Sur un Théorème d'Eisenstein. Par M. HERMITE.

[Read April 13th, 1876.]

M. Heine en donnant la démonstration du théorème célèbre d'Eisenstein, sur les développements en série des racines des équations algébriques, $f(y, x) = 0$, dans le Journal de Crelle (t. 48, page 267), y a ajouté cette remarque extrêmement importante, qu'on peut ramener les coefficients supposés commensurables d'un tel développement, à être tous entiers, sauf le premier, par le changement de x en kx .* C'est une simplification de la méthode employée par l'éminent géomètre, que je me propose d'indiquer en peu de mots. Considérons d'abord l'ensemble des divers développements ordonnés suivant les puissances entières et positives de la variable, qu'on peut tirer de l'équation proposée. J'observerai avec M. Heine, que si deux ou plusieurs d'entre eux, commençant par les mêmes termes, ont la partie commune

$$a + bx + cx^2 + \dots + kx^p,$$

la transformée: $F(z, x) = 0$, obtenue en posant

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^p + zx^{p+1},$$

aura cette propriété, que, pour $x=0$, toutes les racines seront nécessairement inégales. Cela étant, et désignant l'une d'elles supposée commensurable par z_0 , je raisonnerai sur l'équation: $F = (z + z_0, x) = 0$, qui sera par conséquent de la forme suivante:

$$\begin{aligned} m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \dots \\ + z(n + n_1x + n_2x^2 + \dots) \\ + z^2(p + p_1x + p_2x^2 + \dots) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ + z^n(s + s_1x + s_2x^2 + \dots) = 0, \end{aligned}$$

les coefficients étant des nombres entiers et n devant essentiellement être supposé différent de zéro. Soit maintenant: $z = nu$ et $x = n^2t$; il viendra après avoir divisé par n^2 :

$$\begin{aligned} m_1t + n^2m_2t^2 + \dots \\ + u(1 + nn_1t + n^3n_2t^2 + \dots) \\ + u^2(p + n^2p_1t + n^4p_2t^2 + \dots) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ + u^n n^{n-2}(s + n^2s_1t + n^4s_2t^2 + \dots) = 0, \end{aligned}$$

* Note added by the permission of M. Hermite.—This remark had already been made by Eisenstein himself. His words are, "Endlich kann statt x immer ein solches Vielfache von x gesetzt werden, dass alle Coefficienten der Reihe in ganze Zahlen uebergehen." (See Eisenstein's note in the "Monatsberichte" of the Berlin Academy for July, 1852, p. 441; or the extract from it in an earlier paper of M. Heine's in "Crelle's Journal," vol. xlv., p. 285.)—H. J. S. SMITH.

relation que j'écrirai ainsi :

$$u = - \frac{m_1 t + n^2 m_2 t^2 + \dots}{1 + n n_1 t + \dots} \\ - u^2 \frac{p + n^2 p_1 t + \dots}{1 + n n_1 t + \dots} \\ \dots \dots \dots \\ - u^n \frac{s + n^2 s_1 t + \dots}{1 + n n_1 t + \dots},$$

ou encore :

$$u = M_1 t + M_2 t^2 + \dots \\ + u^2 (P + P_1 t + P_2 t^2 + \dots) \\ + u^3 (Q + Q_1 t + Q_2 t^2 + \dots) \\ \dots \dots \dots \\ + u^n (S + S_1 t + S_2 t^2 + \dots),$$

en observant que les séries infinies introduites dans le second membre, ont toutes pour coefficients des nombres entiers. Faisant donc :

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

on obtiendra les relations :

$$a_1 = M_1, \\ a_2 = M_2 + P a_1^2, \\ a_3 = M_3 + 2 P a_1 a_2 + P_1 a_1^3 + Q a_1^3,$$

qui de proche en proche donnent les quantités a_1, a_2, a_3 , etc., en fonctions entières et à coefficients entiers de $M_1, M_2, \dots P, P_1, P_2$, etc. Nous démontrons immédiatement ainsi le résultat découvert par M. Heine, que la série infinie qui satisfait à l'équation algébrique entre t et u , a tous ses coefficients entiers. Et si l'on revient aux variables x et z , on aura cette expression :

$$z = \frac{a_1}{n} x + \frac{a_2}{n^3} x^3 + \frac{a_3}{n^5} x^5 + \dots + \frac{a_i}{n^{2i-1}} x^i + \dots,$$

que je vais considérer à l'égard de la puissance fractionnaire du binôme :

$(1-x)^{-\frac{m}{n}}$. Nous trouvons alors cette conséquence que :

$$\frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} + 1 \right) \left(\frac{m}{n} + 2 \right) \dots \left(\frac{m}{n} + i - 1 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \\ = \frac{m(m+n)(m+2n) \dots [m+(i-1)n]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot n^i} = \frac{a_i}{n^{2i-1}},$$

c'est à dire que l'expression :

$$\frac{m(m+n)(m+2n) \dots [m+(i-1)n]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} n^{i-1}$$

est toujours un nombre entier.

Le procédé, dont je viens de faire usage, s'applique également aux

relations transcendantes. Considérons par exemple l'équation de Kepler:

$$y = a + x \sin y,$$

on fera, $y = a + u$, et on mettra la transformée :

$$u = x \sin (a + u),$$

ou plutôt :

$$u = x \sin a \left(1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 - \dots\right) \\ + x \cos a \left(u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 - \dots\right),$$

sous la forme suivante :

$$u(1 - x \cos a) = x \sin a - u^2 \frac{x \sin a}{2} - u^3 \frac{x \cos a}{6} - \dots$$

Nous sommes ainsi amené à introduire, au lieu de x , la quantité $\frac{x \sin a}{1 - x \cos a}$; en la désignant par ξ pour un moment, l'équation devient

$$\text{en effet :} \quad u = \xi - u^2 \frac{\xi}{2} - u^3 \frac{\xi \cot a}{6} \dots\dots,$$

et on tire très facilement :

$$u = \xi - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{\cot a}{6} \xi^3 - \dots\dots$$

Dans les Annales de l'Observatoire de Paris, M. Serret avait déjà fait la remarque, que la valeur très simple $u = \xi$, c'est à dire :

$$y = a + \frac{x \sin a}{1 - x \cos a}$$

donnait une solution approchée du problème de Kepler, en négligeant seulement le cube de l'excentricité.

*On Correlative Pencils.** By Prof. RUDOLF STURM.

[Read April 13th, 1876.]

In two memoirs which have appeared in the "Mathematische Annalen," Vols I. and VI., I had occasion to treat the problems of homography (Projectivität) in a plane and in space. The former problem was this:—Given, in the same or in two planes, two groups of corresponding points ; to find pairs of associated centres from which these groups may be projected by homographic plane pencils of rays. In the latter problem the two groups of points were situated in two spaces, and pairs of associated axes were found, from which the groups could be projected by homographic pencils of planes. In Vol. X. of the same journal I have also published a paper on the homography

* By a pencil is here meant a twofold system of lines (or planes) passing through a point (centre). When necessary, the special pencils to which the term has been usually applied will be distinguished as "plane pencils of lines (rays)" and "axial pencils of planes."