SULLA RESISTENZA VIVA DELLE SPRANGHE DI FERRO;
STUDI DEL DOTT. PIERO DONNINI.

Chiunque abbia avuto agio od occasione di considerare anche per poco i fenomeni, che soglion presentare i sistemi urtati, ancora nei casi più frequenti, non si meraviglierà che essi, come osserva il Prof. De Saint-Venant, sieno per lungo tempo rimasti allo stato presso che di puri enigmi, e che soltanto ai nostri tempi l'analisi sia giunta a ridurli sotto il proprio dominio. È ben vero che alle relative indagini hanno aperto primi la strada D. Bernoulli, Eulero, D'Alembert, Lagrangia e tutti quegli altri insigni geometri, da cui per oltre un secolo è stato successivamente preso a trattare il problema delle corde e delle lamine vibranti. Ma l'onore d'aver razionalmente investigato in alcuni casi la natura e gli accidenti del moto vibratorio, generato da una massa estranea al corpo vibrante, e con esso oscillante, appartiene interamente, se io non m'inganno, prima a Navier, indi a Poncelet e finalmente allo stesso ingegner De Saint-Venant.

Nè con questo io intendo fare stima men che giusta dei bei lavori di Tredgold e di Eaton Hodgkinson; i pregi e l'utilità dei quali non potrebbero esser revocati in dubbio da chicchessia: tanto più che taluni dei risultati, a cui i detti ingegneri son giunti, si accordano assai bene con quelli, che derivano dalla teoria iniziata dal Navier. Solamente parendomi che questi recenti progressi possano rannodarsi anche essi agli altri molti, di cui la scienza va debitrice alla scuola, illustrata dai grandi matematici ricordati di sopra, è ben naturale che io nomini qui a preferenza il Navier e coloro, che ne hanno sviluppato e perfezionato le dottrine: mentre tanto egli che gli altri due sono venuti a capo dei problemi rispettivamente propostisi, senza discostarsi dalle tradizioni razionali di quella scuola.

Se non che le formule, a cui i detti autori giunsero, ritraendo molto della natura del fenomeno, di cui servono a riprodurre analiticamente le fasi, sono estremamente complesse; di guisa che assai poco vien fatto d'avvantaggiarsene nei suoi quotidiani bisogni la pratica: la quale ha d'uopo di procedimenti semplici, e nel caso presente in ispecie è facile rendersi ragione del molto partito, che essa potrebbe ricavare da qualche semplice relazione, fosse pure soltanto approssimata, la quale collegasse gli spostamenti del punto o dei punti del sistema urtato, che ricevono direttamente l'azione del corpo urtante, alle velocità di quest'ultimo. Naturalmente lasciando il problema in tutta la sua generalità, non si saprebbe così *a priori* intravedere la possibilità di giungere a qualche pratico risultamento; e ci sarebbe da restare molto perplessi anche nella scelta della via da battere. Ma la cosa muta aspetto quando si restringa la soverchia latitudine della quistione; primo col limitare le indagini ai solidi prismatici, di lunghezza per es. assai notevole rispetto alle altre due dimensioni, i quali sieno appoggiati od incastrati od altrimenti come che siasi ritenuti alle loro estremità, ed urtati trasversalmente in direzione perpendicolare ad una delle loro facce: e si agevoli poi la ricerca, ponendo per condizione preliminar che i solidi urtati si comportino come verghe perfettamente elastiche; vale a dire che sieno dall'azione delle masse urtanti così poco remossi dalla naturale loro posizione d'equilibrio, da poter ritenere con grandissima approssimazione, che appena cessata la detta azione riprendano la loro forma e la loro posizione primitiva.

E fu appunto con l'intendimento pratico sopraccennato e con tali restrizioni, le quali non escono del resto dai confini della realtà, che fuo dall'anno 1835 intrapresi una serie di esperimenti sulla resistenza viva delle sbarre di ferro, ad incitamento soprattutto del chiarissimo sig. ing. L. Pacinotti Professore nella Università di Pisa; il quale non solo si compiacque somministrarmi i mezzi per eseguirle, ma sovente mi fu largo dei suoi lumi e del suo consiglio. Dovendo in seguito entrare nei particolari di quelle esperienze, qui basta che io avverta come i solidi sottoposti alla prova fossero alcune ruotaie da

ferrovia, semplicemente appoggiate alle loro estremità ; e come l'urto prodotto da una massa, la quale si poteva con molta approssimazione considerare siccome cadente liberamente per la verticale , seguisse normalmente alla faccia superiore delle ruotaie stesse, secondo le sezioni rette equidistanti dai detti loro estremi. Quei tentativi non riuscirono interamente infruttuosi : poichè, raccolti e ordinati i parziali risultati degli esperimenti, mi parve sin d'allora ne venisse a scaturire la conseguenza , che per un medesimo sistema di corpi gli spostamenti o frecce massime della sezione urtata stavano sensibilmente in ragione diretta delle radici quadrate delle altezze (da cui potevasi ritenere, come si vedrà , che scendesse il grave urtante) accresciute di una quantità, che da principio pensai fosse costante, ma che in realtà varia da un'altezza all'altra.

Arrivato ad una tale conclusione mi restava ad assoggettarla alla riprova del calcolo , e così appunto era mia intenzione di fare. Ma in quel torno di tempo dall'ufficio d'assistente al prelodato professore, che avevo nella suddetta Università, passai a Livorno nell'Istituto di marina : e le nuove occupazioni mi distrassero dall'argomento, su cui ebbi agio di tornare soltanto l'anno 1869 : nel quale mi venne fatto d'aprimi la strada alla verificaione teorica dei sopraccennati risultati sperimentali nei due modi che appresso. Dei quali il primo riduce la quistione, come tra breve si vedrà, ad un caso di moto rettilineo relativamente molto ovvio : mentre l'altro non è a un dipresso che una deduzione desunta dalle formole del precitato signor De Saint-Venant convenientemente semplificate, traendo partito delle condizioni inerenti alla natura speciale del problema preso in esame.

I.

Sia pertanto una verga omogenea e nel suo stato naturale di forma prismatica o più semplicemente parallelepipeda , di guisa che la si possa considerare come formata da un numero grandissimo di fibre elementari parallele alla sua lunghezza : la quale è supposta implicitamente assai notevole rispetto alle

altre dimensioni. Sia la detta verga disposta orizzontalmente, appoggiata alle sue estremità ed urtata trasversalmente da un grave cadente per la verticale, che venga a percuoterla in un punto della faccia parallela al piano degli appoggi, mantenendosi dal momento dell'urto in poi sempre aderente ad essa, e rimuovendola così poco dalla sua naturale posizione d'equilibrio, da poter ritenere che la reazione da essa opposta all'azione della massa urtante, cresca proporzionalmente all'amplitudine dei successivi spostamenti del punto, che ha ricevuto direttamente l'impulsione.

Posta in tali termini la quistione, e dato che vogliansi, come io qui suppongo, calcolare gli spostamenti o frecce del punto suddetto o di un altro punto qualunque della sezione corrispondente della verga, è visibile che l'intento potrà raggiungersi approssimativamente, anche restringendosi ad analizzare il moto discendente del grave urtante dal momento della percossa in poi. Ora il centro di gravità di questo corpo è animato evidentemente dall'accelerazione g , dovuta alla gravità e dalla reazione elastica della sbarra, il valore della quale all'unità di distanza si potrà designare col simbolo α . Ma la gravità agisce ancora sopra la verga, che la massa urtante rimuove dinanzi a sè: ed una tale circostanza non potrebbe mettersi da parte, se non che nel caso molto raro in pratica che la massa M della verga fosse trascurabile, rispetto a quella M , del corpo urtante.

Premesso pertanto che qui basti fermarsi alla considerazione di una sola fibra elementare del solido, all'esame per esempio della fibra media, e riferitala perciò al consueto sistema di assi ortogonali, coll'origine ad una delle sue estremità, ecco in qual modo si potrà giungere a tenere a calcolo almeno approssimativamente, anche l'effetto testè avvertito della gravità.

Sia $2a$ la lunghezza della verga o della fibra; r ed s i segmenti nei quali essa è divisa dalla sezione direttamente percossa (r essendo quello adiacente all'origine); E il modulo d'elasticità della materia della spranga ed I il momento d'iner-

zia della sezione di questa. Dall'equazione della curva elastica ⁽¹⁾, secondo la quale si piega il solido, sotto l'azione del proprio peso $2ap$, uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza, si deduca il valore dell'ordinata o freccia corrispondente all'ascissa r . Indi rammentato che questa freccia sarebbe invece eguale ad

$$\frac{1}{3} \frac{r^2 s^2}{EI} p$$

qualora il detto peso fosse intieramente applicato alla sezione considerata, si determini la frazione

$$h = \frac{1}{16} \frac{3(r+s)^2 - 2r^2}{s^2}$$

di esso, la quale, applicata direttamente a questa sezione, la rimuoverebbe dalla sua originaria posizione orizzontale della stessa quantità, di cui esso la sposta distribuito uniformemente, com'esso è, sovra tutta la lunghezza della verga.

Ciò posto ed avute presenti le restrizioni, a cui il problema è stato precedentemente assoggettato, per tener conto dell'azione spiegata simultaneamente dalla gravità sulla massa urtante e sulla spranga, si potrà, come nel caso della flessione puramente statica, considerare come aderente al predetto corpo urtante, dal momento della percossa in poi, la sola frazione

$$hM = 2ha \cdot \frac{p}{g}$$

della massa della verga. Di guisa che, trascurati gli effetti secondari della collisione e la resistenza dell'aria, la cercata equazione differenziale del movimento si potrà porre della forma

$$(M, + hM) \frac{d^2y}{dt^2} = (M, + hM) g - xy :$$

(1) Navier. *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées* etc. 3. édition par M. Barré de Saint-Venant. Paris 1864. T. I, fasc. I, pag. 80.

la quale divisa per il coefficiente $M_1 + h M$ ed integrata, dopo aver posto per comodo

$$\frac{\alpha}{M_1 + h M} = \beta$$

dà luogo all'altra

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2 g y - \beta y^2 + \text{cost.}$$

Resta adesso a determinare la costante. A tale oggetto non può qui ammettersi col Navier, che al principio del movimento la velocità sia nulla per tutta la verga, salvo che nella sezione urtata; la quale egli riteneva animata della celerità istessa del corpo urtante, che si designerà d'ora in poi con V . Nè più si presta al caso nostro la supposizione, che il Prof. De Saint-Venant, per meglio conformarsi allo stato fisico delle cose, ha sostituito a quella del Navier; l'ipotesi cioè che le sezioni di una piccolissima porzione della sbarra contigua al punto urtato, concepiscano fin da principio « delle velocità crescenti secondo « una legge qualsivoglia da zero fino a quella del corpo urtante, « leggermente diminuita in ragione della parte, che esso ne ha « comunicata alla massa della piccola porzione suddetta della « spranga » (1). Poichè queste due ipotesi, le quali applicate al processo rigoroso, seguito da questi autori, conducono ad un risultato identico, non sono vevoli a porre in armonia con l'osservazione e con la esperienza i risultamenti del metodo elementare, che qui si viene svolgendo.

Meglio a proposito tornerebbe forse l'idea messa in campo da Tredgold, per tener conto della massa del sistema urtato, fin allora trascurata da coloro che si erano occupati di questa materia. Tal concetto, rettificato prima da Eaton-Hodgkinson, è stato poi generalizzato dal Prof. De Saint-Venant, come può riscontrarsi al § LI del *Sunto istorico delle ricerche sulla resistenza e sulla elasticità dei corpi solidi*, da lui premesso alla terza edizione della più volte citata opera del Navier. Ed

(1) Navier. Op. cit. T. I, fasc. I, pag. ccxxxiv e ccxxxvii.

ove s'intendesse trarne profitto, per determinare la costante dell'equazione (1), bisognerebbe porre al limite superiore

$$(2) \quad y = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = cV$$

dove

$$c = \frac{M'}{M_1 + kM}$$

ed il coefficiente k , dato dalla formola

$$k = \frac{1}{105} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{(r+s)^2}{rs} \right)^2 \right] ,$$

indica visibilmente la porzione della massa della verga, variabile da un caso all'altro, con la quale può supporre che il grave urtante divida, come farebbe con un corpo libero, la quantità di movimento, di cui trovasi animato nell'atto della percossa. Detto coefficiente assume il valor minimo 0,4857 per $r = s$.

Se non che un tal modo di stabilire le condizioni iniziali del fenomeno, contrariamente alla realtà delle cose, presuppone implicitamente la comunicazione istantanea del moto a tutte le parti del solido urtato. Ora, come è stato osservato anche da Young (1), la trasmissione del movimento dal punto urtato a tutta la massa della spranga, fino alle sue estremità, per l'inerzia delle particelle di questa, richiede in effetto un certo tempo, variabile col modulo d'elasticità della materia; il qual tempo, comunque brevissimo, non cessa per questo di esser paragonabile alla durata di una semi-oscillazione della verga, ed in ogni modo è notissimo come la sua picciolezza non basti ad impedir la rottura od un' alterazione permanente del solido urtato, quando la celerità dell'urtante, qualunque sia del resto la sua massa, sta alla velocità di propagazione dei moti molecolari in un rapporto superiore ad una determinata quantità.

(1) *A Course of Lectures on natural Philosophy and mechanical Arts.* 1807. Vol. I, pag. 144.

Piuttosto quindi di ritenere col Tredgold che la porzione kM della verga concepisca istantaneamente quel grado di celebrità, che appunto per tale supposizione si viene a trovare eguale ad eV , e di ammettere al limite superiore le condizioni (2), partendo da queste per valutar la costante cercata, sembra più razionale tener conto del tempuscolo, che il moto impiega a propagarsi alla intera massa. Così denotando con ε il brevissimo tratto, di cui si rimuove il punto urtato dalla sua originaria posizione, durante questo tempuscolo, e con V_1 la velocità che alla fine del medesimo può suppersi comune alle masse M_1 e kM , si potrà per calcolare V_1 fare uso della equazione

$$\frac{1}{2}M_1(V^2 - V_1^2) + (M_1 + kM)g\varepsilon = \frac{1}{2}kMV_1^2 + \alpha \int_0^\varepsilon y \, dy + \lambda$$

nella quale il termine λ sta ad indicare la quantità complessiva di lavoro consumato dagli attriti, dalla compressione delle superficie di contatto ec. ec.; e donde, richiamate le notazioni precedenti e posto

$$\frac{\alpha}{M_1 + kM} = \beta,$$

si trae visibilmente

$$V_1^2 = eV^2 - \beta_1 \varepsilon^2 + 2 \frac{\beta_1}{\beta} g \varepsilon - 2\lambda.$$

Avendosi quindi simultaneamente

$$y = \varepsilon \quad \frac{dy}{dt} = V_1$$

dalla equazione (1) fatto per maggior semplicità

$$\beta_1 \varepsilon^2 - 2 \frac{\beta}{\beta_1} g \varepsilon + 2\lambda = e'$$

si desumerà

$$eV^2 - e' = 2g\varepsilon - \beta\varepsilon^2 + \text{cost}$$

e di qui il valor cercato della costante,

$$\text{cost} = e V^2 + \frac{\beta - \beta_1}{\beta} (\beta \epsilon^2 - 2 g \epsilon) - 2 \lambda$$

od anche più semplicemente,

$$\text{cost} = e V^2 + D$$

se per comodo si ponga

$$\frac{\beta - \beta_1}{\beta} (\beta \epsilon^2 - 2 g \epsilon) - 2 \lambda = D$$

La (1) verrà perciò ad assumer la forma

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \beta y^2 = 2 g (e A + y) + D$$

dove A denota l'altezza a cui è dovuta la velocità V, dalla quale è animato il grave urtante nell'atto della percossa.

Ora la velocità di questo corpo va rapidamente scemando per effetto della reazione della verga; ed il suo valor minimo zero corrisponde alla massima deflessione di questa, ossia al più gran valore che possa prendere y e che si designerà con Y. Le condizioni verificantisi all'altro limite essendo per conseguenza

$$(3) \quad y = Y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

dalla equazione precedente si ricaverà

$$(4) \quad Y = C [A + e_1 (Y + D)]^{\frac{1}{2}}$$

dove e_1 rappresenta l'inverso di e , e le quantità C e D, sono definite dalle relazioni

$$C = \sqrt{\frac{2 g e}{\beta}} \quad D_1 = \frac{D}{2 g}$$

Ritenuto pertanto, come sembra si possa senza errore sensibile, che la quantità D non vari coll'altezza A della caduta, dalla formula (4) risulta visibilmente che:

« Il valore massimo della freccia, che un punto qualunque della sezione direttamente percossa d'una verga orizzontale appoggiata alle sue estremità assume, sotto l'impulsione d'un grave cadente per la verticale da diverse altezze, varia proporzionalmente alla radice quadrata dell'altezza medesima, accresciuta d'una funzione lineare del suddetto valor massimo ».

Ciò posto si consideri il caso che il grave urtante, in cambio di cadere da una certa altezza, sia posato semplicemente sulla spranga. Le condizioni iniziali del movimento essendo allora definite dall'equazioni

$$y = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

sarà altresì $\cos t = 0$, e l'equazione (1), da cui risulta questo valore della costante, si trasformerà nell'altra

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy - \beta y^2 :$$

donde si trarrà, chiamato Y_0 il valor massimo della freccia in questo caso particolare, ed avvertito che esso deve differire da zero, non senza aver fatto prima capitale delle (3),

$$(5) \quad Y_0 = \frac{2g}{\beta} = \frac{2g}{\alpha} (M_1 + hM)$$

Ora dalla teoria della flessione statica si sa che per

$$y = f \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

ossia

$$(6) \quad (M_1 + hM) g = \alpha f$$

donde il valor della freccia f , che la verga assumerebbe sotto

l'azione puramente statica del peso $P_i = M_i g$: il quale valore paragonato con quello della Y_0 dà luogo alla relazione

$$Y_0 = 2 f$$

già stabilita da Jeug, ma soltanto nella ipotesi che il peso $P = M g$ della verga fosse trascurabile, dirimpetto a quello del corpo urtante.

Dunque la equazione (4), può porsi anche sotto la forma

$$(7) \quad Y = V^2 e f [A + e, (Y + D)]^{\frac{1}{2}}$$

dove

$$f = \frac{r^2 \cdot s^2}{3(r+s)} \frac{P_i + h P}{E l}.$$

Questo valore della freccia statica introdotto nella (6) fa strada evidentemente alla determinazione della quantità α , che risulta della natura seguente

$$\alpha = 3 E l \frac{r+s}{r^2 \cdot s^2}.$$

Suppongasi adesso che il corpo urtante, invece di consistere in un grave cadente per la verticale, sia una massa animata dalla sola velocità V , e che la gravità non solleciti nemmeno la spranga, ferme restando le altre condizioni del problema. L'equazione (1) si ridurrà allora alla forma più semplice

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\beta y:$$

donde, integrando e passando per la medesima serie di ragionamenti tenuti di sopra, si scenderà alla seguente

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \beta y^2 = e V^2 + D$$

per aver poscia all'altra

$$(8) \quad Y = C V (A + e, D)$$

nella quale C conserva il significato attribuitogli superiormente, e

$$D_1 = \frac{D}{2g} = \frac{1}{2g} (\beta - \beta_1) \varepsilon^2 - \frac{\lambda}{g}$$

od anche più semplicemente $D_1 = -\lambda : g$, se avvertasi che l'estrema piccolezza della quantità ε permetterà sempre di trascurarne le potenze superiori alla prima, senza incorrere in errori apprezzabili.

E poichè per $\lambda = 0$ la (8) somministra l'altra

$$(9) \quad Y = C \sqrt{A}$$

così è manifesto che « gli spostamenti massimi e le radici quadrate delle altezze correlative, anche nella ipotesi che la gravità non abbia parte alcuna nel fenomeno, si mantengono proporzionali fra di loro ogni qualvolta e solamente quando il lavoro assorbito dalla compressione, dagli attriti ec. si possa ritenere come inapprezzabile ».

Finalmente sia la massa M della verga così piccola da potersi trascurare rispetto a quella del grave urtante. Siccome in tal caso si avrà manifestamente

$$\beta = \beta_1, \quad e = e_1 = 1$$

e quindi

$$D = -2\lambda, \quad D_1 = -\frac{\lambda}{g},$$

l'equazioni (7), (8) si trasformeranno nelle seguenti

$$Y = \sqrt{2fV} \left(A + Y - \frac{\lambda}{g} \right)$$

$$Y = \sqrt{2fV} \left(A - \frac{\lambda}{g} \right)$$

da cui per $\lambda = 0$ si ricavano le altre

$$Y = \sqrt{2fV} (A + Y)$$

$$Y = \sqrt{2fV} A.$$

Si vede pertanto che « se la massa della verga è trascurabile, e tale ancora può ritenersi la quantità λ , il valore massimo della freccia Y varia proporzionalmente alla radice quadrata di tutta l'altezza $A + Y$, per la quale cade il corpo urtante, od in ragione diretta della semplice sua velocità, secondo che esso è o non è soggetto all'azione della gravità ».

Quest'ultime equazioni, siccome è facile a verificarsi, sotto forma diversa non sono altra cosa che le seguenti

$$F = f + V(f^2 + f_c^2) \quad f_c = VV \frac{f}{g}$$

ambedue conosciutissime da lungo tempo.

Nelle pagine che precedono non si è detto come potrebbe determinarsi la quantità ε , perchè il termine D , che la contiene, e di cui soprattutto importa calcolare il valore, sembra che giovi meglio desumerlo da molteplici ed accurati esperimenti, ordinati e variati per guisa da valere a mettere in chiaro la forma empirica che può essergli assegnata: fors'anco non si può almeno con pratica utilità fare altrimenti. Dove però si volesse, l'equazione (1) potrebbe sempre bastare all'uopo, una volta conosciuto il tempuscolo che il moto impiega a propagarsi alla intera massa della verga. Poichè il tratto ε dell'ordinata descritto dal punto considerato in quel tempuscolo è sì breve, che si può senza errore sensibile ritenere che all'origine del medesimo la velocità sia eguale a quella della massa urtante. Il valore della costante è allora V^2 , sicchè integrando nuovamente ed osservando che per $t=0$ anche $y=0$, dalla suddetta equazione (1) si ricaverà una relazione finita tra y ed il tempo t , donde finalmente ε .

Il processo spiegato fin qui visibilmente è molto semplice: e le conclusioni, che ne sono emerse, comunque si riferiscano ai soli punti della sezione urtata, si potrebbero agevolmente estendere a quelli di una sezione qualunque, supponendo col Tredgold che la verga o meglio ognuna delle sue fibre passi dalla sua originaria posizione orizzontale a quella corrispondente al massimo spostamento, confermandosi secondo altrettante

curve di flessione, contigue. Poichè dall'equazione generale di dette curve risulterebbe, che i valori successivi dell'ordinata d'un punto qualsiasi crescono proporzionalmente a quelli assunti dalla freccia del punto compreso nella sezione urtata, ne conseguirebbe allora che le frecce massime, assunte sotto l'impulsione della massa urtante dai punti di una sezione qualsivoglia della verga, avrebbero colle altezze corrispondenti della caduta la medesima ragione, nella quale stanno ad esse gli spostamenti della sezione percossa.

Ma non che ammettere una tale ipotesi, bisogna all'incontro riconoscere che non è al sicuro da ogni obbiezione nemmeno l'altra, implicitamente fatta di sopra, che la verga, nella reazione che spiega per la propria elasticità, si comporti come farebbe sotto l'azione puramente statica d'un peso: non ostante che i limiti prescritti alle presenti indagini rendano molto verosimile quella supposizione, e non manchi in ogni caso il modo di conformare meglio alla realtà dei fatti le formule stabilite, coll'assegnare un valore conveniente alla quantità E .

Sarà quindi molto opportuno mettere i precedenti risultati a confronto con quelli, che deducansi dalle formule esatte; per verificare se coincidano tra di loro, o per iscoprire altrimenti quali ulteriori restrizioni facciano di mestieri, a conseguire la concordanza degli uni con gli altri.

II.

A tale oggetto, ferma restando la posizione superiormente assegnata alla verga, e dati ai simboli adoperati sin qui i significati rispettivamente attribuiti loro, si prenda a considerare una delle fibre elementari di essa, riferendone col De Saint-Venant i due segmenti r, s a due sistemi distinti di assi ortogonali $X Y, X_1 Y_1$, situati naturalmente nel piano in cui la fibra oscilla, (che per maggior semplicità si potrà ritenere verticale) e con le origini rispettive ai due estremi di questa. Le ascisse saranno orizzontali e contate positivamente da un estremo verso l'altro; delle y si riguarderanno come positive quelle contate d'alto in basso.

Supponendo la massa urtante animata della sola velocità V e diretta perpendicolarmente alla faccia della sbarra, parallela al piano degli appoggi, il prelodato sig. De Saint-Venant astraendo dalla gravità, dagli attriti etc. ha trovato che, alla fine del tempo t decorso dall'istante dell'urto, lo spostamento di un punto qualunque del primo segmento r della fibra considerata, situato alla distanza x dalla relativa origine, è dato dalla formola

$$(10) \quad y = \sum C_m X \operatorname{sen} \frac{m^2 t}{\tau}$$

nella quale

$$(11) \quad X = \frac{\operatorname{sen} \frac{ms}{a} \operatorname{sen} \frac{mx}{a}}{\operatorname{sen} m \cdot \cos m} - \frac{\operatorname{sen} h \frac{ms}{a} \operatorname{sen} h \frac{mx}{a}}{\operatorname{sen} hm \cdot \cos hm}.$$

τ è definita dalla relazione

$$\tau^2 = \frac{Ma^2}{2EI}$$

e C_m , nel caso che il movimento iniziale della verga sia determinato semplicemente dall'urto della massa M_i , è della forma

$$(12) \quad C_m = \frac{\tau}{m^2} \frac{M_i X_r V}{M_i X_r^2 + MH}$$

dove X_r denota quello che diviene X , quando in luogo di x vi si pone r , ed

$$(13) \quad H = \frac{1}{2a} \left(\int_0^r X^2 dx + \int_0^s X'^2 dx \right)$$

avendo X' il significato che si vedrà qui appresso. La somma, di cui si compone il secondo membro della (10), deve estendersi a tutti i valori reali e positivi di m che soddisfano l'equazione

$$(14) \quad m X_r = 2 \frac{M}{M_i}.$$

La formula, che serve a calcolare le frecce y , dei punti dell'altro segmento s , non differisce dalla (10) se non perchè in luogo di X contiene X' , la cui espressione si ricava da quella della X , ponendovi r ed x , in cambio rispettivamente di s ed x . E poichè di qui risulta $X_r = X'_s$ così è chiaro che le equazioni (12) e (14) rimangono invariate, come tale resta per sua natura anche la (13).

Nel caso speciale che sia $r = s = a$, come appunto succedeva nelle esperienze, di cui sarà parola tra breve, le formole (11), (13), e (14), si riducono visibilmente alle più semplici

$$X = \frac{\operatorname{sen} \frac{mx}{a}}{\cos m} - \frac{\operatorname{sen} h \frac{mx}{a}}{\cos hm}$$

$$H = \frac{1}{a} \int_0^a X^2 dx$$

$$m X_a = m (\operatorname{tang} m - \operatorname{tang} hm) = 2 \frac{M}{M_i}.$$

Ciò posto ed assumendo il tempo t eguale alla durata θ di una semi-oscillazione, è visibile che il valore corrispondente di y rappresenterà il massimo spostamento del punto considerato della fibra: il quale varierà proporzionalmente alla velocità della massa ortante, od alla radice quadrata dell'altezza correlativa, soltanto quando la durata predetta della vibrazione possa riguardarsi come indipendente dalla sua ampiezza. Poichè allora la somma

$$\Sigma \frac{\tau \sqrt{2g}}{m^2} \frac{M_i X_r}{M_i X_r^2 + M H} X \operatorname{sen} \frac{m^2 \theta}{\tau}$$

restando invariabile per ogni punto della verga, se la si designa per maggior semplicità con K , dalla (10) si desumerà

$$(15) \quad Y = K \sqrt{A}.$$

Ora, nei casi contemplati in questa Nota, supponendosi che l'azione della massa urtante rimuova sempre assai poco la verga, dalla naturale sua posizione d'equilibrio, la condizione da cui dipende l'invariabilità di K per ogni punto della fibra, si può con sufficiente approssimazione considerare siccome soddisfatta. I risultati dei due processi come appare dal confronto diretto delle due equazioni (9) e (15), per questa parte si accordano quindi sensibilmente tra loro.

La conclusione a cui si arriva, quando la massa urtante è un grave che discende per la verticale, e si vuol tener conto anche dell'azione della gravità sulla spranga, non differisce come si vedrà dalla precedente.

Di fatto se la (15) si pone sotto la forma

$$Y = \sum \frac{\tau}{m^2} \frac{M_r X_r V}{M_r X_r^2 + MH} X \sin \frac{m^2 \theta}{\tau},$$

per passare dal caso a cui la medesima si riferisce, a quello più generale che qui vuolsi contemplare, basta invece del fattore

$$\tau V \sin \frac{m^2 \theta}{\tau}$$

sostituire (come ha dimostrato il De Saint-Venant) nel secondo membro della precedente il binomio

$$\tau V \sin \frac{m^2 \theta}{\tau} = \frac{g \tau^2}{m^2} \cos \frac{m^2 \theta}{\tau},$$

sotto il segno sommatorio (1). Ciò fatto, e posto per maggior semplicità

$$g \tau^2 \cdot \sum \frac{1}{m^2} \frac{M_r X_r}{M_r X_r^2 + MH} X \cos \frac{m^2 \theta}{\tau} = K,$$

(1) *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*. Tom. XLV, pag. 207.
Serie 2. Vol. XIV.

si viene a cadere nella formula

$$Y = K \sqrt{A - K_1},$$

d'onde l'altra

$$(16) \quad Y = K \sqrt{A + c(Y + L)},$$

nella quale

$$L = \frac{K_1}{2}, \quad c = -\frac{4L}{K^2}.$$

Quest'ultima equazione rispetto alla forma è manifesto che non diversifica dalla (4).

Le quantità K e K_1 , di cui si son date pocanzi le espressioni generali, e per conseguenza le equazioni (15) e (16) assumono forme assai più semplici, allorchè si considera non una sezione qualunque della verga, ma sibbene quella secondo la quale ha luogo l'impulsione: dacchè per i punti di tale sezione si trova, tenuta presente la (14),

$$\frac{M_1 X_1 X}{M_1 X_1^2 + MH} = \frac{1}{1 + \frac{m^2}{4} \frac{M_1}{M}} II$$

Ciò messo in chiaro, gioverà senz'altro discendere alla esposizione delle esperienze, più volte mentovate di sopra, per vedere come ed in qual misura i risultati delle medesime si accordino con le precedenti deduzioni teoriche.

III.

Dando principio a questa ultima parte della presente nota, non fa di mestieri ripetere quanto è stato detto nella introduzione intorno agli esperimenti, dei quali si tratta ora d'analizzare e discuter le risultanze. Ben è d'uopo peraltro chiarire subito per quali motivi si notasse nella introduzione suddetta

che la massa urtante, sebbene a rigor di termine non cadesse liberamente per la verticale, la si poteva nondimeno con moltissima approssimazione considerare come operante in tale condizione. Poichè il menomo dubbio che sorgesse sul grado di esattezza, di cui quell'asserzione è rivestita, basterebbe naturalmente ad infirmare tutte le conclusioni, che si stan per trarre intorno alla concordanza della teoria con la pratica.

La spranga urtata adunque in tutti quegli esperimenti non riceveva, come si è testè ricordato, l'impulsione da un grave discendente per la verticale, sibbene da un'altra verga, o sola, od accompagnata da pesi addizionali saldamente collegati con essa: la quale rimossa dalla sua posizione orizzontale, col sollevarne una delle estremità, ed abbandonata poi a sè stessa, scendeva a percuoter la prima, ruotando intorno allo spigolo inferiore dell'altra estremità. L'asse longitudinale della verga urtante era naturalmente perpendicolare a quello dell'altra, e durante la rotazione mantenevasi nel piano verticale in cui originariamente si trovava: lo spigolo poi, intorno al quale la detta rotazione si faceva, era in un medesimo piano con la faccia superiore della verga urtata.

Tali disposizioni però non sarebbero di per sè sole bastate, a porre le masse urtanti in condizioni molto prossime a quelle che si riscontrano nei gravi cadenti per la verticale, se non si fossero avute le avvertenze:

1.º di determinare volta per volta accuratamente il centro di percossa della spranga, o sistema urtante;

2.º di disporre sempre l'esperimento in guisa, che la tangente verticale all'arco, descritto dal suddetto centro, coincidesse col prolungamento dell'asse di simmetria, della sezione media della verga urtata.

E siccome d'altra parte l'arco descritto dal centro di percossa, avuto riguardo al suo raggio, era in tutte le esperienze così piccolo, da confondersi sensibilmente con la semicorda dell'arco doppio, così è manifesto che non si corre il pericolo di cadere in errori apprezzabili, ritenendo che la ruotaia o sistema urtante si comportasse addirittura, rispetto alla spranga urtata, come avrebbe fatto un corpo, il quale cadendo per la

detta semicorda fosse stato capace d'imprimerle il medesimo grado d'impulsione, E saran quindi tali semicorde appunto quelle, che d'ora in poi si designeranno col nome di *altezze*, sottintendendovi sempre aggiunte le parole *della caduta*, che per maggiore brevità si ometteranno.

Quanto agli spostamenti o frecce dei vari punti della verga urtata, è d'uopo avvertire come per ogni serie di esperienze si determinassero solamente i valori massimi, assunti dall'ordinata di un punto della sezione media di essa, sotto l'azione impulsiva dell'altra spranga: i quali valori si ottenevano graficamente, essendo tracciati sovra un foglio apposito dalla punta di un lapis, pendente dalla verga medesima e faciente corpo con essa. La detta striscia di carta era sostenuta da un telaio, dentro il quale poteva scorrere, mantenendosi in un piano sensibilmente verticale: il lapis era disposto orizzontalmente e tenuto aderente al foglio da una piccola molla a spirale. Una base molto solida sorreggeva alla sua volta il telaio, dalla semplice ispezione del quale desumevasi, volta per volta, il numero di millimetri contenuti in ciascuna freccia; poichè la striscia era divisa da una serie di linee distanti un millimetro l'una dall'altra. Col soccorso di un nonio si misuravano in seguito i decimi di millimetro, da aggiungersi alle unità precedentemente numerate.

Le serie di esperimenti istituite furono quattro, ma se ne scelgono qui due sole: e non già perchè i risultati delle altre due serie si accordino meno colla teoria, sibbene perchè i più grandi spostamenti, salendo in queste appena a tre millimetri e mezzo, le varie frecce differiscono naturalmente così poco l'una dall'altra, da non rendere troppo concludente il loro paragone con quelle, che somministrano le formole trovate di sopra.

Del resto le esperienze non erano così facili a condurre, come forse a prima giunta potrebbe parere; molte essendo le difficoltà inerenti alla indole stessa della quistione e non minori le cause di errore, che pure è stato di mestieri eliminare od almeno attenuare. Nondimeno mercè i ripetuti tentativi e le precauzioni prese di mano in mano, nessuna delle sopraccennate cagioni

d'errore è venuta ad esser trascurata: ed i risultamenti ottenuti sono in conseguenza venuti ad un grado di esattezza, il quale, se non è il massimo desiderabile, è senza dubbio più che sufficiente almeno per la pratica.

Ciò premesso, ecco in qual maniera si è proceduto per confrontare con la teoria i risultati di queste esperienze.

Designando con y_0 ed y_1 due valori della freccia massima Y e con A_0 , A_1 le corrispondenti altezze della caduta, dalla formula (4) si deduce visibilmente l'altra

$$\frac{y_1^2}{y_0^2} = \frac{A_0 + e_1(y_0 + D_1)}{A_1 + e_1(y_1 + D_1)} :$$

di guisa che, se i due valori di y_0 ed y_1 sono conosciuti a priori (determinati per es. sperimentalmente) quest'ultima equazione porgerà il modo di calcolare la quantità D_1 , che sarà data dalla seguente equazione

$$D_1 = \frac{y_0^2 (eA_1 + y_1) - y_1^2 (eA_0 + y_0)}{y_1^2 - y_0^2} .$$

Una volta calcolata D_1 e sostituitone il valore nella (4) suddetta, questa non conterrà più alcun elemento indeterminato: e se essa rappresenta in realtà con molta approssimazione il fenomeno a cui si riferisce, i valori della freccia massima Y corrispondenti alle diverse altezze A , che se ne ricaveranno, è chiaro che dovranno coincidere con quelli somministrati dall'esperienza diretta, od altrimenti differirne assai poco. Ora dalla ispezione delle seguenti due tabelle, a ciascuna delle quali sono premessi i valori degli elementi, che hanno servito a calcolarle, si rileva facilmente che l'accordo fra la pratica e la teoria, nelle esperienze a cui le dette due tabelle si riferiscono, era se non completo almeno assai soddisfacente. Dove quindi le serie di esperimenti istituite, in cambio di esser due sole o quattro (se vuolsi tener conto anche di quelle omesse) fossero in maggior numero e più svariate, la illazione che ne scaturirebbe è manifesta. La quale se non può trarsi qui, per non

correre il rischio di generalizzare troppo e troppo presto, è lecito nondimeno intravedere come assai probabile; e soprattutto dovremo augurarci che altri, con maggior copia di dottrina e mezzi migliori, la verifichi o la impugni.

Tale verificaione appare del resto tanto più necessaria, quando si considera che le poche esperienze, di cui è parola, non possono bastare in veruna maniera, a determinare empiricamente la forma della quantità D ; senza di che la formula (4) non saprebbe riguardarsi come definita completamente. Ed è stato appunto il desiderio di veder questo rilevantissimo argomento ripreso e meglio analizzato da persona di me più competente, il motivo precipuo che m'ha persuaso a tornarvi sopra dopo tanto tempo, per riunire i materiali già raccolti, ordinarli e dar loro la presente forma.

Frattanto ecco le tabelle accennate di sopra ed i relativi elementi, dei quali $2b$ denota la lunghezza della ruotaia urtante ed N il numero degli esperimenti, da cui è stato dedotto per ogni altezza della serie il valore corrispondente della freccia, che figura nella seconda colonna di ciascuna tabella.

I.^a SERIE D'ESPERIENZE.

$$P = 126^{\text{kil}}$$

$$P_i = 122,30$$

$$2a = 4^{\text{m}},637$$

$$2b = 4,565$$

$$k = 0,4857$$

$$c = 0,666$$

$$A_0 = 2^{\text{mm}}$$

$$A_i = 4$$

$$D_i = -1,86$$

$$N = 12$$

$$y_0 = 3^{\text{mm}}$$

$$y_i = 4,33$$

$$Y = \frac{1}{2} (3,64 + \sqrt{9,72 A - 13,84})$$

Altezza	Freccie sperimentali	Freccie calcolate
	mm	mm
2 ^{mm}	3,00	3,00
4	4,33	4,33
6	5,30	5,16
8	6,00	5,82
10	6,60	6,39
12	7,10	6,89
14	7,60	7,35

II.^a SERIE D'ESPERIENZE

$$P = 126^{\text{kil}}$$

$$P_i = 183,50$$

$$2a = 4^{\text{m}},637$$

$$2b = 4,565$$

$$k = 0,4857$$

$$c = 0,750$$

$$A_0 = 2^{\text{mm}}$$

$$A_i = 4$$

$$D_i = -2,85$$

$$N = 6$$

$$y_0 = 4^{\text{mm}},4$$

$$y_i = 6,5$$

$$Y = \frac{1}{2} (6,35 + \sqrt{19,04 A - 32,08})$$

Altezza	Freccie sperimentali	Freccie calcolate
	mm	mm
2 ^{mm}	4,40	4,40
4	6,50	6,50
6	8,00	7,71
8	9,00	8,66
10	9,80	9,47
12	10,50	10,18
14	11,10	10,83