Zur Theorie der Kegelschnittslinien.

Von **Julius Mandl**,

k. und k. Hauptmann des Geniestabes,
in Wien.

Legt man durch einen Punkt M eines Kegelschnittes K (Fig 1) eine rechtwinkelige Strahleninvolution $M(aa'bb'cc' \dots)$, so schneiden ihre Strahlenpaare den Kegelschnitt in Punktpaaren einer Involution $(AA'BB'CC' \dots)$. Die Verbindungslinien conjugierter Punkte $AA', BB', CC' \dots$ schneiden sich in einem Punkte N , welcher auf der Normalen Mn liegt, weil die Normale n und Tangente t ebenfalls conjugierte Elemente der erwähnten Strahleninvolution bilden.

Wenn der Punkt M den Kegelschnitt K beschreibt, so beschreibt der Punkt N einen zweiten Kegelschnitt K_1 , welcher mit K von gleicher Art ist und mit demselben sowohl den Mittelpunkt als auch die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden, — daher auch die Asymptoten — gemein hat. K und K_1 sind ähnliche Curven mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt als Ähnlichkeitscentrum.

Ist $O(x)$ eine Axe und $O(y)$ eine Scheiteltangente von K , so lautet die Gleichung von K bezogen auf das Coordinatensystem $O(x, y)$:

$$(1) \quad y^2 = 2px + qx^2.$$

Sind a und b die Coordinaten des Curvenpunktes M , so lautet die Gleichung von K bezogen auf das Coordinatensystem $M(\xi, \eta)$:

$$(\eta + b)^2 = 2p(\xi + a) + q(\xi + a)^2.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$(2) \quad b^2 = 2pa + qa^2$$

kann die Gleichung von K auch geschrieben werden:

$$(3) \quad \eta^2 + 2b\eta = 2(p + qa)\xi + q\xi^2.$$

Die Gleichung einer durch M gehenden Geraden MA lautet:

$$(4) \quad \eta = \tau \xi.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergeben sich die Coordinaten des Schnittpunktes A :

$$(5) \quad A \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{2(p + qa - b\tau)}{\tau^2 - q} \\ \eta_1 = \tau \xi_1 \end{array} \right.$$

Der auf MA senkrecht stehende Strahl MA' hat die Gleichung

$$(6) \quad \eta = -\frac{1}{\tau} \xi$$

daher der Schnittpunkt A' die Coordinaten:

$$(7) \quad A' \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = \frac{2\left(p + qa + \frac{b}{\tau}\right)}{\frac{1}{\tau^2} - q} \\ \eta_2 = -\frac{1}{\tau} \xi_2 \end{array} \right.$$

Die Verbindungslinie AA' hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ 2(p + qa - b\tau) & 2(p + qa - b\tau)\tau & \tau^2 - q \\ 2\left(p + qa + \frac{b}{\tau}\right) & -2\left(p + qa + \frac{b}{\tau}\right)\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau^2} - q \end{vmatrix} = 0$$

daraus folgt:

$$(8) \quad \begin{aligned} &AA' \dots [\xi \cdot bq + \eta \cdot (p + qa) + 2b(p + qa)] \left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) + \\ &+ [\xi(p + qa) + \eta b](1 - q) + 2[b^2 - (p + qa)^2] = 0. \end{aligned}$$

Man erkennt aus dieser Form der Gleichung von AA' , dass die Verbindungslinie AA' einen vom Richtungscoefficienten τ unabhängigen Fixpunkt N besitzt, durch welchen auch die Geraden BB' , CC' ... hindurchgehen. Es ist dies der Schnittpunkt der beiden Geraden:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi bq + \eta(p + qa) + 2b(p + qa) = 0 \\ \text{und} \\ [\xi(p + qa) + \eta b](1 - q) + 2[b^2 - (p + qa)^2] = 0. \end{array} \right.$$

Die Auflösung der Gleichungen (9) gibt die Coordinaten des Punktes N :

$$(10) \quad N \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{2(p+qa)}{1-q} \\ \eta &= -\frac{2b}{1-q} \end{aligned} \right.$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p+qa+q\xi}{b+\eta}$$

und daraus

$$\left. \frac{d\eta}{d\xi} \right|_{\xi=0, \eta=0} = \frac{p+qa}{b}$$

daher ist die Gleichung der Normalen Mn :

$$\eta = -\frac{b}{p+qa} \xi$$

diese Gleichung wird durch die Coordinaten des Punktes N befriedigt, weil letzterer auf der Normalen Mn liegt.

Die Coordinaten von N in Bezug auf das Coordinatensystem $O(x, y)$ lauten:

$$(11) \quad N \left\{ \begin{aligned} x &= a + \frac{2(p+qa)}{1-q} \\ y &= b - \frac{2b}{1-q} \end{aligned} \right.$$

Eliminiert man a und b aus den Gleichungen (11) und (2), so erhält man den geometrischen Ort des Punktes N :

$$(12) \quad K_1) \dots y^2 = 2p \frac{1+q}{1-q} \left(x - \frac{2p}{1-q} \right) + q \left(x - \frac{2p}{1-q} \right)^2.$$

also ebenfalls eine Kegelschnittslinie.

Vergleicht man Gleichung (12) mit (1), so erkennt man, dass die beiden Kegelschnittslinien K und K_1 eine gemeinschaftliche Axe Ox besitzen und dass dieselben Kegelschnittslinien derselben Art sind, nämlich Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln je nachdem der Coefficient q kleiner, gleich oder größer als Null ist.

Die Curve K schneidet die Abscissenaxen in zwei Punkten, deren Abscissen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{2p}{1-q}$ sind; der Mittelpunkt von K hat daher die Abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{q}{1-q} p$.

K_1 wird von der Abscissenaxe in zwei Punkten getroffen, deren Abscissen $x_3 = \frac{2p}{1-q}$ und $x_4 = -\frac{2p}{q(1-q)}$ sind; der Mittelpunkt von K_1 hat demnach die Abscisse:

$$\frac{x_3 + x_4}{2} = -\frac{p}{q}.$$

K und K_1 haben somit einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt und gemeinschaftliche Axen.

Für $q = 0$ gehen die Gleichungen (1) und (12) in:

$$(13) \quad \begin{aligned} &K) \dots y^2 = 2px \\ &K_1) \dots y^2 = 2p(x - 2p) \end{aligned}$$

über.

Das sind zwei congruente Parabeln. Transformiert man die Gleichungen (1) und (12) auf das Coordinatensystem $O_1(u, v)$ wobei $\overline{OO_1} = -\frac{p}{q}$ ist, so erhält man die Mittelpunktsleichungen von K und K_1 in den Gestalten

$$(14) \quad \begin{aligned} K) \dots \frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} &= 1 \\ K_1) \dots \frac{u^2}{A_1^2} + \frac{v^2}{B_1^2} &= 1 \end{aligned}$$

wobei

$$(15) \quad \begin{aligned} A^2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ B^2 &= -\frac{p^2}{q} \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} A_1^2 &= \frac{p^2(1+q)^2}{q^2(1-q)^2} \\ B_1^2 &= -\frac{p^2(1+q)^2}{q(1-q)^2} \end{aligned}$$

ist.

Aus den Gleichungen (15) und (16) folgt

$$(17) \quad A_1 : A = B_1 : B$$

d. h. die beiden Curven K und K_1 sind concentrisch liegende ähnliche Kegelschnittslinien.

Zwischen den Curven K und K_1 besteht noch die Beziehung, dass die zu den zusammengehörigen Punkten MN gehörigen Radien MO_1 und NO_1 gegen die Abscissenaxe gleich geneigt sind.

Ebenso schließen die Tangenten t und t_1 mit der Abscissenaxe gleiche Winkel ein.

Der Punkt N kann gefunden werden, wenn man den dem Punkte M symmetrisch liegenden Punkt M' mit O_1 verbindet und diesen Radius mit der Normalen Mn zum Schnitte bringt.

Von den Gleichungen (9) stellt die obere den Radius $M'O_1$, die untere die Tangente t_1 vor.

Die Construction der Curve K_1 ist je nach ihrer Art verschieden.

Ist K eine Parabel (Fig. 2), so ist K_1 eine der Curve K congruente um den Parameter $2p$ verschobene Parabel. Der Punkt N kann erhalten werden, wenn man das Normalenstück Mn noch einmal auf der Normale nach nN überträgt.

$$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{Mn}.$$

Ist K eine Ellipse (Fig. 3) mit den Axen $\overline{aa_1} = 2A$ und $\overline{bb_1} = 2B$, so findet man nach Gleichung (15) und (16)

$$(18) \quad B_1 = B \frac{A - \frac{B^2}{A}}{A + \frac{B^2}{A}}.$$

Zieht man daher die Diagonalen ce und df in dem der Ellipse K umschriebenen Rechtecke und fällt von b eine senkrechte auf die Diagonale df , so trifft diese aa_1 in einem Punkte g , der vom Mittelpunkte die Entfernung $\overline{Og} = \frac{B^2}{A}$ hat. Daher ist $\overline{a_1g} = A - \frac{B^2}{A}$ und $\overline{ag} = A + \frac{B^2}{A}$. Verbindet man ferner c mit g , so schneidet diese Gerade die Scheiteltangente a_1e in einem Punkte h und es ist

$$\overline{a_1h} = \overline{ac} \cdot \frac{\overline{a_1g}}{\overline{ag}} = B \cdot \frac{A - \frac{B^2}{A}}{A + \frac{B^2}{A}},$$

somit

$$\overline{a_1h} = B_1.$$

Mit Hilfe von B_1 und der Diagonalen ce und df lässt sich das der Ellipse K_1 umschriebene Rechteck construieren.

Ist endlich K eine Hyperbel (Fig. 4) und bezeichnet man mit A ihre reelle und B den Absolutwert ihrer imaginären Halbaxe, so ist nach (15) und (16) die imaginäre Halbaxe der Hyperbel K_1

$$(19) \quad B_1 = B \frac{A + \frac{B^2}{A}}{A - \frac{B^2}{A}}.$$

Zieht man daher bg senkrecht auf die Asymptote df , so ist

$$\overline{Og} = \frac{B^2}{A} \text{ demnach } \overline{ag} = A + \frac{B^2}{A} \text{ und } \overline{a_1g} = A - \frac{B^2}{A}.$$

Die Verbindungslinie eg schneidet ac in h und es ist

$$\overline{ah} = \overline{a_1e} \frac{\overline{ag}}{\overline{a_1g}} = B \frac{A + \frac{B^2}{A}}{A - \frac{B^2}{A}},$$

daher ist

$$\overline{ah} = B_1$$

Durch die Asymptoten ce und df und die Halbaxe B_1 ist die Hyperbel K_1 bestimmt.

Ein specieller Fall liegt vor, wenn die Curve K eine gleichseitige Hyperbel ist.

In diesem Falle ist $q=1$ und die Coordinaten des Punktes N werden — wie aus den Gleichungen (10) zu ersehen ist — unendlich groß.

Die Richtung, in welcher der Punkt N liegt, ist nach (10) durch

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{b}{p+a}$$

gegeben.

Nachdem N der Schnittpunkt der zum Punkte M gehörigen Normale Mn und des zum Punkte M' gehörigen Radius $M'O_1$ ist, sind diese beiden Geraden bei der gleichseitigen Hyperbel parallel zu einander (Fig. 5.).

Als die Curve K_1 ist in diesem Falle die unendlich ferne Gerade der Ebene aufzufassen. Man erkennt auch sofort dass in jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke die Hypothenuse senkrecht steht auf der im Scheitel des rechten Winkels an die Curve gezogenen Tangente.

Die hier gewonnenen Resultate lassen sich bei der Lösung mannigfacher Constructionsaufgaben verwerten, von denen im Folgenden zwei auf die gleichseitige Hyperbel Bezughabende angeführt sind.

1. Eine gleichseitige Hyperbel zu construieren, von welcher 3 Punkte P, Q, R und die Tangente t in einem derselben gegeben sind (Fig. 6.).

Construiert man ein rechtwinkliges Dreieck $PQ1$, dessen Hypothenuse $Q1$ auf t senkrecht steht, so ergibt sich in 1 ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel.

Das rechtwinklige Dreieck $PR2$, in welchem $R2 \perp t$, ergibt den Hyperbelpunkt 2.

Halbiert man die beiden parallelen Sehnen $Q1$ und $R2$ und verbindet die Halbierungspunkte mit einander, so erhält man einen Durchmesser dd' .

Weitere Hyperbelpunkte 3 und 4 ergeben sich, wenn man durch einen Punkt o des Durchmessers dd' eine zu t senkrechte Gerade und um den Mittelpunkt o einen durch P hindurchgehenden Halbkreis $3P4$ zieht.

Trägt man auf der Normalen des Punktes P die Strecke $\overline{Pm}$ nach mP' auf, so ist P' ein fernerer Punkt der Hyperbel. Die Tangente t' im Punkte P' geht durch n , den Schnittpunkt von t mit dd' .

Das rechtwinklige Dreieck $PP'5$, dessen Hypothenuse $P5 \perp t'$, ergibt den Hyperbelpunkt 5; durch Construction des rechtwinkligen Dreieckes $P'16$ erhält man 6. Die Mittelpunkte der parallelen Sehnen $5P$ und $1\dots 6$ bestimmen den Durchmesser ee' .

dd' und ee' schneiden sich im Mittelpunkte O der Hyperbel. Den zu dd' conjugierten Durchmesser AA' erhält man, wenn man aus dem Mittelpunkte O den Halbkreis APA' zieht. Die Asymptoten OK und OL erhält man, indem man aus dem Mittelpunkte P den Halbkreis KOL zieht.

2. Eine gleichseitige Hyperbel zu construieren, von welcher zwei Tangenten t und t' mit ihren Berührungspunkten P und Q gegeben sind (Fig. 7.).

Zieht man $P1 \perp PQ$ und $Q1 \perp t$, so ist 1 ein Hyperbelpunkt; desgleichen erhält man den Hyperbelpunkt 2, indem man $Q2 \perp PQ$ und $P2 \perp t'$ zieht.

Die Mittelpunkte der beiden parallelen Sehnen $P1$ und $Q2$ bestimmen einen Durchmesser dd' . Der Punkt 3 wird durch Construction von $P3 \perp P2$ und $2\dots 3 \perp t$ erhalten.

Die Mittelpunkte der parallelen Sehnen $1Q$ und $2\dots 3$ geben den Durchmesser ee' .

dd' und ee' schneiden sich im Hyperbelmittelpunkt O . Verbindet man Q mit O und macht $\overline{Q'O} = \overline{OQ}$, so ist Q' der zweite Endpunkt des durch Q hindurchgehenden Durchmessers. Der zu QQ' conjugierte Durchmesser geht durch O parallel zu t' .

Die Asymptoten OK und OL erhält man, indem man aus dem Mittelpunkte Q den Halbkreis LOK zieht.