SUR L'ÉQUATION D'EULER.

Par M. G.-H. Halphen, à Paris.

Extrait d'une Lettre adressée à M. G.-B. Guccia.

Adunanza del 26 febbrajo 1888.

.
Suivant la fine observation d'Euler, prenons une équation doublement quadratique, à deux variables x et x_1 , écrivons-la sous les deux formes

$$0 = F = Ax_1^2 + 2Bx_1 + C = A_1x^2 + 2B_1x + C_1$$

et concluons que les deux polynômes

$$X = AC - B^2, \quad X_1 = A_1C_1 - B_1^2,$$

dont le premier contient seulement x et le second x_1 , donnent lieu à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = 0.$$

Qu'il s'agisse maintenant d'intégrer une telle équation où X sera un polynôme donné, X_1 ce même polynôme avec la variable x_1 , au lieu de x , le problème consistera donc à trouver, de la manière la plus générale, A , B et C par cette condition que l'on ait

$$X = AC - B^2$$

et que F soit symétrique entre x et x_1 .

Cette dernière condition crée bien des embarras et l'on a dû chercher mille détours pour s'y soumettre en gardant quelque élégance dans les calculs. Voici un détour qui me paraît nouveau.

Supposez une équation doublement quadratique, mais *non symétrique*

$$ay^2 + 2by + c = a'x^2 + 2b'x + c' = 0,$$

dans laquelle a , b , c contiennent x , et a' , b' , c' contiennent y . Posez encore

$$X = ac - b^2, \quad Y = a'c' - b'^2,$$

et vous en tirez aussi

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

comme on le sait fort bien. Prenez maintenant la seconde racine x_1 , qui répond au même y ; vous avez aussi

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

d'où vous concluez

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = 0.$$

Nous résoudrons, par conséquent, le problème en prenant

$$X = ac - b^2$$

sans autre condition, puis éliminant y entre les équations

$$a y^2 + 2 b y + c = 0$$

$$a_1 y^2 + 2 b_1 y + c_1 = 0,$$

ce qui se fait par la formule élémentaire

$$(a) \quad (ac_1 - 2bb_1 + ca_1)^2 = 4(b^2 - ac)(b_1^2 - a_1c_1).$$

Voici donc l'équation d'Euler intégrée : *ayant pris trois polynômes du second degré a, b, c qui, d'ailleurs quelconques, satisfont à la condition*

$$X = ac - b^2,$$

la formule (a) donne l'intégrale.

Mais ici se présente une certaine difficulté, une obscurité pour le moins. Le choix de a, b, c comporte des indéterminées; on peut prendre, par exemple, b arbitrairement; car $b^2 + X$, polynôme du 4^e degré, peut être toujours décomposé en deux facteurs quadratiques a, c . Il semble donc y avoir trop d'indétermination: on doit exiger que l'unique constante arbitraire, qui seule peut exister vraiment, soit mise en évidence. C'est à quoi l'on parvient, en observant que deux polynômes doublement quadratiques et symétriques

$$\Phi(x, x_1) \quad \text{et} \quad \Phi'(x, x_1),$$

qui coïncident entre eux pour $x = x_1$

$$\Phi(x, x) = \Phi'(x, x),$$

diffèrent seulement par un terme $\lambda(x - x_1)^2$. Il suffit de les écrire explicitement pour reconnaître l'exactitude de cette proposition.

Le polynôme $ac_1 - 2bb_1 + ca_1$, qui est au premier membre (a), devient, pour $x = x_1$, $2X$; de plus il est doublement quadratique et symétrique. Prenons donc tout autre polynôme P , doublement quadratique et symétrique, devenant aussi $2X$ pour $x = x_1$, et nous serons

assuré que ce premier membre est égal à $P + \lambda(x - x_1)^2$. L'intégrale (a) peut donc s'écrire ainsi

$$[P + \lambda(x - x_1)^2]^2 = 4XX_1.$$

Suivant les diverses formes que nous saurons imaginer pour P , nous aurons diverses formes de l'intégrale, où figurera toujours une constante arbitraire λ .

Par exemple, prenons X décomposé en deux facteurs quadratiques $X = AC$ et posons $P = AC_1 + CA_1$. Nous avons l'intégrale

$$[AC_1 + CA_1 + \lambda(x - x_1)^2]^2 = 4XX_1 = 4ACA_1C_1,$$

d'où nous tirons

$$AC_1 + CA_1 + \lambda(x - x_1)^2 = 2\sqrt{ACA_1C_1}$$

$$\frac{\sqrt{AC_1} - \sqrt{CA_1}}{x - x_1} = \sqrt{-\lambda} = \text{constante},$$

forme élégante, qu'il faut, je crois, attribuer à Laguerre.

Comme second exemple, prenons pour P le double de la seconde polaire de X ; soit

$$\frac{1}{12} \left[x_1^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2x_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} \right] = f$$

cette polaire, x' étant une variable mise dans X pour rendre ce polynôme homogène.

Ce choix de P fournit un polynôme doublement quadratique et symétrique, se réduisant à $2X$ pour $x = x_1$, et l'on a l'intégrale sous la forme

$$[2f + \lambda(x - x_1)^2]^2 = 4XX_1,$$

ou bien

$$\frac{f - \sqrt{XX_1}}{x - x_1} = \text{constante},$$

forme connue aussi, mais dont je ne peux nommer, avec assurance, le premier auteur, évitant de trancher une épineuse question de priorité.

On pourrait poursuivre; car, remarquez-le bien, l'intégrale (a) n'est pas sous la forme demandée; son premier membre n'est pas doublement quadratique. Pour le rendre tel, il faut développer le carré et diviser ensuite par $(x - x_1)^2$. C'est ainsi qu'on obtient, le plus facilement, la forme élégante

$$h + \mu f + \left(\frac{1}{12} C_2 - \mu^2\right)(x - x_1)^2 = 0,$$

où h désigne la seconde polaire du hessien de X , et C_2 l'invariant quadratique :

$$X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

$$C_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2.$$

Comme vous savez, cette forme dernière de l'intégrale a été donnée d'abord par M. Cayley. Notre ami commun Laguerre l'avait, de son côté, retrouvée par des calculs pleins d'intérêt.

Versailles, 13 février 1888.

HALPHEN.