Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations et remarques relatives aux Nos 2389 et 2435 des A. N.

Par M. O. Callandreau à Paris.

Mon objet est d'établir pour l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots) x = 0$$

les résultats que M. H. Bruns a obtenus au moyen d'une analyse remarquable dans le No. 2533 en considérant :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t) x = 0.$$

Je rappelle que cette équation s'est présentée dans les recherches de M. Gylden » Sur la théorie des perturbations « et a été ramenée par lui, au moyen d'approximations convenables, à l'équation de Lamé. M. A. Lindstedt l'a envisagée directement et a indiqué la forme de l'intégrale de cette équation et de plusieurs autres systèmes analogues dans son travail: » Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. « Enfin, M. Bruns a démontré, qu'une intégrale particulière pouvait en effet être mise sous la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{imnt} e^{int},$$

où m est une quantité donnée par une équation de forme remarquable :

$$\sin^2 \pi m = \text{fonction holomorphe de } a_0 \text{ et } a_1,$$

les coefficients C étant pareillement fonctions holomorphes de a_0 , a_1 et m .

A l'égard de l'équation plus générale (1), qui s'est présentée à M. W. Hill dans un mémoire important » On the part of the motion of the lunar perigee which is a fonction of the mean motions of the sun and moon. « Cambridge 1877, on peut établir des résultats tout semblables qui étaient à prévoir d'après les formules mêmes de M. Hill.

1. Les coefficients de l'équation différentielle (1) étant holomorphes pour toutes les valeurs finies de t , il en sera de même de l'intégrale générale :

$$x_0 f(t) + x'_0 \varphi(t),$$

x_0 , x'_0 valeurs initiales de x et de sa dérivée, $f(t)$ et $\varphi(t)$ séries convergentes pour toutes les valeurs de t et des a ; d'après la forme particulière de (1), $f(t)$ sera de plus une fonction paire, $\varphi(t)$ une fonction impaire.

2. Une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques a toujours une intégrale $F(t)$ telle que :

$$F(t+2\pi) = \mu F(t).$$

C'est ce que M. Mittag-Leffler établit ainsi (Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences Tome 90, page 299) :

Soit $\psi(t)$ une intégrale quelconque, alors $\psi(t+2\pi)$, $\psi(t+4\pi)$. . . sont aussi des intégrales et l'on a par conséquent :

$$\psi(t+2m\pi) = A_1 \psi(t) + A_2 \psi(t+2\pi) + \dots + A_m \psi[t+2(m-1)\pi]$$

où l'on peut toujours supposer A_1 différent de 0 et m inférieur ou au plus égal à l'ordre de l'équation différentielle; prenant alors :

$$F(t) = \psi[t+2(m-1)\pi] + \mu_1 \psi[t+2(m-2)\pi] + \dots + \mu_{m-1} \psi(t),$$

la condition $F(t+2\pi) = \mu F(t)$ sera remplie, si l'on choisit les μ de sorte que :

$$\mu = \frac{A_1}{\mu_{m-1}} = \frac{A_2 + \mu_{m-1}}{\mu_{m-2}} = A_m + \mu_1,$$

ce qui est toujours possible. Posant :

$$\mu = e^{-2i\pi m},$$

la fonction :

$$e^{-imt} F(t)$$

deviendra une fonction périodique.

3. L'intégrale $F(t)$ est comme $f(t)$, $\varphi(t)$ développable en série convergente pour toutes les valeurs de t , et la fonction $e^{-imt} F(t)$ qui est périodique est par suite développable sous la forme :

$$\sum_{-\infty, n}^{+\infty} C_n e^{int}.$$

4. L'intégrale $F(t)$ s'exprime nécessairement en fonction linéaire de $f(t)$ et $\varphi(t)$, soit:

$$F(t) = \alpha f(t) + \beta \varphi(t),$$

on trouve, en considérant cette équation et sa dérivée prise par rapport à t et faisant $t = 0$,

$$\alpha = F(0) \quad \beta = F'(0),$$

d'où

$$F(t) = F(0) f(t) + F'(0) \varphi(t).$$

On en déduit aussitôt:

$$\frac{F(2\pi) + F(-2\pi)}{2F(0)} = f(2\pi) = \cos 2\pi m.$$

C'est l'équation remarquable qui fournit l'expression de $\sin^2 \pi m$ en série toujours convergente des α . m peut être supposé dès lors connu.

5. Je cherche $F'(0)$. De:

$$F(2\pi) = F(0) f(2\pi) + F'(0) \varphi(2\pi),$$

$$F(-2\pi) = F(0) f(-2\pi) - F'(0) \varphi(2\pi),$$

on tire:

$$F'(0) \varphi(2\pi) = \frac{F(2\pi) - F(-2\pi)}{2} = i \sin 2\pi m F(0),$$

par suite:

$$F(t) \varphi(2\pi) = F(0) [\varphi(2\pi) f(t) + i \sin 2\pi m \varphi(t)].$$

$F(t)$ se présente donc, à un facteur constant près comme une fonction holomorphe de t , des α et de m ; il en est de même de la fonction périodique $e^{-imt} F(t)$ et les coefficients du développement:

$$e^{-imt} F(t) = \sum_{-\infty, n}^{+\infty} C_n e^{int}$$

étant donnés par la formule:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} F(t) e^{-int} dt$$

seront encore des fonctions holomorphes de m et des α .

6. Les résultats précédents offrent un intérêt particulier à cause de leur simplicité, mais ils se rattachent à

une théorie plus générale, celle de l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques qui a fait le sujet de plusieurs travaux.*)

Considérons pour la plus grande simplicité une équation différentielle du second ordre à coefficients périodiques, supposons-les seulement holomorphes en t , cherchons l'intégrale particulière:

$$F(t) = \alpha f(t) + \beta \varphi(t)$$

telle que:

$$F(t+2\pi) = \mu F(t);$$

on sait qu'elle existe certainement. Il faut pour cela qu'on ait:

$$\alpha f(t+2\pi) + \beta \varphi(t+2\pi) = \mu [\alpha f(t) + \beta \varphi(t)].$$

Or on a, a, b, a', b' étant des constants:

$$(A) \quad \begin{aligned} f(t+2\pi) &= a f(t) + b \varphi(t), \\ \varphi(t+2\pi) &= a' f(t) + b' \varphi(t); \end{aligned}$$

substituant dans la condition précédente qui doit devenir une identité, on égale à zéro les coefficients de $f(t)$ et $\varphi(t)$ d'où résultent les deux équations:

$$\begin{aligned} (a-\mu) \alpha + a' \beta &= 0, \\ b \alpha + (b'-\mu) \beta &= 0, \end{aligned}$$

et l'équation qui détermine μ est:

$$\begin{vmatrix} a-\mu & a' \\ b & b'-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplie-t-on ce déterminant par le déterminant formé avec les valeurs particulières de $f(t)$, $\varphi(t)$ qui sont les coefficients des quantités a, b, a', b' dans les équations servant à déterminer ces quantités, l'équation en μ aura tous ses coefficients holomorphes par rapport aux paramètres entrant dans l'équation différentielle et α, β seront proportionnelles à des fonctions holomorphes des mêmes paramètres et de μ . Ainsi, faisons pour déterminer a, b, a', b' , $t = 0$ et $t = -2\pi$ dans les équations (A), le déterminant formé avec les valeurs particulières de $f(t)$, $\varphi(t)$ sera:

$$\begin{vmatrix} f(0) & f(-2\pi) \\ \varphi(0) & \varphi(-2\pi) \end{vmatrix},$$

et l'équation en μ deviendra:

$$\begin{vmatrix} f(2\pi) - f(0)\mu & \varphi(2\pi) - \varphi(0)\mu \\ f(0) - f(-2\pi)\mu & \varphi(0) - \varphi(-2\pi)\mu \end{vmatrix} = 0;$$

on retrouvera ainsi les résultats obtenus dans le cas de l'équation (1).

*) Voir: M. Floquet: «Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Annales de l'Ecole normale, Février 1883.

Je me propose d'examiner les autres équations différentielles considérées par M. Lindstedt.

A l'égard de la Note publié dans le No. 2389: »Contribution à l'application des fonctions elliptiques à l'Astronomie«; il ne me paraît pas sans intérêt de faire remarquer que la forme de développement considérée coïncide avec celle de Jacobi: voir Scheibner, »Ueber einige Arbeiten Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie,« No. 2444. Dans le No. mentionné je me suis occupé de l'intégration dans le cas d'un tel développement.

Dans le No. 2435 je dois rectifier l'indication donnée p. 165 au sujet de la détermination des éléments moyens: on pourrait croire que les valeurs des constants arbitraires calculées en faisant usage de la méthode des perturbations relatives de M. Gylden coïncident avec les valeurs des constantes arbitraires calculées à l'ordinaire; c'est ce qui n'a pas lieu à cause de la nature des formules de représentation pour $\frac{\cos}{\sin} \mu \varepsilon$.

Equatorial Observations of Comet 1882 I (Wells)

made at the Orwell Park Observatory.

1882	M.T.Greenw.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Comp.	α app.	$\log p.\Delta$	δ app.	$\log p.\Delta$	*
Mar. 24	11 ^h 18 ^m 5 ^s	-2 ^m 27 ^s 21	-0' 58" 9	4.4	18 ^h 2 ^m 48 ^s 42	9.649 _n	+36° 2' 42" 0	0.781	1
26	11 13 53	+3 44.02	+3 0.9	8.8	18 6 23.90	9.656 _n	37 13 47.7	0.776	2
31	10 0 55	-2 38.74	+6 2.1	8.8	18 15 56.56	9.642 _n	40 24 49.0	0.825	3
Apr. 1	10 51 42	-3 42.94	-7 10.0	7.7	18 18 4.29	9.677 _n	41 7 22.7	0.768	4
6	9 54 49	+3 26.19	-3 37.5	8.8	18 29 8.35	9.676 _n	44 46 24.1	0.805	5
7	10 5 25	-2 15.43	-0 4.6	8.8	18 31 36.62	9.691 _n	45 33 54.4	0.788	6
8	10 29 47	-1 58.27	-10 19.0	8.8	18 34 11.02	9.711 _n	46 22 44.6	0.753	7
10	10 58 55	-1 23.16	-1 9.2	8.8	18 39 34.28	9.735 _n	48 5 13.3	0.697	8
11	12 7 56	-2 3.95	+0 31.5	8.8	18 42 32.49	9.733 _n	48 56 52.7	0.563	9
14	10 54 55	-2 36.73	+0 34.6	8.8	18 51 39.57	9.766 _n	51 34 11.2	0.671	10
15	10 15 26	+3 8.38	-4 49.8	8.8	18 54 57.68	9.760 _n	52 27 53.7	0.727	11
18	11 53 37	-0 39.37	-5 46.3	8.8	19 6 33.09	9.800 _n	55 23 48.6	0.500	12
19	10 15 12	-3 12.76	+5 51.0	8.8	19 10 29.13	9.800 _n	56 19 4.1	0.707	13
20	9 52 32	-3 12.97	-7 2.5	8.8	19 14 54.61	9.800 _n	57 18 4.7	0.729	14
22	10 56 18	-1 41.78	-7 45.5	8.8	19 25 5.08	9.852 _n	59 23 10.2	0.597	15
24	10 30 40	+2 32.90	+4 33.6	8.8	19 36 29.87	9.871 _n	61 26 56.6	0.638	16
26	10 2 56	+3 21.64	-1 36.6	8.8	19 49 52.73	9.883 _n	63 31 59.9	0.683	17
27	11 37 6	-2 10.55	+10 8.6	8.8	19 58 4.05	9.929 _n	64 39 25.2	0.449	18
30	10 30 33	+4 22.69	-3 43.4	8.8	20 25 33.38	9.958 _n	67 42 59.9	0.629	19
May 1	10 57 42	+7 3.16	-6 32.2	6.6	20 37 3.07	9.989 _n	68 44 14.6	0.572	20
2	12 9 57	+1 51.76	-3 34.7	2.2	20 50 14.56	0.021 _n	69 45 12.3	0.348	21
4	10 39 1	-2 23.20	-3 44.7	8.8	21 18 38.99	0.013 _n	71 29 19.3	0.650	22
10	11 22 43	+1 54.77	+2 13.0	8.8	23 26 15.11	0.015 _n	74 36 38.1	0.724	23
11	12 14 40	+4 42.14	-6 48.6	8.8	23 52 29.63	0.058 _n	74 36 49.9	0.677	24
12	10 11 8	-0 0.16	+1 41.6	8.8	0 15 41.46	9.680 _n	74 26 32.3	0.831	25
13	10 55 57	+1 21.47	-8 2.3	8.8	0 41 16.35	9.772 _n	74 4 4.4	0.820	26
15	11 4 52	+2 29.50	+5 52.8	8.8	1 27 25.27	9.607 _n	72 49 19.0	0.844	27
16	12 20 49	-4 21.01	+3 59.9	8.8	1 49 2.39	9.814 _n	71 54 55.7	0.811	28
17	10 49 23	+7 36.96	-0 48.5	8.8	2 6 35.88	9.161 _n	70 58 57.5	0.868	29
18	10 43 4	+3 35.33	-0 33.6	8.8	2 23 34.60	8.677 _n	69 52 23.6	0.876	30
20	11 7 34	-3 26.31	+2 31.7	8.8	2 52 57.82	8.741 _n	67 19 6.2	0.887	31
21	10 50 41	-0 46.61	-0 7.2	8.8	3 5 11.49	8.655	65 56 14.8	0.892	32
22	10 38 16	+7 40.19	+0 30.7	4.4	3 16 12.38	9.059	64 28 48.7	0.896	33
23	12 0 4	+0 49.13	-2 2.5	8.8	3 26 44.57	9.184 _n	62 51 21.1	0.900	34
24	11 21 46	-5 18.03	-5 47.0	3.3	3 35 26.35	7.547 _n	61 18 7.3	0.910	35
25	11 9 45	+2 36.81	-5 33.9	8.8	3 43 9.42	8.662	59 39 59.0	0.914	36
26	10 56 42	+0 38.03	-9 33.7	8.8	3 50 42.66	8.972	57 58 57.3	0.917	37
27	11 10 19	+3 35.33	+0 40.7	8.8	3 57 24.74	8.767	56 13 7.7	0.923	38
30	11 56 27	-1 25.94	+3 40.4	8.8	4 14 10.55	8.714 _n	50 37 52.3	0.935	39
31	11 10 4	-1 53.42	-2 49.6	8.8	4 18 40.07	8.800	48 51 5.3	0.937	40
June 1	10 47 30	-0 36.61	+3 29.4	5.5	4 22 53.65	9.054	46 47 5.1	0.936	41
3	10 34 55	+2 50.95	+0 48.9	7.7	4 30 35.47	9.118	+42 35 39.6	0.938	42