Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten.

Von

ADOLF HURWITZ in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Durch die Untersuchungen über die Anwendung der Theorie der elliptischen Modulfunctionen auf die Zahlentheorie, mit welchen ich seit längerer Zeit beschäftigt bin, wurde ich veranlasst einen Theil derjenigen Resultate weiter zu verfolgen, welche Herr Klein in seinen neusten Publicationen über elliptische Modulfunctionen*) dargelegt hat. Ich meine hier namentlich die Sätze über das Verhalten der n -gliedrigen σ -Producte $X_\alpha(u)$ bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2 **). Diese Sätze habe ich zunächst auf den Fall auszudehnen versucht, welchen Herr Klein ausschliesst, um seinen Entwicklungen eine grössere Gleichmässigkeit zu geben, nämlich den Fall wo die Zahl n einen *geraden* Werth besitzt. Es stellte sich dabei heraus, dass auch in diesem Falle n σ -Producte $X_\alpha(u)$ so definirt werden können, dass dieselben bei linearen Transformationen der Perioden lineare homogene Substitutionen mit rein *numerischen* Coefficienten erfahren. Dieses Resultat und die Untersuchung der Substitutionsgruppe der Functionen $X_\alpha(u)$, welche entsteht, wenn man die Perioden allen möglichen linearen Transformationen unterwirft, bezeichnen den wesentlichen Inhalt der ersten fünf Paragraphen der nachfolgenden Abhandlung. Dabei habe ich jedoch auf's Neue auch die zu ungeraden

*) „Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe,“ Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. November 1884; „Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe,“ Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13, No. IV. Letztere Abhandlung soll in der Folge mit *M.* citirt werden. Man findet dort auch zahlreiche Citate auf verwandte Untersuchungen anderer Mathematiker.

**) *M.* § 15—17.

Zahlen n gehörigen $X_\alpha(u)$ behandelt, indem ich stets die beiden Fälle eines geraden und ungeraden n nebeneinander betrachte. Es erschien mir dieses wünschenswerth, um die Analogie und den Unterschied zwischen beiden Fällen deutlich hervortreten zu lassen, abgesehen davon, dass dadurch auch die Klarheit der Darstellung erheblich gewann.

Die weiteren an die erhaltenen Resultate anknüpfenden Entwicklungen sind theils gruppentheoretischer, theils functionentheoretischer Natur, wie sich überhaupt in dieser ganzen Untersuchung beide Disciplinen — Gruppentheorie und Functionentheorie — sich gegenseitig unterstützend in merkwürdiger Weise durchsetzen. Auf der einen Seite ergiebt die functionentheoretische Betrachtung jene σ -Producte $X_\alpha(u)$ und mit ihnen die Existenz gewisser endlicher Gruppen von homogenen linearen Substitutionen. Indem diese letzteren nunmehr vom gruppentheoretischen Standpunkte aus betrachtet werden (in den §§ 6, 9, 11, 13), ergeben sich rein gruppentheoretische Sätze, welche ihrerseits wieder der Functionentheorie neue Resultate zuführen, namentlich unendlich viele neue Systeme von Functionen bilden lehren, die sich bei linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2 wie die Functionen $X_\alpha(u)$ verhalten (§§ 10, 12, 14, 15).

Diese Herstellung neuer Functionssysteme gründet sich in letzter Instanz auf einen in § 8 abgeleiteten gruppentheoretischen Satz von grosser Allgemeinheit, welcher auch bei anderen Untersuchungen von Vorthail sein dürfte. Derselbe entspringt der Verallgemeinerung einer von Herrn Klein*) für zwei isomorphe Gruppen von homogenen linearen Substitutionen behandelten Aufgabe, welche solche Functionen der Variablen der einen Gruppe zu bilden verlangt, die sich wie die Variablen der anderen Gruppe substituiren. Meine Verallgemeinerung besteht darin, dass ich an Stelle von zwei Gruppen deren drei (oder auch beliebig viele), welche in einer dem Isomorphismus zweier Gruppen analogen Beziehung zu einander stehen, betrachte.

Auf die zahlentheoretischen Anwendungen der vorliegenden Untersuchungen denke ich demnächst zurückzukommen. In Rücksicht auf diese Anwendungen habe ich in den Schlussparagraphen einige Bemerkungen über jene überall endlichen Functionen des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ aufgenommen, welche unter anderem bei den Classen-

*) „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade,“ diese Annalen Bd. 15, pag. 253–255. Für meine Zwecke würden schon die von Herrn Klein entwickelten Resultate ausgereicht haben; doch hätte die Darstellung ihre Eleganz eingebüsst, wenn ich auf die oben erwähnte Verallgemeinerung hätte verzichten wollen. (Vgl. die Anmerkung zu pag. 211.)

zahlrelationen von Wichtigkeit werden. Die Untersuchung dieser Functionen ist es auch gewesen, welche mir die erste Veranlassung zu den nachfolgenden Entwicklungen gegeben hat.

§ 1.

Der Hermite'sche Satz.

Die Elemente, aus denen sich die doppelperiodischen Functionen zusammensetzen, sind bekanntlich solche eindeutige für alle endlichen Werthe des Argumentes stetige Functionen $X(u)$, welche sich bei Vermehrung des Argumentes um die Perioden ω_1, ω_2 den folgenden Gleichungen gemäss verhalten:

$$(1) \quad \begin{cases} X(u + \omega_1) = e^{a_1 u + b_1} X(u), \\ X(u + \omega_2) = e^{a_2 u + b_2} X(u). \end{cases}$$

Dabei bedeuten

$$a_1, b_1, a_2, b_2$$

Grössen, welche von u unabhängig sind. Was die Perioden angeht, so will ich gleich hier festsetzen, dass der Quotient

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

einen positiv-imaginären Bestandtheil besitzen soll, was stets (durch eventuelle Vertauschung von ω_1 mit ω_2) erreicht werden kann. Unter dieser Festsetzung ist die Grösse

$$(2) \quad \frac{a_1 \omega_2 - a_2 \omega_1}{2 \pi i} = n$$

eine positive ganze Zahl, welche angiebt wie häufig $X(u)$ im Periodenparallelogramme verschwindet. Betrachten wir nun alle Functionen, welche zu derselben Zahl n gehören! Es ist dann keine wesentliche Beschränkung, wenn wir nur diejenigen Functionen $X(u)$ berücksichtigen, für welche die Grössen

$$a_1, b_1, a_2, b_2$$

festе Werthe besitzen. Sollte nämlich $\overline{X}(u)$ zu anderen Grössen

$$a_1', b_1', a_2', b_2'$$

gehören, so würde doch bei passender Wahl der Constanten

$$M, N, k$$

die Function

$$X(u) = e^{M(u-k)^2 - N(u-k)} \overline{X}(u - k)$$

zu den ungestrichelten Grössen gehören. Es drückt sich also die allgemeinste Function $\overline{X}(u)$ in der Form

$$(3) \quad \overline{X}(u) = e^{Mu^2 + Nu} X(u + k)$$

durch die von uns allein zu betrachtenden $X(u)$ aus. Es ist aber leicht die letzteren Functionen sämmtlich anzugeben. Da nämlich der Quotient irgend zweier eine doppeltperiodische Function mit den Perioden ω_1, ω_2 vorstellt, so lassen sich die Constanten

$$q, r$$

so bestimmen, dass die Functionen

$$(4) \quad \varphi(u) = e^{qu^2 + ru} X(u)$$

sämmtlich die Periode ω_1 erhalten. Alsdann wird offenbar:

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(u + \omega_1) = & \varphi(u), \\ \varphi(u + \omega_2) = e^{au+b} \varphi(u) \end{cases}$$

und, da die Nullstellen von $\varphi(u)$ mit denen von $X(u)$ übereinstimmen, muss nach Gleichung (2)

$$a = - \frac{2\pi i}{\omega_1} \cdot n$$

sein. Setzen wir nun:

$$(6) \quad z = e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} u}, \quad h = e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} \cdot \omega_2},$$

Bezeichnungen, welche in der Folge stets beibehalten werden sollen*), so ist $\varphi(u)$ jedenfalls in der Form

$$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s z^{-s}$$

darstellbar, da diese Function die Periode ω_1 besitzt.

In Folge der zweiten Gleichung (5) ergibt sich aber

$$(7) \quad A_{s-n} = e^{-b} h^{-s} A_s$$

und diese Recursionsformel für die Coefficienten A_s zeigt, dass dieselben sich auf die n willkürlich bleibenden Grössen

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$$

reduciren. Wir wollen

$$A_s = c_s \cdot q_s$$

setzen, unter c_s eine willkürlich bleibende und unter q_s eine später fest zu bestimmende Constante verstanden. Alsdann wird die allgemeinste Function $\varphi(u)$ in der Form

*) Die Grössen z, h sind die Weierstrass'schen z^2, h^2 . (Siehe die „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.“ Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor K. Weierstrass, bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz). Im Uebrigen weichen meine Bezeichnungen, wie die des Herrn Klein, nur insofern von den Weierstrass'schen ab, als $2\omega, 2\omega', 2\eta, 2\eta'$ bez. durch $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$ ersetzt werden.

$$(8) \quad \varphi(u) = c_0 \varphi_0(u) + c_1 \varphi_1(u) + \cdots + c_{n-1} \varphi_{n-1}(u)$$

und also, in Folge der Gleichung (4), die allgemeinste Function $X(u)$ in der Form

$$(9) \quad X(u) = c_0 X_0(u) + c_1 X_1(u) + \cdots + c_{n-1} X_{n-1}(u)$$

enthalten sein. Dabei ist:

$$(10) \quad \varphi_\alpha(u) = \varrho_\alpha \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-b} h^{-\frac{n}{2}} \right)^s h^{\frac{(s\alpha-n)^2}{2n}} z^{s\alpha-n}$$

und

$$(11) \quad X_\alpha(u) = e^{-qu^2 - ru} \varphi_\alpha(u)$$

gesetzt worden.

Alle Functionen $X(u)$ setzen sich also aus n von einander unabhängigen linear und homogen zusammen, welches der Hermite'sche Satz ist.

Die vorstehende, übrigens wohlbekannte, Betrachtung ergibt aber zugleich ein (bis auf die Factoren ϱ_α) bestimmtes System von n unabhängigen Functionen

$$X_0(u), X_1(u), \dots, X_{n-1}(u).$$

Und hieran knüpft sich nun die Aufgabe, deren Erledigung unser nächstes Ziel bildet, nämlich:

Man soll diese Functionen $X_\alpha(u)$, insbesondere ihr Verhalten bei linearen Transformationen der Perioden einer eingehenden Untersuchung unterwerfen.

§ 2.

Nähere Bestimmung der Functionen $X_\alpha(u)$. Eigenschaften dieser Functionen.

Das soeben formulirte Problem wird erst dann vollständig bestimmt sein, wenn wir uns über die Wahl der festen Grössen

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}$$

schlüssig gemacht haben. Was die ersten vier Grössen angeht, so verfügen wir über dieselben, indem wir festsetzen, dass die Function

$$[\sigma(u)]^n$$

zu den von uns betrachteten Functionen $X(u)$ gehören soll. Dabei bedeutet $\sigma(u)$ die Weierstrass'sche Function, welche den Gleichungen

$$(12) \quad \begin{cases} \sigma(u + \omega_1) = e^{\eta_1 \left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \pi i} \sigma(u), \\ \sigma(u + \omega_2) = e^{\eta_2 \left(u + \frac{\omega_2}{2}\right) + \pi i} \sigma(u) \end{cases}$$

genügt, während

$$(13) \quad \frac{\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1}{2\pi i} = 1$$

ist, so dass $\sigma(u)$ eine zur Zahl $n = 1$ gehörige Function $X(u)$ vorstellt. Diese Festsetzung erweist sich für uns darum so zweckmässig, weil die Function $\sigma(u)$ bei allen linearen Transformationen der Perioden ungeändert bleibt, was wir in der Gleichung

$$(14) \quad \sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$$

zum Ausdruck bringen.

Die nunmehr bis auf die Factoren φ_α bestimmten Functionen $X_\alpha(u)$ können wir ohne Schwierigkeit durch die Function $\sigma(u)$ darstellen. Da nämlich, zufolge der Gleichung (10)

$$(15) \quad \varphi_\alpha\left(u + \frac{\omega_1}{n}\right) = e^{-\frac{2i\pi\alpha}{n}} \varphi_\alpha(u)$$

und überdies, zufolge (5),

$$(16) \quad \varphi_\alpha(u + \omega_2) = e^{au+b} \varphi_\alpha(u)$$

ist, so lässt sich $\varphi_\alpha(u)$ als eine zu den Perioden $\frac{\omega_1}{n}, \omega_2$ gehörige Function $X(u)$ auffassen. Die Zahl der incongruenten Nullstellen dieser Function findet sich (cf. Gleichung (2)) gleich

$$-\frac{a \cdot \frac{\omega_1}{n}}{2\pi i} = 1,$$

und es ist daher nach Gleichung (3) $\varphi_\alpha(u)$ und folglich auch $X_\alpha(u)$ in der Form:

$$X_\alpha(u) = \text{const.} \cdot e^{M_\alpha u^2 + N_\alpha u} \sigma\left(u + k_\alpha \mid \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$$

darstellbar. Die Grössen M_α, N, k_α bestimmen sich durch die Gleichung (15) und die Forderung, dass

$$\frac{X_\alpha(u)}{[\sigma(u)]^n}$$

die Perioden ω_1 und ω_2 besitzen soll. Das schliessliche Resultat stellt sich am einfachsten dar, wenn wir mit Herrn Klein*):

*) M. Formel (13). Es ist hier im Exponenten von e nach u das Plus- in das Minuszeichen zu verändern. Zwei andere Druckfehler finden sich in Formel (22), wo es im Exponenten von e $\frac{l\omega_1 + m\omega_2}{2}$ statt $\frac{l\omega_1 + m\omega_2}{n}$ heissen muss,

und in Formel (33), wo der Nenner $\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n$ fortgelassen ist. (Einige weitere Unrichtigkeiten sind mir von Hrn. Kiepert mitgetheilt worden; ich lasse dieselben am Schlusse der vorliegenden Arbeit folgen. — F. Klein.)

(17) $\sigma_{x,y}(u | \omega_1, \omega_2) = e^{(x\eta_1 + y\eta_2)\left(u - \frac{x\omega_1 + y\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u - x\omega_1 - y\omega_2 | \omega_1, \omega_2)$
 setzen. Man findet nämlich nach kurzer Rechnung:

$$(18) \quad X_\alpha(u) = \mu_\alpha \cdot e^{-U_\alpha u^2} \cdot \sigma_{\varepsilon, \varepsilon + \frac{\alpha}{n}}\left(u \mid \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right),$$

wobei

$$(19) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ oder } \varepsilon = 0$$

zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Die Bedeutung von G_1 ist aus der Gleichung:

$$(20) \quad G_1 = \frac{n\bar{\eta}_1 - n\eta_1}{2\omega_1} = \frac{\bar{\eta}_2 - n\eta_2}{2\omega_2}$$

ersichtlich, in welcher $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ die Werthe bezeichnen, die η_1, η_2 bei Ersetzung von ω_1 durch $\frac{\omega_1}{n}$ annehmen. Die Grössen μ_α endlich bezeichnen Constanten, deren Fixirung mit einer bestimmten Wahl der Factoren ϱ_α übereinkommt.

Wir reduciren diese Constanten auf eine einzige noch willkürlich bleibende μ , indem wir festsetzen, dass

$$(21) \quad \begin{cases} \mu_\alpha = e^{-\frac{i\pi}{2n}\alpha} \cdot e^{-\frac{5i\pi}{4}} \cdot \mu^*), \text{ oder} \\ \mu_\alpha = (-1)^\alpha \cdot \mu \end{cases}$$

sein soll, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Dadurch erreichen wir einerseits, dass die rechte Seite der Gleichung (18) sich ungeändert reproducirt, wenn die Zahl α um ein Multiplum von n wächst und dass also

$$X_{\alpha+n}(u) = X_\alpha(u)$$

wird, wenn wir, was nunmehr geschehen soll, die Function $X_\alpha(u)$ für einen beliebigen ganzzahligen Index α durch die Gleichung (18) definiren. Andererseits gestalten sich durch die getroffene Wahl der Factoren μ_α diejenigen Formeln besonders einfach, zu welchen die Vermehrung des Argumentes u um Perioden- n^{tel} Anlass giebt. Wir haben nämlich nunmehr folgende fundamentalen Relationen**), deren Beweise ich hier unterdrücken kann, da sie gänzlich elementarer Natur sind:

*) Der Factor $e^{-\frac{5i\pi}{4}}$, welcher zunächst vollständig willkürlich erscheint und an dieser Stelle auch noch hätte fortbleiben können, ist hinzugesetzt worden, um demnächst (§ 3 Gleichung 27) eine grössere Annäherung zwischen den Formeln für gerade und ungerade Werthe von n zu erzielen.

**) Vgl. *M.* Formeln (58), (59), (60), (62), (63).

$$\text{I)} \quad X_{\alpha+n}(u) = X_{\alpha}(u),$$

$$\text{II)} \quad X_{\alpha}(-u) = (-1)^n X_{n-\alpha}(u),$$

$$\text{III)} \quad X_{\alpha}\left(u + \frac{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2}{n}\right) = (-1)^{n(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{n} \alpha \lambda_1 + \frac{i\pi}{n} \lambda_1 \lambda_2} \\ \cdot e^{(\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2) \left(u + \frac{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2}{2n}\right)} \cdot X_{\alpha - \lambda_2}(u),$$

$$\text{III}^a) \quad X_{\alpha}(u) = (-1)^{n\alpha} \cdot e^{\alpha \eta_2 \left(u - \frac{\alpha \omega_2}{2n}\right)} \cdot X_0\left(u - \frac{\alpha \omega_2}{n}\right).$$

Dabei bedeuten in der Gleichung III) die Grössen

$$\lambda_1, \lambda_2$$

irgend welche ganze Zahlen; die Gleichung III^a) entsteht aus III), indem man

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \alpha$$

und sodann $u - \frac{\alpha \omega_2}{n}$ an Stelle von u setzt.

Wollen wir den Fall eines geraden n von dem eines ungeraden ausdrücklich unterscheiden, so werden die Vorzeichen

$$(-1)^n, (-1)^{n(\lambda_1 + \lambda_2)}, (-1)^{n\alpha}$$

im ersteren Falle sämtlich gleich $+1$, in letzterem der Reihe nach gleich

$$-1, (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2}, (-1)^{\alpha}.$$

§ 3.

Nullstellen der Functionen $X_{\alpha}(u)$. Darstellung dieser Functionen durch $\mathfrak{S}$ -Reihen.

Ausser den im vorigen Paragraphen entwickelten Eigenschaften der $X_{\alpha}(u)$ stelle ich hier noch zwei weitere zusammen, welche für die späteren Untersuchungen unentbehrlich sind. Erstens geben die Nullstellen unserer Functionen zu folgendem Satze Anlass:

Die Function $X_{\alpha}(u)$ verschwindet an den n Stellen:

$$(22) \quad u = \varepsilon \left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{n} \right) + \alpha \cdot \frac{\omega_2}{n} + \kappa \cdot \frac{\omega_1}{n}, \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Die Gesamtheit der Nullstellen erhält man, indem man zu diesen n Stellen noch alle ihnen (mod. ω_1, ω_2) congruenten Stellen hinzunimmt.

Dabei ist wie oben

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = 0$$

zu setzen, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Zweitens will ich die Function $X_{\alpha}(u)$ durch $\mathfrak{S}$ -Functionen dar-

stellen, eine Darstellung, welche übrigens implicite schon in Gleichung (10) enthalten ist.

Hierbei wird die Discriminante Δ von Wichtigkeit, welche durch den Ansatz:

$$(23) \quad \sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta} = h^{\frac{1}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h^r), \quad (h = e^{\frac{2i\pi\omega_2}{\omega_1}})$$

definiert werden kann. Die $\sqrt[24]{\Delta}$ ist als Function von ω_1, ω_2 offenbar nur bis auf das Vorzeichen bestimmt, während das Product $\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta}$ eine völlig bestimmte einwerthige Function des Quotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ist, dieselbe Function, welche in den fundamentalen Arbeiten des Herrn Dedekind*) mit $\eta\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ bezeichnet ist. Wir werden in der Folge unter

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^s \cdot \Delta^t$$

stets den Werth

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{s-12t} \cdot \left[\eta\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right]^{24t}$$

verstehen und dieser wird eine bestimmte einwerthige Function von ω_1, ω_2 sein, wenn nur

$$s - 12t \text{ und } 24t$$

ganze Zahlen vorstellen.

Es sollen ferner, wenn erforderlich, die Argumente ω_1, ω_2 in die Bezeichnung von Δ aufgenommen werden, so dass wir

$$\Delta(\omega_1, \omega_2)$$

statt Δ schlechthin schreiben; endlich wollen wir zur Abkürzung:

$$\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = \bar{\Delta}$$

setzen.

Dies vorausgeschickt ist nun bekanntlich

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma(u | \omega_1, \omega_2) = \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta}} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \\ \sigma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(u | \omega_1, \omega_2) = \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta}} \cdot e^{\frac{5i\pi}{4}} \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \end{cases}$$

*) „Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“ Crelle's Journal Bd. 83, pag. 265.

Siehe auch die Erläuterungen zu den Riemann'schen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen in Riemann's Werken pag. 438.

wobei

$$(25) \quad \begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \frac{1}{i} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s h^{\frac{(2s+1)^2}{8}} z^{\frac{2s+1}{2}}, \\ \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h^{\frac{s^2}{2}} z^s \end{cases}$$

ist. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (18), (19), (21) er giebt sich daher:

$$(26) \quad X_0(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}} \sqrt[3]{\Delta}} \vartheta_{1+4\varepsilon}\left(\frac{nu}{\omega_1} \middle| \frac{n\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Ziehen wir noch die Gleichung III^a) des vorigen Paragraphen zu Hülfe, so erhalten wir folgendes Resultat:

Die Functionen $X_\alpha(u)$ drücken sich durch ϑ -Functionen in nachstehender Weise aus:

$$(27) \quad X_\alpha(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}} \sqrt[3]{\Delta}} \cdot (-1)^{\alpha} z^{-\alpha} h^{\frac{\alpha^2}{2n}} \vartheta_{1+4\varepsilon}\left(\frac{nu - \alpha\omega_2}{\omega_1} \middle| \frac{n\omega_2}{\omega_1}\right),$$

wobei, wie früher $\varepsilon = \frac{1}{2}$ oder $\varepsilon = 0$ zu setzen ist, je nachdem n einen geraden oder einen ungeraden Werth besitzt.

Tragen wir für die ϑ -Functionen ihre Reihenentwicklungen (25) ein, so kommt

$$(28) \quad X_\alpha(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}} \sqrt[3]{\Delta}} \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} h^{\frac{(ns-\alpha)^2}{2n}} \cdot z^{ns-\alpha}$$

für einen geraden Werth von n , und

$$(28^a) \quad X_\alpha(u) = \mu \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}u^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi n}} \sqrt[3]{\Delta}} \cdot \frac{(-1)}{i} \cdot \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s h^{\frac{((2s+1)n-2\alpha)^2}{8n}} z^{\frac{(2s+1)n-2\alpha}{2}}$$

für einen ungeraden Werth von n *).

*) Als n -gliedriges σ -Product stellt sich $X_\alpha(u)$ in der Form

$$f \cdot \mu \cdot \sqrt[12]{\frac{\Delta^n}{\Delta}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \sigma_{\frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{n}, \frac{\alpha}{n} + \varepsilon}(u)$$

§ 4.

Lineare Transformation der Perioden.

Nunmehr komme ich zu der Hauptfrage, welche uns hier beschäftigen soll, nämlich wie sich die Functionen $X_\alpha(u)$ gegenüber linearer Transformation der Perioden verhalten. Es treten hier diejenigen Ueberlegungen ein, welche Herr Klein für die zu ungeradem n gehörigen $X_\alpha(u)$ im § 15 seiner Abhandlung „Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung, und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe“ angestellt hat und die sich ohne Weiteres auf den Fall eines geraden n übertragen. Der Vollständigkeit halber will ich diese Ueberlegungen hier wiederholen, indem ich n als eine beliebige Zahl voraussetze.

In den Quotienten

$$\frac{X_\alpha(u)}{[\sigma(u)]^n}$$

möge statt ω_1, ω_2 respective ω'_1, ω'_2 gesetzt werden, wo

$$(29) \quad \begin{cases} \omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2, \end{cases}$$

und a, b, c, d ganze Zahlen der Determinante

$$ad - bc = 1$$

sind. Bei dieser Substitution bleibt $\sigma(u)$ ungeändert; unser Quotient geht also etwa in

$$\frac{X'_\alpha(u)}{[\sigma(u)]^n}$$

über. Offenbar wird aber letzterer Bruch, wie der ursprüngliche, die Perioden ω_1, ω_2 besitzen. Daher ist nach dem Hermite'schen Satze (cf. § 1):

$$(30) \quad X'_\alpha(u) = c_{\alpha 0} X_0(u) + c_{\alpha 1} X_1(u) + \dots + c_{\alpha, n-1} X_{n-1}(u),$$

wo die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ von u unabhängige Grössen bedeuten. Diese Gleichung vertritt im Ganzen n Gleichungen, da α die Werthe $0, 1, 2, \dots, n-1$ annehmen kann. Ihr Inhalt drückt sich in Worten dahin aus, dass die Functionen $X_\alpha(u)$ eine homogene lineare Substitution mit von u unabhängigen Coefficienten erfahren, falls die Perioden einer linearen Transformation (29) unterworfen werden.

dar, wobei der Factor f gleich $e^{-\frac{n i \pi}{4} + \frac{3 i \pi}{2} \alpha}$ oder $e^{\frac{i \pi}{n} \frac{n+1}{2} \alpha}$ zu nehmen ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Von dieser Darstellung wird jedoch in der Folge kein Gebrauch gemacht. Vgl. wegen (27) und (28^a) die Gleichungen M . (71) und (73).

Was die Bestimmung der Substitutionscoefficienten $c_{\alpha\beta}$ angeht, so lässt sich dieselbe bis zu einem gewissen Punkte fast ohne jede Rechnung ausführen.

Zunächst ist klar, dass von den n Gleichungen (30) nur die erste, also

$$(30^a) \quad X_0'(u) = c_{00} X_0(u) + c_{01} X_1(u) + \dots + c_{0,n-1} X_{n-1}(u)$$

aufgestellt zu werden braucht. Denn vermöge der Gleichung III^a) im § 2 geht man von $X_0'(u)$ sofort zu $X_\alpha'(u)$ über, indem man statt u das Argument

$$u - \frac{\alpha \omega_2'}{n} = u - \frac{\alpha c \omega_1 + \alpha d \omega_2}{n}$$

einträgt. Die Coefficienten $c_{0\beta}$ lassen sich ferner im Allgemeinen sämtlich durch den ersten c_{00} ausdrücken, indem man in (30^a)

$$u + \frac{\lambda \omega_1'}{n} = u + \frac{\lambda a \omega_1 + \lambda b \omega_2}{n}$$

an Stelle von u setzt und sodann die Gleichung III) im § 2 berücksichtigt. Die Bestimmung der Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ werden wir vor allem für die beiden Transformationen:

$$(31) \quad S \begin{cases} \omega_1' = \omega_1, \\ \omega_2' = \omega_1 + \omega_2; \end{cases} \quad T \begin{cases} \omega_1' = -\omega_2, \\ \omega_2' = \omega_1 \end{cases}$$

ausführen. Wir werden dann das ganze System der Substitutionen (30) insofern beherrschen, als sich jede Transformation (29) aus S und T zusammensetzen lässt und also auch jede Substitution (30) durch Zusammensetzung der beiden zu S und T gehörigen Substitutionen erhalten werden kann. Zur Abkürzung werde für einen Augenblick

$$(32) \quad \frac{\mu}{\sqrt[n]{\Delta}} = \nu$$

gesetzt und mit ν' dasjenige bezeichnet, was aus ν bei Ersetzung von ω_1, ω_2 durch ω_1', ω_2' entsteht.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so haben wir nach (26):

$$X_0(u) = \nu \cdot \frac{e^{\frac{n \eta_1 u^2}{2 \omega_1}}}{\sqrt[n]{\frac{\omega_1}{2 \pi n}}} \vartheta_3 \left(\frac{n u}{\omega_1} \middle| \frac{n \omega_2}{\omega_1} \right)$$

und folglich

$$\begin{aligned} (S) \quad X_0'(u) &= \nu' \cdot \frac{e^{\frac{n \eta_1 u^2}{2 \omega_1}}}{\sqrt[n]{\frac{\omega_1}{2 \pi n}}} \cdot \vartheta_3 \left(\frac{n u}{\omega_1} \middle| \frac{n \omega_2}{\omega_1} + n \right) \\ &= \frac{\nu'}{\nu} X_0(u). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir der Transformation T entsprechend:

$$(T) \quad X_0'(u) = v' \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{-\omega_2}{2\pi n}}} \vartheta_3\left(\frac{-nu}{\omega_2} \middle| \frac{-n\omega_1}{\omega_2}\right),$$

und wenn wir hier die bekannte Formel für die lineare Transformation von ϑ_3 zu Hülfe ziehen, ergibt sich nach leichter Zwischenrechnung:

$$(T) \quad X_0'(u) = \frac{v'}{v} \cdot \sqrt[i]{\frac{1}{n}} \left(X_0(u) + X_1(u) + \cdots + X_{n-1}(u) \right).$$

Gehen wir nun vermöge der Gleichung III^a) von X_0' zu X_α' über, so kommt:

Den Transformationen (S) und (T) entsprechend wird respective:

$$(33) \quad \begin{cases} (S) & X_\alpha'(u) = \frac{v'}{v} \cdot e^{\frac{\alpha^2 i \pi}{n}} X_\alpha(u), \\ (T) & X_\alpha'(u) = \frac{v'}{v} \cdot \sqrt[i]{\frac{1}{n}} \cdot \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} \alpha \beta} X_\beta(u). \end{cases}$$

Ein Blick auf diese Formeln zeigt, dass die Substitutionen der X_α rein numerische Coefficienten erhalten, falls nur $\frac{v'}{v}$ beide Mal einen numerischen Werth besitzt; oder, anders ausgedrückt, falls v eine solche Function von ω_1, ω_2 ist, welche sich bei allen linearen Transformationen bis auf einen numerischen Factor reproducirt. Um dieses zu erreichen verfügen wir nun über den noch unbestimmt gebliebenen Factor μ , indem wir

$$\mu = \sqrt[s]{\Delta} \cdot \sqrt[\delta]{\Delta'}.$$

setzen; dabei werden wir s als eine *ungerade* Zahl annehmen, damit μ und also auch die $X_\alpha(u)$ *eindeutige* Functionen von ω_1, ω_2 werden.

Wenn n nicht wie soeben als gerade sondern als ungerade Zahl vorausgesetzt wird, so führt die analoge Betrachtung zu derselben Annahme für μ .

Was die Zahl s angeht, so ist es für die Untersuchung des Substitutionssystems der X_α gleichgültig, welcher Werth ihr beigelegt wird, da das Verhalten von $\sqrt[s]{\Delta}$ gegenüber linearer Transformation der Perioden bekannt ist. Jedoch ist es zweckmässig eine bestimmte Wahl zu treffen; wir wollen mit Herrn Klein*), für ungerade Werthe von n die Zahl s gleich $-n$ setzen; dagegen sei für gerade Werthe von n die Zahl s gleich 1. Es ist also definitiv:

*) M. § 10.

$$(34) \quad \begin{cases} \mu = \sqrt[n]{\Delta \cdot \Delta}, \\ \text{oder } \mu = \sqrt[n]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}, \end{cases}$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die Substitutionen (33) nehmen nunmehr folgende definitive Gestalt an:

$$(35) \quad \begin{cases} (S) & X'_\alpha(u) = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n} \alpha^2} X_\alpha(u), \\ (T) & X'_\alpha(u) = -\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} \alpha \beta} X_\beta(u), \end{cases}$$

wo unter $\sqrt[n]{n}$ der positive Werth der Quadratwurzel zu verstehen ist*).

Die entsprechenden Formeln für den Fall eines ungeraden Werthes von n lauten**):

$$(36) \quad \begin{cases} (S) & X'_\alpha(u) = e^{-\frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_\alpha(u), \\ (T) & X'_\alpha(u) = \frac{1}{\frac{n-1}{2} \sqrt[n]{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} \alpha \beta} X_\beta(u). \end{cases}$$

Auch hier ist unter $\sqrt[n]{n}$ der positive Werth der Quadratwurzel zu verstehen.

§ 5.

Untersuchung der bei linearer Transformation der Perioden entstehenden Substitutionsgruppe der $X_\alpha(u)$.

Die Gesamtheit der zu allen möglichen linearen Transformationen (29) der Perioden gehörigen Substitutionen (30) der X_α bildet eine Gruppe homogener linearer Substitutionen, welche nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen aus den beiden Substitutionen (35) bez. (36) erzeugt werden kann. Die nächstliegende Frage ist, wie viele verschiedene Substitutionen diese Gruppe umfasst. Da jeder linearen Transformation der Perioden eine bestimmte Substitution der Gruppe entspricht, so scheint es zunächst als ob die letztere unendlich viele Substitutionen enthält, da es unendlich viele verschiedene Transformationen der Perioden giebt.

*) Setzen wir hier $n=2$, so haben wir die 48 homogenen Substitutionen von der Determinante 1, welche den 24 Octaederdrehungen entsprechen (vergl. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, p. 38, 39). In der That ist $X_0(u):X_1(u)$ für $u=0$ in diesem Falle die Octaederirrationalität.

**) Vgl. M. Formeln (106) und (109).

In der That tritt aber eine Reduction dadurch ein, dass immer unzählig vielen linearen Transformationen der Perioden ein und dieselbe Substitution der X_α entspricht.

Sind S_1 und S_2 zwei verschiedene lineare Transformationen der Perioden, so wird ihnen dann und nur dann dieselbe Substitution der X_α entsprechen, falls zu der Transformation

$$S_1 S_2^{-1}$$

die identische Substitution $X'_\alpha = X_\alpha$ gehört. Wir untersuchen deshalb, wann einer Transformation

$$\begin{cases} \omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \end{cases}$$

die Identität

$$X'_\alpha(u) = X_\alpha(u)$$

entspricht. Soll dieses eintreten, so müssen jedenfalls die Nullstellen von $X'_\alpha(u)$ mit denen von $X_\alpha(u)$ übereinstimmen.

Nach § 3 muss also die Gesammtheit der Stellen

$$\varepsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{n}\right) + \alpha \frac{\omega_2}{n} + \kappa \frac{\omega_1}{n} \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

in sich übergehen, falls ω'_1, ω'_2 an Stelle von ω_1, ω_2 gesetzt werden. Diese Forderung ergiebt die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} b &\equiv 0 \pmod{2n} \\ d &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned} \right\}, \text{ bezüglich } \left. \begin{aligned} b &\equiv 0 \pmod{n} \\ d &\equiv 1 \pmod{n} \end{aligned} \right\},$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Falls nun die Zahl b durch n theilbar ist, aber über a, c, d keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden, ausser dass $ad - bc = 1$ sein soll, so erhält man ohne Schwierigkeit*)

$$X'_\alpha = e^{\frac{i\pi}{n} c d \alpha^2} \cdot (-1)^{\frac{b}{n} c \alpha} \left(\frac{n}{d}\right) \cdot e^{\frac{i\pi}{4} [(a-d)\frac{b}{n} + (c-b)d]} X_{\frac{b}{2} + d\alpha},$$

bezüglich:

$$X'_\alpha = e^{\frac{i\pi}{n} c d \alpha^2} \cdot (-1)^{(d+c+1)\alpha} \left(\frac{a}{n}\right) X_{d\alpha},$$

wobei $\left(\frac{n}{d}\right)$ und $\left(\frac{a}{n}\right)$ das Legendre-Jacobische Zeichen vorstellt. Es wird daher für einen geraden Werth von n :

$$X'_\alpha = \left(\frac{n}{d}\right) \cdot e^{\frac{i\pi}{n} c d \alpha^2 + \frac{i\pi}{4} (c-b)d} X_\alpha,$$

*) Dabei ist die Definitionsgleichung (18) zu Grunde zu legen und die Formeln, welche sich auf die lineare Transformation von $\sqrt[n]{\Delta}$ beziehen, zu berücksichtigen.

wenn $b \equiv 0 \pmod{2n}$ und $d \equiv 1 \pmod{n}$; und für einen ungeraden Werth von n kommt:

$$X_{\alpha}' = (-1)^{(d+c+1)\alpha} e^{\frac{i\pi}{n} c d \alpha^2} X_{\alpha},$$

wenn $b \equiv 0 \pmod{n}$ und $d \equiv 1 \pmod{n}$.

Untersuchen wir nun, wann die hier auftretenden Factoren für alle Werthe des Index α sich auf $+1$ reduciren*), so ergibt sich:

Soll der Transformation

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \end{cases}$$

die identische Substitution

$$X_{\alpha}'(u) = X_{\alpha}(u)$$

entsprechen, so ist dazu nothwendig und hinreichend:

1) *wenn n eine ungerade Zahl ist, dass*

$$a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{n};$$

2) *wenn n durch 4 theilbar ist, dass*

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{2n},$$

3) *wenn n durch 2 nicht aber durch 4 theilbar ist, dass*

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{2n}$$

und überdiess, falls

$$a \equiv d \equiv 1 + \kappa n \pmod{4n} \text{ ist,}$$

$$b - c \equiv \kappa(\kappa + 1)n \pmod{4n} \text{ wird.}$$

Insofern die Transformationen von ω_1, ω_2 , welche die Functionen $X_{\alpha}(u)$ ungeändert lassen, durch Congruenzen in Bezug auf den Modul $n, 2n$ oder $4n$ charakterisirt werden, sind diese Functionen nach der Ausdrucksweise des Herrn Klein als Modulfunctionen der $n^{\text{ten}}, 2n^{\text{ten}}$ oder $4n^{\text{ten}}$ Stufe zu bezeichnen.

Es ergibt sich nun ferner als Antwort auf die eingangs aufgeworfene Frage, dass die Zahl der verschiedenen Substitutionen eine endliche ist. Zur Bestimmung dieser Zahl hat man einmal zu beachten, dass die Anzahl der $(\text{mod. } n)$ betrachteten Transformationen (29) sich auf

$$f(n) = n^3 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \dots$$

beläuft, wo $p, q, \dots$ die verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen bedeuten, dass andererseits die Transformationen, welche die X_{α} un-

*) Dabei ist im Falle eines geraden $n = 2^s \cdot n'$ zu beachten, dass

$$\left(\frac{n}{d}\right) = (-1)^{s \cdot \frac{d^2-1}{8} + \frac{d-1}{2} \frac{n'-1}{2}}$$

geändert lassen, sich auf eine einzige (mod. n) bez. auf 4 Transformationen (mod. $2n$), bez. auf 8 Transformationen (mod. $4n$) reduciren.

Daher besteht die Gruppe der Substitutionen der X_a aus $N=f(n)$ oder $=\frac{1}{4}f(2n)$ oder $=\frac{1}{8}f(4n)$ Substitutionen, je nachdem $n \equiv 1$ (mod. 2) oder $n \equiv 0$ (mod. 4) oder $n \equiv 2$ (mod. 4) ist.

§ 6.

Spaltung der bisherigen Resultate in einen gruppentheoretischen und einen functionentheoretischen Theil. — Folgerungen.

Bei der gruppentheoretischen Auffassung einer Substitution spielen die Variabeln, welche der Substitution unterworfen werden, nur eine untergeordnete formale Rolle; es sind vielmehr die Coefficienten der Substitution, welche das Wesentliche der letzteren ausmachen. Lassen wir diese Auffassung Platz greifen, so können wir den rein gruppentheoretischen Theil unserer Resultate folgendermassen formuliren:

Aus der Zusammensetzung der beiden Substitutionen (35) oder (36), in welcher jetzt die Zeichen X_a, X'_a nur die Bedeutung der Substitutionsvariabeln besitzen, entsteht eine endliche Gruppe G_N von N Substitutionen. Diese Gruppe ist isomorph auf die unendliche Gruppe T_∞ bei zwei Variabeln

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2, \end{cases} \quad ad - bc = 1$$

bezogen, und zwar entspricht jeder Substitution der Gruppe T_∞ eine Substitution der Gruppe G_N , während umgekehrt jeder Substitution von G_N unendlich viele Substitutionen von T_∞ correspondiren. Diese letzteren bilden nur eine Classe (mod. n) oder 4 Classen (mod. $2n$) oder 8 Classen (mod. $4n$), je nachdem $n \equiv 1$ (mod. 2) oder $n \equiv 0$ (mod. 4) oder $n \equiv 2$ (mod. 4) ist.

Dabei sind zwei Substitutionen von T_∞ , etwa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in eine Classe modulo einer Zahl s zu rechnen, falls

$$a \equiv a', b \equiv b', c \equiv c', d \equiv d' \pmod{s} \text{ ist.}$$

Sind nun überhaupt irgend zwei isomorphe Substitutionssysteme gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, Functionen der Variabeln des einen Systems zu construiren, welche sich wie die Variabeln des anderen Systems substituiren. *)

*) Dabei muss der Isomorphismus so beschaffen sein, dass jeder Substitution des einen Systems nur eine Substitution des andern entspricht, während umgekehrt jeder Substitution dieses Systems beliebig viele Substitutionen des ersten corre-

In dem vorliegenden Falle lösen offenbar die Functionen $X_\alpha(u)$ diese Aufgabe und hiermit ist gleichzeitig der *functionentheoretische* Theil unseres Resultates gekennzeichnet, nämlich:

Die Functionen $X_\alpha(u)$ sind Functionen der Variablen ω_1, ω_2 , welche sich wie die Variablen der Gruppe G_N substituiren, wenn ω_1, ω_2 den Substitutionen der Gruppe T_∞ unterworfen werden.

Man beachte, dass hierbei das Argument u als eine feste Grösse anzunehmen ist, so dass man den unendlich vielen Werthen von u entsprechend unendlich viele Systeme von Functionen der Grösse ω_1, ω_2 erhält, welche sämmtlich unserer Aufgabe Genüge leisten.

Betrachten wir nun das Substitutionssystem (35) oder (36) vom gruppentheoretischen Standpunkte, so interessirt uns vor allem das System der contragredienten Variablen. Verlangen wir nämlich die Y'_α als homogene lineare Functionen der Y_α so zu bestimmen, dass $X'_0 Y'_0 + X'_1 Y'_1 + \dots + X'_{n-1} Y'_{n-1} = X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + \dots + X_{n-1} Y_{n-1}$ wird, so erhalten wir jeder Substitution der X entsprechend eine Substitution der „contragredienten“ Variablen Y .

Wollen wir die zu (S) und (T) gehörigen contragredienten Substitutionen aufstellen — aus welchen sich offenbar alle anderen erzeugen lassen — so bedarf es bei (S) nur eines Blickes auf die Formel (35) bez. (36) um die betreffende Substitution sofort hinzuschreiben. Dagegen hat man bei (T) zunächst die inverse Substitution zu bilden. Man verificirt ohne Weiteres, dass diese folgendermassen lauten:

$$\text{bei (35):} \quad X_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{-\frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} X'_\beta,$$

$$\text{bei (36):} \quad X_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2} \sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{-\frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} X'_\beta.$$

Nunmehr ergibt eine leichte Rechnung folgende erzeugenden Substitutionen für die contragredienten Variablen Y_α :

spondiren dürfen. — Die Aufgabe ist für den Fall, dass beide Substitutionssysteme nur endlich viele Substitutionen enthalten, von Herrn Klein (über Gleichungen 7ten und 8ten Grades, diese Annalen, Bd. 15, p. 251) gelöst worden. Da man die im Texte vorkommende Gruppe T_∞ durch die endliche Gruppe der mod. $n, 2n$ oder $4n$ betrachteten linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ersetzen kann, so sind die allgemeinen Sätze des Hrn. Klein auf den im Texte vorliegenden Fall anwendbar. Hierher gehörige Entwicklungen giebt Herr Morera unter der Voraussetzung, dass n eine ungerade Primzahl sei, in der Note „Ueber einige Bildungsgesetze etc.“, diese Annalen Bd. 25, pag. 203. Herr Morera behandelt indess nicht direct das System der X_α , sondern zieht andere in der Litteratur vorkommende Substitutionssysteme von verwandtem Charakter in Betracht.

$$(37) \quad \begin{cases} (S) & Y'_\alpha = e^{-\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{n} \alpha^2} Y_\alpha, \\ (T) & Y'_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} Y_\beta, \end{cases}$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und

$$(38) \quad \begin{cases} (S) & Y'_\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n} \cdot \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} Y_\alpha, \\ (T) & Y'_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} Y_\beta, \end{cases}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist.

Eine andere Bemerkung, welche sich beim Anblick der Substitutionen (35), (36) aufdrängt, ist diese: Bekanntermassen ist*)

$$(a) \quad i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\alpha^2 \cdot \frac{2\pi i}{n}}.$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, und

$$(b) \quad \sqrt{n} = \frac{1}{1+i} \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\alpha^2 \cdot \frac{2\pi i}{n}}$$

wenn n durch 4 theilbar ist, also auch

$$(c) \quad \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} \sum_{\alpha=0}^{2n-1} e^{\alpha^2 \cdot \frac{2\pi i}{2n}} = \frac{1}{2 \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{2n-1} e^{\alpha^2 \cdot \frac{2\pi i}{2n}}$$

wenn n durch 2 theilbar ist.

Es sind daher die Coefficienten der Substitutionen (36) als rationale

Functionen von $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar. Desgleichen können die Coefficienten der Substitutionen (35) als ebensolche

Functionen von $e^{\frac{2i\pi}{2n}}$ oder von $e^{\frac{2i\pi}{4n}}$ aufgefasst werden, je nachdem $n \equiv 0$ oder $n \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Dieser Charakter der Coefficienten bleibt offenbar auch bei der Zusammensetzung der Substitutionen gewahrt. Da nun wegen der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichungen

jede rationale Function von $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ mit rationalen Zahlencoefficienten,

*) Siehe z. B. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von E. Dedekind, I. Supplement.

welche den Werth 0 oder 1 besitzt, diesen Werth behält, wenn $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ durch $e^{\varrho \cdot \frac{2i\pi}{n}}$ ersetzt wird, wenn ϱ relative Primzahl zu n ist, so folgt:

Setzt man in den Formeln (35) bez. (36) überall e^{ϱ} an Stelle von e , wo ϱ eine relative Primzahl zu n bedeutet, so entstehen je zwei neue Substitutionen, aus deren Zusammensetzung ein zu dem Substitutionssystem der bez. X_a holodrisch isomorphes Substitutionssystem hervorgeht.

Bei dieser Ersetzung von e durch e^{ϱ} hat man nur zu beobachten, dass die Grössen $i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ durch die Formeln (a)–(c) auszu-
drücken sind. Es ist also bezüglich zu ersetzen:

$$i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n} \quad \text{durch} \quad \left(\frac{\varrho}{n}\right) \cdot i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n},$$

$$\sqrt{n} \quad \text{durch} \quad \left(\frac{n}{\varrho}\right) \cdot \sqrt{n}^*$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist. Die im vorigen Satze bezeichneten Substitutionssysteme werden also bezüglich durch die folgenden erzeugenden Substitutionen zu definiren sein:

$$(39) \quad \begin{cases} (S) & X'_a = e^{\varrho \frac{i\pi}{4} + \varrho \frac{i\pi}{n} a^2} X_a, \\ (T) & X'_a = -\frac{1}{\left(\frac{n}{\varrho}\right) \sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} \varrho^{\frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} X_{\beta} \end{cases}$$

und

$$(40) \quad \begin{cases} (S) & X'_a = e^{-\varrho \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_a, \\ (T) & X'_a = \frac{1}{\left(\frac{\varrho}{n}\right) \cdot i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} \varrho^{\frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} X_{\beta}, \end{cases}$$

wobei sich wieder das erste System auf den Fall eines geraden, das zweite auf den Fall eines ungeraden Werthes von n bezieht.

* Man kann bei der Bestimmung des Factors $\left(\frac{n}{\varrho}\right)$ statt von den Formeln (b), (c) auch von der Bemerkung ausgehen, dass, wenn $n = 2^{\varepsilon} \cdot n'$ gesetzt wird,

$$\sqrt{n} = 2^{\frac{\varepsilon}{2}} i^{-\frac{n'-1}{2}} \cdot \left(i^{\frac{n'-1}{2}} \sqrt{n'}\right)$$

der

$$= 2^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \left(e^{-\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{4}}\right) i^{-\frac{n'-1}{2}} \left(i^{\frac{n'-1}{2}} \sqrt{n'}\right)$$

ist, je nachdem ε einen geraden oder ungeraden Werth besitzt.

Ausdrücklich muss hier hervorgehoben werden, dass in diesen Formeln die Zeichen X_α nur die Rolle der Substitutionsvariablen spielen und zunächst keinerlei functionentheoretische Bedeutung besitzen. Vielmehr ist es eine neue sich hier anknüpfende Frage, wie die Substitutionssysteme (39) und (40) functionentheoretisch zu realisiren sind, also die Frage nach solchen Functionen von ω_1, ω_2 , welche sich bei den linearen Transformationen (S) und (T) der Grössen ω_1, ω_2 gemäss den Gleichungen (39) bez. (40) substituiren.

Solche Functionen (welche wir in der Folge auf mannigfache Weise bilden werden) lassen sich für gewisse Werthe der Zahl ρ sehr leicht angeben. Man setze nämlich

$$(41) \quad Z_\alpha(u) = X_{\kappa\alpha}(u), \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

wo κ irgend eine relative Primzahl zu n bedeutet, so dass die Functionen $Z_\alpha(u)$ in ihrer Gesamtheit mit den $X_\alpha(u)$ identisch sind. Dann ergibt sich für die $Z_\alpha(u)$ folgendes Substitutionssystem:

$$(42) \quad \begin{cases} (S) & Z'_\alpha(u) = e^{x^2 \left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n} \alpha^2 \right)} Z_\alpha(u), \\ (T) & Z'_\alpha(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{x^2 \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} Z_\beta(u), \end{cases}$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und

$$(42a) \quad \begin{cases} (S) & Z'_\alpha(u) = e^{-x^2 \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} Z_\alpha(u) \\ (T) & Z'_\alpha(u) = \frac{1}{\frac{n-1}{2} \sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{x^2 \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} Z_\beta(u), \end{cases}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist. Die Functionen $Z_\alpha(u)$ realisiren also die Systeme (39), (40), falls die Zahl ρ eine Quadratzahl, oder einer solchen modulo $2n, 4n$ oder n congruent ist.

Hat n einen geraden Werth, so führen wir durch die Gleichungen

$$(43) \quad W_\alpha(u) = (-1)^\alpha X_{\kappa\alpha + \frac{n}{2}}(u), \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

in welchen κ wieder eine relative Primzahl zu n bedeutet, ein Functionssystem ein, welches sich folgendermassen substituirt:

$$(44) \quad \begin{cases} (S) & W'_\alpha(u) = e^{(x^2+n) \left(\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n} \alpha^2 \right)} W_\alpha(u), \\ (T) & W'_\alpha(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{(x^2+n) \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} W_\beta(u). \end{cases}$$

Es werden also die Substitutionssysteme (39), in welchen ϱ einem Werthe der Form $\kappa^2 + n$ modulo $2n$ oder $4n$ congruent ist, durch die Functionen $W_\alpha(u)$ realisirt.

§ 7.

Grössen erster Stufe, welche aus den Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Es sei gestattet hier beiläufig einige Folgerungen aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zu ziehen, welche mir der Beachtung werth erscheinen. Wenn die Zahl κ so bestimmt werden kann, dass die Congruenz

$$\kappa^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

erfüllt ist, so geht offenbar das Substitutionssystem (42a) in das der contragredienten Variabeln Y_α (38) über. Es wird dann folglich

$$(45) \quad \sum_0^{n-1} X_\alpha(u) Z_\alpha(v) = \sum_0^{n-1} X_\alpha(u) X_{\kappa\alpha}(v)$$

bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 invariant bleiben, also eine Grösse „erster Stufe“ sein, wenn wir die Terminologie des Herrn Klein gebrauchen.

Ist n nicht, wie soeben vorausgesetzt wurde, eine ungerade sondern eine gerade Zahl, für welche die Congruenz

$$\kappa^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

lösbar ist (woraus folgt, dass n das Doppelte einer ungeraden Zahl sein muss), so wird der Ausdruck (45) zwar bei (T) nicht aber bei (S) invariant bleiben. Jedoch tritt die Invarianz bei S^2 wieder ein und der Ausdruck (45) ist also in dem jetzt betrachteten Falle eine Invariante der durch Zusammensetzung von (T) und (S^2) entstehenden Gruppe. Diese besteht, wie nach bekannten Principien leicht festzustellen ist, aus allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 , welche (mod. 2) mit (T) oder (S^2) in dieselbe Classe gehören.

Wir können aber auch für gerade Werthe von n Invarianten für die ganze Gruppe der linearen Transformationen bilden.

Eine leichte Rechnung ergiebt nämlich, dass der Ausdruck

$$\sum_0^{n-1} X_\alpha(u) W_\alpha(v) = \sum_0^{n-1} (-1)^\alpha X_\alpha(u) X_{\kappa\alpha + \frac{n}{2}}(v)$$

bei (T) invariant ist und bei (S) das Vorzeichen wechselt.

Dieselbe Eigenschaft besitzt $\sqrt{\Delta}$; folglich wird

$$(46) \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_0^{n-1} (-1)^\alpha X_\alpha(u) X_{\alpha + \frac{n}{2}}(v)$$

ein absolute Invariante sein.

Man wird vermuthen, dass die Functionen (45) und (46) sich in einer solchen Form darstellen lassen, in welcher ihre Invarianteneigenschaft sofort in die Augen springt. Es gelingt dies in der That auf folgendem Wege.

Da zu jeder Wurzel κ der Congruenz

$$\kappa^2 \equiv -1 \pmod{n}$$

eine eigentliche Darstellung der Zahl n in der Form

$$(47) \quad n = \nu^2 + \varrho^2$$

gehört, welche dadurch als zu jener Wurzel gehörig charakterisirt ist, dass die Congruenz

$$\varrho \equiv \kappa \nu \pmod{n}$$

besteht, so können wir die Functionen (45) auch durch die Summe

$$(48) \quad J = \sum_0^{n-1} X_{\nu\alpha}(u) \cdot X_{\varrho\alpha}(v)$$

darstellen. Man trage hier die Reihenentwickelungen (28a) der X_α ein, wobei der Werth (34) von μ zu berücksichtigen ist; dann kommt:

$$(49) \quad J = - \frac{e^{\frac{n\eta_1}{2\omega_1}(u^2+v^2)}}{2\pi n \cdot \sqrt{\Delta^n}} \sum (-1)^{\alpha(\varrho+\nu)+s+s'} h^{\frac{s^2+s'^2}{8n}} \frac{S}{z^2} \frac{S'}{z_1^2},$$

wo das Summenzeichen über α, s, s' zu erstrecken, $z_1 = e^{\frac{2i\pi v}{\omega_1}}$ gesetzt ist und unter S, S' die Ausdrücke

$$S = (2s+1)n - 2\nu\alpha,$$

$$S' = (2s'+1)n - 2\varrho\alpha$$

zu verstehen sind. Wir führen jetzt neue Summationsbuchstaben x und y ein, indem wir

$$S = \nu x + \varrho y,$$

$$S' = \varrho x - \nu y$$

setzen. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass jede zulässige Combination S, S' , und jede nur einmal entsteht, wenn x, y alle ungeraden Zahlen durchlaufen. Ferner zeigt sich, dass der Exponent von -1 in der Gleichung (49) congruent

$$\frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} + \varrho - 1 \pmod{2} \quad \text{ist.}$$

Daher folgt:

$$(50) \quad J = (-1)^e \cdot \frac{e^{\frac{n}{2} \frac{\eta_1}{\omega_1} (u^2 + v^2)}}{\frac{\omega_1}{2\pi n} \sqrt{\Delta^n}} \sum (-1)^{\frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2}} h^{\frac{x^2+y^2}{8}} \frac{v x + \varrho y}{z^{\frac{x+y}{2}}} \frac{\varrho x + v y}{z_1^{\frac{x+y}{2}}}.$$

Die Summe rechter Hand zerfällt aber sofort in das Product zweier ϑ -Reihen. Substituirt man für diese aus den Gleichungen (24), (25) ihre Ausdrücke durch die σ -Function, so kommt nach leichter Rechnung folgendes Resultat, bei dessen Ausspruch das Zeichen J wieder durch seinen Werth (48) ersetzt werden möge:

Bezeichnet n eine ungerade Zahl, welche eine eigentliche Darstellung, in der Form

$$n = v^2 + \varrho^2$$

zulässt, so hat man für die zu dieser Zahl n gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ die nachstehende Relation:

$$(51) \quad \sum_0^{n-1} X_{\alpha}(u) \cdot X_{\varrho\alpha}(v) = \frac{(-1)^{e+1} \cdot n}{\Delta^{\frac{n-1}{4}}} \sigma(vu + \varrho v) \cdot \sigma(\varrho u - v v).$$

In dieser Darstellung tritt die Invarianteneigenschaft der Summe linker Hand unmittelbar in Evidenz, da die einzelnen Factoren der rechten Seite bei allen linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2 un geändert bleiben.

Auf analoge Weise lassen sich die Summen (46) umformen, wobei man zu folgendem Satze gelangt:

Bezeichnet n das Doppelte einer ungeraden Zahl, welches eine eigentliche Darstellung in der Form

$$n = v^2 + \varrho^2$$

zulässt, so hat man für die zu dieser Zahl n gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ die nachstehende Relation:

$$(52) \quad \frac{1}{V\Delta} \sum_0^{n-1} (-1)^\alpha X_{\alpha}(u) \cdot X_{\varrho\alpha + \frac{\pi}{2}}(v) = (-1)^{\frac{v+\varrho+2}{2}} \cdot n \cdot \sigma(vu + \varrho v) \sigma(\varrho u - v v).$$

Aus den Relationen (51) und (52), welche schon als bemerkenswerthe ϑ -Relationen Interesse verdienen, lassen sich eine grosse Zahl weiterer Resultate gewinnen*), worauf ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehen will, um mich nicht zu sehr von dem Zwecke dieser Abhandlung zu entfernen.

*) Z. B. Durch Vermehrung von u und v um n^{te} Theile von Perioden.

§ 8.

Aufstellung und Lösung eines gruppentheoretischen Problems.

Die Beziehung, welche man als Isomorphismus zweier Gruppen zu bezeichnen pflegt, lässt sich dahin erklären, dass es möglich sei, die Substitutionen der Gruppen zu paaren, dergestalt, dass jedes Paar aus einer Substitution R_1 der einen und einer Substitution R_2 der anderen Gruppe besteht und dass gleichzeitig mit den Paaren (R_1, R_2) (R_1', R_2') auch das Paar $(R_1 R_1', R_2 R_2')$ auftritt. Ueberdiess wird noch verlangt, dass jede in den beiden Gruppen enthaltene Substitution mindestens in Einem Paare vorkommt, weil man es sonst nicht mit den ganzen Gruppen, sondern mit Untergruppen derselben zu thun hätte.

Diese auf zwei Gruppen bezügliche Erklärung lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass man beliebig viele Gruppen simultan betrachtet. Es wird genügen, dieses für den Fall dreier Gruppen näher zu begründen.

Unter einem „Tripel“ verstehe man die Zusammenstellung von drei Substitutionen R_1, R_2, R_3 , welche der Reihe nach der ersten, zweiten, dritten Gruppe angehören. Wenn nun ein System von Tripeln existirt von solcher Beschaffenheit, dass gleichzeitig mit den Tripeln (R_1, R_2, R_3) und (R_1', R_2', R_3') auch $(R_1 R_1', R_2 R_2', R_3 R_3')$ dem Systeme angehört und dass jede den Gruppen angehörige Substitution mindestens in einem Tripel vorkommt, so ist hierdurch im Allgemeinen eine bestimmte Beziehung zwischen den drei Gruppen gekennzeichnet. Diese Beziehung ist die Verallgemeinerung des Begriffes „Isomorphismus zweier Gruppen“, welche ich darlegen wollte.

Es giebt einen Fall, in welchem aus der Existenz eines Tripelsystems (ebenso wie bei zwei Gruppen aus der Existenz eines Paar-systems) keinerlei innere Beziehung zwischen den Gruppen gefolgert werden kann, nämlich den Fall, in welchem je drei (zwei) beliebig aus den Gruppen ausgewählte Substitutionen ein Tripel (Paar) bilden, welches dem Systeme angehört.

Aus der Erklärung des Tripelsystems und dem Begriffe der Gruppe ergeben sich die folgenden Sätze:

Man theile die N Tripel eines Systems in Classen ein, indem man in eine Classe alle diejenigen rechnet, welche ein und dieselbe Substitution R_1 der ersten Gruppe enthalten. Es entstehen dabei offenbar so viele Classen, als die erste Gruppe Substitutionen R_1 enthält, d. h. als die Ordnung n_1 der ersten Gruppe angiebt. Man beweist nun leicht, dass in jeder Classe ebenso viele Tripel enthalten sind, wie in jeder anderen. Nennen wir diese Anzahl μ_1 , so wird

$$n_1 \cdot \mu_1 = N$$

und ebenso

$$n_2 \cdot \mu_2 = n_3 \cdot \mu_3 = N$$

sein, wenn n_2, μ_2, n_3, μ_3 die analoge Bedeutung für die zweite, dritte Gruppe besitzen, wie n_1, μ_1 für die erste Gruppe.

Theilen wir ferner die oben erwähnten Classen in Unterclassen, indem wir immer diejenigen Tripel zusammenfassen, welche ein und dieselbe Substitution R_2 der zweiten Gruppe enthalten, so umfasst auch jede Unterclassen eben so viele Tripel wie jede andere. Wir bezeichnen diese Zahl mit ν_3 . Die analoge Bedeutung besitzen die Zeichen ν_1, ν_2 .

Wir können die Zahlen μ, ν ersichtlich auch so definiren:

Es giebt $\mu_1 (\mu_2, \mu_3)$ den Grad der Beweglichkeit an, welcher einem Tripel bleibt, wenn wir die erste (zweite, dritte) Substitution des Tripels fixiren. Ferner giebt $\nu_3 (\nu_1, \nu_2)$ den Grad der Beweglichkeit des Tripels an, wenn die erste und zweite (zweite und dritte, erste und dritte) Substitution des Tripels fixirt wird.

Da endlich in jedem Tripelsystem das Tripel $(1, 1, 1)$ auftritt, so kann z. B. ν_1 auch als die Zahl der verschiedenen in dem Systeme enthaltenen Tripel $(R_1, 1, 1)$ erklärt werden.

Auf eine weitere Untersuchung der Tripelsysteme brauche ich hier nicht einzugehen, da dieselbe für die folgenden Entwicklungen nicht nöthig ist.

Es seien jetzt die drei Gruppen, aus welchen das Tripelsystem gebildet ist, Gruppen von homogenen linearen Substitutionen.

Die Variablen der ersten, zweiten, dritten Gruppe seien bez.

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; \quad y_0, y_1, \dots, y_{m-1}; \quad z_0, z_1, \dots, z_{p-1}.$$

Ferner werde die Voraussetzung eingeführt, dass jedes Tripel des Systems durch seine zweite und dritte Substitution eindeutig bestimmt ist; mit anderen Worten, es werde vorausgesetzt, dass die Zahl $\nu_1 = 1$ ist. Dann kann man die Aufgabe stellen, *solche n Functionen der Variablen y, z zu bilden, welche sich wie die Variablen x substituiren, wenn die y und z den Substitutionen R_2, R_3 , welche in den Tripeln (R_1, R_2, R_3) vorkommen, simultan unterworfen werden.*

Man wird in dieser Aufgabestellung sofort die Verallgemeinerung derjenigen Frage erkennen, welche Herr Klein bei zwei isomorphen Gruppen linearer Substitutionen behandelt hat, und welche oben im § 6 berührt wurde. In der That führt der Gedankenkanal des Herrn Klein in einer durch die veränderte Fragestellung gebotenen Modification zur Lösung unserer Aufgabe.

Man bezeichne nämlich mit $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ die den $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ contragredienten Variablen, so wird jeder Substitution der x eine solche der Variablen u correspondiren. Nun bilde man eine beliebige Function f der Variablen y, z und wende auf das Product

$$f \cdot u_0$$

der Reihe nach alle N Substitutionstriplet $(R_1 R_2 R_3)$ an; d. h. man unterwerfe simultan die Variablen y der Substitution R_2 , die Variablen z der Substitution R_3 und die Variable u_0 derjenigen Substitution, welche der Substitution R_1 der Variablen x correspondirt. Dabei gehe das Product $f \cdot u_0$ der Reihe nach über in:

$$f^{(1)} \cdot u_0^{(1)}, f^{(2)} \cdot u_0^{(2)}, \dots, f^{(N)} \cdot u_0^{(N)}.$$

Die Summe dieser Grössen bleibt offenbar bei der Anwendung irgend eines Tripels (R_1, R_2, R_3) ungeändert. Andererseits lässt sich diese Summe aber in der Form

$$F_0(y, z) \cdot u_0 + F_1(y, z) \cdot u_1 + \dots + F_{n-1}(y, z) \cdot u_{n-1}$$

darstellen, da die Ausdrücke $u_0^{(i)}$ lineare Functionen von $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ bedeuten.

Es werden nun die Functionen

$$F_0(y, z), F_1(y, z), \dots, F_{n-1}(y, z)$$

unsere Aufgabe lösen, denn sie substituiren sich contragredient zu den Variablen u , also genau wie die Variablen x .

Das angegebene Verfahren wird natürlich dann illusorisch, wenn die Functionen $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ identisch verschwinden, und es ist daher die Wahl der Function f so zu beschränken, dass dieses identische Verschwinden nicht eintritt.

§ 9.

Anwendung auf die Substitutionsgruppen des § 6.

Die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen finden eine unmittelbare Anwendung auf die Substitutionssysteme der X_α , welche wir oben ausführlich abgeleitet und untersucht haben. Denn da alle diese Substitutionssysteme auf die Gruppe der linearen Transformationen von ω_1, ω_2 bezogen sind, so dass jeder solchen linearen Transformation eine ganz bestimmte Substitution jedes Systemes X_α entspricht, so sind die letzteren Substitutionssysteme auch auf einander leicht zu beziehen. Hierbei wollen wir, um die zu verschiedenen Werthen der Zahl n gehörenden Systeme X_α bequem von einander unterscheiden zu können, diese Zahl als oberen Index in die Bezeichnung der Variablen aufnehmen.

Es werden hiernach

$$X_0^{(n)}, X_1^{(n)}, \dots, X_{n-1}^{(n)},$$

$$X_0^{(p)}, X_1^{(p)}, \dots, X_{p-1}^{(p)},$$

$$X_0^{(r)}, X_1^{(r)}, \dots, X_{r-1}^{(r)},$$

die Variabeln dreier Substitutionssysteme bedeuten, welche bezüglich zu den Zahlen n, p, r gehören.

Sucht man nun zu jeder linearen Transformation von ω_1, ω_2 die entsprechenden Substitutionen R_1, R_2, R_3 der Variabeln $X^{(n)}, X^{(p)}, X^{(r)}$ resp., so werden die verschiedenen Tripel

$$(R_1, R_2, R_3),$$

welche auf diese Weise entstehen, ein Tripelsystem im Sinne des vorigen Paragraphen bilden.

Es seien nun n, p, r *ungerade* Zahlen; dann lässt sich leicht feststellen unter welcher Bedingung das einzelne Tripel durch die beiden Substitutionen R_2, R_3 fixirt ist. Alle linearen Transformationen

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2, \end{cases}$$

zu welcher eine bestimmte Substitution der $X^{(p)}$ gehört, sind nämlich dadurch gekennzeichnet, dass die Coefficienten a, b, c, d feste Werthe (mod. p) besitzen; ebenso müssen dieselben feste Werthe (mod. r) besitzen, damit den Transformationen eine bestimmte Substitution der $X^{(r)}$ entspricht. Soll nun einem Paare bestimmter Substitutionen der $X^{(p)}$ und $X^{(r)}$ eine Substitution der $X^{(n)}$ unzweideutig correspondiren, so ist erforderlich und hinreichend, dass die Zahlen a, b, c, d , wenn sie feste Werthe (mod. p) und (mod. r) besitzen, von selber auch festen Werthen (mod. n) congruent werden. Mit anderen Worten, die in Rede stehende Bedingung lautet:

„Das kleinste gemeinsame Multiplum von p und r muss durch n theilbar sein.“

Ist diese Bedingung erfüllt, so lehrt die allgemeine Methode des vorigen Paragraphen solche Functionen der Grössen $X^{(p)}$ und $X^{(r)}$ finden, welche sich wie die Grössen $X^{(n)}$ substituiren. Die einfachsten Functionen dieser Art werden entstehen, wenn die Function f , auf welche jene Methode angewendet wird, als eine bilineare Function der Variabeln $X^{(p)}, X^{(r)}$ angenommen wird. Es ergeben sich dann, wie aus der Natur der Methode hervorgeht, auch die Functionen $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ als bilineare Ausdrücke, also in der Form:

$$F_\alpha = \sum_0^{p-1} \sum_0^{r-1} c_{\lambda\mu}^\alpha X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(r)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Statt nun diese Ausdrücke vermöge der allgemeinen Methode des vorigen Paragraphen herzustellen, ist es einfacher die Coefficienten $c_{\lambda\mu}^\alpha$ aus der Forderung zu bestimmen, dass die Summen F_α sich wie die $X^{(n)}$ substituiren sollen.

Es möge jedoch diese Bestimmung nur für den speciellen Fall

durchgeführt werden, dass p relative Primzahl zu n und $r = np$ ist. Ferner sollen in den erzeugenden Substitutionen (40) für die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ die Zahl $\rho = 1$ vorausgesetzt werden (eine Beschränkung, welche nur behufs grösserer Durchsichtigkeit der folgenden Betrachtungen gemacht wird), während für die $X^{(n)}$ diese Zahl vorläufig unbestimmt bleibe. Wir können unsere Aufgabe jetzt offenbar so formuliren:

„Man soll die Coefficienten $c_{\lambda\mu}^\alpha$ in den n Summen:

$$(53) \quad F_\alpha = \sum_0^{p-1} \sum_0^{np-1} c_{\lambda\mu}^\alpha X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)} \quad (\alpha=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

so bestimmen, dass bei simultaner Anwendung der Substitution (S) bez. (T) auf die Variablen $X^{(p)}$, $X^{(np)}$ sich die Summen F_α ebenso substituiren, wie die Variablen $X^{(n)}$ bei Anwendung der Substitution (S) bez. (T).“*)

Der Substitution (S) entsprechend geht nun F_α über in

$$F'_\alpha = \sum \sum c_{\lambda\mu}^\alpha e^{-\frac{2i\pi}{p} \frac{\lambda(p-\lambda)}{2} - \frac{2i\pi}{np} \frac{\mu(np-\mu)}{2}} X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)};$$

wir verlangen aber, dass

$$F'_\alpha = e^{-\frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} F_\alpha = \sum \sum c_{\lambda\mu}^\alpha e^{-\frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)}$$

*) Betrachtet man die $p \cdot np$ Producte

$$Y_{\lambda\mu} = X_\lambda^{(p)} X_\mu^{(np)},$$

so erfahren dieselben homogene lineare Substitutionen, wenn die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ ihren simultanen Substitutionen unterworfen werden. Das auf diese Weise entstehende Substitutionssystem der $Y_{\lambda\mu}$ ist nun, wie leicht zu sehen, in der Art isomorph auf das System der $X^{(n)}$ bezogen, dass jeder Substitution der $Y_{\lambda\mu}$ nur eine Substitution der $X^{(n)}$ entspricht. Wir werden also nach der Methode des Herrn Klein solche Functionen, z. B. auch lineare Functionen F_α , der $Y_{\lambda\mu}$ bestimmen können, welche sich wie die $X^{(n)}$ substituiren. So gelangen wir auch durch diese kurze Betrachtung zu der oben formulirten Aufgabe. Im Texte habe ich es vorgezogen einen umständlicheren Weg einzuschlagen, um zu zeigen, wie sich unsere Aufgabe aus allgemeineren Fragestellungen (§ 8) entwickelt. —

Ein einfacheres hierhergehöriges Problem besteht in der Forderung, solche lineare Functionen der $X^{(np)}$ zu bilden, welche sich wie die Variablen $X^{(n)}$ substituiren. Diese Aufgabe lässt sich in eine interessante und zu ihrer Behandlung nützliche geometrische Form bringen. Man betrachte die Verhältnisse der $X^{(np)}$ als Coordinaten eines Raumes von $np - 1$ Dimensionen; dann bedeuten die Substitutionen der $X^{(np)}$ gewisse Collineationen dieses Raumes. Unsere Aufgabe kommt nun auf die Frage nach solchen Ebenen hinaus, welche bei einer bestimmten, in der Gruppe jener Collineation enthaltenen Untergruppe invariant bleiben. Für den Fall $p=3$ ist die Aufgabe leicht zu lösen und ergiebt jenes System der Variablen $\bar{X}_\gamma$, welches Herr Klein in M. p. 395 aufgestellt hat.

werde. Es muss folglich

$$c_{\lambda\mu}^{\alpha} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{p} \frac{\lambda(p-\mu)}{2}} - \frac{2i\pi}{np} \frac{\mu(np-\mu)}{2} = c_{\lambda\mu}^{\alpha} e^{-\frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}$$

sein; d. h. es muss jedes Mal

$$c_{\lambda\mu} = 0$$

genommen werden, wenn nicht

$$\frac{\lambda(p-\mu)}{2p} + \frac{\mu(np-\mu)}{2np} - \varrho \cdot \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}$$

eine ganze Zahl ist. Letzteres wird dann und nur dann eintreten, wenn die Congruenz

$$n\lambda^2 + \mu^2 \equiv \varrho p \alpha^2 \pmod{np},$$

oder — da n und p als relative Primzahlen vorausgesetzt wurden — wenn gleichzeitig die Congruenzen

$$(54) \quad \begin{cases} \mu^2 \equiv \varrho p \alpha^2 \pmod{n}, \\ \mu^2 + n\lambda^2 \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

bestehen. Sobald also eine Werthcombination λ, μ, α diese Congruenzen nicht erfüllt, ist der betreffende Coefficient $c_{\lambda\mu}^{\alpha}$ gleich 0 zu setzen.

Indem wir jetzt bestimmen, dass ein beliebiger Index μ in dem Zeichen $X_{\mu}^{(np)}$ stets auf seinen kleinsten positiven Rest $\pmod{np}$ reducirt werden soll, können wir an Stelle von μ vermöge der Gleichung

$$(55) \quad \mu = n\sigma + p\beta$$

zwei neue Summationsbuchstaben σ und β einführen, von welchen der erstere ein vollständiges Restsystem $\pmod{p}$, der letztere ein vollständiges Restsystem $\pmod{n}$ durchlaufen muss.

Die Congruenzen (54) gehen nun in die folgenden über:

$$(56) \quad \begin{cases} p\beta^2 \equiv \varrho \alpha^2 \pmod{n}, \\ \lambda^2 \equiv -n\sigma^2 \pmod{p}. \end{cases}$$

Nehmen wir irgend einen nicht verschwindenden Coefficienten $c_{\lambda\mu}^{\alpha}$ und bezeichnen den zugehörigen Werth von β mit κ , so folgt aus den vorstehenden Congruenzen:

$$\varrho \equiv p \cdot \kappa^2 \pmod{n}.$$

Wir sehen also, dass die Zahl ϱ , welche in dem Substitutionssysteme der $X^{(n)}$ vorkommt, einer Einschränkung unterworfen ist: der Quotient $\frac{\varrho}{p}$ muss $\pmod{n}$ einem Quadrate congruent sein. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir sogar

$$(57) \quad \varrho \equiv p \pmod{n}$$

voraussetzen, da in dem Substitutionssysteme (40) der $X^{(n)}$ die Ersetzung von X_{α} durch $X_{\alpha\alpha}$ auf die Aenderung der Zahl ϱ in $\varrho\kappa^2$

hinauskommt. Wir wollen nun annehmen, dass mindestens in Einer der Summen F_α ein $X_\lambda^{(p)}$ wirklich vorkommt, dessen Index λ relative Primzahl zu p ist. (Ob diese Annahme eine nothwendige ist, lasse ich dahingestellt; möglicherweise werden durch dieselbe gewisse Functionssysteme F_α ausgeschlossen). Dann ergibt die zweite der Congruenzen (56), dass

$$(58) \quad 1 \equiv -nq^2 \pmod{p}$$

durch eine ganze Zahl q gelöst werden kann. Die Zahlen n und p sind also der Bedingung zu unterwerfen, dass $-n$ quadratischer Rest von p ist. Unter Berücksichtigung von (57), (58) gehen die Bedingungen (56) über in:

$$(59) \quad \begin{cases} \beta^2 \equiv \alpha^2 \pmod{n}, \\ \sigma^2 \equiv q^2 \lambda^2 \pmod{p}, \end{cases}$$

und wir werden alle Coefficienten $c_{\lambda, n\sigma + p\beta}^{(\alpha)}$ gleich Null zu setzen haben, deren Indices die vorstehenden Congruenzen nicht erfüllen.

Statt dessen wollen wir nun sogar alle diejenigen Coefficienten gleich Null setzen, für welche die Congruenzen

$$(60) \quad \begin{cases} \beta \equiv \alpha \pmod{n}, \\ \sigma \equiv q\lambda \pmod{p} \end{cases}$$

nicht bestehen. Dadurch scheiden wir möglicherweise wieder gewisse Functionssysteme F_α aus, indem wir mehr Coefficienten $c_{\lambda\mu}^\alpha$ gleich Null annehmen, als unbedingt nöthig ist.

Indem wir alle verschwindenden Coefficienten fortlassen, für die übrigen neue Bezeichnungen einführen und (55) sowie (60) beachten, erhalten wir nun für die F_α folgenden Ansatz:

$$(61) \quad F_\alpha = \sum_0^{p-1} c_\lambda^\alpha X_\lambda^{(p)} X_{nq\lambda + p\alpha}^{(np)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n-1).$$

Hier sind jetzt die Coefficienten c_λ^α noch so zu bestimmen, dass auch bei Anwendung der Substitution (T) die F_α sich wie die $X^{(n)}$ substituieren.

Bei der Anwendung von (T) geht nun F_α über in:

$$\frac{1}{i^{\frac{p-1}{2} + \frac{np-1}{2}} p \sqrt[n]{n}} \sum_{\lambda, \nu, \mu} c_\lambda^\alpha e^{\frac{2i\pi}{p} \lambda \nu + \frac{2i\pi}{np} [nq\lambda + p\alpha]\mu} X_\nu^{(p)} X_\mu^{(np)}$$

und dieser Ausdruck soll gleich

$$\frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt[n]{n}} \sum_{\beta} e^{\frac{2i\pi}{n} p\alpha\beta} F_\beta,$$

d. h. gleich

$$\frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\lambda, \beta} c_{\lambda}^{\beta} e^{\frac{2i\pi}{n} p \alpha \beta} X_{\lambda}^{(p)} X_{nq\lambda + p\beta}^{(np)}$$

werden. Dabei laufen die Summationsbuchstaben λ, ν von 0 bis $p-1$, dagegen μ von 0 bis $np-1$ und β von 0 bis $n-1$.

Führen wir in der ersten Summe statt μ neue Summationsbuchstaben σ, β durch die Gleichung $\mu = n\sigma + p\beta$ ein und vertauschen die Buchstaben ν, λ untereinander, so nimmt die Summe die Gestalt an:

$$\frac{1}{i^{\frac{p-1}{2} + \frac{n-1}{2}} p \sqrt{n}} \sum_{\lambda, \nu, \sigma, \beta} c_{\nu}^{\alpha} e^{\frac{2i\pi}{p} \nu(\lambda + nq\sigma) + \frac{2i\pi}{n} p \alpha \beta} X_{\lambda}^{(p)} X_{n\sigma + p\beta}^{(np)}.$$

Infolge der Congruenz (58) findet sich nun

$$\left(\frac{p}{n}\right) i^{\frac{n-1}{2}} = i^{\frac{p-1}{2} + \frac{n-1}{2}},$$

und der Vergleich der beiden Summen ergiebt daher für die c_{λ}^{α} folgende Bedingungen:

$$\frac{1}{p} \sum_{\nu} c_{\nu}^{\alpha} e^{\frac{2i\pi}{p} \nu[\lambda + nq\sigma]} = c_{\lambda}^{\beta} \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\sigma \equiv q\lambda \pmod{p}$ ist oder nicht, d. h. je nachdem

$$(\lambda + nq\sigma) \equiv [\lambda + nq^2\lambda] \equiv 0 \pmod{p}$$

ist oder nicht.

Schreiben wir κ für $\lambda + nq\sigma$, so lauten die Bedingungen:

$$\frac{1}{p} \sum_{\nu} c_{\nu}^{\alpha} e^{\frac{2i\pi}{p} \nu \kappa} = c_{\lambda}^{\beta} \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\kappa \equiv 0 \pmod{p}$ ist oder nicht. Es müssen folglich alle Coefficienten c_{λ}^{α} unter einander gleich sein. Den gemeinsamen Werth derselben können wir unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 annehmen und haben dann folgendes Resultat:

Es seien n und p zwei ungerade relative Primzahlen so beschaffen, dass die Congruenz

$$nq^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

durch eine ganze Zahl q lösbar ist. Dann haben die n Summen

$$(62) \quad F = \sum_{\alpha=0}^{p-1} X_{\lambda}^{(p)} X_{nq\lambda + p\alpha}^{(np)} \quad (\alpha=0, 1, \dots, n-1)$$

die Eigenschaft, sich wie die zur Zahl n gehörigen $X_{\alpha}^{(n)}$ zu substituieren, wenn die $X_{\lambda}^{(p)}$ und $X_{\mu}^{(np)}$ ihren simultanen Substitutionen unterworfen

werden. Dabei hat die in den erzeugenden Substitutionen (40) der Substitutionssysteme der X auftretende Zahl q den Werth 1 für die zu den Zahlen p und np gehörigen X , während sie für die $X_\alpha^{(n)}$ den Werth p besitzt.

§ 10.

Systeme von Functionen, welche aus den zu ungeraden Zahlen gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Das im vorigen Paragraphen gewonnene gruppentheoretische Resultat gestattet unmittelbar eine functionentheoretische Anwendung, welche darin besteht, dass wir in (62) die $X_\lambda^{(p)}$ und $X_\mu^{(np)}$ durch die zu den Zahlen p resp. np gehörigen Functionen $X_\lambda(u)$ bez. $X_\mu(v)$ (cf. (18)) ersetzen. Wir erhalten dann n Functionen $F_\alpha(u, v)$:

$$(63) \quad F_\alpha(u, v) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} X_\lambda^{(p)}(u) \cdot X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)}(v) \quad (\alpha=0, 1, \dots, n-1),$$

welche als Functionen von ω_1, ω_2 aufgefasst, die Eigenschaft haben, sich bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 homogen linear zu substituieren und zwar dergestalt, dass den Transformationen (S) und (T) bez. die folgenden Substitutionen correspondiren:

$$(64) \quad \begin{cases} (S) & F'_\alpha = e^{-p \cdot \frac{2i\pi}{n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} F_\alpha, \\ (T) & F'_\alpha = \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)_i^{\frac{n-1}{2}} V_n} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha\beta} F_\beta. \end{cases}$$

Die Zahl p kann irgend eine ungerade Zahl sein, für welche die Congruenz

$$nq^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

möglich ist. Durch Abänderung dieser Zahl p erhalten wir unendlich viele verschiedene Systeme von Functionen $F_\alpha(u, v)$.

Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass alle diese Systeme sich in einfacher Weise aus einer endlichen Anzahl derselben, welche ihrerseits ein in arithmetischer Hinsicht vollständig abgeschlossenes System bilden, ableiten lassen.

Um dieses näher auszuführen tragen wir in die Definitionsgleichung (63) der F_α die Reihenentwickelungen (28a) der X_α ein; dann kommt:

$$(65) \quad F_\alpha(u, v) = -\frac{1}{\sqrt[2]{\Delta^{p(n+1)}}} \cdot \frac{e^{\frac{p\eta_1}{2\omega_1}(u^2 + nv^2)}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi p}} \sqrt{\frac{\omega_1}{2n\pi p}}} \sum_{\lambda, s, s'} (-1)^{\lambda + nq\lambda + p\alpha + s + s'} h^{\frac{s^2 \cdot n + s^2}{8np}} \frac{s}{z^2} \frac{s'}{z_1^2},$$

wobei zur Abkürzung $z_1 = e^{\frac{2\pi}{\omega_1}}$, sowie

$$S = (2s + 1)p - 2\lambda,$$

$$S' = (2s' + 1)np - 2nq\lambda - 2px$$

gesetzt ist. Da die Zahl q um p vermehrt werden kann, ohne dass sich die Functionen F_α verändern, so dürfen wir, wie geschehen soll, q als ungerade voraussetzen; dadurch kommt der Term $\lambda + nq\lambda$ in dem Exponenten von -1 in Wegfall. Wir führen nun an Stelle der Summationsbuchstaben λ, s, s' zwei neue x und y ein indem wir

$$S = y,$$

$$S' = nqy + 2px$$

setzen. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass y alle ungeraden Zahlen und unabhängig davon x alle Zahlen, welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind, durchlaufen muss, damit jede zulässige Combination λ, s, s' und jede nur Ein Mal berücksichtigt wird. Ueberdies wird

$$S + S' \equiv p(1+n) + 2sp + 2s'np + 2px$$

$$\equiv y(1+nq) + 2px \pmod{4},$$

woraus

$$px + s + s' \equiv x + \frac{q-1}{2} \pmod{2}$$

folgt. Es ergibt sich also die in (65) auftretende Summe gleich

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}} \sum_{x,y} (-1)^x h^{\frac{ny^2 + (nqy + 2px)^2}{8np}} \frac{y}{z^2} \frac{nqy + 2px}{z_1^2}.$$

Um dieser Entwicklung eine übersichtlichere Form zu geben, möge

$$nq^2 + 1 = 2pr$$

gesetzt, und die quadratische Form

$$(66) \quad \varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + nry^2$$

der Determinante

$$(67) \quad (2nq)^2 - 4 \cdot 2p \cdot nr = -4n$$

eingeführt werden. Ferner wollen wir $u + \frac{nqv}{2p}$ und $-\frac{v}{2p}$ an Stelle von u, v als Argumente nehmen und endlich

$$(68) \quad F_\alpha \left(u + \frac{nqv}{2p}, -\frac{v}{2p} \right) = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}} \cdot p \sqrt{n}}{\sqrt{\Delta^{p(n+1)}}} \Phi_\alpha^2(u, v)$$

setzen. Alsdann findet sich nach kurzer Rechnung

$$(69) \quad \Phi_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1} \varphi(u, v)} \sum (-1)^x h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1} (yu - xv)},$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle ungeraden Zahlen y und alle diejenigen Zahlen x , welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind.

Diese Gleichungen (68), (69) können wir jetzt auch als Definitionsgleichungen für die F_α auffassen und demgemäss folgenden Satz aussprechen:

Versteht man unter $\varphi(x, y)$ eine quadratische Form (66) der Determinante $-4n$, deren erster Coefficient das Doppelte einer ungeraden Primzahl zu n , deren zweiter Coefficient durch $2n$, deren dritter Coefficient durch n theilbar ist, so werden durch die Gleichungen (68), (69) n Functionen $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ von u, v, ω_1, ω_2 definiert, welche als Functionen der Grössen ω_1, ω_2 aufgefasst, sich bei allen linearen Transformationen dieser Grössen homogen und linear substituieren. Und zwar entsprechen insbesondere den erzeugenden Transformationen (S) und (T) (siehe (31)) die Substitutionen (64) der F_α .

Es sei jetzt

$$(70) \quad \bar{\varphi}(x, y) = 2\bar{p}x^2 + 2n\bar{q}xy + n\bar{r}y^2$$

eine zweite Form der Determinante $-4n$. Das zu dieser Form gehörige System von Functionen (69) werde entsprechend mit $\bar{\Phi}_\alpha(u, v)$ bezeichnet, so dass

$$(71) \quad \bar{\Phi}_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1} \bar{\varphi}(u, v)} \sum (-1)^x h^{\frac{\bar{\varphi}(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1} (yu - xv)}$$

ist. Wenn nun die beiden Formen $\varphi(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ äquivalent sind, dergestalt dass identisch

$$(72) \quad \varphi(ax + by, cx + dy) = \bar{\varphi}(x, y)$$

wird, falls a, b, c, d vier geeignete ganze Zahlen der Determinante

$$ad - bc = 1$$

bedeuten, so lassen sich die Functionen Φ_α leicht mit den Functionen $\bar{\Phi}_\alpha$ vergleichen. Man führe nämlich in (69) neue Summationsbuchstaben ein, indem man x durch $ax + by$ und y durch $cx + dy$ ersetzt; gleichzeitig werden $au + bv$ statt u und $cu + dv$ statt v als Argumente genommen. Alsdann kommt:

$$(73) \quad \Phi_\alpha(au + bv, cu + dv) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1} \bar{\varphi}(u, v)} \sum (-1)^{ax+by} h^{\frac{\bar{\varphi}(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1} (yu - xv)},$$

wo die Summation zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen x, y , welche den Bedingungen

$$(74) \quad \begin{cases} ax + by \equiv -a \pmod{n}, \\ cx + dy \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

genügen. Nun ist aber in Folge der Gleichung (72):

$$(75) \quad \begin{cases} pa^2 + nqac + \frac{1}{2}nrc^2 = \bar{p}, \\ 2p \cdot a \cdot \frac{b}{n} + q(ad + bc) + rcd = \bar{q}, \\ 2p \cdot \frac{b^2}{n} + 2qbd + rd^2 = \bar{r}. \end{cases}$$

Da p und p relative Primzahlen zu n sind, so schliessen wir aus der ersten Gleichung (75), dass a ebenfalls relative Primzahl zu n und sodann aus der zweiten Gleichung (75), dass

$$b \equiv 0 \pmod{n},$$

also, wegen $ad - bc = 1$, auch

$$ad \equiv 1 \pmod{n}$$

sein muss. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Die Zahl c sei $\equiv 0 \pmod{2}$, aus welcher Annahme $ad \equiv 1 \pmod{2}$ folgt. Dann werden die Summationsbedingungen (74):

$$(76) \quad \begin{cases} x \equiv -d\alpha \pmod{n}, \\ y \equiv 1 \pmod{2}; \end{cases}$$

es wird ferner

$$ax + by \equiv x + b \pmod{2},$$

und folglich, wie der Vergleich von (71) und (73) lehrt:

$$(77) \quad \Phi_a(au + bv, cu + dv) = (-1)^b \bar{\Phi}_{da}(u, v).$$

2) Die Zahl c sei $\equiv 1 \pmod{2}$. In Folge der ersten Gleichung (75) wird jetzt $\frac{r}{2} \equiv 1 \pmod{2}$, also

$$r \equiv 2 \pmod{4}$$

und da

$$nq^2 + 1 = 2pr$$

kann dies nur eintreten, falls

$$n \equiv 3 \pmod{8}$$

ist. Ist nun

$$d \equiv 1, \text{ also } a - b \equiv 1 \pmod{2},$$

so werden die Summationsbedingungen

$$(78) \quad \begin{cases} x \equiv -d\alpha \pmod{n}, \\ x + y \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

und es findet sich

$$(79) \quad ax + by \equiv x + b \pmod{2}.$$

Ist aber

$$d \equiv 0, \text{ also } b \equiv 1 \pmod{2},$$

so lauten die Summationsbedingungen

$$(80) \quad \begin{cases} x \equiv -d \alpha \pmod{n}, \\ x \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

und es wird

$$ax + by \equiv y + a \pmod{2}.$$

Dies führt uns dazu im Falle $n \equiv 3 \pmod{8}$ ausser dem System (69) der Functionen $\Phi_\alpha(u, v)$ noch zwei andere Systeme durch die Gleichungen:

$$(81) \quad \Phi_\alpha^{(1)}(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1} \varphi(u, v)} \sum (-1)^x h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1} (yu - xv)}$$

und

$$(82) \quad \Phi_\alpha^{(2)}(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{4\omega_1} \varphi(u, v)} \sum (-1)^y h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{i\pi}{\omega_1} (yu - xv)}$$

einzuführen, wobei die Summation zu erstrecken ist in (81) über alle Zahlenpaare x, y , welche den Bedingungen

$$\begin{cases} x \equiv -\alpha \pmod{n}, \\ x + y \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

dagegen in (82) den Bedingungen

$$\begin{cases} x \equiv -\alpha \pmod{n}, \\ x \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

genügen. Wir haben dann offenbar

$$(83) \quad \Phi_\alpha(au + bv, cu + dv) = (-1)^\varepsilon \overline{\Phi_{d\alpha}^{(v)}}(u, v),$$

wobei der Index v fortzulassen oder $= 1$ oder 2 zu nehmen ist, je nachdem $c \equiv 0$ oder $c \equiv 1$ und $d \equiv 1$ oder $c \equiv 1$ und $d \equiv 0 \pmod{2}$ ist. Diesen Fällen entsprechend ist auch $\varepsilon = b, b$ oder a zu setzen. Aus der Gleichung (83) geht hervor, dass auch die neuen Functionensysteme $\Phi_\alpha^{(1)}$ und $\Phi_\alpha^{(2)}$ sich in Bezug auf lineare Transformation von ω_1, ω_2 wie die ursprünglich definirten Φ_α verhalten.

Auch ergeben sich aus derselben ohne Schwierigkeit die nachfolgenden Transformationen der Functionen $\Phi_\alpha^{(1)}$ und $\Phi_\alpha^{(2)}$:

$$(84) \quad \Phi_\alpha^{(1)}(au + bv, cu + dv) = (-1)^\varepsilon \overline{\Phi_{d\alpha}^{(v)}}(u, v),$$

$$(85) \quad \Phi_\alpha^{(2)}(au + bv, cu + dv) = (-1)^\varepsilon \overline{\Phi_{d\alpha}^{(v)}}(u, v).$$

Dabei hat in der Gleichung (84) den drei Fällen:

$$a + c \equiv 0 \pmod{2}, \quad a + c \equiv b + d \equiv 1 \pmod{2}, \quad a + c \equiv 1, \\ b + d \equiv 0 \pmod{2}$$

entsprechend, der Index ν_1 die Werthe 0, 1, 2, die Grösse ε_1 die Werthe b, b, a respective. Desgleichen ist in der Gleichung (85) den drei Fällen:

$$a \equiv 0 \pmod{2}, \quad a \equiv b \equiv 1 \pmod{2}, \quad a \equiv 1, \quad b \equiv 0 \pmod{2}$$

entsprechend, $\nu_2 = 0, 1, 2$ und $\varepsilon_2 = d, d, c$ respective zu setzen.

Endlich ist unter $\Phi_a^{(0)}$ die ursprüngliche Function Φ_a zu verstehen.

Die Gleichungen (77), (83), (84), (85) zeigen, dass die zu äquivalenten Formen $\varphi(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ gehörigen Functionssysteme $\Phi_a(u, v)$, $\Phi_a^{(1)}(u, v)$, $\Phi_a^{(2)}(u, v)$ in Rücksicht auf ihre Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 nicht wesentlich verschieden sind: durch die Ersetzung von u und v durch $au + bv$, $cu + dv$ gehen, abgesehen vom Vorzeichen, die zu der ersten Form gehörigen Functionen in die zu der zweiten Form gehörigen über.

Wir werden hiernach im Ganzen ebenso viele verschiedene Functionssysteme erhalten, als es Classen quadratischer Formen

$$\varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + nry^2$$

der Determinante $-4n$ giebt; nur im Falle $n \equiv 3 \pmod{8}$ ist diese Classenzahl zu verdreifachen, dem Umstande entsprechend, dass wir neben den Functionen Φ_a noch zwei andere Systeme $\Phi_a^{(1)}$, $\Phi_a^{(2)}$ einführen mussten. Nun ist aber leicht zu zeigen, dass für $n \equiv 1 \pmod{4}$ jede primitive Form

$$(86) \quad Px^2 + Qxy + Ry^2$$

der Determinante

$$Q^2 - 4PR = -4n,$$

und für $n \equiv 3 \pmod{4}$ jede solche Form zweiter Art äquivalent ist zu Formen der Gestalt

$$\varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + nry^2,$$

so dass also durch die Gleichung (69) gerade so viel wesentlich verschiedene Functionssysteme definiert sind, als es inäquivalente primitive Formen (86) der Determinante $-4n$ giebt, mit dem Zusatz, dass für $n \equiv 3 \pmod{4}$ nur Formen zweiter Art zu nehmen sind und für $n \equiv 3 \pmod{8}$ jene Anzahl zu verdreifachen ist.

§ 11.

Zusammensetzung von X -Systemen, welche zu geraden Zahlen gehören.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen für die zu ungeraden Zahlen gehörigen X_α angestellten Betrachtungen lassen sich mutatis mutandis auch auf die zu geraden Zahlen gehörenden X_α -Systeme anwenden. Statt aber die ziemlich umständliche Untersuchung des § 9 hier in der erforderlichen Modification zu wiederholen, will ich lieber ein indirectes Verfahren einschlagen, indem ich das schliessliche Resultat des § 9 analogisire. Es sei n eine ungerade Zahl und

$$(87) \quad nq^2 + 1 = 2pr,$$

wo q eine beliebige ungerade Zahl bedeutet. Wir wollen annehmen, dass

$$n \equiv 3 \pmod{4}$$

sei und dürfen dann p als eine gerade Zahl voraussetzen. Nun mögen die Summen

$$(88) \quad \Psi_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{p-1} X_\lambda^{(p)} X_{nq\lambda+p\alpha}^{(np)} \quad (\alpha=0, 1, 2 \dots n-1)$$

gebildet und untersucht werden, wie dieselben sich verhalten, wenn die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ den Substitutionen (39) simultan unterworfen werden. Dabei soll die in (39) auftretende Zahl q beide Mal $= 1$ sein und es ist die ebendort vorkommende Zahl n bei den $X^{(p)}$ durch p , bei den $X^{(np)}$ durch np zu ersetzen. Die Ausrechnung ergibt, dass die n Grössen Ψ_α bei den simultan angewandten Substitutionen (S) resp. (T) wieder homogene lineare Substitutionen erfahren und zwar wird (S) und (T) entsprechend respective:

$$(89) \quad \begin{cases} (S) & \Psi'_\alpha = e^{\frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{n} p \alpha^2} \Psi_\alpha, \\ (T) & \Psi'_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha \beta} \Psi_\beta. \end{cases}$$

Aus diesem Verhalten der Ψ_α ergibt sich nun ohne Schwierigkeit, dass sich die Grössen $\frac{\Psi_\alpha}{\sqrt[n]{\Delta}}$ holodrisch isomorph mit den zu der Zahl n gehörigen X_α substituiren.

Denn es ergibt sich:

$$(S) \quad \frac{\Psi'_\alpha}{\sqrt[n]{\Delta'}} = e^{\frac{i\pi}{n} p \alpha^2} \cdot \frac{\Psi_\alpha}{\sqrt[n]{\Delta}} = e^{-\frac{2i\pi}{n} \alpha \frac{(n-\alpha)}{2}} \frac{\Psi_\alpha}{\sqrt[n]{\Delta}},$$

$$(T) \quad \frac{\Psi'_\alpha}{\sqrt[n]{\Delta'}} = + \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{p \cdot \frac{2i\pi}{n} \alpha \beta} \frac{\Psi_\beta}{\sqrt[n]{\Delta}}.$$

Ein Blick auf die Formeln (40) zeigt aber, dass unsere Behauptung richtig ist, wenn nur die Gleichung

$$i = \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)_i^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{p}{n}\right) = (-1)^{\frac{n+1}{4}}$$

besteht. Diese folgt aber leicht aus der Gleichung (87).

§ 12.

Systeme von Functionen, welche aus den zu geraden Zahlen gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Tragen wir in (88) für die $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ die durch die Gleichung (18) definirten Functionen ein, so erhalten wir Functionen von ω_1, ω_2 , welche sich bei linearen Transformationen dieser Grössen homogen linear substituiren. Die Argumente von $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ mögen gleich so gewählt werden, dass sich die Reihenentwicklungen möglichst einfach gestalten; wir setzen:

$$(91) \quad \Psi_\alpha(u, v) = \frac{1}{p\sqrt{n} \cdot \sqrt{\Delta}} \sum_{i=0}^{p-1} X_i^{(p)}\left(u + \frac{nqv}{p}\right) \cdot X_{nq i + p\alpha}^{(np)}\left(-\frac{v}{p}\right).$$

Tragen wir nun rechter Hand die Reihenentwicklungen (28) ein, so finden wir nach Umformungen, welche den in § 10 angewandten ganz analog sind:

$$(92) \quad \Psi_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{\omega_1} \varphi(u, v)} \sum_h h^{\frac{\varphi(x, y)}{\pi}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} (y u - x v)},$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen y und alle ganzen Zahlen x , welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind. Zur Abkürzung ist ferner

$$(93) \quad \varphi(x, y) = p_1 x^2 + nqxy + nry^2, \quad p_1 = \frac{p}{2}$$

gesetzt worden. Betrachten wir jetzt die Gleichungen (92), (93) als Definitionsgleichungen, so haben wir folgenden Satz:

Es sei n eine positive Zahl, welche durch 4 getheilt den Rest 3 lässt und $\varphi(x, y)$ eine quadratische Form der Determinante $-n$, deren erster Coefficient relative Primzahl zu n ist, während die beiden anderen Coefficienten durch n theilbar sind. Dann werden durch die Gleichung (92) (indem α successive die Werthe $0, 1, 2, \dots, n-1$ erhält) n Functionen von u, v, ω_1, ω_2 defnirt, welche als Functionen von ω_1, ω_2 aufgefasst bei allen linearen Transformationen dieser Grössen homogene lineare Substitutionen erfahren. Und zwar sind die den er-

zeugenden Transformationen (S) und (T) entsprechenden Substitutionen respective

$$\begin{cases} (S) & \Psi_{\alpha}' = e^{-p \frac{2i\pi \alpha(n-\alpha)}{n}} \Psi_{\alpha}, \\ (T) & \Psi_{\alpha}' = \frac{1}{\binom{p}{n} \cdot i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{p \frac{2i\pi \alpha \beta}{n}} \Psi_{\beta}. \end{cases}$$

Betrachtet man neben $\varphi(x, y)$ irgend eine zweite derartige Form:

$$(94) \quad \bar{\varphi}(x, y) = \bar{p}_1 x^2 + n \bar{q} xy + n \bar{r} y^2; \quad \bar{p}_1 = \frac{\bar{p}}{2};$$

so gehört zu derselben ein zweites System von Functionen $\Psi_{\alpha}(u, v)$, welches mit $\bar{\Psi}_{\alpha}(u, v)$ bezeichnet werde. Wenn nun die beiden Formen einander äquivalent sind, so dass

$$\varphi(ax + by, cx + dy) = \bar{\varphi}(x, y)$$

für geeignete Zahlen a, b, c, d der Determinante $ad - bc = 1$ wird, so sind die Functionen $\bar{\Psi}_{\alpha}$ auf die Ψ_{α} zurückführbar. Man findet nämlich durch ähnliche Betrachtungen wie sie oben im § 11 an- gestellt sind:

$$(95) \quad \Psi_{\alpha}(au + bv, cu + dv) = \bar{\Psi}_{\alpha}(u, v).$$

Infolge dieser Gleichung werden wir die zu äquivalenten Formen $\varphi(x, y)$ und $\bar{\varphi}(x, y)$ gehörigen Functionssysteme Ψ_{α} als nur unwesentlich verschieden bezeichnen. Es giebt daher so viele wesentlich verschiedene Systeme $\Psi_{\alpha}(u, v)$ als inäquivalente Formen (93) existiren und da sich zeigt, dass jede primitive Form $Px^2 + Qxy + Ry^2$ der Determinante $Q^2 - 4PR = -n$ äquivalent ist zu Formen der Gestalt (93) so haben wir das Resultat:

Die Zahl der wesentlich verschiedenen Functionssysteme $\Psi_{\alpha}(u, v)$ stimmt überein mit der Zahl der Classen primitiver Formen

$$Px^2 + Qxy + Ry^2$$

der Determinante

$$Q^2 - 4PR = -n.$$

§ 13.

Zusammensetzung von zu geraden und zu ungeraden Zahlen gehörigen X-Systemen.

Wir betrachten endlich zu geraden und ungeraden Zahlen gehörende X-Systeme simultan. Es bezeichne n eine gerade, q eine beliebige Zahl und es sei

$$(96) \quad nq^2 + 1 = p \cdot r,$$

wo p eine ungerade Zahl bedeutet. Setzen wir nun

$$(97) \quad X_\alpha = \sum_0^{p-1} X_l^{(p)} X_{nq l + p\alpha}^{(np)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

und unterwerfen die $X^{(p)}$ den Substitutionen (40) (wobei $\rho = 1$ und n durch p zu ersetzen ist) und simultan die $X^{(np)}$ den Substitutionen (39) (wobei $\rho = 1$ und n durch np zu ersetzen ist), so erfahren die X_α folgende Substitutionen:

$$(98) \quad \begin{cases} (S) & X_\alpha' = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n} p \alpha^2} X_\alpha, \\ (T) & X_\alpha' = \frac{-1}{i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{\frac{p \cdot 2i\pi}{n} \alpha \beta} X_\beta. \end{cases}$$

Hieraus folgt nun, dass die Grössen

$$X_\alpha \cdot (\sqrt[p]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}}$$

sich holoeidrisch isomorph mit den zu n gehörigen X_α substituieren. In der That finden wir

$$(99) \quad \begin{cases} (S) & X_\alpha' (\sqrt[p]{\Delta'})^{\frac{p-1}{2}} = e^{\frac{p \cdot i\pi}{4} + \frac{i\pi}{n} p \alpha^2} X_\alpha (\sqrt[p]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}}, \\ (T) & X_\alpha' (\sqrt[p]{\Delta'})^{\frac{p-1}{2}} = \frac{-1}{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_0^{n-1} e^{\frac{p \cdot 2i\pi}{n} \alpha \beta} X_\beta (\sqrt[p]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}} \end{cases}$$

und der Vergleich mit (39) zeigt die Richtigkeit unserer Behauptung, da in Folge von (96)

$$\left(\frac{n}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

wird. — Was die Zahl q betrifft, so können wir dieselbe, da X_α sich nicht ändert, wenn $q + p$ an Stelle von q tritt, unbeschadet der Allgemeinheit als eine gerade Zahl voraussetzen. Dies soll im folgenden Paragraphen geschehen.

§ 14.

Systeme von Functionen, welche aus den zu geraden und ungeraden Zahlen gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ zusammengesetzt sind.

Durch die Gleichungen

$$(100) \quad X_\alpha(u, v) = \frac{i(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p \sqrt{n}} (\sqrt[p]{\Delta})^{\frac{p-1}{2}} \sum_0^{p-1} X_l^{(p)} \left(2u + \frac{nqv}{p}\right) X_{nq l + p\alpha}^{(np)} \left(-\frac{v}{p}\right),$$

wo α successive gleich $0, 1, 2, \dots, n-1$ zu setzen ist, werden n Functionen von u, v, ω_1, ω_2 defnirt, welche die folgenden Reihenentwicklungen besitzen:

$$(101) \quad X_\alpha(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{n_1}{\omega_1} \varphi(u, v)} \sum (-1)^{\frac{y-1}{2}} h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} (y u - x v)}.$$

Hier bedeutet $\varphi(x, y)$ die quadratische Form

$$(102) \quad \varphi(x, y) = 2px^2 + 2nqxy + \frac{n}{2}ry^2$$

der Determinante

$$(103) \quad (2nq)^2 - 4 \cdot 2p \cdot \frac{n}{2}r = -4n,$$

und die Summation bezieht sich auf alle ungeraden Zahlen y und alle diejenigen Zahlen x , welche der Congruenz

$$(104) \quad x \equiv -\alpha \pmod{n}$$

genügen. Dabei ist q als eine gerade Zahl vorausgesetzt.

Diese durch die Gleichungen (101) erklärten Functionen besitzen die Eigenschaft sich homogen und linear zu substituiren, wenn ω_1, ω_2 irgend eine lineare Transformation erfahren. Und zwar entsprechen den erzeugenden Transformationen $(S), (T)$ (nach (99)) die nachfolgenden Substitutionen der X_α :

$$(105) \quad \begin{cases} (S) & X'_\alpha = e^{\frac{p \cdot i\pi}{4} + \frac{p \cdot i\pi}{n} \alpha^2} X_\alpha, \\ (T) & X'_\alpha = \frac{-1}{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\beta=0}^{n-1} e^{\frac{p \cdot 2i\pi}{n} \alpha \beta} X_\beta. \end{cases}$$

Der Vergleich der zu äquivalenten Formen $\varphi(x, y)$ und

$$(106) \quad \bar{\varphi}(x, y) = 2\bar{p}x^2 + 2n\bar{q}xy + \frac{n}{2}\bar{r}y^2$$

gehörenden Functionssysteme $X_\alpha(u, v)$ und $\bar{X}_\alpha(u, v)$ gestaltet sich etwas weitläufig durch den Umstand, dass dabei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind.

Es sei

$$\varphi(ax + by, cx + dy) = \bar{\varphi}(x, y),$$

so dass

$$\begin{cases} 2\bar{p} = 2pa^2 + 2nqac + \frac{n}{2}rc^2, \\ \bar{q} = 2pa\frac{b}{n} + q(ad + bc) + \frac{r}{2}cd, \\ \frac{n}{2}\bar{r} = 2pb^2 + 2nqbd + \frac{n}{2}rd^2, \end{cases}$$

$ad - bc = 1$ ist.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die nachstehenden Congruenzen für die Coefficienten a, b, c, d :

$$\begin{aligned}\frac{n}{2} \cdot c &\equiv 0 \pmod{2}, \\ 4pab + rcdn &\equiv 0 \pmod{4n}, \\ 4b^2 &\equiv 0 \pmod{n}.\end{aligned}$$

Diese Congruenzen sind aber auch die *nothwendigen* Bedingungen dafür, dass die Form $\varphi(ax + by, cx + dy)$ dieselbe particuläre Beschaffenheit der Coefficienten aufweist, wie die Form $\varphi(x, y)$ selber. In Folge von (96) und der Gleichung

$$(108) \quad ad - bc = 1$$

lassen sich diese Congruenzbedingungen auf die einfacheren zurückführen:

$$(109) \quad \begin{cases} 4b \equiv 0 \pmod{n}, \\ \frac{n}{2} c \equiv 0 \pmod{2}, \\ a \cdot \frac{4b}{n} \equiv -cd \pmod{4}. \end{cases}$$

Ersetzen wir jetzt in (101) die Summationsbuchstaben x, y durch $ax + by, cx + dy$ resp., die Grössen u, v durch $au + bv, cu + dv$ resp., so kommt:

$$(110) \quad \begin{aligned} &X_a(au + bv, cu + dv) \\ &= \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot e^{\frac{\eta_1}{\omega_1} \bar{\varphi}(u, v)} \sum (-1)^{\frac{cx+dy-1}{2}} \frac{\bar{\varphi}(x, y)}{h^{\frac{1}{4n}}} \frac{2i\pi}{e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(yu-xv)}} \end{aligned}$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle Zahlen x, y , welche den Bedingungen:

$$(111) \quad \begin{cases} cx + dy \equiv 1 \pmod{2}, \\ ax + by \equiv -a \pmod{n} \end{cases}$$

genügen. Ist nun zuvörderst $c \equiv 0 \pmod{2}$ — was nach (109) stets der Fall sein wird, wenn n das Doppelte einer ungeraden Zahl ist — so ist auch (wegen (108)) $a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$ und in Folge der letzten Congruenz (109) $\frac{4b}{n}$ eine gerade Zahl.

Die Summationsbedingungen (111) lassen sich deshalb so schreiben:

$$\begin{aligned} y &\equiv 1 \pmod{2}, \\ ax &\equiv (b - a) \pmod{n}, \end{aligned}$$

oder

$$x \equiv -b - da \pmod{n}.$$

Ferner findet sich

$$\frac{cx + dy - 1}{2} \equiv \frac{c}{2} (b - \alpha) + \frac{d-1}{2} + \frac{y-1}{2} \pmod{2}.$$

Bezeichnen wir daher mit $\bar{X}_\alpha$ die zu der Form $\bar{\varphi}(x, y)$ gehörenden Functionen, so haben wir:

$$(112) \quad X_\alpha(au + bv, cu + dv) = (-1)^{\frac{c}{2}(b-\alpha) + \frac{d-1}{2}} \bar{X}_{d\alpha+b}(u, v),$$

wodurch die Functionen $\bar{X}_\alpha$ auf die zu $\varphi(x, y)$ gehörigen X_α zurückgeführt sind.

Es sei zweitens $c \equiv 1$, $d \equiv 0 \pmod{2}$, welche Annahmen $a \equiv 0$, $b \equiv 1 \pmod{2}$ und $n \equiv 4 \pmod{8}$ zur Folge haben. Die Summationsbedingungen (111) werden nun

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2}, \\ ax + by &\equiv -\alpha \pmod{n}, \end{aligned}$$

und die letztere spaltet sich in die beiden:

$$\begin{aligned} x &\equiv -d\alpha \pmod{\frac{n}{4}}, \\ y &\equiv c(a + \alpha) \pmod{4}. \end{aligned}$$

Ferner wird

$$cx + dy - 1 \equiv (c - 1) + d\alpha + x - 1 \pmod{4}.$$

Führen wir jetzt für $n \equiv 4 \pmod{8}$ neben dem Functionssystem (101) noch das folgende ein:

$$(113) \quad X_\alpha^{(1)}(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} e^{\frac{\eta_1}{\omega_1} \varphi(u, v)} \sum (-1)^{\frac{x-1}{2}} \frac{\varphi(x, y)}{h^{\frac{4}{n}}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1} (yu - xv)},$$

die Summation erstreckt über alle ungeraden Zahlen x , welche der Congruenz

$$x \equiv -\alpha \pmod{\frac{n}{4}}$$

und alle Zahlen y , welche der Congruenz

$$y \equiv \alpha \pmod{4}$$

genügen, so wird

$$(114) \quad X_\alpha(au + bv, cu + dv) = (-1)^{\frac{c-1+d\alpha}{2}} \bar{X}_{\alpha'}^{(1)}(u, v)$$

werden, wo α' aus den Congruenzen

$$\begin{aligned} \alpha' &\equiv d\alpha \pmod{\frac{n}{4}}, \\ \alpha' &\equiv c(a + \alpha) \pmod{4} \end{aligned}$$

zu bestimmen ist. $\bar{X}_\alpha^{(1)}$ bedeutet dabei die zu $\bar{\varphi}(x, y)$ in derselben Weise wie $X_\alpha^{(1)}$ zu $\varphi(x, y)$ gehörende Function. Aus der Gleichung (114) folgt beiläufig, dass die durch (113) definirten Functionen bei linearer Transformation von ω_1, ω_2 sich ebenfalls, wie die Functionen $X_\alpha(u, v)$, homogen linear substituieren. Eine weitere Folge der Gleichung (114) ist, dass die Functionen $X_\alpha^{(1)}(au + bv, cu + dv)$ sich je nach den Resten von $a, b, c, d \pmod{2}$ durch $\bar{X}_\alpha^{(1)}$ oder $\bar{X}_\alpha$ ausdrücken, worauf ich jedoch hier nicht näher eingehen will.

Es bleibt noch drittens der Fall $c \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$ zu discutiren. Die Congruenzen (109) ergeben dann in Verbindung mit der Gleichung $ad - bc = 1$, dass $a \equiv 1, b \equiv 0 \pmod{2}$, $a \cdot \frac{4b}{n} \equiv -cd \pmod{4}$, und also $\frac{4b}{n} \equiv 1 \pmod{2}$ wird. Die letztere Congruenz zeigt, dass der supponirte Fall nur eintreten kann, wenn $n \equiv 0 \pmod{8}$ ist. Die Summationsbedingungen (111) lauten jetzt:

$$\begin{aligned} x + y &\equiv 1 \pmod{2}, \\ ax + by &\equiv -\alpha \pmod{n} \end{aligned}$$

und können, da zufolge der letzteren Congruenz $x \equiv -\alpha \pmod{2}$ sein muss, durch die folgenden ersetzt werden:

$$\begin{aligned} y &\equiv 1 - \alpha \pmod{2}, \\ ax + by &\equiv -\alpha \pmod{n}. \end{aligned}$$

Ferner findet sich

$$\frac{cx + dy - 1}{2} \equiv \frac{y - 1 + \alpha}{2} + \frac{d - b - 1}{2} - \alpha \frac{d - b + ac}{2} \pmod{2};$$

berücksichtigen wir nun, dass $b \equiv \varepsilon \cdot \frac{n}{4} \pmod{n}$ gesetzt werden kann, wo ε einen der Werthe $+1, -1$ besitzt, so werden wir dazu geführt, neben den Functionen (101) im Falle $n \equiv 0 \pmod{8}$ noch die folgenden zu betrachten:

$$(115) \quad X_\alpha^{(\varepsilon)}(u, v) = \frac{2\pi}{\omega_1} e^{\frac{\eta_1 \varphi(u, v)}{\omega_1}} \sum (-1)^{\frac{y-1+\alpha}{2}} h^{\frac{\varphi(x, y)}{4n}} e^{\frac{2i\pi}{\omega_1}(y u - x v)}$$

die Summe erstreckt über alle Zahlen x, y , welche den Bedingungen

$$\begin{cases} y \equiv 1 - \alpha \pmod{2}, \\ x + \varepsilon \frac{n}{4} y \equiv -\alpha \pmod{n} \end{cases}$$

genügen. Dabei kann ε entweder $= +1$ oder $= -1$ angenommen werden, so dass wir durch die Gleichung (115) zwei verschiedene Functionssysteme $X_\alpha^{+1}, X_\alpha^{-1}$ definirt haben.

Nunmehr wird, wie leicht zu sehen:

$$(116) \quad X_a(au + bv, cu + dv) = (-1)^{\frac{d-b-1}{2} \alpha \frac{d-b+ac}{2} + \frac{a-a'}{2}} \bar{X}_a^{(\varepsilon)}(u, v),$$

wenn die Indices α', ε aus den Congruenzen

$$\begin{cases} a\varepsilon \equiv \frac{4b}{n} \pmod{4}, \\ a\alpha' \equiv \alpha \pmod{n} \end{cases}$$

bestimmt werden. Die überstrichenen Grössen beziehen sich wieder in derselben Weise auf die Form $\bar{\varphi}(x, y)$, wie die ungestrichelten Grössen auf die Form $\varphi(x, y)$.

Aus der Gleichung (116) folgt, dass die neu eingeführten Functionssysteme $X_a^{(\varepsilon)}$ bei linearer Transformation von ω_1, ω_2 ebenfalls homogene lineare Substitutionen erfahren. Auch ergibt sich leicht, dass die Functionswerthe $X_a^{(\varepsilon)}(au + bv, cu + dv)$ auf die Functionen $\bar{X}_a(u, v)$ und $\bar{X}_a^{(\varepsilon)}(u, v)$ zurückgeführt werden können.

Als Hauptergebniss dieser Entwicklungen betrachte ich aber dieses:

Durch die Gleichung (101) sind im Ganzen so viele wesentlich verschiedene Functionssysteme definiert, als die Zahl der inäquivalenten Formen (102) angiebt, mit dem Bemerken, dass diese Zahl zu verdoppeln resp. zu verdreifachen ist, falls $n \equiv 4$ resp. $n \equiv 0 \pmod{8}$ ist.

Man kann hinzufügen, dass für $n \equiv 2 \pmod{4}$ jede primitive Form (P, Q, R) erster Art der Determinante $Q^2 - 4PR = -4n$ und für $n \equiv 0 \pmod{4}$ jede solche Form zweiter Art zu Formen der Gestalt (102) äquivalent ist, so dass der vorige Satz ersichtlich in einer noch etwas eleganteren Form ausgesprochen werden kann.

§ 15.

Process der Composition.

Die Sätze der letzten Paragraphen sind theils gruppentheoretischer, theils functionentheoretischer Natur. So gehört der Inhalt der §§ 9, 11, 13 der Gruppentheorie an, während die §§ 10, 12, 14 functionentheoretische Anwendungen der in den bez. vorhergehenden Paragraphen gewonnenen gruppentheoretischen Resultate enthalten. Der allgemeine Gedankengang, welcher diesen Anwendungen zu Grunde liegt, ist dieser:

Sobald irgend zwei Systeme von p bez. np Functionen der Grössen ω_1, ω_2 bekannt sind, welche sich bei linearen Transformationen von ω_1, ω_2 wie die Grössen $X^{(p)}, X^{(np)}$ verhalten, so erhält man in Folge der gruppentheoretischen Eigenschaft jener bilinearen Verbindungen ((62), (88), (97)) der $X^{(p)}$ und $X^{(np)}$ sofort ein neues System von

n Functionen, welche sich bei linearen Transformationen von ω_1, ω_2 wie die Grössen $X^{(n)}$ substituiren. Wir wollen zur Abkürzung sagen, dieses neue System sei aus jenen beiden Systemen „componirt“. In diesem Sinne sind die Functionssysteme $\Phi_\alpha(u, v), \Psi_\alpha(u, v), X_\alpha(u, v)$ aus den Systemen $X^{(p)}(u), X^{(n,p)}(v)$ componirt. Offenbar können wir jetzt aber die neu gewonnenen Systeme $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, X_\alpha$ mit den Functionen $X(w)$ componiren, (wobei dem Argumente w ein beliebiger Werth beigelegt werden kann). Wir werden so zu Functionen der Grössen $u, v, w, \omega_1, \omega_2$ gelangen, welche sich wieder gegenüber linearen Transformationen von ω_1, ω_2 wie die Grössen X verhalten. Aus diesen Functionssystemen werden sich weitere ergeben, wenn wir sie unter sich und mit den früheren componiren und so fort. Auf diese Weise erhalten wir eine unendliche Reihe von Functionssystemen, welche sich sämmtlich holodrisch isomorph zu den X -Systemen substituiren.

Dabei ist allerdings noch Eins zu erwähnen. Die in den Substitutionssystemen (39), (40) auftretende Zahl ϱ wurde gleich 1 angenommen bei denjenigen Grössen $X^{(v)}, X^{(n,p)}$, welche wir zur Bildung jener bilinearen Functionen verwendet haben. Diese Voraussetzung trifft nun im Allgemeinen nicht mehr bei den abgeleiteten Systemen $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, X_\alpha$ zu; bei diesen ist die Zahl $\varrho = p$ und nur in besonderen Fällen wird p durch 1 ersetzt werden können. Es lassen sich aber dennoch diese Systeme zur „Composition“ verwenden, da eine leichte Rechnung zeigt, dass jene bilineare Verbindungen ihre charakteristische Eigenschaft auch dann noch behalten, wenn die zu den $X^{(v)}$ und $X^{(n,p)}$ gehörenden Zahlen ϱ nicht mehr gleich 1 vorausgesetzt werden.*)

Die Natur der durch den oben geschilderten Process der Composition entstehenden Functionen weist aber noch auf einen anderen Weg die Eigenschaften dieser Functionen aufzufinden.

Es sind nämlich, wie leicht zu sehen, diese Functionen ϑ -Functionen von beliebig vielen Variablen $u, v, w, \dots$, wobei die definite quadratische Form, welche zu diesen ϑ -Functionen gehört, abgesehen von dem Factor $2i\pi \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}$, eine positive quadratische Form mit rationalen Zahlencoefficienten ist. Statt nun diese ϑ -Functionen, wie es bei dem Process der Composition geschieht, aus den elliptischen ϑ -Functionen $X(u)$ zusammenzusetzen, kann man sie auch direct, ausgehend von allgemeinen ϑ -Relationen, untersuchen. Dieses beabsichtige ich in einer weiteren Abhandlung demnächst auszuführen.

*) Gehört z. B. in den Summen (62) zu den $X^{(v)}$ die Zahl $\varrho = \varrho_1$, zu den $X^{(n,p)}$ die Zahl $\varrho = \varrho_2$, so tritt die charakteristische Eigenschaft jener Summen, sich holodrisch isomorph zu den $X^{(n)}$ zu substituiren, stets ein, falls nur

$$\varrho_1 \equiv -\varrho_2 n q^2 \pmod{p}$$

§ 16.

Process der Differentiation. Ueberall endliche Integrale n^{ter} Stufe.

Hat irgend ein System von Functionen der Grössen $u, v, w, \dots, \omega_1, \omega_2$ die Eigenschaft bei beliebigen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 homogene lineare Substitutionen mit numerischen Coefficienten zu erfahren, so wird auch das System der nach einer der Grössen $u, v, w, \dots$ differenzirten Functionen diese Eigenschaft besitzen. Demnach gewinnen wir durch den Process des Differenzirens aus den Systemen $X_\alpha(u), \Phi_\alpha(u, v), \Psi_\alpha(u, v), \dots$, wieder neue Functionssysteme, welche sich wie die Grössen X substituiren und die Zahl solcher Systeme wird auf diese Weise wieder ins Unendliche vermehrt.

Die durch Differentiation entstehenden Functionssysteme werden nun vor allem von Wichtigkeit bei der Aufstellung der überall endlichen Integrale der n^{ten} Stufe*), worauf ich zum Schluss in Kürze eingehen will.

Man differenzire z. B. die Functionen $\Psi_\alpha(u, v)$ (92) nach u und setze darauf $u = v = 0$. Das Resultat werde nach Fortlassung des Factors 2π mit $n \cdot I_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ bezeichnet, so dass nach (92)

$$(117) \quad I_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi i}{\omega_1^2} \cdot \frac{1}{n} \sum y \cdot h^{\frac{\varphi(x, y)}{n}}$$

wird, wo y alle Zahlen, x nur diejenigen, welche $\equiv -\alpha \pmod{n}$ sind, durchlaufen muss. Die Functionen I_α substituiren sich nun genau wie die $\Psi_\alpha(u, v)$, nur dass insofern eine Modification eintritt, als offenbar $I_{n-\alpha}$ mit $-I_\alpha$ identisch und folglich insbesondere $I_0 \equiv 0$ ist. Infolge dessen werden die erzeugenden Substitutionen also lauten:

$$(118) \quad \begin{cases} (S) & I'_\alpha = e^{\frac{p \cdot 2i\pi \alpha(n-\alpha)}{n^2}} I_\alpha, \\ (T) & I'_\alpha = \frac{1}{\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}} \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(e^{\frac{p \cdot 2i\pi}{n} \alpha \beta} - e^{-\frac{p \cdot 2i\pi}{n} \alpha \beta} \right) I_\beta. \end{cases}$$

Bilden wir nun

$$(119) \quad \int I_\alpha(\omega_1, \omega_2) (\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1) = I_\alpha(\omega),$$

*) Siehe pag. 170 meiner Abhandlung: „Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.“ Diese Annalen, Bd. XXV.

Vgl. auch § 1 meiner Note: „Ueber die Classenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe.“ Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 4. Mai 1885.

wo zur Abkürzung

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$$

gesetzt ist, so haben diese Functionen des Periodenverhältnisses die Eigenschaft sich bei Ersetzung von ω durch $\frac{\gamma + \delta \omega}{\alpha + \beta \omega}$, abgesehen von einer additiven (durch die Integration eingeführten) Constanten zu reproduciren, wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \equiv 1, 0, 0, 1$ resp. (mod. n) sind. Denn es wird bei Ersetzung von ω_1, ω_2 durch $\alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \gamma \omega_1 + \delta \omega_2$ sowohl $I_\alpha(\omega_1, \omega_2)$ als auch $\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1$ sich ungeändert reproduciren. Nun geht ferner aus der Reihenentwicklung (117) hervor, dass $I_\alpha(\omega)$ für $\omega = i\infty$, also $h = 0$, einen endlichen Werth besitzt; infolge der Gleichungen (118) überträgt sich dieses auf alle rationalen Werthe von ω . Es ergibt sich also:

„Die Functionen $I_\alpha(\omega)$ sind überall endliche Functionen des Periodenverhältnisses ω und folglich überall endliche Integrale n^{ter} Stufe.“

Wählen wir $\omega = i\infty$ als untere Grenze der Integration, so findet sich vermöge (117):

$$(120) \quad I_\alpha(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_\alpha(m)}{m} h^{\frac{m}{n}},$$

wobei $\psi_\alpha(m)$ durch die Summe

$$(121) \quad \psi_\alpha(m) = \sum y,$$

erklärt ist, letztere erstreckt über alle Lösungen der Gleichung

$$(122) \quad m = px^2 + nqxy + nry^2 = \varphi(x, y)$$

in ganzen Zahlen x, y , von welchen die erstere der Bedingung $x \equiv -\alpha \pmod{n}$ unterworfen ist. Es ist hinzuzufügen, dass dieses Resultat nur für $n \equiv 3 \pmod{4}$ gilt, und dass die Zahlen p, q, r der einen Einschränkung unterliegen, dass die Determinante der Form $\varphi(x, y)$ gleich $-n$ sein muss. (cf. pag. 222).

Hätten wir die Functionen $\Psi_\alpha(u, v)$ nicht nach u sondern nach v differenzirt und sodann dieselben Schlüsse wie soeben angewendet, so würde sich an Stelle von (121) die Gleichung

$$(121^*) \quad \psi_\alpha(m) = \sum x$$

ergeben haben. Es werden also durch die Gleichungen (120) auch dann überall endliche Integrale n^{ter} Stufe definirt, wenn die Coefficienten $\psi_\alpha(m)$ nicht durch die Gleichung (121), sondern durch (121*) erklärt werden.

Dass sich in derselben Weise aus den Functionssystemen $\Phi_a(u, v)$, $\chi_a(u, v)$ überall endliche Integrale herleiten lassen, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.

Auf die mannigfaltigen zahlentheoretischen Folgerungen, welche aus diesen und ähnlichen auf Integrale 3. Gattung bezüglichen Betrachtungen gezogen werden können, gehe ich hier nicht ein, da ich dieselben bei einer ausführlichen Darstellung meiner Untersuchungen über Modularcorrespondenzen und Classenzahlrelationen zu entwickeln habe.

Königsberg i./Pr., December 1885.

— Zur Fussnote auf Seite 188. — In M. verbessere man des Weiteren:

Seite 360 Z. 10 v. o. (47) statt (44),

„ 362 Z. 10 v. u. $p^{(n-2)}(u)$ statt $p^{(n-3)}(u)$,

„ 370 Z. 5 v. u. $\sigma(u)^n$ statt $\sigma(u)^2$,

Z. 2 v. u. $1:q$ statt q ,

„ 381 Z. 1 v. o. (98) statt (97).

„ 377 Mitte „wenn wir zuerst nach u differentiiren“ soll lauten „wenn wir zuerst mit $\sigma(u)^n$ multipliciren und dann nach u differentiiren“.

„ 389 ist mehrfach k mit κ verwechselt.