# Intorno alla composizione (*) dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche.

Appendice alla Memoria:

**Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche.**

*(di* BEPPO LEVI, *a Torino.)*

Nella Memoria pubblicata nel tomo XXVI (Serie II) di questi *Annali*, portante il titolo riprodotto nell'intestazione della presente appendice, ho ricercato quando e in qual senso si possa dire che, con una successione di trasformazioni quadratiche (Cremoniane) dello spazio, si ottiene la riduzione della singolarità di un dato punto di una superficie algebrica.

Detto $A$ questo punto singolare ($s$-plo); $A_1$ un suo trasformato di ugual multiplicità per una trasformazione quadratica avente in $A$ il punto fondamentale isolato, e del resto generica (o, come dicevo allora e come dirò ancora, applicata ad $A$); $A_2$ un punto analogo trasformato di $A_1$ e così via; ho enunciato che il *numero dei punti $s$-pli $A_1 A_2 \ldots$ può crescere oltre ogni limite quando si scelgono questi punti in modo che, consideratone uno ad arbitrio, appartenente ad una linea $s$-pla* (prodotta o non dalle trasformazioni)

(*) Non credo necessario richiamare qui le definizioni della composizione di un punto, dei punti successivi, ecc. Si vegga perciò e per citazioni in proposito la Memoria a cui questa fa seguito, oppure la Memoria del prof. SEGRE: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.* (Questi *Annali* (2) XXV-1896.)

*o precedente* (immediatamente o non) *una o più tali linee, ne esistono sempre due o più successivi ad esso (e necessariamente consecutivi fra loro) che appartengono ad una stessa di queste linee s-ple.* Ho promesso allora la dimostrazione di questa proposizione in una « Memoria seconda »; a sostituire la quale pubblico ora la presente « appendice » in cui completerò così la Memoria precedente ed in cui aggiungerò alcune osservazioni alla medesima.

## § 1.

1. Il fatto che si tratta di dimostrare non è che un caso particolare di una proprietà delle linee singolari delle superficie algebriche dalla quale s'intitola il presente scritto.

*La singolarità di una linea di una superficie è determinata, nell'intorno di un suo punto generico, da quella del punto medesimo sopra una sezione piana generica della superficie, per esso.*

La proposizione è evidente ove si osservi che l'intorno di un punto generico di una linea singolare di una superficie algebrica (e quindi la singolarità del punto medesimo) è completamente rappresentato dalle serie (a coefficienti variabili) che rappresentano i rami della sezione piana generica per un punto variabile sul ramo della linea singolare che ha per origine il punto considerato. (Cfr. Halphen, *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques*. Annali di Matematica (2) 9 1878.) D'altra parte le serie che rappresentano i rami di una curva piana uscenti da un punto sono interamente determinate, almeno fino ad un certo termine, dalla composizione del punto stesso [intendendo come *composizione* non solo l'insieme dei caratteri dei punti successivi a quello (o *satelliti* di esso) sulla curva, ma ancora il loro *modo* di successione, e avendo riguardo anche ai punti satelliti di multiplicità 1]; e il numero dei termini di quelle serie che così si conoscono cresce con quello de' punti successivi che si considerano nella definizione di detta composizione. *La singolarità di una linea di una superficie in un suo punto generico, e con essa la composizione di un tal punto per la superficie, è adunque nota ove lo sia la composizione del punto per una sezione generica della superficie per il punto medesimo.* Nasce così la domanda: quali saranno i caratteri successivi ad un dato punto della linea secondo un dato *itinerario?* Cioè quando del detto punto si consideri un determinato (ma arbitrario) successivo, di questo un successivo ancora determinato (ma arbitrario), e così via.

Ho dimostrato nella mia precedente Memoria (n.° 13) che *se un punto $A$ è $s$-plo per una superficie $F$ e al punto $A$ sono successivi sulla sezione piana generica di $F$ (passante per $A$) $\nu$ punti $s$-pli, ogni successione generica di punti di $F$, il cui primo punto sia $A$, contiene precisamente $\nu$ punti $s$-pli;* e dal ragionamento là fatto risulta che, se $A$ è generico sopra una linea $s$-pla di $F$, la suddetta successione è generica in questo senso sempre quando due suoi punti consecutivi non appartengono a questa linea o a una linea $s$-pla successiva. È assai probabile che la proposizione si estenda non solo ai primi $\nu$ punti $s$-pli consecutivi, ma anche ai punti successivi di minor multiplicità. Ma ciò che io voglio provare qui è che precisamente *quegli itinerari che seguono con due o più punti una stessa linea $s$-pla (effettiva della superficie o prodotta dalle trasformazioni) sono eccezionali, avendo caratteri di composizione diversi da quelli degli itinerari generici.* Io non tratterò però il problema generale (certamente non privo d'interesse) di determinare i caratteri relativi a questi itinerari eccezionali in funzione di quelli relativi agli itinerari generici.

2. Il caso più semplice di linea multipla che si possa immaginare è quello della intersezione di due superficie $\Phi$ e $\Psi$, linea doppia per la superficie $F \equiv \Phi\Psi$. Sia $a$ questa linea e $\Phi$, $\Psi$ abbiano, lungo essa, contatto d'ordine $\nu - 1$ ($\nu > 1$); $a$ sarà $\nu$-pla per l'intersezione di $\Phi$, $\Psi$; e la sezione piana generica $f$ di $F$ avrà, nel suo punto $A$ giacente in $a$, $\nu$ caratteri successivi 2 seguiti da due caratteri 1 (non successivi fra loro). Essendo $A$ generico su $a$ non passeranno per esso altre parti dell'intersezione di $\Phi$, $\Psi$ e la multiplicità d'intersezione di queste superficie in esso sarà $\nu$. Si effettui una trasformazione quadratica applicata in $A$; sia $a'$ la retta trasformata di $A$ sulla $F$; indicherò qui e nel seguito le superficie e le linee trasformate di superficie e di linee (rispettivamente) collo stesso simbolo che le superficie e le linee primitive.

La moltiplicità di $a'$ nell'intersezione di $\Phi$, $\Psi$ è $\nu - 1$ (*M.* (*) § 3); sia $A'$ il punto comune ad $a$ e $a'$; la moltiplicità d'intersezione di $\Phi$, $\Psi$ in $A'$ è $2\nu - 1$ (*M.* n.° 5). $A'$, doppio per $F$, ha adunque su una sezione piana generica $f'$ di $F$ (**) per esso $2\nu - 1$ caratteri successivi 2 e quindi due caratteri 1 (non successivi fra loro).

Nello stesso modo si vede che, se si applica ad $A'$ una nuova trasformazione quadratica, ed $a''$ è la linea trasformata di $A'$, $A''$ il punto comune

(*) Indicherò con *M.* la nominata Memoria di cui è appendice il presente scritto.

(**) Cioè della trasformata di $F$ per la trasformazione applicata ad $A$.

ad $a$ e $a''$, $f''$ una sezione piana generica di $F$ per $A''$; $A''$ ha su $f''$ $3\nu - 2$ caratteri successivi 2 e quindi due caratteri 1 non successivi fra loro. E così via. In altri termini si può dire che *la sezione fatta in $F$ da una superficie che abbia in $A$ punto semplice, vi abbia con $a$ contatto d'ordine $l$ e sia del resto generica, ha in $A$ $(l+1)\nu$ caratteri successivi 2 e quindi due caratteri 1 non successivi fra loro.*

3. Metodo analogo si può tenere nello studio di linee di singolarità più complessa. Ricorderò anzitutto che, se le trasformazioni quadratiche che si usano sono a conica fondamentale degenere e si considera una polare del punto doppio $V$ di questa conica rispetto alla $F$, la trasformata di questa polare è la polare dello stesso ordine del punto doppio della conica fondamentale nel secondo spazio rispetto alla trasformata di $F$, — purchè la retta $A\,V$ ($A$ essendo sempre il punto fondamentale della trasformazione) non sia generatrice del cono tangente a $F$ in $A$ di multiplicità maggiore della differenza fra la multiplicità di $A$ e l'ordine della polare (*M.* n.° 8). Che inoltre, quando questa condizione è soddisfatta, la moltiplicità di $A$ per la polare è quella differenza ed è maggiore in caso contrario. Infine che se di un punto di una retta (o di un piano) si considerano tutte le possibili polari rispetto a un sistema di punti, non tutti coincidenti, della retta (o al sistema dei raggi che li proiettano da un punto del piano), uno stesso punto della retta (o una stessa retta del fascio) non può appartenere a tutte queste polari e al gruppo considerato; cosicchè se tutte quelle polari hanno un elemento comune ad esse e al gruppo considerato, questo si compone solo di tale elemento, contato un conveniente numero di volte: in particolare avviene questo se la prima polare è costituita da un solo elemento multiplo cadente in un elemento del gruppo primitivo.

Come già nella precedente Memoria applicherò trasformazioni quadratiche a conica fondamentale degenere, e tali che, per due trasformazioni immediatamente successive fra loro, il punto doppio della conica fondamentale nel primo spazio, per la seconda trasformazione della coppia, cada nel punto doppio della conica fondamentale nel secondo spazio, per la trasformazione precedente.

Dirò semplicemente *caratteri di una superficie in un suo punto* i caratteri in questo punto della sezione piana generica per esso.

4. Lo studio delle linee singolari di cui qui si discorre si può distinguere in due casi a seconda che per la linea considerata passa una sola falda della superficie ovvero passano più falde. Nel secondo caso si deve osservare che ogni falda è rappresentata da determinati sviluppi delle coordinate in serie di due parametri (cfr. Halphen, l. c.) per modo che la superficie può

considerarsi, nelle vicinanze della linea (e del punto generico di essa considerato), come la riunione di più superficie distinte, a ciascuna delle quali appartenga una di quelle falde. Ciascuna falda, considerata in sè, si comporterà quindi come se fosse isolata e l'analisi di questo secondo caso si ridurrà quindi a studiare le relazioni mutue delle diverse falde.

Da questa considerazione si deduce in particolare che i risultati ottenuti nel n.° 2 per la linea doppia della $F \equiv \Phi\Psi$, linea d'intersezione di $\Phi$ e $\Psi$, valgono in generale per le linee doppie origini di due falde distinte.

5. La linea $a$ di $F$ sia ora doppia, origine di una sola falda ed abbia successivi $\nu$ caratteri 2 e uno 1 ($a$ sia cioè cuspidale). Sia $F_1$ la prima polare di un punto generico $V$ dello spazio (che si assume come punto doppio della conica fondamentale della prima trasformazione), rispetto ad $F$: per quanto si è ricordato al n.° 3, $F_1$ avrà, in un punto $A$ generico di $a$, $\nu+1$ caratteri 1 appartenenti ad $A$ e a $\nu$ punti successivi ad $A$ sugli itinerari generici tracciati su $F$ aventi l'origine in $A$; e successivamente a questi punti $F_1$ non ha altri punti appartenenti a tali itinerari.

La multiplicità d'intersezione di $F$ e $F_1$ in $A$ è $2\nu+1$. Se si considerano $l$ punti successivi ad $A$ su $a$: $A_1, \ldots, A_l$, la multiplicità d'intersezione di $F$ e $F_1$ in $A_l$ sarà $2(l+1)\nu-(l+1)+2$ (cfr. i ragionamenti del n.° 2). Il numero dei punti doppi di $F$ (cioè di quella sua trasformata in cui $A_l$ è punto effettivo) su una sezione piana generica per $A_l$ è dunque:

$$\leqq (l+1)\nu - \frac{l+1}{2} + 1.$$

Ma quel numero è intero e non può essere minore di un'unità da questo suo limite superiore (perchè, successivamente a una serie di punti doppi di $F$, $F$ e $F_1$ non possono avere comune più di un punto semplice per entrambe); dunque, detto $\lambda_2$ quello dei due numeri $\frac{l+1}{2}$, $\frac{l+2}{2}$ che è intero, il numero cercato è:

$$(l+1)\nu - \lambda_2 + 1\,;$$

e, sulla sezione generica di $F$ per $A_l$, successivamente a questi punti doppi si hanno due punti semplici (non successivi fra loro) o uno solo a seconda che $l$ è dispari o pari, poichè nei due casi rispettivamente $F_1$ non ha od ha un punto successivo ai sunnumerati comune con $F$.

I risultati ottenuti si possono esprimere altrimenti:

*La curva intersezione di $F$ con una superficie che passi semplicemente per $A$ avendovi con a un contatto d'ordine $l$ e pel resto generica, possiede*

$(l+1)(\nu+1)-\lambda_3$ *punti doppi successivi, il primo de' quali è $A$; e passa per $A$ con due o un sol ramo ($A$ vi è cioè nodo o cuspide) a seconda che $l$ è dispari o pari.*

Con procedimento analogo si potrebbe giungere ai risultati del n.° 2 per il caso della curva $a$ nodale.

6. Esaminiamo ancora le falde d'ordine 3:

1.° $F$ abbia nel punto $A$ generico di $a$ $\nu$ caratteri successivi 3, quindi un carattere 2 e successivo (necessariamente) un carattere 1. Sia ancora $F_1$ la prima polare di $V$ rispetto ad $F$; $F_1$ avrà in $A$ $\nu+1$ caratteri 2 appartenenti agli stessi $\nu+1$ punti di $F$ di caratteri $3,\ldots, 3, 2$; successivamente $F$ e $F_1$ non hanno punti comuni. La multiplicità d'intersezione di $F$, $F_1$ in $A$ è $6\nu+4$; quindi quella in $A_l$ (avendo $A_l$ lo stesso significato che or ora) sarà $6(l+1)\nu-2(l+1)+6$. $F$ e $F_1$ hanno quindi $\geqq (l+1)\nu-\frac{l+1}{3}+1$ punti comuni sopra una sezione piana generica passante per $A_l$ e $\leqq (l+1)\nu-\frac{l+1}{3}+1$ fra questi sono tripli per $F$; e $F_1$ ha su tal sezione $\geqq (l+1)\nu+1$ punti doppi successivi. Degli $x$ punti successivi comuni a $F$ e $F_1$ su detta sezione il numero minimo fra $x$ e $(l+1)\nu+1$ è quindi di punti tutti successivi l'uno all'altro, e non esistono sulla detta sezione piana di $F$ altri punti di ugual posto di successione (per un'osservazione fatta al n.° 3). Tutti meno 1 sono quindi necessariamente tripli per $F$. Ma il limite superiore $(l+1)\nu-\frac{l+1}{3}+1$ già assegnato per il numero di questi punti tripli è $<(l+1)\nu+1$, e d'altra parte non può differire per un'unità dal numero cercato: quindi, detto $\lambda_{31}$ il minimo intero $\geqq \frac{l+1}{3}$, il numero dei punti tripli successivi di $F$ sopra una sezione generica per $A_l$ è:

$$(l+1)\nu-\lambda_{31}+1,$$

e successivamente a questi punti si hanno su tal sezione 3 punti semplici non successivi fra loro, o un punto semplice, o un punto doppio a cui succede *un* punto semplice (*), a seconda che $3\lambda_{31}-l-1=0$, 1 o 2.

---

(*) Che al punto doppio succeda un sol punto semplice è conseguenza immediata del fatto che quel punto doppio è pure tale per $F_1$. Basta applicare, p. e., il teorema delle polari miste.

Se cioè si considera la sezione di $F$ con una superficie passante semplicemente per $A$ ed avente in $A$ contatto $l$-plo con $a$, e del resto generica, *il punto $A$ ha per la curva intersezione $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{31}$ caratteri 3 ed è origine di tre rami della curva o di uno solo a seconda che $l+1$ è o non divisibile per 3; nel primo caso i caratteri della curva successivi ai predetti sono tutti 1, nel secondo sono tutti 1 ovvero uno di essi è 2 a seconda che è divisibile per 3 $l+2$ o $l$.*

2.° Ai $\nu$ caratteri 3 di $F$ in $A$ succeda un carattere 1: nei punti corrispondenti $F_1$ avrà $\nu$ caratteri 2 e quindi un carattere 1 o 2. Con un ragionamento analogo al precedente si vede che, indicato con $\lambda_{32}$ il minimo intero $\geqq 2\,\frac{l+1}{3}$ *il punto $A$ ha, per la curva intersezione di $F$ con una superficie passante semplicemente per $A$ avendovi contatto d'ordine $l$ con $a$ e del resto generica, $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{32}$ caratteri 3 ed è origine di 3 rami o di uno solo a seconda che $l+1$ è o non divisibile per 3; nel primo caso i caratteri successivi ai predetti sono tutti 1, nel secondo sono tutti 1 ovvero uno di essi è 2 a seconda che è divisibile per 3 $l$ o $l+2$.*

7. Dai risultati precedenti si prevede facilmente che, nel caso generale, trattandosi di una falda $s$ così costituita che siano $s$ i primi suoi $\nu$ caratteri ed $s'$ $(<s)$ il carattere successivo a questi, si dovrà considerare il numero $\lambda_{s,s-s'}$ minimo intero $\geqq \frac{s-s'}{s}(l+1)$; e che precisamente, se si considera l'intersezione di $F$ con una superficie passante semplicemente per $A$ ed avente in $A$ contatto $l$-uplo con $a$, e del resto generica, *il punto $A$ ha per la curva intersezione $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{s,s-s'}$ caratteri successivi $s$.* Di fatto la proposizione si dimostra vera facilmente per induzione completa.

Si deve perciò premettere l'osservazione seguente. Due falde $\varphi$ e $\psi$ abbiano la stessa linea origine $a$ e nel punto $A$, generico di $a$, abbiano rispettivamente $\nu$ caratteri $s$ e successivamente un carattere $s'<s$, e $\nu$ caratteri $\sigma$ e successivamente un carattere $\sigma'\leqq\sigma$; e i $\nu+1$ punti successivi delle sezioni piane generiche per $A$ di $\varphi$ e $\psi$ che hanno rispettivamente queste multiplicità siano gli stessi per le due sezioni piane. Sia inoltre, per fissare le idee, $\frac{s'}{s}\leqq\frac{\sigma'}{\sigma}$. La multiplicità d'intersezione in $A$ di $\varphi$ e $\psi$ sarà $\geqq \nu s\sigma + s'\sigma$ (*).

(*) La dimostrazione di questo fatto si riduce ad un semplicissimo calcolo. Io rimando per esso alla Memoria del sig. NOETHER: *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier.* (Rend. Palermo IV 1890 (p. 105)) poichè la proposizione

Collo stesso ragionamento fatto al n.° 2 si ha quindi come multiplicità d'intersezione di $\varphi$, $\psi$ in $A_l$ ($A_l$ avendo sempre lo stesso significato, come nei n i prec.):

$$\geqq (l+1)\nu s\sigma - (l+1)(s\sigma - s'\sigma) + s\sigma.$$

Le sezioni piane generiche di $\varphi$, $\psi$ per $A_l$ debbono quindi avere comune una successione di punti (il primo dei quali sia $A_l$) tale che, dette $s_i$, $\sigma_i$ le multiplicità di uno qualunque di essi su $\varphi$, $\psi$, sia:

$$\Sigma s_i \sigma_i \geqq (l+1)\nu s\sigma - (l+1)(s\sigma - s'\sigma) + s\sigma.$$

Ora $s_i \leqq s$, $\sigma_i \leqq \sigma$; dunque il numero dei punti della successione è

$$\geqq \frac{1}{s\sigma}\Sigma s_i \sigma_i, \quad \text{cioè} \quad \geqq (l+1)\nu - \frac{(l+1)(s-s')}{s} + 1 \geqq (l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1.$$

Si supponga ora per $\varphi$, $\psi$ verificata la proposizione induttiva suenunciata; sopra le sezioni piane generiche di $\varphi$, $\psi$ per $A_l$ i primi $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ (*) punti, o, rispettivamente, i primi $(l+1)\nu - \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'} + 1$ punti hanno multiplicità $s$, $\sigma$ rispettivamente. Ma, per la precedente ipotesi $\frac{s'}{s} \leqq \frac{\sigma'}{\sigma}$, si ha:

$$\lambda_{s,s-s'} \geqq \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'};$$

---

non è strettamente necessaria in tutta la sua completezza nel caso nostro; anzi riceve dal nostro ragionamento una dimostrazione indiretta. Si supponga infatti $\sigma' = \sigma$; la proposizione è evidente senz'altro (col segno $=$) e il ragionamento fondato su di essa è immediatamente esatto. Si voglia ora considerare il caso generale: sia $\chi$ una falda passante per $a$ e di cui una sezione piana generica abbia in $A$ e nei $\nu$ punti successivi considerati di $\varphi$, $\psi$ la stessa multiplicità (p. e. 1: si può come tale scegliere una falda di una conveniente polare della superficie cui appartengono $\varphi$, $\psi$). Alle coppie $\chi\,\varphi$, $\chi\,\psi$ si applica allora tutto il nostro ragionamento; sopra una sezione piana generica per $A$, $\varphi$ e $\chi$ hanno adunque comuni $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ punti, $s$-pli per $\varphi$, semplici per $\chi$; sulla stessa sezione $\psi$ e $\chi$ hanno comuni $(l+1)\nu - \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'} + 1$ punti $\sigma$-pli per $\psi$, semplici per $\chi$. Se quindi $\lambda_{s,s-s'} \geqq \lambda_{\sigma,\sigma-\sigma'}$, su detta sezione piana generica $\varphi$ e $\psi$ hanno comuni $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ punti successivi rispettivamente $s$-pli e $\sigma$-pli per $\varphi$ e $\psi$. c. v. d. — Che, come si è detto, la proposizione di cui si fa uso nel testo riceva da questo una dimostrazione indiretta si vede facilmente se si inverte il ragionamento del testo, supponendo $l$ sufficientemente grande ($l \geqq s\sigma$).

(*) E non più se $s' > 0$. A $s' = 0$ corrisponde il caso che, dopo $\nu$ punti successivi — della sezione piana generica per $A$ — rispettivamente $s$-pli e $\sigma$-pli per $\varphi$ e $\psi$, le due falde non abbiano altri punti comuni. La multiplicità d'intersezione di $\varphi$ e $\psi$ in $A$ è allora precisamente $\nu s\sigma$. Il numero delle coppie di caratteri $s_i, \sigma_i$ di valori $s$, $\sigma$ è allora $\leqq (l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1 = (l+1)(\nu-1) + 1$. Questa disuguaglianza va unita alle precedenti perchè il ragionamento risulti valido per questo caso, il quale però non ci occorrerà.

quindi dei punti successivi comuni alle sezioni piane generiche di $\varphi$, $\psi$ per $A_l$ fatte con uno stesso piano, precisamente $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ sono $s$-pli e $\sigma$-pli per $\varphi$ e $\psi$ rispettivamente. Adunque *le due falde* $\varphi$, $\psi$ *hanno, sopra una sezione piana generica passante per* $A_l$, *una successione di punti comuni incominciante per* $A_l$, *di cui* $(l+1)\nu - \lambda_{s,s-s'} + 1$ *hanno rispettivamente per* $\varphi$ *e* $\psi$ *i caratteri* $s$ *e* $\sigma$.

Come immediata conseguenza di questa proposizione si ha quest'altra: La linea $a$ sia origine delle falde $\varphi, \psi, \ldots$ della superficie $\Phi$; sia $A$ un punto generico di $a$ e la sezione generica di $\Phi$ per $A$ possegga $\nu$ caratteri $n$ successivi (onde $a$ sarà $n$-pla per $\Phi$) e quindi un carattere $n' < n$; sia $s$ la multiplicità di $a$ per una qualunque delle falde $\varphi, \psi, \ldots$; questa falda avrà in quei $\nu + 1$ punti successivi $\nu$ caratteri $s$ e quindi uno $s' \leq s$; sia $\lambda$ il massimo valore di $\lambda_{s,s-s'}$ relativo a tutte queste falde: *sopra una sezione piana generica per* $A_l$ *esisteranno* $(l+1)\nu - \lambda + 1$ *punti* $n$*-pli di* $\Phi$.

8. Ciò posto la superficie $F$ abbia la linea $a$ come $s$-pla e vi passi con una falda sola. Sopra una sezione piana generica di $F$ per $A$ (generico su $a$) esistano $\nu$ punti $s$-pli e quindi un punto $s'$-plo $(s' < s)$. Sia $F_1$ la prima polare di $V$ rispetto ad $F$; $F_1$ avrà in quegli stessi $\nu$ punti multiplicità $s-1$ e nel successivo multiplicità $s' + \alpha$ (in generale sarà $\alpha = 0$; eccezionalmente potrà essere $\alpha > 0$).

Consideriamo una sezione piana generica di $F$ e di $F_1$ (il cui piano passi per $V$) e le trasformate delle due curve dopo le $\nu$ trasformazioni quadratiche applicate ad $A$ e ai successivi punti $s$-pli della sezione (e aventi come punto doppio della conica fondamentale di ogni trasformazione, nel primo spazio, il punto doppio della conica fondamentale della precedente trasformazione, nel secondo spazio).

Siano $f$ e $f_1$ le due curve trasformate, $v$ il trasformato di $V$, $\alpha$ il trasformato di $A$: $f_1$ è la prima polare di $v$ rispetto ad $f$. $f$ passa per $\alpha$ con un ramo solo d'ordine $s'$ e classe $s - s'$ tangente a $v\alpha$ e che interseca $v\alpha$ $s$ volte; segue che $f_1$ passa per $\alpha$ con uno o più rami. E se si indica con $\sigma'$ l'ordine di uno qualunque di questi rami, e con $\sigma - \sigma'$ la classe, si dovrà avere $\frac{\sigma}{\sigma'} \leq \frac{s}{s'}$ (*).

(*) Lo si dimostra facilmente come segue: Si assuma $v\alpha$ come asse $y=0$, $\alpha$ come origine delle coordinate, $v$ come punto all'infinito. Il primo membro dell'equazione di $f_1$ sarà la derivata rispetto ad $x$ del primo membro dell'equazione di $f$. Si formi il paral-

Ritornando ora alla considerazione di $F$ e $F_1$, si vede che il numero $\lambda$ del n.° prec. relativo alla $F_1$, considerata come superficie $\Phi$, è $\leq \lambda_{s,s-s'}$; si ha inoltre che la proposizione del n.° prec. si può applicare alla $F_1$ ove si supponga dimostrato il teorema enunciato al principio del n.° stesso per tutte le falde d'ordine minore di $s$. Allora un ragionamento analogo a quello dei n.i 5, 6 mostra che il teorema medesimo si verifica per la falda $F$ d'ordine $s$. La proposizione è adunque generalmente vera. Essa può anche esprimersi: *se sopra una sezione generica della falda $F$ si succedono $\nu$ punti $s$-pli e quindi uno $s'$-plo, sopra una sezione generica della falda stessa fatta con una superficie avente in $A$ colla linea $a$, origine della falda, contatto d'ordine $l$ si succederanno $(l+1)(\nu+1)-\lambda_{s,s-s'}$ punti $s$-pli.*

9. Il ragionamento dei due n.i precedenti si può semplificare alquanto ove si voglia soltanto provare che il numero ora trovato è $(l+1)(\nu+1)-\mu$ *ove $\mu$ non dipende da $\nu$.* Questa semplice osservazione può servire utilmente per compiere la ricerca per via analitica; basterà infatti considerare le falde per cui $\nu=1$. Io non esporrò qui un tal calcolo che ci ricondurrebbe ai risultati precedenti.

10. Nei n.i 5, 6 si è visto che, seguendo per un conveniente numero di punti successivi la linea $a$, possono ottenersi più falde come trasformate dell'unica falda $F$; il fatto continua a verificarsi qualunque sia l'ordine $s$ della falda e si può presumere, per induzione dai casi studiati, che *si otterranno più falde trasformate quando $l+1$ e $s$ ammettono un M. C. D.; ed il numero di queste falde sarà precisamente questo M. C. D.* La proposizione si prova con tutta semplicità ove si ricorra alla rappresentazione analitica delle falde data dall'HALPHEN (l. c.). Cfr. la proposizione analoga (che in questa rientra come caso particolare per $l=1$) provata dall'HALPHEN a p. 84.

---

lelogrammo di NEWTON corrispondente a $f$ e si chiamino per brevità $\xi$ e $\eta$ gli assi corrispondenti agli esponenti 0 della $y$ e della $x$ rispettivamente. Il parallelogrammo di NEWTON corrispondente a $f_1$ si otterrà da quello corrispondente a $f$ con una traslazione parallela a $\xi$, diretta verso $\eta$ e colla soppressione dei punti che stavano su $\eta$. Ciò posto si vede immediatamente che gli angoli formati dai lati della poligonale di NEWTON corrispondente a $f_1$ colla $\eta$ sono minori o uguali a quello formato colla $\eta$ dall'unico lato della poligonale corrispondente a $f$ (unico perchè $f$ passa per $\alpha$ con un ramo solo). Ora le tangenti di quegli angoli sono gli ordini infinitesimali di $y$ rispetto ad $x$ corrispondentemente ai rami relativi ai lati delle poligonali, cioè sono uguali ai rapporti della classe all'ordine dei rami, accresciuti di una unità. Così è dimostrato l'asserto.

11. Noi abbiamo fin qui analizzati i caratteri uguali all'ordine della falda; rimarrebbero da studiare i caratteri successivi; questi dipendono evidentemente dai caratteri successivi della sezione piana generica della falda; così pure si potrebbero ancora studiare i caratteri di punti speciali delle linee singolari ottenute colle trasformazioni. Io non mi fermerò su questo punto, e solo presenterò il seguente enunciato, facile d'altronde a provarsi, come esempio del secondo genere di ricerche: « La falda $F$ di linea origine $a$ sia d'or-« dine $s$ e una sua sezione piana generica abbia i caratteri $s$, 1. Sia $A$ un « punto generico di $a$; sia $a_1$ la retta (semplice) successiva ad $A$, $A_1$ il punto « in cui $a_1$ si appoggia ad $a$, $a_2$ la retta (doppia) successiva ad $A_1$; $a_2$ si « appoggi ad $a_1$ in $O$: il punto $O$ sarà doppio se $s=2$, triplo se $s>2$; « inoltre se $s=2$ ad $O$ è successivo su $a_1$ un nuovo punto doppio a cui suc-« cede una conica semplice; se $s=3$ ad $O$ è successiva una cubica sem-« plice (avente su $a_1$ punto semplice, su $a_2$ doppio); se $s>3$ sono successive « ad $O$ due rette. »

12. E finirò riprendendo la proposizione enunciata nell'introduzione. È ora evidente che il fatto là enunciato non potrà presentarsi solo quando il punto $A$ e ciascuno dei suoi successivi $A_1$, $A_2$,... abbia come successive una o più linee ciascuna a piani tangenti nei punti generici tutti distinti. Se invece p. e. al punto $A$ fosse successiva una linea $a$ cuspidale, basterebbe considerare p. e. sulla $a$ tre punti successivi $A_1$, $A_2$, $A_3$, per ottenere, successivamente ad $A_3$ una nuova linea cuspidale (diversa da $a$) e così via.

## § 2.

Colgo l'occasione di questa appendice per correggere due inesattezze sfuggitemi nella precedente Memoria (ma che *in nulla* alterano il contenuto e le conclusioni della medesima) e che mi furono indicate dal sig. prof. Noether a cui rendo vivissime grazie.

La prima è inesattezza storica, in quanto nelle prime linee della Memoria, ho attribuito al Weierstrass il teorema della trasformabilità dell'intorno di un punto singolare di una curva algebrica piana nell'insieme degl'intorni di un numero finito (che può essere 1) di punti semplici di un'altra curva algebrica piana, con un numero finito di trasformazioni quadratiche (piane). Il Weierstrass espose veramente questo teorema (o meglio la sua interpretazione analitica) in lezioni posteriori tutte al 1871. Nel 1871 (come ho ricordato nella prec. mem.) apparvero la 2.ª Nota del sig. Noether: *Ueber d. algebr. Functionen einer u. zweier Variabeln* (Göttinger Nachrichten. Maggio 1871, p. 267) e la Memoria del sig. Hamburger: *Ueber die Entwickelung alg. Functionen in Reihen* (Zeitschrift für Mathematik u. Ph. XVI. Autunno 1871); nella prima è esposto il concetto della risoluzione delle singolarità con una successione di trasformazioni Cremoniane; nella seconda è data la dimostrazione (analitica) della risolvibilità per tal mezzo (con trasformazioni quadratiche) delle singolarità medesime.

Sarebbe inutile che io maggiormente mi dilungassi su questo fatto: il lettore può vedere l'accurata storia dell'argomento che i sigg. Brill e Noether ci diedero nella *Relazione* sopra *Die Entwickelung d. Th. algebr. Functionen in älterer und neuerer Zeit* (Jahresbericht d. deutschen Math. Vereinigung Bd. 3 1892-93). Aggiungerò solo che, come rileva il sig. Noether, l'esposizione del Weierstrass non stabilisce che i diversi intorni trasformati dell'unico considerato appartengano ad una stessa curva algebrica, bensì a convenienti curve algebriche.

La seconda inesattezza è contenuta nelle linee 3-5 della p. 30 (della Memoria — p. 248 del volume) ove nella linea 3 in luogo di: « Ogni superficie ecc. » si deve leggere: « Sia $A$ semplice per $a$; ogni superficie ecc. » e alla linea 5 in luogo di « Sia inoltre il punto $A$ ecc. » si deve leggere: « Inoltre, poichè il punto $A$ è ecc. » Nella linea 6 si dovrà di conseguenza mutare « ; » in « , ». È evidente che leggendo come è scritto nella Memoria il fatto enunciato nel periodo: « Ogni superficie... » non è vero: così ad esempio o se $a$ è doppia per $F$, $A$ triplo per $a$ e per $F$ ed $F_1$ passa semplicemente per $a$ ed $A$ è doppio per essa. (Questo semplice esempio mi fu indicato dal sig. Noether.) Ma le linee seguenti mostrano chiaramente come fosse mia intenzione considerare effettivamente soltanto il caso di $A$ semplice per $a$, poichè, come là osservo, il caso contrario si riduce immediatamente a questo.

Torino, luglio 1898.