Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de' suoi centri di curvatura.

(Di GEMINIANO PIRONDINI, a Parma.)

Il sig. J. A. SERRET nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1853) ha trattato i due problemi della ricerca della linea di cui è noto il luogo dei centri delle sue sfere osculatrici, ovvero il luogo dei centri de' suoi cerchi osculatori. Egli ha ridotto il 1.^o problema all'integrazione dell'equazione:

$$\frac{d\left(\rho_1 \frac{d\rho}{ds_1}\right)}{ds_1} + \frac{\rho}{\rho_1} \pm 1 = 0,$$

e il 2.^o all'integrazione dell'equazione:

$$U + \frac{1}{\rho_1 r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2} - \rho_1^2 V^2,$$

nelle quali s_1 , ρ_1 , r_1 sono l'arco, il raggio di curvatura e il raggio di torsione della linea data L_1 e ρ il raggio di curvatura della linea incognita L ; V e U sono due funzioni definite dalle equazioni:

$$V = \frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2 - \frac{1}{\rho_1};$$

$$U = \frac{dV}{ds_1} + \frac{V^2}{\frac{d\rho}{ds_1} \left\{ 1 - \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2 \right\}} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{ds_1} \right) V - \frac{1}{\rho_1^2} \frac{1 - \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2}{\frac{d\rho}{ds_1}}.$$

La prima di queste equazioni differenziali, del 2.^o ordine, è bensì lineare, ma non è integrabile sotto la sua forma generale; il problema corrispondente, trattato col metodo del sig. SERRET, non è quindi risolvibile completamente.

Al § 4 della Memoria: *Sugli involuppi di piani e di sfere*, che io ho avuto l'onore di presentare all'Accademia di Bologna (*), ho potuto, con considerazioni geometriche particolari, togliere di mezzo ogni difficoltà, riducendo il problema completamente a quadrature.

In quanto alla seconda equazione differenziale, essa è del 3.^o ordine e di una forma così complicata, che non solamente è impossibile, nello stato attuale della scienza, la sua generale integrazione, ma tale impossibilità si manifesta anche nella maggior parte dei casi particolari; quelli ad esempio considerati dal sig. SERRET, rimangono tutti incompletamente risolti a causa dell'impossibilità d'integrare quell'equazione, quantunque ridotta alquanto più semplice.

Il metodo che ora vado ad esporre, quantunque non risolva il problema nella sua generalità, ha però su quello del sig. SERRET il vantaggio di risolverlo in parecchi casi particolari notevoli; non credo quindi del tutto inutile la presente Nota, colla quale si viene a introdurre qualche semplificazione nella risoluzione di un sì difficile problema.

Sia L_0 una linea qualunque e L una curva posta sulla sviluppabile osculatrice di L_0 ; per i punti (x, y, z) di L conduciamo delle rette situate nei piani osculatori di L_0 e dirette perpendicolarmente alle tangenti di L_0 , prendiamo su di esse a partire da L dei segmenti T e chiamiamo $L_1(x_1, y_1, z_1)$ il luogo degli estremi. Se $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sono gli angoli che i segmenti T fanno colla tangente $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, colla normale principale $(\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)$ e colla binormale $(\cos l, \cos m, \cos n)$ di L , avremo:

$$x_1 = x + T(\cos \alpha \cos \varepsilon + \cos \lambda \cos \varepsilon_1 + \cos l \cos \varepsilon_2), \text{ ecc.}$$

(*) *Atti dell'Accademia*, 1889.

Ricavandosi da queste:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = & \left[1 + T' \cos \varepsilon - \frac{T}{\rho} \cos \varepsilon_1 + T(\cos \varepsilon)' \right] \cos \alpha + \\ & + \left[T' \cos \varepsilon_1 + \frac{T}{\rho} \cos \varepsilon + \frac{T}{r} \cos \varepsilon_2 + T(\cos \varepsilon_1)' \right] \cos \lambda + \\ & + \left[T' \cos \varepsilon_2 - \frac{T}{r} \cos \varepsilon_1 + T(\cos \varepsilon_2)' \right] \cos l, \text{ ecc.}, \end{aligned}$$

si conclude che la condizione $\Sigma \frac{dx_1}{ds_1} \cos \alpha = 0$, onde le linee L e L_1 siano a tangenti perpendicolari, è:

$$1 + T' \cos \varepsilon - \frac{T}{\rho} \cos \varepsilon_1 + T(\cos \varepsilon)' = 0. \quad (1)$$

La condizione $\Sigma (\cos \alpha \cos \varepsilon + \cos \lambda \cos \varepsilon_1 + \cos l \cos \varepsilon_2) \cos \alpha_1 = 0$, onde le rette T condotte siano ortogonali alla L_1 , è espressa così:

$$T'(\cos^2 \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_2) + T\{\cos \varepsilon_1(\cos \varepsilon_1)' + \cos \varepsilon_2(\cos \varepsilon_2)'\} + \frac{T}{\rho} \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 = 0,$$

e siccome:

$$\cos^2 \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_2 = 1 - \cos^2 \varepsilon, \quad \cos \varepsilon_1(\cos \varepsilon_1)' + \cos \varepsilon_2(\cos \varepsilon_2)' = -\cos \varepsilon(\cos \varepsilon)',$$

la precedente diviene:

$$T'(1 - \cos^2 \varepsilon) - T \cos \varepsilon (\cos \varepsilon)' + \frac{T}{\rho} \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 = 0.$$

Ma dalla (1) ricavandosi:

$$-T' \cos^2 \varepsilon - T \cos \varepsilon (\cos \varepsilon)' + \frac{T}{\rho} \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon,$$

la precedente si riduce a:

$$T' + \cos \varepsilon = 0. \quad (2)$$

Le condizioni (1) (2) esprimono che le linee L_1 e L sono a tangenti ortogonali e che L_1 è traiettoria ortogonale delle generatrici della superficie rigata luogo delle T : la tangente di L_1 essendo allora perpendicolare a T e alla tangente di L , è perpendicolare al loro piano che è appunto il piano osculatore di L_0 ; la L_0 è dunque lo spigolo di regresso della sviluppabile polare di L_1 e quindi le curve L_0 , L_1 hanno le normali principali parallele; ma i segmenti T sono paralleli alle normali principali di L_0 , dunque i segmenti T

sono le normali principali di L_1 e questa condizione, unita all'altra che le linee L_1 e L sono a tangenti ortogonali, dimostra (*) che L è il luogo dei centri di curvatura di L_1 .

I coseni direttivi della AA_0 rispetto alle direzioni principali di L , si esprimono per gli elementi di L nel modo seguente (Memoria citata, § 1).

$$\cos i, \quad \text{sen } i \cos \theta, \quad \text{sen } i \text{sen } \theta,$$

dove θ è definita dall'equazione differenziale:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\cot i}{\rho} \text{sen } \theta,$$

essendo ρ , r i raggi di L e i l'inclinazione di L sulle rette A_0A .

La retta T , posta nel piano determinato dalle tangenti alle L_0 e L e perpendicolare alle A_0A , ha per coseni direttivi rispetto alle direzioni principali di L :

$$\cos \varepsilon = \text{sen } i, \quad \cos \varepsilon_1 = -\cos i \cos \theta, \quad \cos \varepsilon_2 = -\cos i \text{sen } \theta,$$

con che le (1) (2) divengono:

$$1 + \frac{d}{ds}(T \text{sen } i) + \frac{T}{\rho} \cos i \cdot \cos \theta = 0, \quad \frac{dT}{ds} + \text{sen } i = 0. \quad (3)$$

Siccome facendo uso di quest'ultima la prima (2) si riduce all'altra:

$$T \left(\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho} \right) + \cos i = 0,$$

potremo enunciare il teorema: « per far sì che un cerchio mobile si mantenga in tutte le sue posizioni osculatore a una linea, si faccia percorrere al suo centro una linea arbitraria L , si orienti il suo piano in modo che la normale ad esso nel centro (asse del cerchio) formi colla tangente, colla normale principale e colla binormale di L gli angoli i cui coseni sono:

$$\cos i, \quad \text{sen } i \cos \theta, \quad \text{sen } i \cdot \text{sen } \theta,$$

e si dia al suo raggio la lunghezza T , essendo i , θ , T tre funzioni dell'arco s di L definite dal seguente sistema di equazioni differenziali simultanee:

$$\frac{dT}{ds} + \text{sen } i = 0, \quad T \left(\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho} \right) + \cos i = 0, \quad \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\cot i}{\rho} \text{sen } \theta. \quad (4)$$

(*) Sugli involuppi di piani e di sfere, § V.

Dalla terza si deduce:

$$\cot i = \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right) \frac{\rho}{\sin \theta},$$

ciò che dà:

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}}, & \cos i &= \frac{\rho \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}} \\ \frac{di}{ds} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}}{\rho \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)} \cdot \frac{d}{ds} \cdot \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Dalla seconda (4) si ricava:

$$T = - \frac{\cos i}{\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho}}, \quad \text{d'onde:} \quad \frac{dT}{ds} = - \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos i}{\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho}} \right),$$

e in causa della prima (4):

$$\sin i = \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos i}{\frac{di}{ds} + \frac{\cos \theta}{\rho}} \right).$$

Sostituendo in questa al posto di $\sin i$, $\cos i$, $\frac{di}{ds}$ i valori precedenti, dopo alcuni calcoli si trova per determinare θ la seguente equazione differenziale del 3.º ordine:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}} = \\ & = \frac{d}{ds} \cdot \left\{ \frac{\rho^2}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}{\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right) \cos \theta + \sin \theta \frac{d}{ds} \cdot \log \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}}} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Se fosse possibile l'integrazione di tale equazione, non occorrerebbero più che

quadrature per condurre a termine il problema; infatti dall'essere:

$$\begin{aligned}\cos i &= \frac{\rho \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}}, & \cos i_1 &= \sin i \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}} \\ \cos i_2 &= \sin i \sin \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}} \\ T &= k - \int \sin i \cdot ds = k - \int \frac{\sin \theta \cdot ds}{\sqrt{\sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2}},\end{aligned}$$

si deduce che gli elementi che determinano il movimento e la variazione di grandezza del cerchio mobile sono tutti espressi per l'arco s della linea L percorsa dal centro, tosto che sia determinato θ per s .

L'equazione differenziale (5), che dovrebbe servire a tale determinazione, è del 3.° ordine e quantunque un poco più semplice di quella del SERRET, non è tuttavia integrabile nel caso generale. — Si noti che quando siano noti gli elementi che determinano il modo di spostarsi e di variare del cerchio mobile, si può con tutta facilità determinare la linea involupata dal cerchio osculatore mobile; infatti la linea in discorso è il luogo degli estremi dei segmenti eguali a T condotti da ogni punto della linea L e facenti colle direzioni principali di questa linea angoli i cui coseni sono:

$$\sin i, \quad -\cos i \cdot \cos \theta, \quad -\cos i \cdot \sin \theta.$$

CASI PARTICOLARI.

I.

Il luogo L dei centri di curvatura di L_1 sia una geodetica sulla superficie polare di L_1 .

Per essere $\theta = \frac{\pi}{2}$, la terza (4) diviene:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cot i}{\rho}, \quad \text{d'onde: } \cot i = \frac{\rho}{r},$$

e la (3):

$$1 + (T \operatorname{sen} i)' = 0,$$

d'onde:

$$T = \frac{a-s}{\operatorname{sen} i} = (a-s) \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Non ci resta che da soddisfare alla prima (4); dall'ultima equazione ottenuta, calcolando $\frac{dT}{ds}$ e sostituendolo nella prima (4), si ha:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} = (a-s) \frac{d}{ds} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Ponendo:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = x,$$

la precedente diviene:

$$\frac{x^2 - 1}{x} = (a-s) \frac{dx}{ds}, \quad \text{d'onde:} \quad \frac{ds}{a-s} = \frac{x dx}{x^2 - 1}.$$

Di qui, integrando, si deduce:

$$\frac{r}{\rho} = b(s-a),$$

la quale dà una notevole costruzione geometrica della linea L .

Infatti si stenda sopra un piano la sviluppabile rettificatrice di L ; lo spigolo di regresso di tale sviluppabile si trasforma in una linea Λ e L in una retta; prendendo questa retta per asse delle ξ e la perpendicolare ad essa, condotta per l'origine degli archi s , per asse delle η , evidentemente s diviene eguale all'ascissa del punto di tragitto per l'asse delle ξ della tangente a Λ ; si avrà quindi:

$$s = \frac{\xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

Siccome poi $\frac{r}{\rho}$ è eguale, come si è visto, alla tangente dell'angolo sotto il quale la curva L sega le sue rette rettificatrici, sarà $\frac{r}{\rho}$ eguale alla tangente dell'in-

clinazione della tangente a Λ sull'asse delle ξ e quindi:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Sostituendo questi valori nella relazione (6), si ottiene:

$$b\eta = b(\xi - a) \frac{d\eta}{d\xi} - \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2. \quad (7)$$

Se si pone $\frac{d\eta}{d\xi} = p$, seguendo i metodi noti d'integrazione, si giunge alla soluzione:

$$\left(\xi - \frac{ab + 2p}{2} \right) dp = 0,$$

la quale dà luogo ai due casi:

$$dp = 0, \quad \xi = \frac{ab + 2p}{2}. \quad (8)$$

Il primo dà $p = \text{costante} = c$ e ad esso corrisponde l'integrale generale:

$$\eta = c\xi - \frac{abc - c^2}{b},$$

il quale, rappresentando una retta, è per noi privo d'importanza; il secondo caso dà luogo all'integrale singolare:

$$\eta = \frac{b}{4} (\xi - a)^2,$$

che si ottiene eliminando p fra le (7) (8); esso rappresenta una parabola di parametro $\frac{4}{b}$ tangente all'asse delle ξ nel vertice e involupata dalle rette rappresentate dall'integrale generale, quando si consideri c come variabile. Siccome in questo caso abbiamo:

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2(s - a)^2}}$$

$$\cos i_1 = \sin i \cos \vartheta = 0, \quad \cos i_2 = \sin i \sin \vartheta = \frac{b(s - a)}{\sqrt{1 + b^2(s - a)^2}},$$

si può enunciare il teorema: « per risolvere nella sua massima generalità il

problema di spostare un cerchio nello spazio in modo che esso rimanga costantemente osculatore a una linea L_1 a doppia curvatura, e che percorra col suo centro una linea L che sia geodetica sulla sviluppabile polare di L_1 , si prenda una parabola e si infletta il suo piano successivamente intorno alle sue tangenti in un modo qualunque. Si faccia percorrere la linea gobba L , a cui si riduce la tangente alla parabola nel vertice, dal centro di un cerchio di raggio $T = \frac{1}{b} \sqrt{1 + b^2(s-a)^2}$ e si orienti il piano di esso in modo, che il suo asse formi colle direzioni principali di L gli angoli i, i_1, i_2 tali che:

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}}, \quad \cos i_1 = 0, \quad \cos i_2 = \frac{b(s-a)}{\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}}.$$

essendo s l'arco di L , a una costante e $\frac{4}{b}$ il parametro della parabola η .

II.

I raggi di curvatura di L , si proiettino sulle tangenti della linea L , luogo de' suoi centri di curvatura, in segmenti di lunghezza costante k .

In questo caso dobbiamo avere:

$$T \cdot \sin i = k, \tag{9}$$

ciò che ci dà:

$$T = \frac{k}{\sin i}, \quad T' = - \frac{k \cos i \frac{di}{ds}}{\sin^2 i}.$$

La (3), in causa della (9), diviene:

$$1 + \frac{T}{\rho} \cos i \cdot \cos \theta = 0; \tag{10}$$

le relazioni (9) (10) e la prima delle (4) ci danno T, i, θ ; infatti, sostituendo nella prima (4) il valore di T' , si ha l'equazione differenziale:

$$\sin i - k \frac{\cos i}{\sin^2 i} \cdot \frac{di}{ds} = 0,$$

da cui con facile integrazione:

$$\operatorname{sen} i = \sqrt{\frac{k}{a-2s}}, \quad \text{essendo } a \text{ una costante arbitraria.}$$

La (9) ci dà allora:

$$T = \frac{k}{\operatorname{sen} i} = \sqrt{k(a-2s)},$$

e la (10) ci fornisce:

$$\cos \theta = - \frac{\rho}{\sqrt{k(a-k-2s)}},$$

d'onde:

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{k(a-k-2s)-\rho^2}{k(a-k-2s)}}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\rho'(a-k-2s)+\rho}{(a-k-2s)\sqrt{k(a-k-2s)-\rho^2}}.$$

Sostituendo questi valori nella terza delle (4), si ha:

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho'(a-k-2s)+\rho}{(a-k-2s)\sqrt{k(a-k-2s)-\rho^2}} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\rho} \sqrt{k(a-k-2s)-\rho^2} = 0. \quad (11)$$

Dunque: « per far in modo che un cerchio mobile si mantenga sempre osculatore a una linea L_1 , colla condizione che i raggi di curvatura di questa si proiettino in segmenti costanti k sulle tangenti della linea L , luogo dei centri di curvatura di L_1 , si faccia percorrere al centro del cerchio mobile una linea L per la quale sia verificata la relazione (11), si orienti il suo piano talmente, che l'asse del cerchio formi colla tangente, colla normale principale e colla binormale di L gli angoli i , i_1 , i_2 definiti come segue:

$$\begin{aligned} \cos i &= \sqrt{\frac{a-k-2s}{a-2s}}, & \cos i_1 &= - \frac{\rho}{\sqrt{(a-2s)(a-k-2s)}}, \\ \cos i_2 &= \sqrt{\frac{k(a-k-2s)-\rho^2}{(a-2s)(a-k-2s)}}, \end{aligned}$$

e si dia al cerchio mobile il raggio $T = \sqrt{k(a-2s)}$ ».

Se L è piana, $\frac{1}{r} = 0$ e (11) diviene:

$$\rho\rho' - \rho^2 \frac{2s+2k-a}{2s+k-a} = k(2s+k-a),$$

la quale, col porre $y = \rho^2$, si trasforma in un'equazione differenziale lineare del 1.º ordine facilmente integrabile. Essa dà infatti:

$$\rho = e^s \cdot (2s + k - a)^{\frac{h}{2}} \cdot \sqrt{b + 2k \int \frac{(2s + k - a)^{1-k}}{e^{2s}} \cdot ds},$$

la quale, esprimendo il raggio di curvatura di L in funzione dell'arco, determina completamente questa linea; il problema è quindi, nel caso particolare considerato, completamente ridotto alle quadrature.

III.

**Il luogo dei centri di curvatura della linea L_1
sia una traiettoria isogonale delle generatrici
della sviluppabile polare di L_1 .**

Dalla prima (4) si deduce, integrando:

$$T = a - \operatorname{sen} i \cdot s,$$

e la seconda (4) diviene:

$$\frac{T \cos \theta}{\rho} = -\cos i,$$

cioè, in causa della precedente:

$$\cos \theta = \frac{\rho \cos i}{s \cdot \operatorname{sen} i - a}.$$

Da questa si deduce:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}}{s \cdot \operatorname{sen} i - a},$$

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{[\rho'(s \cdot \operatorname{sen} i - a) - \rho \operatorname{sen} i] \cos i}{(s \cdot \operatorname{sen} i - a) \sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}},$$

e sostituendo questi valori nella terza (4), si ha:

$$\frac{1}{r} = - \frac{[\rho'(s \cdot \operatorname{sen} i - a) - \rho \operatorname{sen} i] \cos i}{(s \cdot \operatorname{sen} i - a) \sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}} + \frac{\cot i}{\rho} \frac{\sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}}{s \cdot \operatorname{sen} i - a}.$$

Tale è la relazione che lega i raggi ρ , r della linea L , quando abbia luogo la proprietà detta.

Se la linea L è piana, $\frac{1}{r} = 0$, e la precedente diviene:

$$\rho \rho' (s \cdot \operatorname{sen} i - a) + \rho^2 (\cos^2 i - \operatorname{sen}^2 i) + (s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 = 0,$$

la quale si rende lineare del 1.^o ordine, e quindi perfettamente integrabile, collo stesso metodo del caso precedente; il problema è quindi, in questo caso particolare, completamente ridotto a quadrature.

IV.

I piani osculatori di L formino coi piani tangenti della sviluppabile polare di L , un angolo θ costante.

La terza delle (4) dà in questo caso:

$$\operatorname{sen} i = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad \cos i = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}},$$

le quali offrono:

$$\frac{di}{ds} = - \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{d}{ds} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

La prima (4) dà:

$$T = a - \int \operatorname{sen} i \cdot ds = a - \int \frac{r \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} ds,$$

e la seconda:

$$\begin{aligned} T &= - \frac{\cos i}{\frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{di}{ds}} = \\ &= \frac{\rho^2 r \operatorname{sen} \theta}{\rho(\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \frac{d}{ds} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} - r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Eguagliando i due valori di T , si ottiene:

$$\begin{aligned} a - \int \frac{r \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} ds &= \\ &= \frac{\rho^2 r \operatorname{sen} \theta}{\rho(\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \frac{d}{ds} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} - r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Questa è la relazione da cui devono essere legati i raggi ρ , r della linea L onde abbia luogo la proprietà voluta.

Se la curva L è un'elica cilindrica, si ha:

$$\frac{\rho}{r} = \cot \omega,$$

essendo ω l'inclinazione costante dell'elica sulle generatrici del cilindro; allora risultando:

$$\int \frac{r \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} ds = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \cot^2 \omega}} s, \quad \frac{d}{ds} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = 0,$$

la precedente relazione si riduce alla seguente:

$$a - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \cot^2 \omega}} \cdot s = - \frac{\rho \cot \omega}{\cos \theta \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \cot^2 \omega}},$$

da cui si ricava:

$$\rho = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{tang} \omega \cdot s - a \cos \theta \operatorname{tang} \omega \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \cot^2 \omega}.$$

Questa relazione dimostra che l'elica L è cilindro-conica. Ora chiamando ρ_0 il raggio di curvatura della spirale logaritmica sezione retta del cilindro, ω_0 l'inclinazione di questa curva sui raggi vettori che escono dal polo e s_0 l'arco di essa, si ha (poichè $\rho_0 = \cot \omega_0 \cdot s_0$)

$$\rho = \frac{\rho_0}{\operatorname{sen}^2 \omega} = \frac{\cot \omega_0 \cdot s_0}{\operatorname{sen}^2 \omega} = \frac{\cot \omega_0}{\operatorname{sen} \omega} \cdot \frac{s_0}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{\cot \omega_0}{\operatorname{sen} \omega} \cdot s,$$

la quale, confrontata colla precedente, dà:

$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{tang} \omega = \frac{\cot \omega_0}{\operatorname{sen} \omega}, \quad \text{d'onde:} \quad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{2 \cot \omega_0 \cot \omega}{\operatorname{sen} \omega}.$$

Di qui si ottiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \omega - \sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}}{2}},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \omega + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}}{2}},$$

e perciò:

$$\begin{aligned}
 \cos i &= \frac{\cos \omega}{\sqrt{\frac{1}{2} \{1 + \cos^2 \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}\}}} \\
 \cos i_1 &= \frac{\sqrt{\sin^4 \omega - \sin^2 \omega + 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}}{2 \sin \omega \sqrt{\frac{1}{2} \{1 + \cos^2 \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}\}}} \\
 \cos i_2 &= \frac{\sin^2 \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}}{2 \sin \omega \sqrt{\frac{1}{2} \{1 + \cos^2 \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}\}}} \\
 T &= a - s \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}}{1 + \cos^2 \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - 4 \cot^2 \omega_0 \cot^2 \omega}}} .
 \end{aligned} \tag{12}$$

Si ha dunque il teorema: « fra le eliche che si possono considerare come il luogo L dei centri di curvatura di una linea L_1 dello spazio, solamente le cilindro-coniche hanno la proprietà che i loro piani osculatori segano la sviluppabile polare di L_1 sotto angolo costante. Se ω_0, ω sono le inclinazioni (costanti) della spirale logaritmica, sezione retta del cilindro contenente l'elica, sui raggi vettori uscenti dal polo e dell'elica sulle generatrici del cilindro, il raggio T del cerchio mobile, percorrente col suo centro la curva L , è dato dalla quarta (12) e gli angoli i, i_1, i_2 , che l'asse del cerchio fa colle direzioni principali di L , sono definiti dalle prime tre (12). »

V

La linea L sia traiettoria isogonale delle rette polari di L_1 e il piano osculatore di L seghi la sviluppabile polare di L_1 sotto angolo θ costante.

Le relazioni (4) divengono, se si suppone θ costante e i costante:

$$\frac{dT}{ds} + \sin i = 0, \quad \frac{T}{\rho} \cos \theta + \cos i = 0, \quad \frac{1}{r} = \frac{\cot i}{\rho} \sin \theta,$$

dalle quali si deduce:

$$T = a - s \cdot \sin i, \quad \rho = \frac{(s \cdot \sin i - a) \cos \theta}{\cos i}, \quad r = \frac{(s \cdot \sin i - a) \cot \theta \tan i}{\cos i}.$$

Siccome da queste si ricava:

$$\frac{\rho}{r} = \operatorname{sen} \theta \cot i + \text{costante},$$

e i raggi di curvatura e di torsione di L sono funzioni lineari dell'arco s , si conclude che la linea L è un'elica cilindro-conica.

Se si rinnova il calcolo fatto precedentemente, si trova che le formole (12) che danno i valori delle quantità $\cos i$, $\cos i_1$, $\cos i_2$, T rimangono inalterate; e perciò si potrà enunciare il teorema: « *facendo muovere un cerchio nelle condizioni espresse dall'enunciato del teorema del caso particolare IV precedente, si ha la soluzione più generale del problema quando si supponga che la linea L , luogo dei centri di curvatura di L_1 , sia una traiettoria isogonale delle rette polari di L_1 e i piani osculatori di L formino un angolo costante colla sviluppabile polare di L_1 .* ».

Gli esempi esposti mostrano a sufficienza come, nei casi particolari del problema che ci occupa, sia spesso più conveniente ricorrere alle equazioni (4) anzi che alla (5), perchè la sua complicazione non permette, il più delle volte, di ridurla integrabile; questo è appunto l'inconveniente che presenta l'equazione risolvante del signor SERRET.

Parma, dicembre 1888.