli $[n-2]$, che passano per uno di $\infty^{n-r-1} [n-r-1]_s$ e per $r-1$ punti presi fra cicli diversi dai primi e diversi tra loro, passano per un punto dell' r^{mo} ciclo.

Questi r cicli formano un gruppo che diremo gruppo connesso di r^{mo} ordine della corrispondenza E .

Per $r = n-1$ si ha: Dati $n-2$ cicli arbitrarii di una corrispondenza E ciclica dell'ordine m , gli $[n-2]$, che passano per $n-2$ punti presi in questi cicli, uno in ciascuno, e per un arbitrario punto, segano la curva in m punti di un $(n-1)^{\text{mo}}$ ciclo della corrispondenza E . E per $r = n$: Dati $n-1$ cicli arbitrarii di una corrispondenza E , ciclica dell'ordine m , gli $[n-2]$, che passano per $n-1$ punti presi in tutti questi cicli, uno in ciascuno, segano la curva, ulteriormente in uno degli m punti di un n^{mo} ciclo.

33. Indichiamo gli rm punti di un gruppo connesso di r^{mo} ordine con numeri progressivi, come risulta dal presente quadro:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & r+1 & 2r+1 & \dots & (m-1)r+1 \\
 2 & r+2 & 2r+2 & \dots & (m-1)r+2 \\
 3 & r+3 & 2r+3 & \dots & (m-1)r+3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 r & 2r & 3r & \dots & mr,
 \end{array}$$

nel quale gli elementi della stessa orizzontale appartengono allo stesso ciclo. E inoltre $1'$ sia l' $[n-r-1]_s$ d'intersezione colla curva di un $[n-2]$ che passa per $1, 2, 3, \dots, r$; $2'$ sia un altro $[n-r-1]_s$ d'intersezione colla curva di un $[n-2]$ che passa per $2, 3, 4, \dots, r, (r+1)$; $3'$ sia un terzo $[n-r-1]_s$ dato da un $[n-2]$ che passa per $3, 4, 5, \dots, (r+1), (r+2)$; ecc., e finalmente r' sia un ultimo $[n-r-1]_s$ dato da un $[n-2]$ che passa per $r, (r+1), (r+2), \dots, (2r-1)$. Pel teorema precedente si ha che l' $[n-2]$

che passa per $1'$ e per $(r+1), (r+2), \dots (2r-1)$ passa per un altro punto dell' r^{mo} ciclo e questo sia $2r$, l' $[n-2]$ che passa per $2'$ e per $(r+2), (r+3), \dots 2r$ passa per un altro punto del primo ciclo, e questo sia $2r+1$; e così seguitando, le facce di dimensione $r-1$ del poligono semplice $1\ 2\ 3 \dots r\ m$, che passano per r vertici consecutivi, e di cui la somma degli indici dei vertici è congrua al numero r^2 , sono contenute in $[n-2]$ che passano per un medesimo degli $[n-r-1]_s$ $1', 2', \dots, r'$. Ciò posto se, tenendo fissi gli $[n-r-1]_s$ $1', 2', \dots, r'$, si fanno variare i vertici $1, 2, 3, \dots, r-1$ del poligono, cambia il poligono, perchè si passa da un gruppo connesso di r cicli ad un altro gruppo connesso di r cicli, ma non mutano le condizioni a cui soddisfaceva il primo. Quindi si ha il teorema:

Dati r $[n-r-1]_s$ della curva Γ^n , se esiste un poligono semplice inscritto a questa e di ordine rm , tale che le successive facce di dimensione $r-1$ si appoggino rispettivamente a quegli spazi fissi, esisteranno ∞^{r-1} di poligoni siffatti.

Per $r = n-1$ si ha:

Dati $n-1$ punti della curva Γ^n , se esiste un poligono semplice inscritto a questa curva, e di ordine $(n-1)m$, tale che le successive facce di dimensione $n-2$ passino costantemente per quei punti fissi, esisteranno ∞^{n-2} di poligoni siffatti.

Per $r = 2$, si ha il noto teorema di STEINER, esteso ai poligoni inscritti in una curva normale ellittica di ordine n di uno S_{n-1} :

Dati 2 $[n-3]_s$ della curva Γ^n , se esiste un poligono semplice di $2m$ lati inscritti nella curva e tale che i suoi lati si appoggino rispettivamente ai 2 spazi dati, esisteranno ∞^1 di questi poligoni siffatti.

34. Se in quanto si è detto al n.° 31 si assume come $[n-3]_s$ di proiezione un $[n-3]_s$ che tocca la curva Γ^n in X_r , il gruppo $X_r X_{r+1} X_{r+2} \dots$ sarà proiettato in $X_r X_{r-1} X_{r-2} \dots$, e quindi le corde $X_{r+1} X_{r-1}, X_{r+2} X_{r-2}, \dots$ sono tutte generatrici di una medesima rigata dell'ordine $n-2$.

Per m dispari, gli m punti di un ciclo si accoppiano in $\frac{m-1}{2}$ coppie che appartengono ad una $\mathbf{J}$, nella quale un punto del ciclo è punto doppio. Oppure: ogni elemento del ciclo è elemento doppio di una $\mathbf{J}$ di cui sono elementi coniugati gli elementi del ciclo equidistanti da esso.

Ogni punto del ciclo con la sua tangente determina una rigata razionale dell'ordine $n-2$, di cui la varietà degli $[n-3]_s$ direttori proietta il ciclo in sè stesso; e quindi: Conducendo per ogni $[n-4]_s$ della curva Γ^n gli $[n-3]_s$

che si appoggiano alle m tangenti nei punti di un ciclo si ottengono nell'intersezioni colla curva tutti i cicli della $\mathbf{E}$.

Per n pari, l'elemento opposto ad X_r si proietterà in sè stesso, e quindi sarà un altro punto di contatto della rigata di ordine $n - 2$ colla curva Γ^n . Inoltre le coppie di lati opposti dell' n -gono $X_1 X_2 \dots X_m$ sono generatrici di una medesima rigata.

Quindi:

Per m pari due elementi opposti del ciclo sono elementi doppi di una $\mathbf{J}$ di cui sono elementi coniugati gli elementi che equidistano da ciascuno di essi. Oppure: gli m punti si accoppiano in $\frac{m}{2}$ modi in $\frac{m}{2}$ coppie di una $\mathbf{J}$, ed in $\frac{m}{2}$ modi in $\frac{m-2}{2}$ coppie di un'altra $\mathbf{J}$ di cui i rimanenti punti opposti sono punti doppi.

Conducendo per ogni $[n - 4]_s$ della curva gli $[n - 3]_s$ che si appoggiano alle $\frac{m}{2}$ coppie di tangenti nei punti opposti, ed alle $\frac{m}{2}$ coppie di lati opposti del ciclo si hanno tutti gli altri cicli della $\mathbf{E}$.

Siccome ogni potenza di una corrispondenza ciclica $\mathbf{E}$ dell'ordine m è pure una corrispondenza ciclica, e sarà dello stesso ordine, se l'esponente della potenza è primo con m , di ordine sottomultiplo per tutti gli altri esponenti si ha:

Coi punti di un ciclo di ordine m si possono fare tanti cicli diversi dello stesso ordine quanti sono i numeri primi con m e minori di m .

Gli elementi opposti di un ciclo di ordine pari sono coniugati in una medesima involuzione fondamentale.

Napoli, agosto 1890.