ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2757-59.

Ueber eine von Herrn Tschebyschef angegebene Interpolationsformel.

Von Paul Harzer.

I. Herr Tschebyschef hat bereits im Jahre 1858 zwei parabolische Interpolationsformeln aufgestellt,*) welche, was sehr zu bedauern ist, bisher in den Naturwissenschaften nicht die gebührende Anwendung gefunden haben. Herr Backlund**) hat im Jahre 1884 die Aufmerksamkeit auf Herrn Tschebyschef's Formeln wiedererweckt; da er jedoch von den zwei in der genannten Stelle abgeleiteten Formeln das wesentlichste Gewicht auf die eine verlegt und die andere, sicher vortheilhaftere, nur in zweiter Reihe bespricht, hielt ich es für gerechtfertigt, auf dieses Thema zurückzukommen, um den Astronomen einige Bemerkungen über die letztere Methode mitzuthemen. Der Zweck des nachstehenden Aufsatzes würde erfüllt sein, wenn die Astronomen durch die mitzuthemenenden Rechnungen zu Versuchen mit Herrn Tschebyschef's Formel veranlasst würden.

Die in Frage stehende Formel löst das folgende, sehr häufig in der Praxis vorkommende Problem: Es ist gegeben eine Reihe Werthe der stetigen und eindeutigen Function $F(x)$ für eine Reihe verschiedener Werthe des Arguments x , deren erster gleich a , deren letzter gleich b sei; es sollen die constanten Coefficienten A in der parabolischen Interpolationsformel

$$(1) \quad F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n,$$

in welcher n wesentlich niedriger sein soll, als die Anzahl der gegebenen Functionswerthe, mit möglichst gutem Anschluss an alle gegebenen Functionswerthe bestimmt werden.

Herr Tschebyschef erhält nicht die Coefficienten A direct, sondern stellt vielmehr die Function $F(x)$ in der folgenden Weise dar:

$$(2) \quad F(x) = \alpha_0 \theta_0 + \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \dots + \alpha_n \theta_n,$$

wobei die α constante Coefficienten und die θ gewisse ganze, rationale Functionen des Arguments x sind, deren Grad durch den unteren Index derselben angegeben wird.

Natürlich kann man das vorgelegte Problem nach der, unseres jetzigen Wissens besten Methode, nach der Methode der kleinsten Quadrate, lösen und es ist daher Herrn Tschebyschef's Formel nach dem Maassstabe dieser Methode

zu beurtheilen; die von mir angestellten Versuche haben mir über den relativen Werth von Herrn Tschebyschef's Methode zur Methode der kleinsten Quadrate die in den folgenden Sätzen ausgesprochene Ansicht erweckt.

1. Nachtheile der Tschebyschef'schen Formel:

a) Die Coefficienten A werden nicht mit gleicher Schärfe bestimmt, wie durch die Methode der kleinsten Quadrate; d. h. der bei der Anwendung der Tschebyschef'schen Formel übrig bleibende wahrscheinliche Fehler ist etwas grösser als bei Anwendung der durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Formel. Selbst bei ungünstigen Fällen scheint es jedoch ohne Schwierigkeiten zu vermeiden zu sein, dass das Verhältniss der Fehler bei beiden Formeln ein ungünstigeres, als das der Zahlen 9 und 8 wird.

b) Es ist ohne Weiteres nicht möglich, bei der Tschebyschef'schen Formel die Gewichte der einzelnen Werthe der Function $F(x)$ zu berücksichtigen; man kann also nicht dafür sorgen, dass sich die Formel einzelnen, besser bestimmten Werthen der Function $F(x)$ besser anschliesst, als anderen. Wir werden weiter unten nachweisen, wie man diesen Nachtheil der Methode fast vollständig beseitigen kann.

c) Die Tschebyschef'sche Methode schliesst die Möglichkeit einer Bestimmung des Fehlers jedes einzelnen Coefficienten aus.

d) Es ist bei der Tschebyschef'schen Formel vorausgesetzt, dass in der ganzen Reihe der Coefficienten A keiner — wenn nicht zufällig — verschwinde; man kann also nicht irgend welche dieser Coefficienten als gleich Null annehmen und den Einfluss dieser Vernachlässigung durch eine Aenderung der übrigen Coefficienten corrigiren. Handelt es sich also beispielsweise um die Bestimmung der Coefficienten einer durch ihre Specialwerthe gegebenen Function $F(x)$, welche ganz, rational und etwa vom 12. Grade ist, so muss man nach Herrn Tschebyschef's Formel sämtliche 13 Glieder der Reihe (2) bestimmen, selbst wenn einige derselben in Wirklichkeit gleich Null herauskommen müssten.

e) Eine sehr starke Abweichung von der Aequidistanz in der Reihe der Werthe des Arguments x und eine ungenügend dichte Vertheilung derselben kann eine starke Unsicherheit der Bestimmung der Coefficienten hervorrufen. Was man etwa in dieser Rücksicht zu fürchten hat, dürften die ersten der folgenden Beispiele erweisen; diese mit Rücksicht auf die Aequidistanz der Werthe x theilweise sicher sehr ungünstigen Fälle haben, allerdings unter Anwendung eines Kunstgriffes, sehr günstige Resultate ergeben.

*) P. Tschébychef, Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations; Mémoires de l'Acad. impér. d. sc. de St. Pétersbourg, VII^e Série, Tome I, No. 5.

**) O. Backlund, Ueber die Anwendung einer von P. Tschebyschew vorgeschlagenen Interpolationsmethode; Bulletin de l'Acad. impér. d. sc. de St. Pétersbourg, Tome VII.

f) Die Werthe der θ wachsen, wenn sich das Argument x den Grenzwerten a und b nähert, sehr stark und die Folge hiervon ist, oder kann sein, dass die ersten und letzten der Werthe $F(x)$ weniger gut dargestellt werden, als die übrigen. Der hiernach in den Grenzwerten zu befürchtende Fehler muss um so grösser erwartet werden, je mehr Glieder zur Darstellung der Werthe $F(x)$ verwendet worden sind.

2. Vorthelle der Tschebyscheff'schen Formel:

a) Die Arbeit der Bestimmung der Coefficienten α ist eine geringe gegenüber der der Ermittlung der Coefficienten A durch die Methode der kleinsten Quadrate. Bei Berücksichtigung beispielsweise von 5 Gliedern in jeder Formel schätze ich nach Maassgabe der Ziffern das Verhältniss der Arbeit auf etwa 1 zu 6; bei Berücksichtigung von mehr Gliedern wächst der Vortheil der Tschebyscheff'schen Formel stark.

b) Nach der Methode der kleinsten Quadrate muss man, wenn es sich herausstellt, dass p Glieder der Reihe (1) nicht genügen, um die gegebenen Werthe genügend genau darzustellen, und wenn man in Folge dessen gezwungen ist, das $(p+1)^{\text{te}}$ etc. Glied mit in Rechnung zu ziehen, einen wesentlichen, mit der Anzahl der Glieder stark wachsenden Theil hinzufügen und auch einen beträchtlichen Theil der schon für die p Glieder ausgeführten Rechnung wiederholen; die neu hinzutretenden Glieder verändern ferner die p ersten Coefficienten. Bei Herrn Tschebyscheff's Formel sind die Coefficienten α unabhängig von

der Anzahl der mitgenommenen Glieder und es macht mit wachsender Zahl der Glieder nur wenig zunehmende Mühe, zu den schon bestimmten Coefficienten noch weitere hinzuzufügen. Man kann also bei Anwendung der letzteren Formel Schritt für Schritt sehen, ob man für eine genügende Darstellung der gegebenen Werthe noch mehr Glieder hinzuziehen muss.

Es wird hiernach in den meisten Fällen völlig ausreichen, sich zur Lösung des vorgelegten Problems der Tschebyscheff'schen Formel zu bedienen; der etwa durch die Umgehung der Methode der kleinsten Quadrate entstehende Verlust an Genauigkeit wird eventuell durch Berücksichtigung von mehr Gliedern der Reihe (2) leicht einzubringen sein.

Da anzunehmen steht, dass Herrn Tschebyscheff's Abhandlung nur wenigen Astronomen zur Hand sein wird, möge eine kurze Darstellung der Hauptzüge der höchst eleganten Methode, welche zu der in Frage stehenden Formel führt, vorausstehen.

2. Das Argument x können wir immer so wählen, dass der erste Werth von $F(x)$ dem Werthe $x = -1$, der letzte dem Werthe $x = +1$ entspricht. Ist diese Bedingung nicht an und für sich für die unabhängige Variable erfüllt, so ist sie leicht durch eine lineare Substitution zu realisiren. Wir nehmen daher an, dass die Grenzwerte a und b von x bezüglich gleich -1 und $+1$ seien.

Unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung (1) bestehe, bilden wir das folgende Aggregat bestimmter Integrale:

$$(3) \quad \int_{\nu} F(x) = \int_{-1}^{\eta_1} F(x) dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx + \int_{\eta_2}^{\eta_3} F(x) dx - \dots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_{\nu}}^{+1} F(x) dx.$$

Unter den η verstehen wir eine vorerst unbestimmte Anzahl ν von positiven, reellen Constanten, welche der Ungleichung genügen

$$(4) \quad -1 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \eta_4 \dots < \eta_{\nu} < +1.$$

Setzt man dann allgemein:

$$(5) \quad s_l = \frac{1}{l+1} \left[(-1)^l + 2\eta_1^{l+1} - 2\eta_2^{l+1} + \dots - 2(-1)^{\nu} \eta_{\nu}^{l+1} + (-1)^{\nu} \right], \quad l = 0, 1, 2 \dots n,$$

so erhält man

$$\int_{\nu} F(x) = A_0 s_0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 + A_3 s_3 + \dots + A_n s_n.$$

Durch eine geeignete Wahl der Constanten η kann man nun bewirken, dass erstens sämtliche s bis auf eines — es sei dies s_l — verschwinden und zweitens der Coefficient s_l den grösst möglichen Werth annimmt. Man übersieht leicht, dass hierfür nöthig ist, dass $\nu \leq n$ gewählt werde und nach einer Bemerkung Herrn Tschebyscheff's darf unbeschränkt der Allgemeingültigkeit $\nu = n$ gesetzt werden.

Erfüllen wir also die Gleichungen:

$$(6) \quad s_0 = s_1 = s_2 = \dots = s_{l-1} = s_{l+1} = \dots = s_n = 0; \quad s_l = \max.$$

so wird:

$$(7) \quad A_l = \frac{1}{s_l} \int_{\nu} F(x).$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, weshalb für s_l die Bedingung des relativen Maximums aufgestellt worden ist.

Nimmt man die Zahl n als unbegrenzt an, so wird, indem man die s durch die Werthe (5) ersetzt, leicht erhalten:

$$-\frac{s_0}{x^2} - \frac{2s_1}{x^3} - \frac{3s_2}{x^4} - \dots \text{ in inf.} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-\eta_1} + \frac{2}{x-\eta_2} - \frac{2}{x-\eta_3} + \dots + (-1)^n \frac{2}{x-\eta_n} - (-1)^n \frac{1}{x-1}.$$

Es sei zur Abkürzung

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(x) = (x-\eta_1)(x-\eta_3)(x-\eta_5) \dots, \\ \psi(x) = (x-\eta_2)(x-\eta_4)(x-\eta_6) \dots \end{cases}$$

Dann ergibt die soeben erhaltene Gleichung mit Rücksicht auf die Relation (6):

$$\frac{d \log \frac{(x+1)\psi^2(x)}{(x-1)^n \varphi^2(x)}}{dx} = -\frac{(L+1)s_L}{x^{L+2}} - \frac{(n+2)s_{n+1}}{x^{n+3}} - \frac{(n+3)s_{n+2}}{x^{n+4}} - \dots,$$

oder integriert:

$$(9) \quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sqrt{\frac{(x-1)^n}{x+1}} \cdot e^{\frac{s_L}{2x^{L+1}} + \frac{s_{n+1}}{2x^{n+2}} + \frac{s_{n+2}}{2x^{n+3}} + \dots}$$

Allgemein würde auf der rechten Seite noch eine Integrationsconstante als Factor stehen müssen, doch ist diese hier gleich der Einheit.

Aus dieser Formel schliesst Herr Tschebyschef die folgenden Vorschriften zur Bestimmung der η und des Divisors s_L der Formel (7):

A) n gerade. Man bilde die Kettenbruchentwicklung und die Näherungsbrüche des Ausdruckes:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} e^{\frac{s_L}{2x^{L+1}}}.$$

Dann bestimme man die Grösse s_L in der Weise, dass in der ganzen Reihe der Näherungsbrüche keiner mit einem Nenner vom Grade $\frac{1}{2}n+1$ in x vorkommt. Dieser Bedingung entsprechend erhält man im Allgemeinen eine Reihe von Werthen s_L , von welchen sogleich die nicht reellen bei Seite zu lassen sind. Dann suche man denjenigen höchsten Näherungsbruch $\frac{P_{1/2n}}{Q_{1/2n}}$ auf, dessen Nenner eine Function vom Grade $\mu < \frac{1}{2}n+1$ in x ist. Von den erhaltenen Werthen der s_L sind dann noch diejenigen wegzulassen, für welche der Nenner $Q_{1/2n+1}$ des auf $\frac{P_{1/2n}}{Q_{1/2n}}$ folgenden Näherungsbruches nicht die Bedingung erfüllt, dass das Product $Q_{1/2n} \cdot Q_{1/2n+1}$ mindestens vom Grade $n+2$ in x ist. Die Grössen η_1, η_3, η_5 etc. und η_2, η_4, η_6 etc. sind bezüglich die Wurzeln der Gleichungen:

$$(10) \quad Q_{1/2n} = 0, \quad P_{1/2n} = 0$$

und es sind schliesslich noch diejenigen Werthe s_L bei Seite zu lassen, welche für die Wurzeln η nicht die Bedingung (4) erfüllen und von allen so übrig bleibenden Werthen ist der absolut genommen grösste als zu verwendender Werth beizubehalten.

B) n ungerade. Man bilde die Kettenbruchentwicklung und die Näherungsbrüche des Ausdruckes:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} e^{\frac{s_L}{2x^{L+1}}}.$$

Dann bestimme man die Grösse s_L in der Weise, dass in der ganzen Reihe der Näherungsbrüche keiner mit einem Nenner vom Grade $\frac{1}{2}(n+3)$ in x vorkommt. Dieser Bedingung entsprechend erhält man im Allgemeinen eine Reihe von Werthen s_L , von welchen sogleich die nicht reellen bei Seite zu lassen sind. Dann suche man denjenigen höchsten Näherungsbruch $\frac{P_{1/2(n+1)}}{Q_{1/2(n+1)}}$ auf, dessen Nenner eine Function vom Grade $\mu < \frac{1}{2}(n+1)$ in x ist. Von den erhaltenen Werthen der s_L sind dann noch diejenigen wegzulassen, für welche der Nenner $Q_{1/2(n+3)}$ des auf $\frac{P_{1/2(n+1)}}{Q_{1/2(n+1)}}$ folgenden Näherungsbruches nicht die Bedingung erfüllt, dass das Product $Q_{1/2(n+1)} \cdot Q_{1/2(n+3)}$ mindestens vom Grade $n+3$ in x ist. Die Grössen η_1, η_3, η_5 etc. und η_2, η_4, η_6 etc. sind bezüglich die Wurzeln der Gleichungen:

$$(11) \quad Q_{1/2(n+1)} = 0, \quad P_{1/2(n+1)} = 0$$

und es sind schliesslich noch diejenigen Werthe s_L bei Seite zu lassen, welche für die Wurzel η nicht die Bedingung (4) erfüllen und von allen so übrig bleibenden Werthen ist der absolut genommen grösste als zu verwendender Werth beizubehalten.

Zur Bestimmung der auf den letzten Coefficienten A_n bezüglichen Werthe gestalten sich die gegebenen Vorschriften ganz besonders einfach; in diesem Falle ist es nämlich für die Bestimmung des die Wurzeln η ergebenden Näherungsbruches gleichgültig, ob man die Vorschriften auf die Functionen

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} e^{\frac{s_L}{2x^{L+1}}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} e^{\frac{s_L}{2x^{L+1}}}$$

oder bezüglich auf die einfacheren Functionen

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

angewendet. Für diese letzteren Functionen sind aber die Näherungsbrüche bekannt; für die erste Function sind die Zähler und Nenner:

$$\left. \begin{aligned} P_m &= \frac{[V^{1/2}(x+1) + V^{1/2}(x-1)]^{2m+1} + [V^{1/2}(x+1) - V^{1/2}(x-1)]^{2m+1}}{2V^{1/2}(x+1)} \\ Q_m &= \frac{[V^{1/2}(x+1) + V^{1/2}(x-1)]^{2m+1} - [V^{1/2}(x+1) - V^{1/2}(x-1)]^{2m+1}}{2V^{1/2}(x-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

für die zweite:

$$P_m = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^m - (x - \sqrt{x^2-1})^m}{2\sqrt{x^2-1}}, \quad Q_m = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^m + (x - \sqrt{x^2-1})^m}{2}$$

Die unter A) und B) vorgeschriebenen Bestimmungen erfordern, die Gleichung (10) für gerade n aus dem ersten Werthpaare für $m = \frac{1}{2}n$ und die Gleichungen (11) für ungerade n aus dem zweiten Werthpaare für $m = \frac{1}{2}(n+1)$ zu bilden.

Setzt man also

$$x = \cos \varphi,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (10) und (11) in die folgenden:

$$\frac{\sin^{1/2}(n+1)\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}} = 0, \quad \frac{\cos^{1/2}(n+1)\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}} = 0, \quad (n \text{ gerade}), \quad \text{und} \quad \cos^{1/2}(n+1)\varphi = 0, \quad \frac{\sin^{1/2}(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = 0, \quad (n \text{ ungerade}).$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind in beiden Fällen

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= \cos \frac{n}{n+1} \pi, & \eta_3 &= \cos \frac{n-2}{n+1} \pi, & \eta_5 &= \cos \frac{n-4}{n+1} \pi, & \dots \\ \eta_2 &= \cos \frac{n-1}{n+1} \pi, & \eta_4 &= \cos \frac{n-3}{n+1} \pi, & \eta_6 &= \cos \frac{n-5}{n+1} \pi, & \dots \end{aligned} \right.$$

Beide Werthreihen sind so weit fortzusetzen, als mit der Bedingung verträglich ist, dass das Argument der Cosinus grösser oder gleich $\frac{1}{n+1} \pi$ sein muss.

Die für die Grösse s_l unter A) und B) vorgeschriebenen Bedingungen sind sowohl für gerade als für ungerade n erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$(14) \quad s_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Nehmen wir also, nachdem die Gleichungen (13)

festgestellt sind, den durch (14) gegebenen Werth von s_n an, so ist der letzte Coefficient A_n der Reihe (1) bestimmt durch die Formel (7), in welcher $l = n$ zu setzen ist. Die Ermittlung der übrigen Coefficienten unterliegt grösseren Schwierigkeiten; die Ausführung derselben ergibt die von Herrn Tschebyschef in der genannten Abhandlung angegebene erste Formel. Für die zweite Formel genügt die Bestimmung der Werthe der η und von s für den letzten Coefficienten. Nach (7) gilt nämlich für das Aggregat

$\int_n F(x)$ bei Benutzung der Werthe (13) die folgende Formel:

$$\int_n F(x) = \int_n (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n) = s_n A_n$$

und folglich ist:

$$(15) \quad \int_n x^0 = 0, \quad \int_n x^1 = 0, \quad \int_n x^2 = 0, \quad \int_n x^3 = 0, \quad \dots, \quad \int_n x^{n-1} = 0, \quad \int_n x^n = s_n.$$

Hat man also eine Reihe $f(x)$ mit beliebig vielen Gliedern und constanten Coefficienten a :

$$(16) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_m x^m,$$

so ist:

$$\int_n f(x) = a_n \int_n x^n + a_{n+1} \int_n x^{n+1} + a_{n+2} \int_n x^{n+2} + \dots + a_m \int_n x^m.$$

Legt man hier der beliebigen ganzen positiven Zahl m der Reihe nach die Werthe $n = 0, 1, 2, \dots, m$ bei so wird:

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \int_0 f(x) = a_0 \int_0 x^0 + a_1 \int_0 x + a_2 \int_0 x^2 + a_3 \int_0 x^3 + \dots + a_m \int_0 x^m, \\ \alpha_1 = \int_1 f(x) = a_1 \int_1 x + a_2 \int_1 x^2 + a_3 \int_1 x^3 + \dots + a_m \int_1 x^m, \\ \alpha_2 = \int_2 f(x) = a_2 \int_2 x^2 + a_3 \int_2 x^3 + \dots + a_m \int_2 x^m, \\ \vdots \\ \alpha_m = \int_m f(x) = a_m \int_m x^m. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass man aus den gegebenen Werthen der Function $f(x)$ die linken Seiten, d. h. die Werthe α bestimmen kann; beachtet man dann, dass $\int_p x^q$ mit Hülfe

der Werthe (13) leicht zu ermitteln ist, so stellt (17) ein in Bezug auf die $m+1$ unbekannten a auflösbares System $m+1$ linearer Gleichungen dar. Die wirkliche Auflösung dieses Systemes würde aber zu sehr weitläufigen Rechnungen

führen; es ist deshalb von grosser Wichtigkeit, dass es Herrn Tschebyschef gelungen ist, sie durch eine scharfsinnige Methode zu umgehen.

Herr Tschebyschef multiplicirt die Gleichungen (17) der Reihe nach bezüglich mit den folgenden vorerst unbestimmten, aber ganzen rationalen, Functionen von x : $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m^*$ und untersucht, wie diese Functionen θ zu wählen sind, damit die Summe der Producte gleich der Function $f(x)$ werde, damit also die Gleichung bestehe:

$$(18) \quad \alpha_0 \theta_0 + \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \dots + \alpha_m \theta_m = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m.$$

Es ist allgemein nach (15) $\int_q x^p$ für $q > p$ gleich Null; danach ist die Gleichung (18), wie aus der Formel (17) zu ersehen ist, erfüllt, wenn die Relationen:

$$(19) \quad \theta_0 \int_0 x^p + \theta_1 \int_1 x^p + \theta_2 \int_2 x^p + \dots + \theta_m \int_m x^p = x^p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, m$$

bestehen. Multiplicirt man diese Gleichung — unter α eine beliebige Constante verstanden — mit $\frac{p+1}{\alpha^{p+2}}$ und bildet die Summe der Producte für $p = 0, 1, 2, \dots, m$, für unbegrenzt wachsende m , so wird:

$$(20) \quad \theta_0 \int_0 \frac{1}{(\alpha-x)^2} + \theta_1 \int_1 \frac{1}{(\alpha-x)^2} + \theta_2 \int_2 \frac{1}{(\alpha-x)^2} + \dots = \frac{1}{(\alpha-x)^2}.$$

Erinnert man sich aber der Bedeutung des Zeichens $\int_n$, so findet man leicht:

$$\int_n \frac{1}{(\alpha-x)^2} = \frac{d}{d\alpha} \left[\log \frac{(\alpha-\eta_1)^2 (\alpha-\eta_3)^2 \dots (\alpha-1)^{(-1)^n}}{(\alpha-\eta_2)^2 (\alpha-\eta_4)^2 \dots (\alpha+1)} \right].$$

*) Herr Tschebyschef bezeichnet diese Functionen mit $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{m+1}$.

Beachtet man ferner, dass die η_1, η_3 , etc. und η_2, η_4 , etc. die Wurzeln bezüglich der Gleichungen

$$Q_{1/2n} = 0, \quad P_{1/2n} = 0 \quad \text{und} \quad Q_{1/2(n+1)} = 0, \quad P_{1/2(n+1)} = 0$$

sind, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist, dass also auch die Producte $(\alpha - \eta_1)(\alpha - \eta_3), \dots$ und $(\alpha - \eta_2)(\alpha - \eta_4), \dots$ bezüglich von den Q und P für $x = \alpha$ nur um einen bei der Differentiation wegfallenden constanten Factor verschieden sind, so erhält man unter Benutzung der Werthe (12) sowohl für gerade, als für ungerade n die Formel:

$$\int_n \frac{1}{(\alpha - x)^2} = (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \cdot \frac{4}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^{n+1}}.$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} = u, \quad \text{folglich} \quad \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{u},$$

so nimmt die Gleichung (20) die folgende Gestalt an:

$$\frac{\theta_0}{u - \frac{1}{u}} - \frac{2\theta_1}{u^2 - \frac{1}{u^2}} + \frac{3\theta_2}{u^3 - \frac{1}{u^3}} - \dots = \frac{u^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)}{2(u^2 - 2xu + 1)^2} = \frac{1}{4\sqrt{x^2 - 1}} \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})u}{(u - x - \sqrt{x^2 - 1})^2} - \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})u}{(u - x + \sqrt{x^2 - 1})^2} \right]$$

oder durch Entwicklung nach den fallenden Potenzen von u :

$$(21) \quad \sum_{\lambda, \mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda-1}}{u^{(2\mu-1)\lambda}} = \frac{1}{4\sqrt{x^2 - 1}} \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^\tau - (x - \sqrt{x^2 - 1})^\tau}{u^\tau}.$$

Multiplicirt man schliesslich diese Gleichung beiderseitig mit

$$\left(\log \frac{1}{u}\right)^{\rho-1} \cdot \frac{du}{u},$$

indem man unter ρ eine willkürliche Constante versteht, und integrirt nach u von 0 bis 1, so wird das Resultat nach einer nicht schweren Reduction das folgende:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda-1}}{\lambda^\rho} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^\rho} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^\tau - (x - \sqrt{x^2 - 1})^\tau}{4\tau^\rho \sqrt{x^2 - 1}}$$

d. h.

$$(22) \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1} \lambda \theta_{\lambda-1}}{\lambda^\rho} = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^\tau - (x - \sqrt{x^2 - 1})^\tau}{4\tau^\rho \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 - \frac{1}{3^\rho} - \frac{1}{5^\rho} - \frac{1}{7^\rho} - \frac{1}{11^\rho} - \frac{1}{13^\rho} + \frac{1}{15^\rho} - \dots \right)$$

Die Zahlen 3, 5, 7 etc. der in Klammern stehenden Reihe sind diejenigen ungeraden Zahlen, welche nicht — unter p eine ganze positive und von Null verschiedene Zahl verstanden — Divisoren von der Form $(2p+1)^2$ besitzen. Sie sind also:

$$(23) \quad d = 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 33, \dots *)$$

Das Vorzeichen allgemein des Gliedes $\frac{1}{d^\rho}$ in der in Klammern stehenden Reihe ist negativ oder positiv, je nachdem die Anzahl der in d enthaltenen Primzahlfactoren ungerade oder gerade ist. Die hiernach zu nehmenden Zeichen stehen unter den betreffenden Zahlen.

Da in der Formel (22) ρ eine ganz beliebige Zahl vorstellt, so kann dieselbe nur bestehen, wenn auf beiden

*) Herr Tschebyschef lässt auf p. 66 seiner Abhandlung irrthümlich die Zahl 13 fort.

Seien die Coefficienten von $\frac{1}{1^p}$, $\frac{1}{2^p}$, $\frac{1}{3^p}$, etc. einzelne einander gleich sind. Bezeichnen wir dann mit d_1 , d_2 , etc. diejenigen der Zahlen d , durch welche λ theilbar ist, so folgt demnach:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_{\lambda-1} &= (-1)^{\lambda-1} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^\lambda - (x-\sqrt{x^2-1})^\lambda}{4\sqrt{x^2-1}} \pm (-1)^{\lambda-1} \frac{1}{d_1} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{\lambda}{d_1}} - (x-\sqrt{x^2-1})^{\frac{\lambda}{d_1}}}{4\sqrt{x^2-1}} \\ &\quad \pm (-1)^{\lambda-1} \frac{1}{d_2} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{\lambda}{d_2}} - (x-\sqrt{x^2-1})^{\frac{\lambda}{d_2}}}{4\sqrt{x^2-1}} \\ &\quad \pm \dots \end{aligned} \right.$$

Von den doppelten Vorzeichen muss dasjenige gewählt werden, welches nach der Reihe (23) dem entsprechenden Werthe von d zukommt.

3. Die Function $\theta_{\lambda-1}$ ist hiernach eine ganze, rationale Function vom Grade $\lambda-1$ in x . Um den Specialwerthen dieser Functionen eine möglichst einfache Gestalt zu geben, setzen wir:

$$(25) \quad x = \frac{1}{2}\xi.$$

Ich erhalte dann:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2}, \\ \theta_1 &= -\frac{1}{2}\xi, \\ \theta_2 &= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{2}{3} = -\xi\theta_1 - \frac{2}{3}, \\ \theta_3 &= -\frac{1}{2}\xi^3 + \xi = -\xi\theta_2 - \frac{2}{3}\theta_1, \\ \theta_4 &= \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{2}{5} = -\xi\theta_3 - \theta_2 - \frac{4}{15}, \\ \theta_5 &= -\frac{1}{2}\xi^5 + 2\xi^3 - \frac{4}{3}\xi = -\xi\theta_4 - \theta_3 - \frac{2}{15}\theta_1, \\ \theta_6 &= \frac{1}{2}\xi^6 - \frac{5}{2}\xi^4 + 3\xi^2 - \frac{4}{7} = -\xi\theta_5 - \theta_4 + \frac{1}{3}\theta_2 + \frac{16}{315}, \\ \theta_7 &= -\frac{1}{2}\xi^7 + 3\xi^5 - 5\xi^3 + 2\xi = -\xi\theta_6 - \theta_5 - \frac{4}{21}\theta_1, \\ \theta_8 &= \frac{1}{2}\xi^8 - \frac{7}{2}\xi^6 + \frac{15}{2}\xi^4 - \frac{31}{6}\xi^2 + \frac{2}{3} = -\xi\theta_7 - \theta_6 - \frac{1}{3}\theta_2 - \frac{8}{63}, \\ \theta_9 &= -\frac{1}{2}\xi^9 + 4\xi^7 - \frac{21}{2}\xi^5 + 10\xi^3 - \frac{12}{5}\xi = -\xi\theta_8 - \theta_7 + \frac{1}{3}\theta_3 + \frac{2}{15}\theta_1, \\ \theta_{10} &= \frac{1}{2}\xi^{10} - \frac{9}{2}\xi^8 + 14\xi^6 - \frac{35}{2}\xi^4 + \frac{15}{2}\xi^2 - \frac{6}{11} = -\xi\theta_9 - \theta_8 - \frac{2}{15}\theta_2 + \frac{16}{495}, \\ \theta_{11} &= -\frac{1}{2}\xi^{11} + 5\xi^9 - 18\xi^7 + 28\xi^5 - \frac{52}{3}\xi^3 + \frac{8}{3}\xi = -\xi\theta_{10} - \theta_9 - \frac{1}{3}\theta_3 - \frac{6}{55}\theta_1, \\ \theta_{12} &= \frac{1}{2}\xi^{12} - \frac{11}{2}\xi^{10} + \frac{45}{2}\xi^8 - 42\xi^6 + 35\xi^4 - \frac{21}{2}\xi^2 + \frac{6}{13} = -\xi\theta_{11} - \theta_{10} + \frac{1}{3}\theta_4 + \frac{1}{3}\theta_2 + \frac{32}{6435} \\ &= -\xi(\theta_{11} + \frac{1}{3}\theta_3) - \theta_{10} - \frac{12}{143}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man

$$(27) \quad x = \cos y = \sin z$$

so kann man der Formel (24) auch folgende Gestalten geben:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_{2\lambda} &= \frac{\sin(2\lambda+1)y}{2\sin y} \pm \frac{1}{d_1} \frac{\sin \frac{2\lambda+1}{d_1} y}{2\sin y} \pm \frac{1}{d_2} \frac{\sin \frac{2\lambda+1}{d_2} y}{2\sin y} \pm \dots \\ \theta_{2\lambda-1} &= (-1)^\lambda \frac{\sin 2\lambda z}{2\cos z} \pm (-1)^\lambda \frac{1}{d_1} \frac{\sin \frac{2\lambda}{d_1} z}{2\cos z} \pm (-1)^\lambda \frac{1}{d_2} \frac{\sin \frac{2\lambda}{d_2} z}{2\cos z} \pm \dots \end{aligned} \right.$$

Vielleicht kann man diese letzteren Formeln, wenigstens für ein gewisses Werthgebiet der y und z , mit Vortheil zur numerischen Rechnung verwenden; ich habe mich zur Herstellung der nachfolgend gegebenen Tafeln für die θ der in (26) gegebenen Potenzreihen bedient; nur bei den

Functionen θ_{11} und θ_{12} habe ich mir gestattet, mit Hülfe der schon bestimmten θ nach den gleichfalls in (26) angesetzten Ausdrücken durch Functionen θ mit niedrigeren Indices zu rechnen. Die erhaltenen Werthe der θ sind in der Tafel A) mitgetheilt; sie sind nicht in genügend engen

Intervallen gerechnet, um den zu einem beliebigen Werthe des Arguments gehörigen Functionswerth mit Leichtigkeit daraus zu entnehmen; diese Tafeln sollen nämlich dazu dienen, Ephemeriden mit äquidistanten Argumenten zu berechnen, um mit diesen die gegebenen Functionswerthe zu vergleichen und eventuell neue zu ermitteln. Die Berechnung der Tafel ist mit sechsstelligen Logarithmen ausgeführt worden. Dabei ist zu beachten, dass die Functionen θ_λ , namentlich in der Nähe der Werthe $x = \pm 1$, als um so mehr kleine Differenzen grosser Zahlen erhalten werden, je höher der Index λ ist. Bei der Berechnung der zu höheren Indices gehörigen Werthen der θ gehen bei einem wesentlichen Theile sämtlicher Werthe 3, auch 4 Stellen verloren. Die Werthe der θ sind nur für positive Werthe von x tabulirt, weil für negative eventuell nur das Vorzeichen zu ändern ist; es ist nämlich

$$\begin{aligned}\theta_{2\lambda}(-x) &= \theta_{2\lambda}(x) \\ \theta_{2\lambda-1}(-x) &= -\theta_{2\lambda-1}(x).\end{aligned}$$

Beachtenswerth ist — was analytisch wohl nicht leicht allgemein nachzuweisen ist —, dass bei den berechneten Werthen die absoluten Beträge der θ , abgesehen von den den Argumenten $x = \pm 1$ benachbarten Werthen die Einheit entweder nicht oder doch nur wenig übersteigen, dass ferner sämtliche Nullwerthe, Maxima und Minima der Functionen θ in dem Intervalle von $x = -1$ bis $x = +1$

eingeschlossen sind. Dass die absoluten Werthe der θ in der Nachbarschaft von $x = \pm 1$ rasch anwachsen und zwar um so rascher, je höher der Index ist, bedingt den unter f) erwähnten Nachtheil, dass die gegebenen Grenzwerte der Functionen $f(x)$ weniger gut dargestellt werden oder werden können.

Unter Anwendung dieser Functionen besteht also die Entwicklung (18), nämlich

$$(29) \quad f(x) = \alpha_0 \theta_0 + \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \alpha_3 \theta_3 + \dots$$

in welchen die Anzahl der Glieder der rechten Seite als beliebig gross zu betrachten ist. Wir haben jetzt noch einige Bemerkungen über die Bestimmung der Coefficienten α vermittelt der gegebenen Werthe der Function $f(x)$ hinzuzufügen. Nach der Definitionsformel für die α , nämlich

$$(30) \quad \alpha_m = \int_m f(x)$$

stellt sich α_m als eine algebraische Summe abwechselnd mit positiven und negativen Zeichen versehener bestimmter Integrale dar, indem das erste Integral immer das positive Zeichen hat. Die obere Grenze des vorhergehenden Integrals ist auch die untere Grenze des folgenden und die Grenzen sind bestimmt durch die Gleichung (13) für $n = m$. Wir erhalten auf diese Weise die folgenden Grenzwerte des Arguments x für die Bildung der Integrale, aus welchen die α zusammengesetzt sind:

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
+1	0	-0.5	-0.7071068	-0.8090169	-0.8660254	-0.9009690	-0.9238794
	+1	+0.5	0	-0.3090170	-0.5	-0.6234897	-0.7071068
		+1	+0.7071068	+0.3090170	0	-0.2225209	-0.3826835
			+1	+0.8090169	+0.5	+0.2225209	0
				+1	+0.8660254	+0.6234897	+0.3826835
					+1	+0.9009690	+0.7071068
						+1	+0.9238794
							+1
α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}			
-1	-1	-1	-1	-1			
-0.9396926	-0.9510565	-0.9594929	-0.9659258	-0.9709418			
-0.7660446	-0.8090169	-0.8412535	-0.8660254	-0.8854561			
-0.5	-0.5877853	-0.6548606	-0.7071068	-0.7485109			
-0.1736482	-0.3090170	-0.4154150	-0.5	-0.5680647			
+0.1736482	0	-0.1423149	-0.2588190	-0.3546049			
+0.5	+0.3090170	+0.1423149	0	-0.1205367			
7660446	+0.5877853	+0.4154150	+0.2588190	+0.1205367			
3396926	+0.8090169	+0.6548606	+0.5	+0.3546049			
	+0.9510565	+0.8412535	+0.7071068	+0.5680647			
	+1	+0.9594929	+0.8660254	+0.7485109			
		+1	+0.9659258	+0.8854561			
			+1	+0.9709418			
				+1			

Beispielsweise ist also:

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{-0.5} f(x) dx - \int_{-0.5}^{+0.5} f(x) dx + \int_{+0.5}^{+1} f(x) dx.$$

Die Berechnung der bestimmten Integrale aus gegebenen Werthen der Function $f(x)$ ist besonders leicht, wenn die in genügender Anzahl gegebenen Werthe der Function aequidistanten Werthen des Argumentes x entsprechen; es kommen dann die bekannten Formeln der mechanischen

Quadratur zur Anwendung. Sind die Werthe des Argumentes x genügend dicht über das ganze Gebiet von $x = -1$ bis $x = +1$ vertheilt, um die Curve $f(x)$ zwischen zwei benachbarten Werthen mit einer geraden Linie zu identificiren, so ist

$$(32a) \quad \int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{2} (x_{\mu} - x_{\mu-1}) [f(x_{\mu}) + f(x_{\mu-1})].$$

Sind nur die Werthe $f(x_1)$ bis $f(x_{m-1})$ gegeben, so wird es gestattet sein, linear zu extrapoliren, d. h. zu setzen:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{x_m - x_{m-1}}, \quad \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{f(x_{m-1}) - f(x_{m-2})} = \frac{x_m - x_{m-1}}{x_{m-1} - x_{m-2}}.$$

Daraus folgt:

$$f(x_0) = \frac{(x_2 - x_0)f(x_1) - (x_1 - x_0)f(x_2)}{x_2 - x_1}, \quad f(x_m) = \frac{(x_m - x_{m-2})f(x_{m-1}) - (x_m - x_{m-1})f(x_{m-2})}{x_{m-1} - x_{m-2}}.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser Werthe $f(x_0)$ und $f(x_m)$ aus der Formel (32a), so wird:

$$(32b) \quad \int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 - x_0)^2 f(x_1) - (x_1 - x_0)^2 f(x_2)}{x_2 - x_1} \\ + \sum_{\mu=2}^{m-2} \frac{1}{2} (x_{\mu+1} - x_{\mu-1}) f(x_{\mu}) \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_m - x_{m-1})^2 f(x_{m-2}) - (x_m - x_{m-2})^2 f(x_{m-1})}{x_{m-1} - x_{m-2}} \end{array} \right.$$

Diese von Herrn Tschebyschef angegebene Formel zur Bestimmung der Integrale habe ich im Wesentlichen deshalb angeführt, um zu zeigen, dass sie auf denselben Voraussetzungen beruht, wie die Formel (32a), und dass sie also keine grössere Genauigkeit haben kann, als jene. Im Gegentheile wird sie deswegen etwas ungenauer ausfallen müssen, weil dabei Extrapolationen zur Bestimmung der Werthe $f(x_0)$ und $f(x_m)$ vorgenommen sind, während bei allen in den α enthaltenen Integralen zur Bestimmung von nicht direct gegebenen Werthen von $f(x)$ der Natur der Sache nach nur Interpolationen nöthig werden, indem der erste und letzte der gegebenen Werthe der Function $f(x)$ bezüglich $f(-1)$ und $f(+1)$ sind. Da nun ausserdem die Formel (32b) wesentlich complicirter ist, als die Formel (32a), so wird man sich bei der numerischen Rechnung auf die letztere beschränken. Sind die Werthe des Arguments weder aequidistant noch genügend dicht über das ganze Werthgebiet vertheilt, um mit genügender Sicherheit die Formel (32a) anwenden zu dürfen, so scheinen mir, um die Integrale zu bestimmen, zwei Wege in Betracht zu kommen:

1. Der Fehler in der Formel (32a) wird um so unbedeutender ausfallen, je kleiner die Werthe $f(x)$ sind, oder genauer, je weniger die Curve $f(x)$ von einer geraden Linie abweicht. Für eine wesentliche Verkleinerung der gegebenen Werthe der Function $f(x)$ kann man aber wohl in allen Fällen sorgen, indem man nicht die Function $f(x)$ der Rechnung unterzieht, sondern die Function

$$f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots,$$

wobei die a beiläufig derart zu bestimmen sind, dass die Werthe $f(x)$ möglichst klein ausfallen. Wie diese Constanten mit geringer Mühe ermittelt werden können, möge an einem Beispiele gezeigt werden, welches später noch weiter behandelt werden soll. Es seien folgende Werthe von $f(x)$ gegeben:

x	$f(x)$	A	B	C
-1.00000	1.636042	1.630925	1.630172	+0.000047
-0.96984	1.635830	1.630867	1.630159	34
-0.88524	1.635262	1.630732	1.630142	17
-0.80166	1.634717	1.630615	1.630131	6
-0.68770	1.634000	1.630481	1.630125	0
-0.60466	1.633495	1.630401	1.630126	+0.000001
-0.53777	1.633104	1.630352	1.630134	9
-0.45574	1.632627	1.630295	1.630139	14
-0.42374	1.632455	1.630287	1.630152	27
-0.29647	1.631729	1.630212	1.630146	21
-0.12617	1.630818	1.630172	1.630160	+0.000035
-0.04201	1.630387	1.630172	1.630171	46
+0.05605	1.629894	1.630181	1.630179	54
+0.34682	1.628527	1.630302	1.630211	86
+0.41040	1.628241	1.630341	1.630214	89

x	$f(x)$	A	B	C
+0.42215	1.628186	1.630346	1.630212	+0.000087
+0.82642	1.626491	1.630720	1.630206	81
+0.86440	1.626343	1.630766	1.630204	79
+0.89368	1.626229	1.630802	1.630201	76
+0.94395	1.626044	1.630875	1.630204	79
+0.95764	1.625990	1.630891	1.630201	+0.000076
+1.00000	1.625807	1.630924	1.630172	47

Zuerst werden durch ein zu $f(x)$ hinzugefügtes, x proportionales Glied der erste und letzte Werth von $f(x)$ einander gleich gemacht; der Coefficient von x ist gleich der halben Differenz dieser beiden Werthe, d. h. gleich +0.0051175. Bringt man an $f(x)$ das Glied +0.0051175 x an, so entsteht die schon mit aufgeführte Werthreihe A . Die Function A hat näherungsweise in der Mitte ein Minimum; wir dürfen daher erwarten, die Reihe A auf noch wesentlich kleinere Werthe zu reduciren, indem wir ein Glied, welches in x^2 multiplicirt ist, subtrahiren. Bestimmt man den Coefficienten von x^2 aus der Bedingung, dass die beiden, einander gleichen Grenzwerte und der Minimalwerth, welchen wir als zu $x = 0$ gehörig betrachten dürfen, nach Anbringung des fraglichen Gliedes sämmtlich einander gleich werden, so erhalten wir den Coefficienten gleich der Differenz der Grenzwerte gegen den Minimalwerth, d. h. gleich -0.0007525. Das Glied -0.0007525 x^2 an die Werthe der Reihe A angebracht, erzeugt die Reihe B , welche wir gleichfalls oben schon mitgetheilt haben. Diese Reihe zeigt schon so wenig Abweichungen von einem constanten Werthe, dass die Hinzuziehung eines in x^3 multiplicirten Gliedes vorerst nicht nöthig scheint. Von der Werthreihe B ist nun schliesslich noch der kleinste Werth abgezogen und so die Werthreihe C erhalten worden, welche demnach die Function

$$f(x) = 1.630125 + 0.0051175x - 0.0007525x^2$$

darstellt. Mit dieser Function, als $f(x)$, darf man die Bestimmung der Integrale nach der Formel (32a) vornehmen, während die Benutzung derselben für die direct gegebene Function, in Anbetracht der ungenügenden Licht und zu ungleichmässig vertheilten Werthe des Argumentes, nach meinen Erfahrungen auf unzulässig grosse Fehler führt. Es versteht sich von selbst, dass die Subtraction des constanten und des in x multiplicirten Gliedes nur eine Erleichterung der Rechnung herbeiführt, nicht aber die Genauigkeit der Bestimmung des Integrals nach der Formel (32a) erhöht; die Erhöhung der Genauigkeit tritt vielmehr erst durch Berücksichtigung des in x^2 und eventuell der in höhere Potenzen von x multiplicirten Glieder ein.

Zusätzlich möge bemerkt werden, dass es zur Bequemlichkeit der Rechnung nicht unwesentlich beiträgt, nur mit positiven Werthen der Function $f(x)$ zu operiren, was mit Leichtigkeit zu erreichen ist.

2. Die zweite Methode, die Sicherheit und Bequemlichkeit der Bestimmung der Integrale zu erhöhen, besteht in der graphischen Darstellung der gegebenen Functions-

werthe, um aus der Zeichnung die genügend engen, aequidistanten Werthen des Argumentes entsprechenden Functionswerte herauszugreifen und zur Rechnung zu verwenden. Dabei wird man eventuell nach dem eben Bemerkten für möglichste Kleinheit der durch die Zeichnung darzustellenden Werthe sorgen. Was die Zeichnung betrifft, so ist diese vermittelt des im Handel befindlichen Millimeterpapiers weit schneller und sicherer herzustellen, als ich dies vor meinen ersten Versuchen erwartete. Diese Methode, eine Zeichnung zwischenzuschoben, hat einen grossen Vortheil gegenüber einer directen Verwendung der gegebenen Werthe; sie gestattet uns nämlich, Gewichte zu berücksichtigen. Empfehlenswerth scheint mir dabei, »Normalörter« mit Rücksicht auf Gewichte derart zu bilden, dass die Gewichte derselben nicht wesentlich von einander verschieden sind und die Curve durch diese Normalörter streng zu legen, den übrigen Functionswerten aber mit beiläufiger Berücksichtigung der Gewichte à vue möglichst gut anzuschliessen.

Da eine derart hergestellte Zeichnung sofort den jedem beliebigen zwischen -1 und +1 gelegenen Argumente angehörigen Functionswert abzulesen gestattet, würde die Berechnung einer Interpolationsformel, welche nur eben dieses Ziel zu erreichen bezwecken sollte, überflüssig werden, um so mehr, als die Formel die Zeichnung doch nur mit einem gewissen Grade der Näherung wiedergeben wird. Es scheint mir deshalb die Anwendung der Tschebyscheff'schen Formel auf einen derartigen Fall nur dann Werth zu haben, wenn man eine analytische Darstellung der gegebenen Werthe haben muss, beispielsweise, um mit der abgeleiteten Formel weitere analytische Operationen, etwa Differentiationen, Integrationen etc., vorzunehmen. Dieses Letztere ist bei sämmtlichen von mir gerechneten, unten mitzutheilenden Beispielen der Fall.

Beiläufig möchte ich bemerken, dass die Ausführung von Herrn Tschebyscheff's Vorschlag, die Integrale aus der Zeichnung vermittelt des Planimeter zu bestimmen, mir wegen ungenügender Genauigkeit und grosser Arbeit bei der Ermittlung der Integrale gegenüber den bei Anwendung der mechanischen Quadratur erzielten Resultaten unzweckmässig erscheint.

Ehe ich zur Mittheilung der Beispiele übergehe, möchte ich noch hinzufügen, dass es im Allgemeinen unvortheilhaft ist, die Reihe

$$f(x) = \alpha_0 \theta_0 + \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \dots$$

mit Hilfe der Formeln (26) als eine Potenzreihe nach den $x = \frac{1}{2} \xi$ darzustellen, und zwar deswegen, weil, wie schon bemerkt, die einzelnen Glieder, aus denen die Functionen θ zusammengesetzt sind, um so grösser gegen ihre Summe ausfallen, je höher der Index der Function θ ist. Die Berechnung von Specialwerthen der Function $f(x)$ nach der nach den θ fortschreitenden Reihe erfordert in Folge dieses Umstandes die Berücksichtigung von weniger Stellen, als bei der Benutzung der Potenzreihe nöthig sein würde.

4. Als erstes Beispiel benutze ich die Werthe der Brechungsexponenten für Kronglas und Flintglas, welche in meinem in Nr. 2751 dieser Zeitschrift abgedruckten Aufsatz »Ueber ein dreiflächiges, nach Herrn Scheibner's Principien

berechnetes Objectiv mitgetheilt sind. Es kommt dabei darauf an, die Brechungsexponenten n für Kronglas und n' für Flintglas durch eine Interpolationsformel darzustellen, um daraus das Zerstreuungsverhältniss $\frac{dn'}{dn}$ für einen bestimmten Werth der Wellenlänge λ , nämlich für $\lambda_0 = 0.570786$ (Micron) zu erhalten. An der genannten Stelle sind die mit Rücksicht auf Gewichte, unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Interpolationsformeln mitgetheilt; dieselben gestatten uns eine Vergleichung mit der folgenden Lösung desselben Problems, welche freilich ohne Rücksicht auf Gewichte erlangt ist, nach Herrn Tschebyscheff's Formel. Zur Verwendung kamen nur die an der genannten Stelle zwischen Striche eingeschlossenen Daten, weil diese nur auch dort für die Bestimmung des Ausdrucks $\frac{dn'}{dn}$ benutzt worden sind.

Um der Bedingung, dass x zwischen -1 und $+1$ liege, zu genügen, setzen wir

$$x = \frac{\lambda - 0.567919}{0.051151}$$

oder, wenn wir, wie am angegebenen Orte,

$$\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda = 0.570786 + \delta\lambda$$

annehmen:

$$x = \frac{0.002867 + \delta\lambda}{0.051151}$$

Ferner legen wir nicht den beobachteten Brechungsexponenten direct der Berechnung zu Grunde, sondern behandeln diese nach den Bemerkungen unter 1 des vorigen Paragraphen, wo die auf die Brechungsexponenten von Flintglas bezüglichen Reductionsrechnungen mitgetheilt worden sind. Die entsprechenden Rechnungen für Kronglas gestalten sich analog. Für $f(x)$ nehmen wir für Kronglas an:

$$f(x) = n - 1.517123 + 0.0025965x - 0.0003565x^2$$

In der folgenden Zusammenstellung finden sich die nach den Beobachtungen abgeleiteten Werthe der $f(x)$ und die Summen, welche nach (32a) vermittelst Multiplicationstafeln, ohne mehr als die angegebenen Zahlen niederzuschreiben, berechnet wurden; schliesslich enthält die Zusammenstellung noch zwei Reihen, welche später erklärt werden sollen. Alle Zahlen mit Ausnahme der Argumente sind in Einheiten der achten Decimale ausgedrückt. Wir haben dabei der Kürze wegen gesetzt:

$$\Delta x_\mu = x_\mu - x_{\mu-1},$$

$$f(x_{\mu-1/2}) = \frac{1}{2}[f(x_\mu) + f(x_{\mu-1})],$$

$$\text{Summe} = \sum_{\mu=1}^{\mu} \Delta x_\mu f(x_{\mu-1/2}).$$

Kronglas.

x_μ	$f(x_\mu)$	Δx_μ	$f(x_{\mu-1/2})$	$\Delta x_\mu \cdot f(x_{\mu-1/2})$	Summe	A	B	p
-1.00000	1800	—	—	—	—	+ 300	+ 700	1
-0.96984	2400	0.03016	2100	63	63	— 300	— 100	10
-0.88524	2300	0.08460	2300	195	258	— 200	— 300	2
-0.80166	1400	0.08358	1900	159	417	+ 600	+ 300	5
-0.73814	4100	0.06352	2700	172	589	— 2200	— 2600	2
-0.68770	1100	0.05044	2600	131	720	+ 700	+ 200	6
-0.60466	0	0.08304	600	50	770	+ 1900	+ 1400	3
-0.53777	1200	0.06689	600	40	810	+ 600	+ 100	5
-0.45574	800	0.08203	1000	82	892	+ 1000	+ 600	2
-0.42374	3300	0.03200	2000	64	956	— 1600	— 2000	1
-0.29647	2200	0.12727	2800	356	1312	— 500	— 700	6
-0.12617	1100	0.17030	1600	272	1584	+ 700	+ 500	6
-0.04201	2800	0.08416	2000	168	1752	— 900	— 900	1
+0.05605	2200	0.09806	2500	245	1997	— 100	0	5
+0.34682	1700	0.29077	1900	552	2549	+ 900	+ 1000	2
+0.41627	2900	0.06945	2300	160	2709	— 200	— 200	11
+0.82642	2900	0.41015	2900	1189	3898	— 600	— 300	2
+0.89368	1100	0.06726	2000	134	4032	+ 700	+ 1200	2
+0.95078	2500	0.05710	1800	103	4135	— 900	— 300	6
+1.00000	1700	0.04922	2100	103	4238	— 600	+ 200	2

Die unter der Bezeichnung Summe gegebenen Zahlen sind als die Werthe bestimmter Integrale aufzufassen, deren untere Grenze $x = -1$ ist, während die obere Grenze gleich ist dem auf gleicher Zeile stehenden Werthe von x . Die zur Bildung der Coefficienten α nöthigen Integrale

sind dann bei gradliniger Interpolation leicht zu berechnen; die Interpolation habe ich mit Hilfe von Multiplicationstafeln im Kopfe ausgeführt; sämmtliche Zahlen, welche zur Berechnung der Coefficienten α niedergeschrieben wurden, sind die folgenden:

$(-1, +1)$	$\alpha_0 = +4238$
$(-1, 0)$	$= +1857$
$(0, +1)$	$= -2381$
α_1	$= -524$
$(-1, -0.5)$	$= 848$
$(-1, +0.5)$	$= 2952$
α_2	$= +30$
$(-1, -0.70711)$	$= 670$
$(-1, +0.70711)$	$= 3552$
α_3	$= +492$
$(-1, -0.80902)$	$= 403$
$(-1, -0.30902)$	$= 1277$
$(-1, +0.30902)$	$= 2477$
$(-1, +0.80902)$	$= 3848$

$(-1, -0.80902)$	$= +403$
$(-0.80902, -0.30902)$	$= -874$
$(-0.30902, +0.30902)$	$= +1200$
$(+0.30902, -0.80902)$	$= -1371$
$(+0.80902, +1)$	$= +390$
α_4	$= -252$

Dabei ist mit (a, b) der Werth des Integrales zwischen den Grenzen a und b bezeichnet. Wenn man Zahlen sparen wollte, könnte man wohl noch recht gut die jedem Integralwerthe vorgeschriebenen Grenzen weglassen, da man diese in der Tabelle (31) immer vor Augen haben kann.

Bei der Bestimmung von α_4 bin ich stehen geblieben, um die erhaltene Formel in Bezug auf ihre Genauigkeit zu vergleichen mit der eine gleiche Anzahl von Gliedern enthaltenden, nach der Methode der kleinsten Quadrate und mit Rücksicht auf die in der obigen Zusammenstellung unter p angegebenen Gewichte abgeleiteten Formel. Da diese letztere nach den Potenzen von $\delta\lambda$ fortschreitet, wollen wir auch unsere Reihe in eine solche verwandeln. Die betreffende Rechnung ist mit Hilfe der Gleichungen (26) und des Werthes $\xi = (9.049600) + (1.592176) \delta\lambda$ in der folgenden Form ausgeführt, welche ohne Weiteres verständlich sein wird, wenn ich nur hinzusetze, dass die erste Zeile das von den beobachteten Brechungsexponenten abgezogene Glied enthält.

	Const.	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4
$\alpha_0 \theta_0$	$+1.5171230$	-0.00129825	$+0.00008912$		
$\alpha_1 \theta_1$	$+2119$	$+262$			
$\alpha_2 \theta_2$	-20	$+15$			
$\alpha_3 \theta_3$		$+492$	-0.00000246		
$\alpha_4 \theta_4$	-101	$+378$		-0.00000126	
	1.5171430	-0.00129071	$+0.00009305$	-0.00000246	-0.00000126
		7.110828_n	5.96872	4.39094_n	4.10037_n
Const.		9.049600	8.09920	7.14880	6.19840
$\delta\lambda$		1.592176	0.94280	0.16894	9.34303
$\delta\lambda^2$			3.18434	2.71106	2.06169
$\delta\lambda^3$				4.77651	4.42817
$\delta\lambda^4$					6.36868
	Const.	$\delta\lambda$	$\delta\lambda^2$	$\delta\lambda^3$	$\delta\lambda^4$
	1.5171430	-0.0504666	$+0.14225$	-0.14704	-2.9447
	-1447	$+8157$	-126	-3377	
	$+12$	-35	-15		
	0	-3			
	0				
n	1.5169995	-0.0496547	$+0.14084$	-0.1808	-2.94
	1.5169996	-0.0495681	$+0.13601$	-0.1788	-0.221

Unter die so erhaltene Reihe für n ist zur Vergleichung die Formel gesetzt worden, welche die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ergab. Die Bedeutung der Abweichung der Coefficienten ist aus den Fehlern zu sehen, welche unter Anwendung beider Formeln in den beobachteten Werthen übrig bleiben. Dieselben sind oben schon unter A für die Tschebyscheffsche Formel, unter B für die Formel der Methode der kleinsten Quadrate mit

aufgeführt. Die Fehler sind im Sinne R—B angegeben und in Einheiten der achten Decimale ausgedrückt. Der erste und letzte Werth weicht hier bei der Tschebyscheffschen Formel, gegen die Erwartung, nicht ungewöhnlich stark ab. Die angegebenen Fehler gaben die folgenden Zahlen:

a) wahrscheinlicher Fehler (in Einheiten der sechsten Decimale) der Gewichtseinheit bei Berücksichtigung der Gewichte:

Tschebyscheff'sche Formel Methode der kleinsten Quadrate

alle Beobachtungen:	12.0	10.6
ohne erste und letzte Beobachtung:	12.8	11.3

b) wahrscheinlicher Fehler in (Einheiten der sechsten Decimale) eines Werthes von n ohne Rücksicht auf Gewichte:

alle Beobachtungen:	7.4	7.4
ohne erste und letzte Beobachtung:	7.8	7.8

In diesem Falle stehen also die Leistungen der Tschebyscheff'sche Formel nur ganz unwesentlich der durch die Methode der kleinsten Quadrate erlangten nach.

Ein für die Tschebyscheff'sche Formel um eine Kleinigkeit ungünstigeres Resultat erhält man durch die Rechnung für die Beobachtungen der Brechungsexponenten des Flint-

glases. Ich theile in Kürze die Rechnungen mit. Das Argument x ist mit der Wellenlänge durch dieselbe Gleichung verbunden, wie bei den Rechnungen für das Kronglas. Die Function $f(x)$ ist schon oben als Beispiel abgeleitet worden. Mit Ausnahme des Argumentes sind auch hier die Zahlen in Einheiten der achten Decimale angesetzt:

Flintglas.

x_μ	$f(x_\mu)$	Δx_μ	$f(x_{\mu-1/2})$	$\Delta x_\mu \cdot f(x_{\mu-1/2})$	Summe	A	B	p
—1.00000	4700	—	—	—	—	—1600	— 800	2
—0.96984	3400	0.03016	4000	121	121	— 800	0	10
—0.88524	1700	0.08460	2600	220	341	— 200	+ 300	2
—0.80166	600	0.08358	1100	92	433	+ 200	+ 600	6
—0.68770	0	0.11396	300	34	467	+ 400	+ 500	6
—0.60466	100	0.08304	100	8	475	+ 400	+ 300	2
—0.53777	900	0.06689	500	33	508	— 300	— 400	6
—0.45574	1400	0.08203	1100	90	598	— 300	— 500	2
—0.42374	2700	0.03200	2000	64	662	—1300	—1600	2
—0.29647	2100	0.12727	2400	305	967	+ 300	— 100	6
—0.12617	3500	0.17030	2800	477	1444	+ 400	+ 200	6
—0.04201	4600	0.08416	4000	337	1781	+ 200	+ 100	2
+0.05605	5400	0.09806	5000	490	2271	+ 400	+ 400	8
+0.34682	8600	0.29077	7000	2035	4306	— 700	— 200	2
+0.41040	8900	0.06358	8800	559	4865	— 700	— 100	10
+0.42215	8700	0.01175	8800	103	4968	— 400	+ 200	2
+0.82642	8100	0.40427	8400	3396	8364	— 300	+ 200	6
+0.86440	7900	0.03798	8000	304	8668	— 300	+ 100	2
+0.89368	7600	0.02928	7700	225	8893	— 200	0	2
+0.94395	7900	0.05027	7700	387	9280	—1000	—1000	2
+0.95764	7600	0.01369	7700	105	9385	— 700	— 800	2
+1.00000	4700	0.04236	6100	258	9643	+1700	+1300	2

Die Bestimmung der Coefficienten α ist in der folgenden Zusammenstellung gegeben:

$\alpha_0 = +9643$	+ 549	+ 461	425	+ 425
+1991	—5073	—1530	937	— 512
—7652	+4021	+5371	4041	+3104
$\alpha_1 = -5661$	$\alpha_2 = -503$	—2281	8218	—4177
549	461	$\alpha_3 = +2021$		+1425
5622	7362			$\alpha_4 = +265$

Ordnet man die so erhaltene Reihe wieder nach den Potenzen von ξ , fügt das von den Beobachtungen abgezogene Glied

$$1.6301250 - 0.00255875 \xi + 0.00018812 \xi^2$$

wieder hinzu und verwandelt die Potenzreihe nach ξ in eine solche nach $\delta\lambda$, wobei zwischen beiden Grössen dieselbe Gleichung besteht, wie bei den Rechnungen für das Kronglas, so wird:

$$n' = 1.6298984 - 0.0965726 \delta\lambda + 0.27264 (\delta\lambda)^2 - 0.5683 (\delta\lambda)^3 + 3.08 (\delta\lambda)^4.$$

Die nach der Methode der kleinsten Quadrate, wieder mit Rücksicht auf die Gewichte, abgeleitete Formel ist:

$$n' = 1.6298976 - 0.0962564 \delta\lambda + 0.27773 (\delta\lambda)^2 - 0.7424 (\delta\lambda)^3 + 1.13 (\delta\lambda)^4.$$

Die unter Anwendung beider Formeln in den beobachteten Werthen der n' übrig bleibenden Fehler sind, in Einheiten der achten Decimale ausgedrückt und im Sinne R—B genommen, oben bezüglich unter A und B angegeben. Man sieht, dass hier der erste und letzte Werth der Reihe A ungewöhnlich gross ist.

Es folgt aus denselben:

- a) wahrscheinlicher Fehler (in Einheiten der sechsten Decimale) der Gewichtseinheit bei Berücksichtigung der Gewichte:

	Tschebyscheff'sche Formel	Methode der kleinsten Quadrate
alle Beobachtungen:	9.8	7.4
ohne erste und letzte Beobachtung:	8.7	7.0

- b) wahrscheinlicher Fehler (in Einheiten der sechsten Decimale) eines Werthes von n' , ohne Rücksicht auf Gewichte:

alle Beobachtungen:	5.6	4.7
ohne erste und letzte Beobachtung:	4.3	4.2

Schliesslich erhalten wir den gesuchten Werth des Zerstreuungsverhältnisses, d. h. den Werth $\frac{dn'}{dn}$ für $\delta\lambda = 0$

nach den Tschebyscheff'schen Formeln gleich $\frac{0.0965726}{0.0496547} =$

1.9440, nach der Methode der kleinsten Quadrate gleich $\frac{0.0962594}{0.0495681} = 1.9419$. Für die Berechnung des Objectivs, für welche die abgeleiteten Werthe gebraucht werden sollten, habe ich den Werth 1.9424 angenommen. Ich glaube behaupten zu dürfen, dass die Annahme des durch die Tschebyscheff'sche Formel gelieferten Werthes des Zerstreuungsverhältnisses, selbst wenn er wirklich um den ganzen Betrag der Differenz gegen den angenommenen Werth fehlerhaft wäre, die Leistungen des mit ihm berechneten Objectivs in durchaus unmerkbarer Weise beeinflusst haben würde.

Ich möchte nochmals betonen, dass die Subtraction des quadratischen Gliedes von den Beobachtungsreihen in beiden Fällen den Fehler der Bestimmung der Coefficienten α sehr wesentlich heruntergedrückt hat und das man ganz bedeutend schlechtere Resultate erhalten haben würde, wenn man die beobachteten Brechungsexponenten direct als Functionen $f(x)$ angesehen hätte.

5. Mein Wunsch war, Herrn Tschebyscheff's Formel mit Rücksicht darauf zu prüfen, ob sie auch dann noch gute Resultate liefert, wenn man gezwungen ist, die Entwicklungen bis auf hohe Potenzen der Variablen zu treiben. Geeignete Beispiele für einen solchen Fall schienen mir die Beobachtungen über die Bewegungen in dem dreifachen Systeme ζ Cancri darzubieten, welche bekanntlich Herr Seeliger in einer schönen Abhandlung*) einem eingehenden Studium unterzogen hat. Die Beobachtungen haben zwar

erwiesen, dass der fernere Stern C sich in Bezug auf die beiden nahen A und B in eigenthümlichen Schlangenlinien bewegt, welche den Gedanken aufdrängen, ausser einer Reihe nach den Potenzen der Zeit zur empirischen Darstellung der beobachteten Bewegungen noch trigonometrische Reihen zu Hilfe zu nehmen und in sofern könnte vielleicht eine Darstellung durch eine Potenzreihe unzweckmässig erscheinen. Gerade dieser Umstand aber, der Schwierigkeiten und die Nothwendigkeit bei der Entwicklung der Formeln bis auf hohe Potenzen zu gehen, voraussehen liess, hat mich zur Wahl dieser Beispiele veranlasst. Von vornherein hat man dann freilich zu erwarten, dass zur Darstellung der Beobachtungen bei reinen Potenzreihen mehr Constanten zu Hilfe gezogen werden müssen, als bei Heranziehung auch trigonometrischer Glieder nach Herrn Seeligers Vorgange der Fall sein würde.

Den Rechnungen liegen die von Herrn Seeliger angeführten, von systematischen Fehlern vorläufig befreiten Beobachtungen zu Grunde, welche er auf den Seiten 49, 50, 64, 70 (205, 206, 220, 226) seiner Abhandlung mittheilt. Den wesentlichsten Antheil an diesen ungefähr die Jahre 1822-1880 umfassenden Beobachtungen haben die Herren W. und O. Struve Dawes, Dembowski und Dunér.

Die Beobachtungen beziehen sich auf Distanz und Positionswinkel des Sternes B in Bezug auf den Stern A und des Sternes C in Bezug auf die Mitte von A und B . Wir wollen die Bestimmungsstücke in der angeführten Reihenfolge bezeichnen mit q_1, p_1, q_2, p_2 .

Statt der in Jahren ausgedrückten Beobachtungszeit t wurde das Argument x durch die Formel:

$$x = \frac{t - 1851.50}{27.50}$$

eingeführt, wodurch für alle vier Reihen der Werth des Argumentes nahezu auf das Werthgebiet von -1 bis $+1$ gebracht wird. Als Function $f(x)$ wurden, indem ganz oberflächlich bestimmte Constanten zur Verwendung kamen,

*) H. Seeliger, Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri, Denkschr. d. math.-naturwiss. Classe d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. zu Wien, Bd. 44.

um mit kleinen Werthen zu rechnen, die folgenden Ausdrücke den Rechnungen zu Grunde gelegt:

$$f(x) = \begin{cases} \varrho_1 - 0''520, \\ \rho_1 - 255''00 + 160''00 x, \\ \varrho_2 - 5''360, \\ \rho_2 - 141''00 + 14''30 x. \end{cases}$$

Aus den an dem angegebenen Orte mitgetheilten Reihen erhalten wir dann die Tabelle *B*, in welche zugleich Resultate späterer Rechnungen mit aufgenommen worden sind.

In diesem Falle habe ich, um die Gewichte wenigstens beiläufig zu berücksichtigen, die graphische Darstellung der aus den Beobachtungen folgenden Werthe $f(x)$ gewählt. Zu diesem Zwecke wurden, gemäss den Bemerkungen unter 3, 2, in der aus der gegebenen Tabelle ersichtlichen Weise Normalörter gebildet und die Curve durch dieselben streng gelegt; durch die direct durch die Beobachtung gegebenen Punkte aber so gut als möglich und mit beiläufiger Berücksichtigung der Gewichte. Leider ist bei dem Zeichnen der Curve eine gewisse Willkürlichkeit nicht ausgeschlossen; ich halte jedoch erfahrungsgemäss die hierdurch entstehenden Unsicherheiten in den Zeichnungen für unbedeutend gegenüber denjenigen, welche durch die in Folge der Beobachtungsfehler etwas fehlerhaften Lage der bestimmten Curvenpunkte hervorgerufen werden. Die Zeichnung für sämtliche vier Curven habe ich auf einem Bogen mit sorgfältiger Quadratmillimetertheilung (er trägt die Fabrikmarke C. S. & S.) ausgeführt, im Format 50^{cm} zu 82^{cm}. Ich hoffe, dass die, unter Benutzung dieser mit geringer Mühe hergestellten Zeichnung abgeleiteten Resultate sich als allen Ansprüchen genügend herausstellen werden. Aus der Zeichnung habe ich dann in Intervallen $\Delta x = \omega = 0.02$ die Werthe der Functionen $f(x)$ herausgegriffen, zur Bildung der Integrale sogleich mit ω multiplicirt und die ersten

summirten Reihen mit Rücksicht auf die Bedingung gebildet, dass die Integrale für den Anfangswerth $x = -1$ verschwinden. Auf diese Weise habe ich die Tabelle *C* erlangt, in welcher die auf die Distanzen bezüglichen Werthe in Zehntausendstel Secunden, die auf die Positionswinkel bezüglichen in Tausendstel Grad angesetzt sind.

Nach dieser Tabelle ist es nun sehr leicht, die Coefficienten α zu bestimmen. Bei der Bestimmung jedes dieser Coefficienten habe ich das ihm entsprechende Glied für die Werthe $x = \pm 1$ berechnet, welche einander entweder gleich oder entgegengesetzt gleich sind und die Summe der so erhaltenen Glieder mit den den Werthen ± 1 entsprechenden Tafelwerthen $f(x)$ verglichen, um danach zu beurtheilen, ob noch weitere Glieder hinzuzufügen sein werden. Die beiden Werthe $x = \pm 1$ zu dieser Rechnung zu nehmen, empfiehlt sich, weil einestheils die Werthe der θ für diese Argumente besonders einfach, nämlich entweder ganze Zahlen oder einfache Brüche, sind und sodann, weil das starke Anwachsen der absoluten Werthe der Functionen θ in der Nähe jener Argumentenwerthe eine ungenügende Anzahl berechneter Coefficienten am schärfsten hervortreten lässt. Die folgende Zusammenstellung enthält die Berechnung sämtlicher Coefficienten; es geht aus derselben hervor, dass man für die Darstellung der Bewegung von *B* um *A* bis zur 11. Potenz der Variablen, für die von *C* um die Mitte von *A* und *B* bis zur 13. Potenz gehen muss. Die Werthe des Integrals von -1 bis zu einer beliebigen oberen Grenze lassen sich aus der obigen Tabelle mit Leichtigkeit im Kopfe berechnen, zur Bestimmung irgend einer in der nachfolgenden Zusammenstellung aufgeführten Zahl bedarf es nur, die Differenz zweier auf solche Weise erlangten Integrale zu bilden. Man wird hiernach den geringen Umfang der zur Bestimmung der Coefficienten α nöthigen Arbeit überblicken können.

§ Cancri.

	<i>A, B</i>		$\frac{1}{2}(A+B), C$	
	Distanz	Pos.-W.	Distanz	Pos.-W.
$\alpha_0 = (-1, +1)$	+7998	+92809	+5387	+7066
$(-1, 0)$	+5898	+38457	+2913	+3831
$-(0, +1)$	-2100	-54352	-2474	-3235
$\alpha_1 =$	+3798	-15895	+439	+596
$(-1, -0.5)$	+3024	+10555	+1842	+1764
$-(-0.5, +0.5)$	-4510	-66539	-2154	-3634
$(+0.5, +1)$	+464	+15715	+1391	+1668
$\alpha_2 =$	-1022	-40269	+1079	-202
$(-1, -0.70711)$	+1726	+4501	+898	+1438
$-(-0.70711, 0)$	-4172	-33956	-2015	-2393
$(0, +0.70711)$	+1757	+49994	+1833	+2293
$-(+0.70711, +1)$	-343	-4358	-641	-942
$\alpha_3 =$	-1032	+16181	+75	+396
$(-1, -0.80902)$	+1148	+2668	+467	+1074
$-(-0.80902, -0.30902)$	-3053	-16399	-1608	-1115
$(-0.30902, +0.30902)$	+2951	+43487	+1494	+2270

	<i>A, B</i>		$\frac{1}{2}(A+B), C$	
	Distanz	Pos.-W.	Distanz	Pos.-W.
$-(+0.30902, +0.80902)$	-563	-28661	-1483	-1941
$(+0.80902, +1)$	+283	+1594	+335	+666
$\alpha_4 =$	+766	+2689	-795	+954
$(-1, -0.86603)$	+832	+1798	+300	+793
$-(-0.86603, -0.5)$	-2192	-8757	-1542	-971
$(-0.5, 0)$	+2874	+27902	+1071	+2067
$-(0, +0.5)$	-1636	-38637	-1083	-1567
$(+0.5, +0.86603)$	+240	+14992	+1189	+1173
$-(+0.86603, +1)$	-224	-723	-202	-495
$\alpha_5 =$	-106	-3425	-267	+1000
$(-1, -0.90097)$	+627	+1300	+216	+583
$-(-0.90097, -0.62349)$	-1610	-5205	-1140	-1061
$(-0.62349, -0.22252)$	+2467	+17366	+872	+1049
$-(-0.22252, +0.22252)$	-2144	-31716	-1230	-1512
$(+0.22252, +0.62349)$	+783	+29180	+977	+1699
$-(+0.62349, +0.90097)$	-189	-7670	-817	-776

	A, B		$\frac{1}{2}(A+B), C$	
	Distanz	Pos.-W.	Distanz	Pos.-W.
$(+0.90097, +1)$	+ 178	+ 372	+ 135	+ 386
$\alpha_6 =$	+ 112	+ 3627	- 987	+ 368
$(-1, -0.92388)$	+ 488	+ 984	+ 164	+ 438
$(-0.92388, -0.70711)$	- 1238	- 3517	- 734	- 1000
$(-0.70711, -0.38268)$	+ 2032	+ 10936	+ 1084	+ 495
$(-0.38268, 0)$	- 2140	- 23020	- 931	- 1898
$(0, +0.38268)$	+ 1452	+ 29923	+ 784	+ 968
$(+0.38268, +0.70711)$	- 305	- 20071	- 1049	- 1325
$(+0.70711, +0.92388)$	+ 201	+ 4150	+ 542	+ 629
$(+0.92388, +1)$	- 142	- 208	- 99	- 313
$\alpha_7 =$	+ 348	- 823	- 239	- 2006
$(-1, -0.93969)$	+ 389	+ 772	+ 129	+ 337
$(-0.93969, -0.76604)$	- 997	- 2613	- 494	- 907
$(-0.76604, -0.5)$	+ 1638	+ 7170	+ 1219	+ 520
$(-0.5, -0.17365)$	- 1956	- 16254	- 492	- 1261
$(-0.17365, +0.17365)$	+ 1677	+ 24872	+ 1059	+ 1080
$(+0.17365, +0.5)$	- 877	- 25413	- 603	- 1293
$(+0.5, +0.76604)$	+ 150	+ 13170	+ 941	+ 880
$(+0.76604, +0.93969)$	- 197	- 2420	- 374	- 529
$(+0.93969, +1)$	+ 117	+ 125	+ 76	+ 259
$\alpha_8 =$	- 56	- 591	+ 1461	- 914
$(-1, -0.95106)$	+ 317	+ 622	+ 103	+ 267
$(-0.95106, -0.80902)$	- 831	- 2046	- 364	- 807
$(-0.80902, -0.58779)$	+ 1315	+ 4890	+ 1060	+ 632
$(-0.58779, -0.30902)$	- 1738	- 11599	- 548	- 483
$(-0.30902, 0)$	+ 1697	+ 19390	+ 838	+ 1642
$(0, +0.30902)$	- 1254	- 24097	- 656	- 628
$(+0.30902, +0.58779)$	+ 459	+ 20231	+ 733	+ 1330
$(+0.58779, +0.80902)$	- 104	- 8430	- 750	- 611
$(+0.80902, +0.95106)$	+ 186	+ 1516	+ 273	+ 445
$(+0.95106, +1)$	- 97	- 78	- 62	- 221
$\alpha_9 =$	- 50	+ 489	+ 627	+ 1566
$(-1, -0.95949)$	+ 263	+ 513	+ 85	+ 218
$(-0.95949, -0.84125)$	- 708	- 1653	- 283	- 707
$(-0.84125, -0.65486)$	+ 1071	+ 3510	+ 821	+ 649

	A, B		$\frac{1}{2}(A+B), C$	
	Distanz	Pos.-W.	Distanz	Pos.-W.
$(-0.65486, -0.41541)$	- 1514	- 8290	- 765	- 286
$(-0.41541, -0.14231)$	+ 1597	+ 14806	+ 456	+ 1354
$(-0.14231, +0.14231)$	- 1377	- 20438	- 930	- 835
$(+0.14231, +0.41541)$	+ 886	+ 21683	+ 429	+ 913
$(+0.41541, +0.65486)$	- 225	- 15418	- 786	- 1026
$(+0.65486, +0.84125)$	+ 105	+ 5447	+ 575	+ 508
$(+0.84125, +0.95949)$	- 169	- 1001	- 205	- 384
$(+0.95949, +1)$	+ 83	+ 50	+ 52	+ 186
$\alpha_{10} =$	+ 12	- 791	- 551	+ 590
$(-1, -0.96593)$	-	-	+ 72	+ 182
$(-0.96593, -0.86603)$	-	-	- 228	- 611
$(-0.86603, -0.70711)$	-	-	+ 598	+ 645
$(-0.70711, -0.5)$	-	-	- 944	- 326
$(-0.5, -0.25882)$	-	-	+ 317	+ 683
$(-0.25882, 0)$	-	-	- 754	- 1384
$(0, +0.25882)$	-	-	+ 589	+ 462
$(+0.25882, +0.5)$	-	-	- 494	- 1105
$(+0.5, +0.70711)$	-	-	+ 750	+ 726
$(+0.70711, +0.86603)$	-	-	- 439	- 447
$(+0.86603, +0.96593)$	-	-	+ 160	+ 334
$(+0.96593, +1)$	-	-	- 42	- 161
$\alpha_{11} =$	-	-	- 415	- 1002
$(-1, -0.97094)$	-	-	+ 61	+ 153
$(-0.97094, -0.88546)$	-	-	- 191	- 526
$(-0.88546, -0.74851)$	-	-	+ 444	+ 627
$(-0.74851, -0.56806)$	-	-	- 917	- 422
$(-0.56806, -0.35460)$	-	-	+ 399	+ 287
$(-0.35460, -0.12054)$	-	-	- 456	- 1316
$(-0.12054, +0.12054)$	-	-	+ 828	+ 682
$(+0.12054, +0.35460)$	-	-	- 346	- 650
$(+0.35460, +0.56806)$	-	-	+ 587	+ 1050
$(+0.56806, +0.74851)$	-	-	- 655	- 519
$(+0.74851, +0.88546)$	-	-	+ 340	+ 399
$(+0.88546, +0.97094)$	-	-	- 127	- 295
$(+0.97094, +1)$	-	-	+ 36	+ 140
$\alpha_{12} =$	-	-	+ 3	- 390

Bringt man schliesslich wieder die oben von den Beobachtungen abgezogenen Glieder an die eben abgeleiteten Reihen für die Funktionen $f(x)$ an, nämlich für die vier Reihen bezüglich die Ausdrücke:

$$+0.520 = +1.040 \theta_0,$$

$$+5.360 = +10.720 \theta_0,$$

$$+255.00 - 160.00 x = +510.00 \theta_0 + 160.00 \theta_1, \quad +141.00 - 14.30 x = +282.00 \theta_0 + 14.30 \theta_1,$$

so erhält man das folgende Resultat:

	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
$q_1 = +1.8398$	+0.3798	-0.1022	-0.1032	+0.0766	-0.0106	+0.0112	
$p_1 = +602.809$	+144.105	-40.269	+16.181	+2.689	-3.425	+3.627	
$q_2 = +11.2587$	+0.0439	+0.1079	+0.0075	-0.0795	-0.0267	-0.0987	
$p_2 = +289.066$	+14.896	-0.202	+0.396	+0.954	+1.000	+0.368	
	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	
$q_1 = +0.0348$	-0.0056	-0.0050	+0.0012	-	-	-	
$p_1 = -0.823$	-0.591	+0.489	-0.791	-	-	-	
$q_2 = -0.0239$	+0.1461	+0.0627	-0.0551	-0.0415	+0.0003	-	
$p_2 = -2.006$	-0.914	+1.566	+0.590	-1.002	-0.390	-	

Wir wollen noch die Formeln für die Grössen $\frac{dp_1}{dx}$ und $\frac{dp_2}{dx}$ ermitteln, weil diese zu einer in einem späteren Artikel auszuführenden Rechnung gebraucht werden. Die Formeln für diese Grössen erhält man aus denen für p_1 und p_2 leicht, indem man die folgenden, aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen hervorgehenden Relationen beachtet:

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta_0}{dx} &= 0, \\ \frac{d\theta_1}{dx} &= -2\theta_0, \\ \frac{d\theta_2}{dx} &= -4\theta_1, \\ \frac{d\theta_3}{dx} &= -6\theta_2 - 4\theta_0, \\ \frac{d\theta_4}{dx} &= -8\theta_3 - 4\theta_1, \\ \frac{d\theta_5}{dx} &= -10\theta_4 - 6\theta_2 - \frac{16}{3}\theta_0, \\ \frac{d\theta_6}{dx} &= -12\theta_5 - 8\theta_3 - 8\theta_1, \\ \frac{d\theta_7}{dx} &= -14\theta_6 - 10\theta_4 - 6\theta_2 - 8\theta_0, \\ \frac{d\theta_8}{dx} &= -16\theta_7 - 12\theta_5 - 8\theta_3 - \frac{20}{3}\theta_1, \\ \frac{d\theta_9}{dx} &= -18\theta_8 - 14\theta_6 - 10\theta_4 - 12\theta_2 - \frac{32}{3}\theta_0, \\ \frac{d\theta_{10}}{dx} &= -20\theta_9 - 16\theta_7 - 12\theta_5 - 8\theta_3 - 12\theta_1, \\ \frac{d\theta_{11}}{dx} &= -22\theta_{10} - 18\theta_8 - 14\theta_6 - 10\theta_4 - 10\theta_2 - \frac{32}{3}\theta_0, \\ \frac{d\theta_{12}}{dx} &= -24\theta_{11} - 20\theta_9 - 16\theta_7 - 12\theta_5 - 16\theta_3 - 12\theta_1, \end{aligned} \right.$$

durch eine leichte Umordnung erhält man hiernach:

	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3
$\frac{dp_1}{dx}$	-332.778	$+134.736$	-77.466	-39.472
	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
$\frac{dp_2}{dx}$	-25.008	-2.258	-5.112	-1.744
	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}
$\frac{dp_1}{dx}$	$+37.590$	-26.940	$+4.676$	$+22.112$
$\frac{dp_2}{dx}$	$+4.420$	$+4.152$	$+20.188$	$+11.424$
	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}
$\frac{dp_1}{dx}$	-8.802	$+15.820$		
$\frac{dp_2}{dx}$	-10.152	-4.000	$+22.044$	$+9.360$

Bd. 115.

Die Specialwerthe von $q_1, q_2, \frac{dp_1}{dx}$ und $\frac{dp_2}{dx}$ wurden für jedes Vielfache von 0.02 zwischen $x = \pm 1$ mit Hilfe der Tafeln A) berechnet; die erhaltenen Werthe sind in der Tabelle D) aufgeführt. In derselben findet man auch die Werthe der p_1 und p_2 , welche durch mechanische Quadratur aus $\frac{dp_1}{dx}$ und $\frac{dp_2}{dx}$ abgeleitet wurden, mit Rücksicht darauf, dass die Werthe für $x = 0$ dieselben werden, wie dies die Formeln verlangen. Die Uebereinstimmung der auf solche Weise durch mechanische Quadratur und durch die directe Rechnung nach den erwähnten Formeln erhaltenen Resultate, welche für die Werthe $x = \pm 1$ constatirt wurde, ist eine gute Controle der Berechnung der Specialwerthe der p und $\frac{dp}{dx}$. Die in der Tabelle D) aufgeführten Werthe der q und p haben zur Interpolation der zur Vergleichung mit den Beobachtungen nöthigen Werthe gedient; das Resultat dieser Vergleichung ist in Tabelle B) aufgeführt worden. Ich finde aus den angeführten Fehlern nach der Formel $0.67449 \sqrt{\frac{\sum p \Delta^2}{m-n}}$ (m Zahl der Gleichungen, n Zahl der Glieder der Formel) die folgenden wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit

$\Delta q_1 = 0.0121, q_1 \Delta p_1 = 0.0063, \Delta q_2 = 0.0275, q_2 \Delta p_2 = 0.0231$ oder, da ein Abend von W. Struwe das Gewicht 5 hat, die folgenden wahrscheinlichen Fehler eines Abends von W. Struwe: $\Delta q_1 = 0.054, q_1 \Delta p_1 = 0.028, \Delta q_2 = 0.123, q_2 \Delta p_2 = 0.103$. Diese Fehler entsprechen bezüglich den mittleren Distanzen von beiläufig 0.8 und 5.6. Wir können bei den abgeleiteten Formeln natürlich nur dann stehen bleiben, wenn diese wahrscheinlichen Fehler den wirklichen Beobachtungsfehlern entsprechen. Dass dies nun wirklich der Fall ist, geht aus den folgenden Angaben hervor. Nach der Einleitung zum 9. Bande (p. 152) der »Observations de Poulkova« ist der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung:

q	O. Struwe		W. Struwe	
	Δq	$q \Delta p$	Δq	$q \Delta p$
0.76	0.045	0.030	0.078	0.033
1.58	0.081	0.055	0.101	0.055
3.16	0.086	0.077	0.115	0.077
6.32	0.094	0.114	0.148	0.119

Aus Dembowski's Messungen hat Herr Shdanow*) die folgenden Werthe abgeleitet:

q	Dembowski		q	Dembowski	
	Δq	$q \Delta p$		Δq	$q \Delta p$
0.58	0.038	0.014	2.77	0.065	0.027
1.35	0.064	0.026	6.16	0.083	0.043

Da nun weiter auch die Zeichenwechsel und Zeichenfolgen nach den obigen Formeln befriedigend sind, so hat wohl die Tschebyscheff'sche Formel in diesem Falle Alles geleistet, was man von einer Interpolationsformel fordern kann.

*) Cfr. Ercole Dembowski, misure micrometriche di stelle doppie e multiple, V. I p. 386.

A) Tafel der

$$\theta_0 = 1/2$$

x	$\log \theta_2$	$\log \theta_3$	$\log \theta_4$	$\log \theta_5$	$\log \theta_6$	$\log \theta_7$	$\log \theta_8$	$\log \theta_9$	$\log \theta_{10}$	$\log \theta_{11}$	$\log \theta_{12}$
0.00	9.823909 _n	—∞	9.60206	—∞	9.7569 _n	—∞	9.824	—∞	9.736 _n	—∞	9.664
0.01	9.823779 _n	8.30094	9.60141	8.427 _n	9.7560 _n	8.602	9.823	8.68 _n	9.734 _n	8.73	9.660
0.02	9.823387 _n	8.60171	9.59945	8.726 _n	9.7533 _n	8.901	9.819	8.98 _n	9.727 _n	9.021	9.647
0.03	9.822735 _n	8.77737	9.59617	8.901 _n	9.7487 _n	9.0752	9.812	9.152 _n	9.714 _n	9.193	9.626
0.04	9.821819 _n	8.90170	9.59153	9.0241 _n	9.7422 _n	9.1970	9.802	9.272 _n	9.697 _n	9.312	9.598
0.05	9.820639 _n	8.99782	9.58552	9.1183 _n	9.7337 _n	9.2900	9.790	9.362 _n	9.674 _n	9.396	9.556
0.06	9.819193 _n	9.076043	9.57807	9.1945 _n	9.7232 _n	9.3646	9.775	9.433 _n	9.644 _n	9.464	9.501
0.07	9.817477 _n	9.141851	9.56913	9.2582 _n	9.7106 _n	9.4257	9.755	9.491 _n	9.607 _n	9.517	9.430
0.08	9.815489 _n	9.198525	9.55862	9.3120 _n	9.6957 _n	9.4768	9.732	9.537 _n	9.561 _n	9.554	9.330
0.09	9.813225 _n	9.248180	9.54644	9.3587 _n	9.6783 _n	9.5204	9.706	9.575 _n	9.505 _n	9.585	9.193
0.10	9.810681 _n	9.292256	9.53250	9.3995 _n	9.6584 _n	9.5575	9.674	9.605 _n	9.435 _n	9.605	8.97
0.11	9.807851 _n	9.331784	9.51663	9.4350 _n	9.6355 _n	9.5891	9.638	9.630 _n	9.344 _n	9.619	8.48
0.12	9.804730 _n	9.367520	9.49867	9.4666 _n	9.6094 _n	9.6163	9.594	9.649 _n	9.225 _n	9.624	8.56 _n
0.13	9.801313 _n	9.400040	9.47839	9.4943 _n	9.5796 _n	9.6392	9.545	9.663 _n	9.057 _n	9.623	9.004 _n
0.14	9.797591 _n	9.429791	9.45556	9.5189 _n	9.5458 _n	9.6583	9.486	9.671 _n	8.76 _n	9.613	9.220 _n
0.15	9.793558 _n	9.457125	9.42983	9.5406 _n	9.5068 _n	9.6741	9.415	9.677 _n	7.3 _n	9.599	9.362 _n
0.16	9.789205 _n	9.482324	9.40078	9.5588 _n	9.4622 _n	9.6867	9.328	9.676 _n	8.73	9.572	9.462 _n
0.17	9.784522 _n	9.505622	9.36788	9.5763 _n	9.4103 _n	9.6962	9.217	9.671 _n	9.037	9.537	9.539 _n
0.18	9.779500 _n	9.527207	9.33041	9.5907 _n	9.3493 _n	9.7028	9.061	9.660 _n	9.210	9.487	9.599 _n
0.19	9.774128 _n	9.547238	9.28742	9.6031 _n	9.2760 _n	9.7065	8.82	9.644 _n	9.328	9.420	9.645 _n
0.20	9.768391 _n	9.565848	9.23754	9.6132 _n	9.1858 _n	9.7075	8.26	9.624 _n	9.417	9.334	9.682 _n
0.21	9.762278 _n	9.583149	9.17886	9.6215 _n	9.0693 _n	9.7055	8.48 _n	9.597 _n	9.486	9.207	9.708 _n
0.22	9.755773 _n	9.599237	9.10836	9.6279 _n	8.907 _n	9.7007	8.88 _n	9.561 _n	9.540	9.013	9.728 _n
0.23	9.748859 _n	9.614192	9.02115	9.6324 _n	8.641 _n	9.6927	9.086 _n	9.519 _n	9.582	8.62	9.739 _n
0.24	9.741519 _n	9.628086	8.9082	9.6350 _n	7.83 _n	9.6817	9.220 _n	9.464 _n	9.615	8.36 _n	9.743 _n
0.25	9.733532 _n	9.640978	8.7501	9.6358 _n	8.480	9.6674	9.320 _n	9.394 _n	9.640	8.95 _n	9.740 _n
0.26	9.725476 _n	9.652919	8.4908	9.6346 _n	8.825	9.6493	9.394 _n	9.303 _n	9.660	9.201 _n	9.729 _n
0.27	9.716726 _n	9.663953	7.709	9.6315 _n	9.0137	9.6271	9.455 _n	9.179 _n	9.671	9.356 _n	9.711 _n
0.28	9.707456 _n	9.674119	8.3269 _n	9.6263 _n	9.1427	9.6004	9.502 _n	9.000 _n	9.677	9.465 _n	9.684 _n
0.29	9.697636 _n	9.683447	8.6814 _n	9.6190 _n	9.2403	9.5686	9.543 _n	8.66 _n	9.677	9.554 _n	9.648 _n
0.30	9.687232 _n	9.691965	8.8762 _n	9.6095 _n	9.3179	9.5306	9.575 _n	8.04	9.669	9.625 _n	9.598 _n
0.31	9.676206 _n	9.699695	9.01165 _n	9.5975 _n	9.3817	9.4852	9.601 _n	8.83	9.656	9.682 _n	9.534 _n
0.32	9.664717 _n	9.706656	9.11564 _n	9.5829 _n	9.4352	9.4304	9.621 _n	9.097	9.635	9.729 _n	9.450 _n
0.33	9.652118 _n	9.712862	9.20011 _n	9.5654 _n	9.4804	9.3634	9.635 _n	9.260	9.606	9.767 _n	9.332 _n
0.34	9.638955 _n	9.718322	9.27112 _n	9.5447 _n	9.5194	9.2794	9.644 _n	9.377	9.568	9.797 _n	9.164 _n
0.35	9.624969 _n	9.723045	9.33234 _n	9.5202 _n	9.5529	9.1703	9.650 _n	9.468	9.519	9.822 _n	8.86 _n
0.36	9.610092 _n	9.727034	9.38602 _n	9.4916 _n	9.5817	9.0175	9.650 _n	9.540	9.453	9.839 _n	7.0
0.37	9.594245 _n	9.730288	9.43372 _n	9.4583 _n	9.6062	8.769	9.646 _n	9.601	9.367	9.851 _n	8.88
0.38	9.577338 _n	9.732806	9.47653 _n	9.4185 _n	9.6271	8.100	9.636 _n	9.651	9.250	9.858 _n	9.173
0.39	9.559268 _n	9.734579	9.51524 _n	9.3716 _n	9.6444	8.537 _n	9.622 _n	9.692	9.072	9.859 _n	9.342
0.40	9.539912 _n	9.735599	9.55047 _n	9.3149 _n	9.6587	8.913 _n	9.604 _n	9.725	8.75	9.853 _n	9.456
0.41	9.519128 _n	9.735851	9.58268 _n	9.2453 _n	9.6698	9.1113 _n	9.577 _n	9.753	7.95 _n	9.842 _n	9.539
0.42	9.496745 _n	9.735317	9.61222 _n	9.1575 _n	9.6779	9.2465 _n	9.545 _n	9.775	8.88 _n	9.824 _n	9.602
0.43	9.472561 _n	9.733977	9.63939 _n	9.0406 _n	9.6832	9.3483 _n	9.501 _n	9.793	9.152 _n	9.801 _n	9.650
0.44	9.446330 _n	9.731801	9.66441 _n	8.871 _n	9.6856	9.4289 _n	9.449 _n	9.806	9.320 _n	9.769 _n	9.684
0.45	9.417748 _n	9.728759	9.68748 _n	8.571 _n	9.6848	9.4951 _n	9.384 _n	9.812	9.439 _n	9.725 _n	9.707
0.46	9.386439 _n	9.724813	9.70876 _n	7.08	9.6812	9.5504 _n	9.297 _n	9.816	9.528 _n	9.673 _n	9.719
0.47	9.351925 _n	9.719917	9.72838 _n	8.612	9.6743	9.5970 _n	9.182 _n	9.814	9.599 _n	9.605 _n	9.722
0.48	9.313586 _n	9.714021	9.74642 _n	8.913	9.6641	9.6368 _n	9.017 _n	9.808	9.655 _n	9.517 _n	9.714
0.49	9.270601 _n	9.707062	9.76299 _n	9.0924	9.6501	9.6705 _n	8.72 _n	9.795	9.699 _n	9.400 _n	9.695
0.50	9.221848 _n	9.698970	9.77815 _n	9.2219	9.6321	9.6990 _n	—∞	9.798	9.736 _n	9.223 _n	9.664

Functionen θ . $\theta_1 = -x$.

x	$\log \theta_2$	$\log \theta_3$	$\log \theta_4$	$\log \theta_5$	$\log \theta_6$	$\log \theta_7$	$\log \theta_8$	$\log \theta_9$	$\log \theta_{10}$	$\log \theta_{11}$	$\log \theta_{12}$
0.50	9.221848 _n	9.698970	9.77815 _n	9.2219	9.6321	9.6990 _n	— ∞	9.778	9.736 _n	9.223 _n	9.664
0.51	9.165739 _n	9.689660	9.79196 _n	9.3230	9.6094	9.7227 _n	8.73	9.754	9.764 _n	8.91 _n	9.617
0.52	9.099911 _n	9.679035	9.80446 _n	9.4060	9.5815	9.7423 _n	9.033	9.724	9.785 _n	7.3	9.555
0.53	9.020638 _n	9.666978	9.81568 _n	9.4765	9.5472	9.7575 _n	9.212	9.689	9.801 _n	8.93	9.470
0.54	8.921513 _n	9.653352	9.82565 _n	9.5374	9.5051	9.7690 _n	9.334	9.635	9.806 _n	9.225	9.328
0.55	8.790051 _n	9.637990	9.83439 _n	9.5911	9.4535	9.7766 _n	9.428	9.575	9.806 _n	9.384	9.111
0.56	8.596230 _n	9.620694	9.84188 _n	9.6389	9.3890	9.7802 _n	9.501	9.494	9.799 _n	9.500	8.56
0.57	8.227029 _n	9.601221	9.84814 _n	9.6816	9.3064	9.7800 _n	9.560	9.389	9.784 _n	9.576	8.76 _n
0.58	7.787696	9.579271	9.85314 _n	9.7201	9.1959	9.7757 _n	9.610	9.243	9.761 _n	9.633	9.185 _n
0.59	8.470313	9.554470	9.85686 _n	9.7550	9.0362	9.7669 _n	9.648	9.004	9.728 _n	9.677	9.398 _n
0.60	8.726999	9.526339	9.85926 _n	9.7866	8.760	9.7534 _n	9.679	8.41	9.683 _n	9.703	9.534 _n
0.61	8.889489	9.494260	9.86030 _n	9.8153	7.62	9.7344 _n	9.703	8.71 _n	9.624 _n	9.722	9.636 _n
0.62	9.009167	9.457410	9.85991 _n	9.8415	8.712 _n	9.7093 _n	9.722	9.104 _n	9.544 _n	9.727	9.711 _n
0.63	9.104259	9.414659	9.85803 _n	9.8650	9.0374 _n	9.6772 _n	9.732	9.301 _n	9.431 _n	9.718	9.764 _n
0.64	9.183365	9.364409	9.85456 _n	9.8863	9.2256 _n	9.6361 _n	9.736	9.435 _n	9.262 _n	9.698	9.805 _n
0.65	9.251232	9.304275	9.84939 _n	9.9054	9.3583 _n	9.5840 _n	9.733	9.530 _n	8.96 _n	9.666	9.833 _n
0.66	9.310764	9.230490	9.84237 _n	9.9223	9.4612 _n	9.5169 _n	9.724	9.601 _n	7.7	9.610	9.846 _n
0.67	9.363862	9.136556	9.83334 _n	9.9372	9.5446 _n	9.4285 _n	9.705	9.656 _n	9.017	9.533	9.849 _n
0.68	9.411844	9.009757	9.82210 _n	9.9500	9.6143 _n	9.3058 _n	9.677	9.696 _n	9.299	9.425	9.839 _n
0.69	9.455657	8.81931	9.80837 _n	9.9608	9.6736 _n	9.1186 _n	9.634	9.727 _n	9.477	9.236	9.814 _n
0.70	9.496007	8.44716	9.79183 _n	9.9695	9.7248 _n	8.748 _n	9.577	9.745 _n	9.594	8.86	9.772 _n
0.71	9.533433	8.06610 _n	9.77208 _n	9.9761	9.7691 _n	8.367	9.498	9.754 _n	9.681	8.53 _n	9.708 _n
0.72	9.568358	8.72421 _n	9.74858 _n	9.9805	9.8076 _n	9.0241	9.378	9.752 _n	9.747	9.155 _n	9.613 _n
0.73	9.601118	8.98258 _n	9.72061 _n	9.9826	9.8409 _n	9.2799	9.193	9.737 _n	9.794	9.398 _n	9.468 _n
0.74	9.631984	9.148899 _n	9.68723 _n	9.9822	9.8694 _n	9.4420	8.79	9.709 _n	9.829	9.554 _n	9.201 _n
0.75	9.661181	9.273001 _n	9.64714 _n	9.9791	9.8934 _n	9.5603	8.62 _n	9.666 _n	9.849	9.656 _n	8.28 _n
0.76	9.688894	9.372735 _n	9.59837 _n	9.9731	9.9131 _n	9.6523	9.185 _n	9.597 _n	9.859	9.734 _n	9.137
0.77	9.715279	9.456566 _n	9.53801 _n	9.9639	9.9286 _n	9.7266	9.435 _n	9.493 _n	9.854	9.786 _n	9.459
0.78	9.740468	9.529184 _n	9.46118 _n	9.9510	9.9397 _n	9.7873	9.598 _n	9.326 _n	9.836	9.820 _n	9.639
0.79	9.764575	9.593459 _n	9.35906 _n	9.9338	9.9462 _n	9.8374	9.718 _n	8.98 _n	9.800	9.835 _n	9.758
0.80	9.787696	9.651278 _n	9.21272 _n	9.9116	9.9478 _n	9.8782	9.815 _n	8.53	9.740	9.831 _n	9.838
0.81	9.809918	9.703948 _n	8.9678 _n	9.8833	9.9440 _n	9.9108	9.893 _n	9.246	9.647	9.805 _n	9.892
0.82	9.831315	9.752411 _n	8.2410 _n	9.8472	9.9341 _n	9.9356	9.958 _n	9.515	9.496	9.751 _n	9.922
0.83	9.851951	9.797370 _n	8.8011	9.8013	9.9169 _n	9.9524	0.0107 _n	9.687	9.190	9.647 _n	9.927
0.84	9.871884	9.839363 _n	9.17426	9.7418	9.8907 _n	9.9611	0.0542 _n	9.812	8.32 _n	9.464 _n	9.910
0.85	9.891166	9.878809 _n	9.38211	9.6628	9.8530 _n	9.9608	0.0888 _n	9.907	9.330 _n	8.99 _n	9.860
0.86	9.909841	9.916045 _n	9.52949	9.5524	9.7996 _n	9.9500	0.1136 _n	9.980	9.623 _n	9.130	9.761
0.87	9.927952	9.951343 _n	9.64520	9.3826	9.7230 _n	9.9263	0.1303 _n	0.0374	9.797 _n	9.593	9.577
0.88	9.945535	9.984927 _n	9.74129	9.0538	9.6080 _n	9.8854	0.1358 _n	0.0792	9.918 _n	9.829	9.090
0.89	9.962622	0.016982 _n	9.82398	8.452 _n	9.4145 _n	9.8196	0.1297 _n	0.1048	0.0039 _n	9.985	9.253 _n
0.90	9.979245	0.047664 _n	9.89698	9.2646 _n	8.951 _n	9.7127	0.1089 _n	0.1149	0.0633 _n	0.0969	9.705 _n
0.91	9.995430	0.077108 _n	9.96255	9.5491 _n	9.0318	9.5205	0.0671 _n	0.1055	0.0969 _n	0.1752	9.922 _n
0.92	0.011204	0.105426 _n	0.022325	9.7321 _n	9.5224	9.0086	9.996 _n	0.0689	0.1038 _n	0.2279	0.0577 _n
0.93	0.026588	0.132717 _n	0.077372	9.8700 _n	9.7701	9.2482 _n	9.870 _n	9.991	0.0748 _n	0.2512	0.1374 _n
0.94	0.041603	0.159066 _n	0.128529	9.9822 _n	9.9433	9.7087 _n	9.613 _n	9.831	9.989 _n	0.2405	0.1688 _n
0.95	0.056270	0.184549 _n	0.176401	0.07766 _n	0.07965	9.9570 _n	8.11	9.389	9.775 _n	0.1764	0.1370 _n
0.96	0.070604	0.209232 _n	0.221458	0.16143 _n	0.19374	0.13555 _n	9.734	9.533 _n	7.9 _n	0.0004	9.984 _n
0.97	0.084624	0.233172 _n	0.264102	0.23646 _n	0.29288	0.27862 _n	0.0755	0.0449 _n	9.920	9.233	9.152 _n
0.98	0.098344	0.256421 _n	0.304607	0.30468 _n	0.38122	0.39993 _n	0.2947	0.3191 _n	0.2973	0.0386 _n	0.0986
0.99	0.111777	0.279027 _n	0.343241	0.36756 _n	0.46141	0.50638 _n	0.4628	0.5189 _n	0.5439	0.4598 _n	0.5290
1.00	0.124939	0.301030 _n	0.380211	0.42597 _n	0.53512	0.60206 _n	0.6021	0.6812 _n	0.7368	0.7271 _n	0.8104

B) Beobachtungen von

 ζ Cancri A, B.

x		Distanz			x		Positionswinkel			
		$f(x)$	p	Δq_1			$f(x)$	p	Δp_1	$q_1 \Delta p_1$
-0.9193	-0.8818	0.624	15	-0.027	-0.9193	-0.8818	15.54	15	-1.16	-0.021
-0.8255		0.524	10	+0.033	-0.8255		12.30	10	+2.86	+0.054
-0.7353	-0.7184	0.529	35	+0.049	-0.7676		17.53	5	-0.18	-0.003
-0.7000		0.653	32	-0.062	-0.7356	-0.7182	18.15	41	+0.99	+0.019
-0.6640	-0.6263	0.633	30	-0.029	-0.7022		21.16	60	+0.20	+0.004
-0.5887		0.620	30	+0.008	-0.6647	-0.6363	23.81	42	+0.31	+0.006
-0.5538	-0.4411	0.681	15	-0.046	-0.5887		31.96	25	-1.77	-0.036
-0.4109		0.612	56	+0.017	-0.5400		35.21	33	-1.08	-0.022
-0.3735	-0.3527	0.595	38	+0.026	-0.5189	-0.5302	34.47	20	+1.35	+0.027
-0.3375		0.613	52	-0.003	-0.4800		39.54	2	-0.65	-0.013
-0.3025	-0.2794	0.591	74	+0.007	-0.4098		44.79	89	-0.48	-0.010
-0.2593		0.586	38	-0.003	-0.3742	-0.3729	46.24	37	+0.78	+0.016
-0.2251		0.538	6	+0.033	-0.3313		49.73	80	+0.50	+0.010
-0.1909		0.562	7	-0.004	-0.3015		52.91	63	-0.46	-0.009
-0.1524	-0.1062	0.542	16	+0.002	-0.2607	-0.2660	55.76	40	-0.31	-0.006
-0.1178		0.538	63	-0.007	-0.2222		59.48	17	-1.25	-0.024
-0.0800		0.542	33	-0.024	-0.1905		61.44	17	-1.01	-0.019
-0.0389		0.529	9	-0.025	-0.1527		63.93	32	-0.85	-0.016
-0.0095	+0.0235	0.517	63	-0.025	-0.1175	-0.1125	65.17	74	+0.23	+0.004
+0.0273		0.461	39	+0.016	-0.0800		67.13	33	+0.63	+0.011
+0.0655		0.430	46	+0.030	-0.0400		69.42	8	+0.70	+0.012
+0.1000		0.426	43	+0.017	-0.0095		71.58	62	+0.21	+0.004
+0.1378	+0.1300	0.380	51	+0.042	+0.0265	+0.0169	73.61	33	+0.01	0.000
+0.1727		0.460	21	-0.059	+0.0658		76.36	27	-0.96	-0.017
+0.2105		0.407	37	-0.033	+0.1000		77.48	36	-0.71	-0.012
+0.2455	+0.2490	0.412	19	-0.065	+0.1335	+0.1443	77.88	57	+0.05	+0.001
+0.2829		0.318	44	-0.003	+0.1742		79.25	74	-0.18	-0.003
+0.3193		0.294	32	-0.011	+0.2131		79.71	24	+0.16	+0.003
+0.3553	+0.3559	0.280	36	-0.032	+0.2436	+0.2469	80.74	39	-0.50	-0.008
+0.3931		0.191	32	+0.020	+0.2829		81.43	26	-1.08	-0.016
+0.4233		0.222	11	-0.040	+0.3193		79.48	27	+0.57	+0.008
+0.4633	+0.4758	0.090	32	+0.053	+0.3553	+0.3506	79.29	19	-0.06	-0.001
+0.5084		0.120	30	-0.015	+0.3931		77.91	18	-0.12	-0.002
+0.5367		0.093	33	-0.010	+0.4229		75.97	62	+0.19	+0.002
+0.6102	+0.5962	0.106	20	-0.063	+0.4611	+0.4660	73.44	50	-0.07	-0.001
+0.6487		0.008	32	+0.026	+0.5040		69.69	77	-0.46	-0.005
+0.6811		0.022	52	+0.011	+0.5360		67.74	57	-2.32	-0.024
+0.7204	+0.7158	0.036	39	+0.004	+0.5716	+0.5826	60.92	28	-0.48	-0.005
+0.7564		0.064	40	-0.011	+0.6080		54.56	38	+0.09	+0.001
+0.7905		0.053	70	+0.020	+0.6491		48.39	30	-0.99	-0.009
+0.8273	+0.8379	0.101	43	-0.003	+0.6829		39.68	73	+1.39	+0.013
+0.8640		0.126	62	0.000	+0.7182	+0.7161	33.88	57	+0.49	+0.005
+0.8996		0.172	35	-0.018	+0.7545		28.40	60	-0.74	-0.007
+0.9360		0.185	42	-0.006	+0.7898		22.07	60	-0.40	-0.004
+0.9727	+0.9759	0.181	58	+0.019	+0.8244	+0.8375	17.23	42	-0.68	-0.007
+1.0105		0.217	30		+0.8629		11.34	65	+0.60	+0.007
+1.0444		0.309	12		+0.8982		6.91	29	+1.80	+0.021
					+0.9349		3.54	43	+2.39	+0.029
					+0.9720	+0.9708	1.34	51	+1.29	+0.016
					+1.0105		0.01	15		
					+1.0444		1.74	12		

ζ Cancri. ζ Cancri, $\frac{1}{2}(A+B)$, C.

x		Distanz			x		Positionswinkel			
		$f(x)$	p	$\Delta\varrho_2$			$f(x)$	p	Δp_2	$\varrho_2 \Delta p_2$
-1.0735	-0.9633	0".204	0".214	6	-1.0735	-0.9782	3".68	10	10	
-0.9193		0.218		15	-1.0011		5.10			
-0.8185		0.319		15	-0.9193		6.40			
-0.7356	-0.7305	0.465	0.484	34	-0.8185	-0.7291	4.40	20	+0°.28	+0°.027
-0.7018		0.545		52	-0.7385		3.48		-0.02	-0.002
-0.6629		0.565		15	-0.7018		2.76		+0.15	+0.015
-0.5887	-0.5993	0.456	0.468	25	-0.6636	-0.6000	3.34	20	+0.37	+0.038
-0.5538		0.390		15	-0.5887		1.34		-0.89	-0.091
-0.4087		0.080		49	-0.5538		0.44		-0.32	-0.033
-0.3793	-0.3793	0.098	0.102	24	-0.4091	-0.3742	1.96	20	+0.14	+0.014
-0.3342		0.138		32	-0.3775		3.28		+0.04	+0.004
-0.2985		0.179		35	-0.3331		2.80		-0.40	-0.038
-0.2625	-0.2564	0.192	0.184	20	-0.3000	-0.2673	4.89	60	+1.37	+0.130
-0.2251		0.138		15	-0.2611		6.11		+0.15	+0.014
-0.1905		0.228		17	-0.2222		7.07		-0.26	-0.025
-0.1516	-0.0975	0.302	0.299	20	-0.1909	-0.1076	6.33	100	-0.78	-0.076
-0.1189		0.254		59	-0.1520		5.90		+0.03	+0.003
-0.0793		0.360		40	-0.1200		4.96		+0.19	+0.019
-0.0440	+0.0258	0.336	0.392	30	-0.0793	+0.0309	4.34	4.93	+0.63	+0.063
-0.0080		0.529		30	-0.0440		4.69		+0.37	+0.037
+0.0298		0.311		25	-0.0091		2.54		-0.87	-0.087
+0.0651	+0.1469	0.300	0.181	23	+0.0287	+0.1360	1.84	1.59	+0.41	+0.041
+0.0935		0.252		4	+0.0644		0.62		+0.27	+0.027
+0.1353		0.213		73	+0.0993		0.62		+0.90	+0.089
+0.1753	+0.2353	0.111	0.121	37	+0.1353	+0.2429	2.15	1.67	-0.95	-0.093
+0.2105		0.185		51	+0.1749		1.23		-0.07	-0.007
+0.2433		0.001		35	+0.2102		2.10		-0.64	-0.062
+0.2836	+0.3484	0.166	0.175	20	+0.2433	+0.3516	1.77	2.45	+0.21	+0.020
+0.3189		0.154		25	+0.2829		2.55		+0.05	+0.005
+0.3553		0.222		42	+0.3193		3.20		+0.23	+0.022
+0.3938	+0.4665	0.028	0.273	10	+0.3553	+0.4607	4.54	4.72	-0.38	-0.036
+0.4204		0.266		48	+0.3931		5.10		-0.35	-0.034
+0.4655		0.009		15	+0.4204		4.25		+0.90	+0.087
+0.5011	+0.5749	0.339	0.366	65	+0.4655	+0.5796	5.10	5.16	+0.17	+0.017
+0.5465		0.387		86	+0.5004		5.68		-0.51	-0.050
+0.6087		0.360		30	+0.5473		5.11		-0.28	-0.027
+0.6487	+0.7273	0.283	0.333	19	+0.6091	+0.7211	4.33	3.82	-0.18	-0.018
+0.6916		0.395		53	+0.6491		3.42		-0.23	-0.023
+0.7204		0.321		21	+0.6898		2.60		+0.14	+0.014
+0.7651	+0.8404	0.277	0.230	54	+0.7200	+0.8385	2.54	2.58	-0.03	-0.003
+0.7920		0.137		15	+0.7655		2.88		+0.37	+0.037
+0.8378		0.222		58	+0.7913		2.53		-0.19	-0.019
+0.8651	+0.9611	0.283	0.128	35	+0.8367	+0.9585	3.65	3.02	+0.19	+0.019
+0.9233		0.132		72	+0.8655		2.76		-0.75	-0.074
+0.9720		0.129		65	+0.9218		3.13		+0.42	+0.041
+1.0164		0.120		36	+0.9720		3.08		+0.16	+0.016
					+1.0175		4.03	3.91	+0.32	+0.031
							5.58	30	+0.17	+0.017

C) ζ Cancri.

x	A, B						$\frac{1}{2}(A+B), C$					
	Distanz			Positionswinkel			Distanz			Positionswinkel		
	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$
-1.00	+ 66	+132	- 2	+ 124	+ 248	+ 5	+ 21	+ 42	0	+ 51	+102	+ 5
-0.98	196	130	- 2	377	253	+ 6	63	42	+ 1	158	107	+ 8
-0.96	324	128	- 2	636	259	+ 6	106	43	+ 1	273	115	+10
-0.94	450	126	- 3	901	265	+ 7	150	44	+ 1	398	125	+ 3
-0.92	573	123	- 3	1173	272	+ 7	195	45	+ 1	526	128	- 2
-0.90	693	120	- 4	1452	279	+ 8	241	46	+ 3	652	126	- 7
-0.88	809	116	- 3	1739	287	+ 8	290	49	+ 4	771	119	- 9
-0.86	922	113	- 2	2034	295	+ 9	343	53	+ 5	881	110	-11
-0.84	1033	111	- 1	2338	304	+10	401	58	+ 5	980	99	- 9
-0.82	1143	110	0	2652	314	+11	464	63	+ 5	1070	90	- 7
-0.80	1253	110	+ 1	2977	325	+13	532	68	+ 7	1153	83	- 6
-0.78	1364	111	+ 2	3315	338	+16	607	75	+ 7	1230	77	- 5
-0.76	1477	113	+ 2	3669	354	+18	689	82	+10	1302	72	- 6
-0.74	1592	115	+ 2	4041	372	+22	781	92	+10	1368	66	- 4
-0.72	1709	117	+ 2	4435	394	+26	883	102	+ 7	1430	62	- 5
-0.70	1828	119	+ 2	4855	420	+32	992	109	+ 4	1487	57	- 5
-0.68	1949	121	+ 2	5307	452	+37	1105	113	- 1	1539	52	- 4
-0.66	2072	123	+ 1	5796	489	+39	1217	112	- 6	1587	48	- 4
-0.64	2196	124	+ 2	6324	528	+37	1323	106	- 6	1631	44	- 5
-0.62	2322	126	+ 1	6889	565	+35	1423	100	- 6	1670	39	- 6
-0.60	2449	127	0	7489	600	+31	1517	94	- 6	1703	33	- 9
-0.58	2576	127	+ 1	8120	631	+29	1605	88	- 8	1727	24	-12
-0.56	2704	128	0	8780	660	+29	1685	80	- 8	1739	12	- 4
-0.54	2832	128	0	9469	689	+27	1757	72	-12	1747	8	+ 1
-0.52	2960	128	0	10185	716	+28	1817	60	-12	1756	9	+ 3
-0.50	3088	128	- 1	10929	744	+28	1865	48	-12	1768	12	+ 4
-0.48	3215	127	- 1	11701	772	+30	1901	36	-11	1784	16	+ 7
-0.46	3341	126	- 1	12503	802	+31	1926	25	- 8	1807	23	+ 5
-0.44	3466	125	- 1	13336	833	+32	1943	17	- 2	1835	28	+ 7
-0.42	3590	124	- 1	14201	865	+32	1958	15	+ 2	1870	35	+ 9
-0.40	3713	123	- 1	15098	897	+32	1975	17	+ 3	1914	44	+ 9
-0.38	3835	122	- 1	16027	929	+33	1995	20	+ 3	1967	53	+10
-0.36	3956	121	- 1	16989	962	+34	2018	23	+ 3	2030	63	+ 9
-0.34	4076	120	- 1	17985	996	+33	2044	26	+ 3	2102	72	+10
-0.32	4195	119	- 1	19014	1029	+32	2073	29	+ 3	2184	82	+10
-0.30	4313	118	- 1	20075	1061	+30	2105	32	+ 2	2276	92	+13
-0.28	4430	117	- 1	21166	1091	+29	2139	34	+ 2	2381	105	+15
-0.26	4546	116	- 1	22286	1120	+28	2175	36	+ 2	2501	120	+19
-0.24	4661	115	- 1	23434	1148	+27	2213	38	+ 3	2640	139	+ 2
-0.22	4775	114	- 1	24609	1175	+25	2254	41	+ 2	2781	141	- 4
-0.20	4888	113	- 1	25809	1200	+25	2297	43	+ 3	2918	137	- 7
-0.18	5000	112	- 1	27034	1225	+25	2343	46	+ 2	3048	130	- 8
-0.16	5111	111	- 1	28284	1250	+25	2391	48	+ 3	3170	122	-10
-0.14	5221	110	- 1	29559	1275	+26	2442	51	+ 4	3282	112	- 9
-0.12	5330	109	- 2	30860	1301	+25	2497	55	+ 4	3385	103	- 7
-0.10	5437	107	- 1	32186	1326	+25	2556	59	+ 5	3481	96	- 4
-0.08	5543	106	- 2	33537	1351	+25	2620	64	+ 8	3573	92	- 2
-0.06	5647	104	- 2	34913	1376	+24	2692	72	+11	3663	90	- 7
-0.04	5749	102	- 2	36313	1400	+23	2775	83	+ 8	3746	83	-21
-0.02	+5849	+ 98	- 2	+37736	1423	+22	+2866	91	+ 1	+3808	62	-18
0.00					+1445			+ 92			+ 44	

Reihen.

C) ζ Cancr.

x	A, B						$\frac{1}{2}(A+B), C$					
	Distanz			Positionswinkel			Distanz			Positionswinkel		
	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$	$\omega'f(x)$	$\omega f(x)$	$\omega f'(x)$
0.00												
+0.02	+5947	+98	— 3	+39181	+1445	+21	+2958	+92	—10	+3852	+44	— 9
+0.04	6042	95	— 3	40647	1466	+19	3040	82	—14	3887	35	— 5
+0.06	6134	92	— 2	42132	1485	+19	3108	68	— 8	3917	30	— 4
+0.08	6224	90	— 2	43636	1504	+18	3168	60	— 5	3943	26	— 0
+0.10	6312	88	— 3	45158	1522	+16	3223	55	— 5	3969	26	+ 2
+0.12	6397	85	— 2	46696	1538	+14	3273	50	— 6	3997	28	+ 3
+0.14	6480	83	— 1	48248	1552	+13	3317	44	— 6	4028	31	+ 3
+0.16	6562	82	— 1	49813	1565	+13	3355	38	— 6	4062	34	+ 3
+0.18	6642	80	— 2	51391	1578	+12	3387	32	— 3	4098	36	+ 2
+0.20	6721	79	— 1	52981	1590	+10	3416	29	— 3	4136	38	+ 3
+0.22	6799	78	— 1	54581	1600	+ 7	3442	26	— 1	4177	41	+ 3
+0.24	6876	77	— 2	56188	1607	+ 5	3467	25	— 1	4221	44	+ 4
+0.26	6951	75	— 3	57800	1612	+ 2	3491	24	+ 1	4269	48	+ 6
+0.28	7023	72	— 3	59414	1614	— 2	3516	25	+ 1	4323	54	+10
+0.30	7092	69	— 5	61026	1612	— 5	3542	26	+ 1	4387	64	+12
+0.32	7156	64	— 4	62633	1607	— 8	3570	28	+ 2	4463	76	+10
+0.34	7216	60	— 5	64232	1599	—11	3600	30	+ 2	4549	86	+ 6
+0.36	7271	55	— 5	65820	1588	—15	3634	34	+ 4	4641	92	+ 6
+0.38	7321	50	— 5	67393	1573	—18	3671	37	+ 3	4737	96	+ 4
+0.40	7366	45	— 5	68948	1555	—20	3712	41	+ 3	4836	99	+ 2
+0.42	7406	40	— 5	70483	1535	—20	3756	44	+ 4	4937	101	+ 1
+0.44	7441	35	— 4	71998	1515	—23	3804	48	+ 2	5039	102	+ 1
+0.46	7472	31	— 4	73490	1492	—26	3854	50	+ 4	5142	103	— 0
+0.48	7499	27	— 3	74956	1466	—31	3908	54	+ 3	5245	103	— 1
+0.50	7523	24	— 2	76391	1435	—35	3965	57	+ 3	5347	102	— 1
+0.52	7545	22	— 2	77791	1400	—41	4027	62	+ 5	5448	101	— 4
+0.54	7565	20	— 2	79150	1359	—47	4094	67	+ 5	5545	97	— 5
+0.56	7583	18	— 2	80462	1312	—54	4164	70	+ 3	5637	92	— 8
+0.58	7599	16	— 2	81720	1258	—61	4236	72	+ 2	5721	84	— 8
+0.60	7613	14	— 2	82917	1197	—67	4310	74	+ 1	5797	76	— 9
+0.62	7625	12	— 3	84047	1130	—72	4385	75	— 0	5864	67	— 9
+0.64	7634	9	— 3	85105	1058	—76	4460	75	+ 1	5922	58	— 4
+0.66	7640	6	— 1	86087	982	—78	4536	76	— 1	5976	54	— 2
+0.68	7645	5	— 0	86991	904	—79	4611	75	— 1	6028	52	— 0
+0.70	7650	5	+ 1	87816	825	—77	4685	74	— 2	6080	52	— 0
+0.72	7656	6	+ 2	88564	748	—75	4757	72	— 4	6132	52	— 0
+0.74	7664	8	+ 2	89237	673	—73	4825	68	— 4	6184	52	— 0
+0.76	7674	10	+ 2	89837	600	—70	4889	64	— 4	6236	52	+ 1
+0.78	7686	12	+ 2	90367	530	—65	4948	59	— 4	6289	53	+ 3
+0.80	7700	14	+ 2	90832	465	—60	5003	55	— 3	6345	56	+ 2
+0.82	7716	16	+ 3	91237	405	—56	5055	52	— 3	6403	58	+ 1
+0.84	7735	19	+ 2	91586	349	—51	5104	49	— 3	6462	59	+ 1
+0.86	7756	21	+ 2	91884	298	—47	5150	46	— 3	6522	60	+ 1
+0.88	7779	23	+ 3	92135	251	—43	5193	43	— 4	6583	61	+ 1
+0.90	7805	26	+ 2	92343	208	—41	5232	39	— 4	6645	62	+ 1
+0.92	7833	28	+ 3	92510	167	—39	5267	35	— 5	6708	63	+ 2
+0.94	7864	31	+ 3	92638	128	—37	5297	30	— 3	6773	65	+ 5
+0.96	7898	34	+ 3	92729	91	—35	5324	27	— 1	6843	70	+ 9
+0.98	7935	37	+ 4	92785	56	—32	5350	26	— 1	6922	79	+12
+1.00	+7976	41	+ 4	+92809	+ 24	—28	+5375	25	— 1	+7013	91	+20
		+ 45			— 4			+ 24			+111	

D) Ephemeriden für ζ Cancri.

x	q_1	$-\frac{dp_1}{dx}$	p_1	q_2	$-\frac{dp_2}{dx}$	p_2	x	q_1	$-\frac{dp_1}{dx}$	p_1	q_2	$-\frac{dp_2}{dx}$	p_2
-1.00	1.250	+ 50.31	426.31	5.501	-221.91	157.36	0.00	1.008	+108.26	327.29	5.710	+ 37.63	143.73
-0.98	1.206	+ 98.85	424.79	5.574	- 95.86	160.42	+0.02	1.000	+110.91	325.10	5.694	+ 35.20	143.00
-0.96	1.167	+130.42	422.47	5.595	- 20.60	161.52	+0.04	0.991	+113.65	322.85	5.677	+ 31.97	142.33
-0.94	1.140	+148.94	419.66	5.592	+ 20.16	161.48	+0.06	0.983	+116.53	320.55	5.660	+ 28.16	141.72
-0.92	1.118	+157.71	416.58	5.583	+ 38.65	160.86	+0.08	0.973	+119.51	318.19	5.637	+ 23.87	141.20
-0.90	1.101	+159.46	413.40	5.580	+ 43.75	160.01	+0.10	0.963	+122.61	315.77	5.615	+ 19.33	140.77
-0.88	1.089	+156.34	410.24	5.587	+ 41.55	159.16	+0.12	0.952	+125.87	313.29	5.591	+ 14.66	140.43
-0.86	1.082	+149.98	407.17	5.606	+ 36.42	158.37	+0.14	0.941	+129.32	310.73	5.569	+ 10.11	140.18
-0.84	1.078	+141.81	404.25	5.636	+ 30.83	157.70	+0.16	0.929	+133.00	308.11	5.548	+ 5.84	140.02
-0.82	1.077	+132.72	401.50	5.675	+ 26.29	157.13	+0.18	0.916	+136.90	305.41	5.529	+ 1.93	139.95
-0.80	1.079	+123.58	398.94	5.719	+ 23.64	156.64	+0.20	0.902	+141.12	302.63	5.513	- 1.36	139.94
-0.78	1.083	+114.84	396.56	5.763	+ 22.77	156.18	+0.22	0.887	+145.68	299.77	5.501	- 3.96	140.00
-0.76	1.089	+106.89	394.34	5.805	+ 23.48	155.72	+0.24	0.872	+150.65	296.80	5.492	- 5.73	140.10
-0.74	1.096	+ 99.90	392.27	5.842	+ 25.32	155.23	+0.26	0.855	+156.04	293.74	5.487	- 6.71	140.22
-0.72	1.103	+ 93.97	390.36	5.871	+ 27.78	154.70	+0.28	0.838	+161.98	290.56	5.488	- 6.79	140.36
-0.70	1.111	+ 89.18	388.51	5.890	+ 30.41	154.12	+0.30	0.820	+168.44	287.26	5.493	- 5.96	140.49
-0.68	1.118	+ 85.46	386.76	5.899	+ 32.73	153.49	+0.32	0.802	+175.50	283.84	5.502	- 4.34	140.59
-0.66	1.126	+ 82.66	385.08	5.896	+ 34.05	152.82	+0.34	0.783	+183.27	280.23	5.515	- 1.96	140.66
-0.64	1.133	+ 80.71	383.45	5.883	+ 34.45	152.13	+0.36	0.763	+191.66	276.48	5.530	+ 1.06	140.67
-0.62	1.140	+ 79.53	381.85	5.861	+ 33.76	151.45	+0.38	0.744	+200.70	272.56	5.550	+ 4.59	140.61
-0.60	1.145	+ 78.93	380.27	5.829	+ 31.74	150.79	+0.40	0.724	+210.43	268.45	5.570	+ 8.42	140.48
-0.58	1.150	+ 78.83	378.69	5.792	+ 28.70	150.18	+0.42	0.705	+220.81	264.14	5.593	+ 12.42	140.27
-0.56	1.154	+ 79.04	377.11	5.749	+ 24.69	149.65	+0.44	0.685	+231.74	259.61	5.616	+ 16.42	139.98
-0.54	1.157	+ 79.51	375.53	5.704	+ 19.85	149.20	+0.46	0.666	+243.22	254.86	5.639	+ 20.20	139.62
-0.52	1.158	+ 80.15	373.93	5.658	+ 14.49	148.86	+0.48	0.649	+255.06	249.88	5.661	+ 23.57	139.18
-0.50	1.159	+ 80.86	372.32	5.613	+ 8.92	148.62	+0.50	0.631	+267.19	244.66	5.681	+ 26.38	138.68
-0.48	1.158	+ 81.60	370.69	5.571	+ 3.43	148.50	+0.52	0.616	+279.38	239.19	5.698	+ 28.52	138.13
-0.46	1.157	+ 82.30	369.06	5.533	- 1.71	148.48	+0.54	0.601	+291.47	233.49	5.713	+ 29.86	137.54
-0.44	1.154	+ 82.97	367.40	5.501	- 6.32	148.56	+0.56	0.588	+303.16	227.54	5.725	+ 30.35	136.94
-0.42	1.151	+ 83.49	365.74	5.475	-10.04	148.73	+0.58	0.577	+314.22	221.36	5.733	+ 30.04	136.33
-0.40	1.147	+ 83.99	364.06	5.456	-12.84	148.96	+0.60	0.567	+324.35	214.98	5.737	+ 28.83	135.74
-0.38	1.142	+ 84.47	362.38	5.445	-14.54	149.24	+0.62	0.560	+333.30	208.40	5.738	+ 26.90	135.18
-0.36	1.138	+ 84.83	360.69	5.442	-15.06	149.53	+0.64	0.555	+340.65	201.65	5.734	+ 24.35	134.67
-0.34	1.131	+ 85.22	358.98	5.445	-14.43	149.83	+0.66	0.553	+346.14	194.78	5.728	+ 21.42	134.21
-0.32	1.124	+ 85.58	357.28	5.454	-12.72	150.10	+0.68	0.553	+349.44	187.82	5.719	+ 18.28	133.82
-0.30	1.117	+ 86.03	355.56	5.470	- 9.93	150.33	+0.70	0.555	+350.31	180.82	5.706	+ 15.08	133.48
-0.28	1.110	+ 86.50	353.84	5.491	- 6.24	150.49	+0.72	0.560	+348.51	173.83	5.692	+ 12.15	133.21
-0.26	1.103	+ 87.07	352.10	5.515	- 1.86	150.58	+0.74	0.566	+343.85	166.90	5.676	+ 9.80	132.99
-0.24	1.096	+ 87.74	350.35	5.541	+ 3.16	150.56	+0.76	0.575	+336.35	160.00	5.659	+ 8.14	132.81
-0.22	1.089	+ 88.59	348.59	5.570	+ 8.44	150.45	+0.78	0.586	+326.07	153.47	5.641	+ 7.31	132.66
-0.20	1.081	+ 89.53	346.81	5.598	+13.90	150.23	+0.80	0.599	+313.27	147.07	5.622	+ 7.38	132.52
-0.18	1.074	+ 90.66	345.01	5.626	+19.25	149.89	+0.82	0.613	+298.47	140.95	5.603	+ 8.24	132.36
-0.16	1.067	+ 91.97	343.18	5.651	+24.35	149.46	+0.84	0.628	+282.41	135.14	5.584	+ 9.78	132.18
-0.14	1.060	+ 93.46	341.33	5.674	+28.89	148.92	+0.86	0.643	+266.27	129.65	5.565	+11.47	131.97
-0.12	1.052	+ 95.10	339.44	5.693	+32.84	148.31	+0.88	0.659	+251.39	124.48	5.547	+12.70	131.73
-0.10	1.045	+ 96.93	337.52	5.708	+36.02	147.61	+0.90	0.674	+239.93	119.57	5.528	+12.55	131.47
-0.08	1.038	+ 98.90	335.56	5.718	+38.28	146.87	+0.92	0.689	+234.33	114.84	5.514	+ 9.94	131.24
-0.06	1.031	+101.06	333.56	5.724	+39.62	146.10	+0.94	0.702	+237.84	110.14	5.504	+ 3.40	131.10
-0.04	1.024	+103.32	331.52	5.722	+39.92	145.29	+0.96	0.716	+254.39	105.24	5.503	- 8.79	131.14
-0.02	1.016	+105.75	329.43	5.717	+39.26	144.50	+0.98	0.723	+288.83	99.84	5.518	-28.67	131.50
0.00	1.008	+108.26	327.29	5.710	+37.63	143.73	+1.00	0.730	+346.97	93.53	5.558	-58.39	132.35

Inhalt zu Nr. 2757-59. *Paul Harzer*. Ueber eine von Herrn Tschebyschef angegebene Interpolationsformel. 337.

Geschlossen 1886 Nov. 20. Herausgeber: A. Krueger. Druck von C. F. Mohr. Expedition: Sternwarte in Kiel.