Zur Theorie der algebraischen Functionen.

Von

ADOLF KNESER in Breslau.

In den Art. 9 und 10 meiner Abhandlung: „Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variablen*), ist implicite ein allgemeiner, die algebraischen Functionen betreffender Satz bewiesen, welcher zusammen mit seiner schwieriger zu beweisenden Umkehrung ein Criterium ergibt zur Entscheidung, ob eine gegebene algebraische Function von mehreren Variablen als rationale Function mehrerer algebraischer Functionen von je einer Variablen dargestellt werden kann oder nicht. Die Ableitung dieses Criteriums auf Grund einer erweiterten Darstellung jenes Satzes bildet das Ziel der vorliegenden Zeilen.

§ 1.

Die Grösse x sei als algebraische Function der unabhängigen Variablen $u, v_1, v_2, \dots, v_n$ durch die Gleichung

$$(1) \quad F(x, u, v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$$

definiert, welche bei Adjunction aller Constanten, d. h. aller von $u, v_1, v_2, \dots, v_n$ nicht irrational abhängigen Grössen, oder kurz im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_0$ irreducibel sein möge. Angenommen nun, eine beliebige Wurzel x_0 der Gleichung (1) könne in der Form

$$(2) \quad x_0 = \vartheta(y, z)$$

dargestellt werden, wo ϑ eine rationale Function mit Coefficienten aus dem Bereich $\mathfrak{R}_0$, y eine algebraische Function von u und z eine algebraische Function von $v_1, v_2, \dots, v_n$ bedeutet, so betrachte man die Gleichung (1) im Rationalitätsbereich aller algebraischen Functionen der Grössen v , oder kurz im Bereich $\mathfrak{R}_1$. Dann kann die linke Seite dieser Gleichung in Factoren zerfallen, welche nur noch in x und u rational und ganz sind; der im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibele Factor $F_0(x, u)$,

*) Diese Annalen Bd. XXVIII, S. 125.

welcher für $x = x_0$ verschwindet, besitze ausserdem die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$. Die algebraische Function y wird nun durch eine Gleichung

$$(3) \quad f(y, u) = 0$$

definiert, welche bei Adjunction aller von u nicht irrational abhängigen Grössen, also auch im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel ist; da ferner in demselben Bereich auch die Gleichung

$$(4) \quad F_0(x, u) = 0$$

irreducibel ist, so lehrt die Gleichung (2), dass die durch die Gleichung (4) definirte Gattung x_0 unter der durch die Gleichung (3) definirten Gattung y im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_1$ enthalten ist; die Ordnung der letzteren muss also nach bekannten Sätzen ein Vielfaches der Ordnung von x_0 , also etwa gleich mm_1 sein. Versteht man demnach unter $y_1, y_2, \dots, y_{mm_1}$ die Wurzeln der Gleichung (3), so besteht bei passender Vertheilung der Indices, wenn man durch φ einen rationalen Ausdruck mit Coefficienten aus dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ bezeichnet, ein Gleichungssystem von folgender Gestalt

$$(5) \quad x_\lambda = \varphi(y_{\lambda m_1 + \nu}); \quad \nu = 1, 2, \dots, m_1; \quad \lambda = 0, 1, \dots, m-1.$$

Hieraus folgt sofort die Gleichung

$$m_1 x_\lambda = \varphi(y_{\lambda m_1 + 1}) + \varphi(y_{\lambda m_1 + 2}) + \dots + \varphi(y_{(\lambda+1)m_1});$$

also ist x_λ nach dem Theorem von Lagrange rational im Bereich $\mathfrak{R}_1$ ausdrückbar durch jede symmetrische Function der Grössen $y_{\lambda m_1 + 1}, y_{\lambda m_1 + 2}, \dots, y_{(\lambda+1)m_1}$, welche keinem ihrer conjugirten Werthe gleich ist, z. B. durch das Product

$$Y_\lambda = (\alpha - y_{\lambda m_1 + 1})(\alpha - y_{\lambda m_1 + 2}) \dots (\alpha - y_{(\lambda+1)m_1}),$$

in welchem α eine passend gewählte Constante bedeutet; d. h. es bestehen die Gleichungen

$$(6) \quad x_\lambda = \psi(Y_\lambda),$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$x_\lambda = \vartheta'(Y_\lambda, Z),$$

wenn ψ und ϑ' rationale Ausdrücke sind, deren Coefficienten beziehentlich den Bereichen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_0$ angehören, und Z eine algebraische Function der Grössen v bedeutet.

Nun kann leicht gezeigt werden, dass die symmetrischen Functionen der Grössen $Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ angehören. Denn das mit der Unbestimmten β gebildete Product

$$Y'_\lambda = (\beta - \varphi(y_{\lambda m_1 + 1}))(\beta - \varphi(y_{\lambda m_1 + 2})) \dots (\beta - \varphi(y_{(\lambda+1)m_1}))$$

hat mit keinem der Ausdrücke, welche aus ihm durch Umsetzung der Grössen y , entstehen und formell von ihm verschieden sind, denselben

Werth, weil sonst zwischen den Grössen $\varphi(y_*)$ noch andere Gleichungen als die folgenden

$$\varphi(y_{2m_1+1}) = \varphi(y_{2m_1+2}) = \dots = \varphi(y_{(2+1)m_1})$$

bestehen würden, was mit den Gleichungen (5) und der Irreducibilität der Gleichung (4) unvereinbar ist. Demnach kann jede beliebige symmetrische Function der m_1 Grössen $y_{2m_1+1}, y_{2m_1+2}, \dots, y_{(2+1)m_1}$, z. B. die Grösse Y_2 im Bereich $\mathfrak{R}_1$ rational durch Y_1' ausgedrückt werden. Da nun offenbar die Gleichung

$$Y_1' = (\beta - x_2)^{m_1}$$

besteht, so sind die symmetrischen Functionen von $Y_0', Y_1', \dots, Y_{m-1}'$, mithin auch die symmetrischen Functionen von $Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ im Bereich $\mathfrak{R}_1$ rational.

Die Gleichung ferner, deren Wurzeln die m Grössen $Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ sind, ist im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel, weil sonst in Folge der Gleichung (6) auch die Gleichung (4) reducibel sein müsste, was der Definition von $F_0(x, u)$ widerspricht. Die beiden Grössen x_2 und Y_1 sind also algebraische Functionen m^{ter} Ordnung von u , welche im Bereich $\mathfrak{R}_1$ zu einer und derselben Gattung gehören, also auch dieselbe Gattungsdiscriminante*) besitzen; oder, was dasselbe bedeutet, der wesentliche Theiler der Discriminante**) der Gleichung

$$\prod_{i=0}^{m-1} (Y - Y_i) = 0$$

muss mit dem wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (4) identisch sein; letzterer ist also, da die Grössen Y_i Functionen von u allein sind, von den Grössen v unabhängig.

Dieselbe Schlussreihe wie für die Gleichung (4) kann nun für jede Gleichung $F_1(x, u) = 0$ durchgeführt werden, in welcher links ein beliebiger, im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibeler Factor von $F(x, u, v_1, v_2, \dots, v_n)$ steht. Um dies zu zeigen genügt der Nachweis, dass aus der Gleichung (2) eine Gleichung von derselben Form für jede Wurzel der Gleichung (1) folgt; denn der irreducibele Factor F_0 war nur dadurch ausgezeichnet, dass eine seiner Wurzeln x_0 der Gleichung (2) genügte. Dass nun in der That jede Wurzel der Gleichung (1) einer Gleichung (2) genügt, sieht man leicht, indem man eine Grösse s einführt, durch welche man y und z im Bereich $\mathfrak{R}_0$ rational ausdrücken kann:

$$(7) \quad \begin{aligned} y &= \eta(s); \quad z = \xi(s), \\ x_0 &= \vartheta(\eta(s), \xi(s)). \end{aligned}$$

*) Vgl. Kronecker, Grundzüge § 8; Crelle's Journal Bd. 92, S. 22.

**) Vgl. Kronecker, Ueber die Discriminante, §§ 3 und 7, Crelle's Journal Bd. 91, S. 313 und 329.

Ersetzt man hier die Grösse s successive durch ihre sämmtlichen conjugirten Werthe, d. h. die Wurzeln der im Bereich $\Re_0$ irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse s genügt, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung (7) alle im Bereich $\Re_0$ mit x_0 conjugirten Grössen, also, wegen der Irreducibilität der Gleichung (1) im Bereich $\Re_0$, die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung. Da nun auch die Grössen $\eta(s)$ und $\xi(s)$ in ihre conjugirten Werthe übergehen, also algebraische Functionen von u bezw. den Grössen v bleiben, so genügt jede Wurzel der Gleichung (1) einer Gleichung (2). Hiermit wird die an dem Polynom $F_0(x, u)$ entwickelte Schlussreihe auf das Polynom $F_1(x, u)$ übertragbar; also hat die Discriminante der Gleichung $F_1(x, u) = 0$ einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Theiler.

Berücksichtigt man nun noch, dass der wesentliche Theiler der Discriminante einer reducibeln Gleichung nichts anderes ist als das Product der wesentlichen Theiler der Discriminanten der irreducibeln Gleichungen, in welche die reducible Gleichung sich auflöst*), so ergibt sich das folgende Resultat:

Ist eine algebraische Function x der Variablen $u, v_1, v_2, \dots, v_r$ rational ausdrückbar durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der Grössen v allein, so muss, wenn man x als algebraische Function von u allein betrachtet und demgemäss alle algebraischen Functionen der Grössen v adjungirt, die Discriminante der gegebenen die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Theiler besitzen.

§ 2.

Eine Anwendung des erhaltenen Resultats führt zur Erledigung einer Frage, welche in der Abhandlung über die Monodromiegruppe**) aufgeworfen ist, der Frage nämlich, wann eine dem Bereich $\Re_0$ nicht angehörige rationale Function der Wurzeln der Gleichung (1) nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational werden kann.

Sind zunächst $y_1, y_2, \dots, y_r$ die conjugirten Werthe irgend einer algebraischen Function von u , so constituirt die mit unbestimmten Coefficienten α gebildete Grösse

$$\eta = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_r y_r$$

eine Galois'sche Gattung, welche mit der Gattung

$$\eta' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \dots + \alpha_r y'_r$$

identisch ist, wenn y'_1 eine beliebige von den Unbestimmten α unabhängige Grösse der Gattung y_1 und y'_r die entsprechend gebildete

*) Vgl. Kronecker, Ueber die Discriminante, § 4, a. a. O. S. 318.

**) Diese Annalen XXVIII, S. 130.

Grösse der Gattung y , bedeutet. Ist also etwa $u - u_0$ ein Factor der Discriminante der Gattung η , so sind für $u = u_0$ zwei conjugirte Werthe von η' , also auch zwei der Grössen y' einander gleich; also ist $u - u_0$ ein Factor der Discriminante der Grösse y_1' ; da nun y_1' eine beliebige von den Unbestimmten α unabhängige Grösse der Gattung y_1 bedeutet, so ist $u - u_0$ auch ein Factor der Discriminante der Gattung y_1 . Somit ergibt sich das übrigens von selbst einleuchtende

Lemma. Versteht man unter $y_1, y_2, \dots, y_r$, die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von u sind, so ist die Discriminante der Gattung $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_r y_r$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ Unbestimmte sind, zusammengesetzt aus Linearfactoren, welche auch in der Discriminante der gegebenen Gleichung als Factoren des wesentlichen Theilers enthalten sind.

Jetzt sei speciell y_1 eine rationale Function der Wurzeln $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ der Gleichung (1), welche nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational wird; dann kann man das Resultat des § 1, auf die Function y_1 anwenden, bei welcher ein specieller Fall der Voraussetzung jenes Resultats stattfindet, und man kann schliessen, dass wenn man y_1 als algebraische Function von u allein betrachtet, der wesentliche Theiler der Discriminante der Grösse y_1 von $v_1, v_2, \dots, v_x$ unabhängig sein muss. Da nun nach einem Satze von Kronecker*) die Discriminante der Gattung y_1 ein Theiler der Discriminante der Gattung η , und diese ein Theiler der Discriminante der Gattung

$$\xi = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

sein muss, weil die Gattung y_1 unter der Gattung η , und diese unter der Gattung ξ enthalten ist, so folgt, dass die Discriminante der Gattung ξ lineare Factoren besitzen muss, welche von den Grössen v unabhängig sind. Nun ist nach dem eben bewiesenen Lemma jeder Linearfactor der Discriminante der Gattung ξ zugleich ein Factor der Discriminante der Gattung x_0 , wenn man x_0 als Function von u allein betrachtet, also sicher ein Factor der Discriminante der Gleichung (1); wird also eine rationale Function der Wurzeln der Gleichung (1) nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational, so muss die Discriminante dieser Gleichung Linearfactoren besitzen, welche von $v_1, v_2, \dots, v_x$ unabhängig sind. Ist dies durch die specielle Form der Gleichung (1) ausgeschlossen, wie z. B. wenn dieselbe die Gestalt $F(x, ux + v) = 0$ besitzt, unter $F(x, y)$ ein im Bereich $\mathcal{R}_0$ irreducibles Polynom verstanden, so kann keine rationale Function der Wurzeln dieser Gleichung nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational werden. Damit ist der zweite der beiden Fälle,

*) Vgl. Grundzüge § 9, Crelle's Journal Bd. 92, S. 26.

welche am Ende des Art. 8 der citirten Abhandlung über die Monodromiegruppe bezeichnet sind, als unmöglich nachgewiesen.

§ 3.

Bemerkenswerth ist nun, dass das Resultat des § 1 sich umkehren lässt. Dem Beweis dieser Behauptung müssen aber zwei einfache Hilfsbetrachtungen vorausgeschickt werden.

(A) Durch die Gleichung

$$(8) \quad G(x, u) = 0,$$

deren Coefficienten von den Unbestimmten $v_1, v_2, \dots, v_x$ in beliebiger Weise algebraisch abhängig sein mögen, sei x als algebraische Function von u defnirt; ersetzt man v_x durch die Constante c_x , so gehe die Gleichung (8) in die Gleichung

$$(9) \quad G'(x, u) = 0$$

über. Dann kann leicht gezeigt werden, dass bei passender Wahl der Constanten c_x der wesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung (9) aus dem wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (8) erhalten wird, indem man v_x durch c_x ersetzt, und dass die Werthsysteme c_x , bei denen dies nicht stattfindet, höchstens eine algebraische Mannichfaltigkeit von $x - 1$ Dimensionen erfüllen können.

Setzt man nämlich:

$$G(x, u) = U_0 x^m + U_1 x^{m-1} + \dots + U_m,$$

$$G'(x, u) = U'_0 x^m + U'_1 x^{m-1} + \dots + U'_m,$$

$$H(x, u) = x^m + U_1 x^{m-1} + U_2 U_0 x^{m-2} + \dots + U_m U_0^{m-1},$$

$$H'(x, u) = x^m + U'_1 x^{m-1} + U'_2 U'_0 x^{m-2} + \dots + U'_m U'_0^{m-1},$$

$$\frac{\partial H(x, u)}{\partial x} = H_1(x, u), \quad \frac{\partial H(x, u)}{\partial u} = H_2(x, u),$$

indem unter $U_0, U_1, \dots$ ganze Functionen von u , unter $U'_0, U'_1, \dots$ dieselben ganzen Functionen nach Ersetzung von v_x durch c_x verstanden werden, so sind die wesentlichen Theiler der Discriminanten der Gleichungen (8) und (9) beziehentlich identisch mit den wesentlichen Theilern der Discriminanten der Gleichungen*)

$$(10) \quad H(x, u) = 0,$$

$$(11) \quad H'(x, u) = 0.$$

Nun kann der ausserwesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung (10) defnirt werden als der grösste gemeinsame Theiler der Coefficienten in der homogenen Function

*) Vgl. Kronecker, Ueber die Discriminante § 7, a. a. O. S. 329.

$$P(U, V) = \prod_{v=0}^{m-1} (UH_1(\xi_v, u) + VH_2(\xi_v, u))$$

der Unbestimmten U und V , wenn $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung (10) sind*). Haben aber allgemein mehrere ganze Functionen von u , deren Coefficienten algebraisch von den Grössen v abhängen, z. B. $g_1(u; v), g_2(u; v), \dots$ einen grössten gemeinsamen Theiler $T(u; v)$, so müssen gewisse ganze Functionen der Coefficienten von u in den Polynomen $g_v(u; v)$ verschwinden, während eine bestimmte solche Function von Null verschieden bleibt, sodass für unbestimmte Werthe der Grössen v ein System von Relationen

$$|h_0(v)| > 0, \quad h_1(v) = h_2(v) = \dots = 0$$

besteht, in welchen $h_0, h_1, \dots$ gewisse algebraische Functionen der Grössen v bedeuten; und diese Relationen können so gewählt werden, dass umgekehrt aus ihrem Bestehen die Existenz eines grössten gemeinsamen Theilers der Functionen $g_v(u; v)$ geschlossen werden kann, dessen Grad in u derselbe ist wie der Grad von $T(u; v)$. Giebt man also den Unbestimmten v , constante Werthe c , für welche die Grösse $h_0(c)$ von Null verschieden ist, so haben die Polynome $g_v(u; c)$ sicher den gemeinsamen Theiler $T(u; c)$ und einen grössten gemeinsamen Theiler, dessen Grad in u derselbe ist wie der Grad von $T(u; v)$, der sich also von $T(u; c)$ höchstens um einen constanten Factor unterscheiden kann. Sollen dagegen die Polynome $g_v(u; c)$ nach Division durch $T(u; c)$ noch eine nicht constante ganze Function von u als gemeinsamen Theiler besitzen, so muss $h_0(c) = 0$ sein, also eine Gleichung bestehen, welche nur für eine höchstens $(\alpha - 1)$ -fache Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c erfüllt sein kann, weil $h_0(v)$ für unbestimmte Werthe der Grössen v von Null verschieden ist. Versteht man also speciell unter $g_1(u; v), g_2(u; v), \dots$ die Coefficienten in $P(U, V)$, so ergibt sich, dass abgesehen von einer höchstens $(\alpha - 1)$ -fachen algebraischen Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c der ausserwesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung (11) aus dem ausserwesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (10) erhalten wird, indem man v , durch c , ersetzt. In derselben Weise erhält man also den wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (11), oder was dasselbe ist, der Gleichung (9), aus dem wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (10), oder was dasselbe ist, der Gleichung (8), womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

(B) Ein zweiter vor auszuschickender Hülfsatz, dessen Richtigkeit übrigens fast von selbst einleuchtet, ist der folgende. Eine im

) Kronecker, a. a. O. § 8, S. 334.

Beſtand $\mathfrak{K}$, irreducibele ganze Function $G(x, u; v)$ von zwei oder mehr Variablen $x, u_1, u_2, \dots$, deren Coefficienten von den Unbestimmten $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ algebraiſch abhängen, kann, wenn die Unbestimmte v_ν durch die Conſtante c_ν erſetzt wird, höchſtens für eine $(\kappa - 1)$ -fache algebraiſche Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c in Factoren, welche ganze Functionen von $x, u_1, u_2, \dots$ ſind, zerlegbar werden.

Denn bezeichnet man durch $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung $G(x, u; v) = 0$ mit der Unbekannten x , ſo beſteht für die Exiſtenz einer in $G(x, u; c)$ aufgehenden ganzen Function von $x, u_1, u_2, \dots$, welche in x vom Grade $p < m$ iſt, eine hinreichende und nothwendige Bedingung in Folgendem.

Es müſſen die ſymmetriſchen Functionen eines gewiſſen Systems von p Wurzeln $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_p}$ für $v_\nu = c_\nu$ rationale Functionen der Gröſſen $u_1, u_2, \dots$ werden; oder es muſs, wenn man wiederum

$$G(x, u; v) = U_0 x^m + U_1 x^{m-1} + \dots$$

ſetzt und unter $U_0, U_1, \dots$ ganze Functionen der Gröſſen u verſteht, das mit der Unbeſtimmten α gebildete Product

$$U_0^p (\alpha - \eta_{i_1}) (\alpha - \eta_{i_2}) \dots (\alpha - \eta_{i_p}) = X,$$

durch welches alle jene ſymmetriſchen Functionen rational ausdrückbar ſind, und welches ſtets eine ganze algebraiſche Function der Gröſſen u iſt, für $v_\nu = c_\nu$ in eine ganze rationale Function der Gröſſen u übergehen. Nun kann man aus den Dimenſionszahlen der Coefficienten U , bezüglich der Variablen u leicht eine obere Grenze γ beſtimmen, welche die Dimenſion von X , wenn dieſe Gröſſe eine ganze rationale Function wird, nicht überſchreiten kann. Denn ſetzt man für $v_\nu = c_\nu$

$$X = g(\alpha, u_1, u_2, \dots),$$

ſo iſt offenbar die Gröſſe

$$g\left(\frac{\beta}{U_0}, u_1, u_2, \dots\right) = (\beta - U_0 \eta_{i_1}) (\beta - U_0 \eta_{i_2}) \dots (\beta - U_0 \eta_{i_p})$$

ein Factor von

$$U_0^{m-1} G\left(\frac{\beta}{U_0}, u; c\right) = (\beta - U_0 \eta_0) (\beta - U_0 \eta_1) \dots (\beta - U_0 \eta_{m-1}),$$

wenn in U_0 überall $v_\nu = c_\nu$ geſetzt wird; iſt alſo γ die Dimenſion des Polynoms $U_0^{m-1} G(x, u; v)$ in den Gröſſen u , ſo kann die Dimenſion der ganzen Function $g(x, u_1, u_2, \dots)$ den Werth γ ſicher nicht überſteigen. Demnach beſtehen, wenn die Gröſſe X für $v_\nu = c_\nu$ in den Gröſſen u rational wird, die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^{\gamma+1} X}{\partial u_1^{\gamma_1} \partial u_2^{\gamma_2} \dots} = 0,$$

worin unter $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ irgend welche Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, \gamma + 1$ zu verſtehen ſind, welche der Gleichung

$$1 + \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$$

genügen. Versteht man nun unter $X', X'', \dots$ die sämtlichen Producte von derselben Gestalt wie X , so darf für unbestimmte Werthe der Grössen v keine der über alle möglichen Systeme $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ erstreckten Summen

$$\sum_{(\gamma)} V_{\gamma_1 \gamma_2 \dots} \frac{\partial^{\gamma+1} X^{(v)}}{\partial u_1^{\gamma_1} \partial u_2^{\gamma_2} \dots}$$

bei unbestimmten Coefficienten V verschwinden, weil sonst eine der Grössen $X^{(v)}$ eine ganze rationale Function der Grössen u wäre, also $G(x, u; v)$ für unbestimmte Werthe der Grössen v reducibel wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Da man nun, unter Ψ rationale Ausdrücke verstanden, setzen kann

$$\frac{\partial^{\gamma+1} X^{(v)}}{\partial u_1^{\gamma_1} \partial u_2^{\gamma_2} \dots} = \Psi_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(X^{(v)}),$$

so besitzt man in dem Product

$$\equiv \prod_v \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \dots} V_{\gamma_1 \gamma_2 \dots} \Psi_{\gamma_1 \gamma_2 \dots}(X^{(v)})$$

einen rationalen Ausdruck, welcher für unbestimmte Werthe der Grössen v , sicher von Null verschieden ist, und welcher für $v = c$, verschwinden muss, wenn das Polynom $G(x, u; c)$ einen Factor haben soll, der in $x; u_1, u_2, \dots$ rational und ganz, und in x vom Grade p ist. Setzt man also in der Gleichung

$$\equiv = 0$$

die Werthe $v = c$, ein, so erhält man für die Grössen c ein System von Bedingungsgleichungen, welches sicher nicht identisch erfüllt ist, also höchstens eine $(\kappa - 1)$ -fache algebraische Mannichfaltigkeit im Gebiet der Grössen c definiren kann, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

§ 4.

Um jetzt nach Erledigung der einfachen Vorfragen zum Beweis der Behauptung zu kommen, dass das Resultat des § 1 sich umkehren lässt, diene als Ausgangspunkt die Bemerkung, dass es nur eine endliche Anzahl von Gattungen n -werthiger algebraischer Functionen von einer Variablen u geben kann, deren Gattungsdiscriminante eine bestimmte ganze rationale Function von u ist. Der algebraische Beweis dieser Behauptung scheint ziemlich schwierig zu sein; die Richtigkeit derselben ergibt sich aber leicht aus der Betrachtung der n -blättrigen Riemann'schen Flächen*).

*) Vgl. F. Klein, Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen, § 19, S. 64.

Zunächst ist klar, dass eine algebraische Function sich nur an den Nullstellen ihrer Gattungsdiscriminante verzweigen kann, da für jeden von diesen Nullstellen verschiedenen Werth u_0 der unabhängigen Variablen*) eine Grösse der Gattung gefunden werden kann, welche für $u = u_0$ lauter von einander verschiedene conjugirte Werthe besitzt, sich also unmöglich an der Stelle $u = u_0$ verzweigen kann. Da nun jede Riemann'sche Fläche eine bestimmte Gattung algebraischer Functionen von u definirt, so wird die endliche Anzahl der Gattungen mit gegebener Gattungsdiscriminante erwiesen sein, wenn man gezeigt hat, dass nur eine endliche Anzahl verschiedener, d. h. nicht conform aufeinander abbildbarer Riemann'scher Flächen existirt, welche sich an keinen andern Punkten der u -Ebene als den gegebenen $P_1, P_2, \dots, P_k$ verzweigen. Diese Behauptung kann aber leicht bewiesen werden. Zieht man nämlich eine sich selbst nicht schneidende Linie L von P_1 nach P_2 , von P_2 nach P_3 , u. s. f., von P_k ins Unendliche, welches durch P_{k+1} bezeichnet werden möge, so ist jeder einzelne Zweig einer nur in den Punkten P verzweigten algebraischen Function in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Linie L eindeutig bestimmt, solange die Linie L nicht überschritten wird, und die zugehörige Riemann'sche Fläche ist völlig gegeben, sobald man weiss, in welcher Weise bei Ueberschreitung der Linien L in einer ein für alle Mal festzusetzenden Richtung an jeder der Strecken P, P_{v+1} die n Zweige ineinander übergehen. Bezeichnet man dieselben durch $1, 2, \dots, n$, so gehört zu jeder Strecke P, P_{v+1} eine bestimmte den Zusammenhang der Zweige längs dieser Strecke definirende Substitution

$$S_v = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ v_1, & v_2, & \dots, & v_n \end{pmatrix},$$

Gehört zu jeder Strecke P, P_{v+1} bei einer algebraischen Function dieselbe Substitution S_v , wie bei einer zweiten, so sind die zugehörigen Riemann'schen Flächen identisch; dasselbe findet übrigens offenbar schon dann statt, wenn die bei der einen Function auftretenden Substitutionen S_v durch Transformation mit einer für alle Indices v sich gleich bleibenden Substitution aus den bei der andern auftretenden ableitbar sind. Da es nun aber nur eine endliche Anzahl von Umsetzungen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ giebt, und aus diesen für eine endliche Anzahl von Strecken P, P_{v+1} die zugehörigen Substitutionen S_v auszuwählen sind, so ist klar, dass nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener n -blättriger Riemann'scher Flächen existiren kann, welche sich an keinen andern Stellen als den Stellen P verzweigen. Zu einer gegebenen Gattungsdiscriminante gehört also nur eine endliche Anzahl von n -werthigen Gattungen algebraischer Functionen von u .

*) Vgl. Kronecker a. a. O. § 5, S. 322.

Jetzt werde durch die im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibele Gleichung

$$(12) \quad F_0(x, u; v) = 0,$$

deren linke Seite von den Parametern $v_1, v_2, \dots, v_x$ algebraisch abhängen möge, die Grösse x als eine algebraische Function von u definiert, deren Gattungsdiscriminante von den Grössen v unabhängig ist. Dann kann man die letzteren nach § 3 (A) durch derartige Constanten c , ersetzen, dass der wesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung

$$(13) \quad F_0(x', u; c) = 0$$

aus demjenigen der Gleichung (12) erhalten wird, indem man v , durch c , ersetzt; da nun letzterer nach Voraussetzung von den Grössen v unabhängig ist, so haben die Discriminanten der Gleichungen (12) und (13) denselben wesentlichen Theiler; dabei können nach § 3 (A) diejenigen Werthsysteme c , für welche dies nicht stattfindet, höchstens eine $(x - 1)$ -fache algebraische Mannichfaltigkeit $\mathfrak{M}$ erfüllen. Somit kann man durch Gleichungen (13) unendlich viele Functionen x' definiren, welche eine und dieselbe Gattungsdiscriminante besitzen, sich also auf eine endliche Anzahl von Gattungen vertheilen müssen; schliesst man ausser der Mannichfaltigkeit $\mathfrak{M}$ auch diejenigen Werthsysteme c aus, für welche die Gleichung (13) reducibel wird und welche nach § 3 (B) ebenfalls nur eine höchstens $(x - 1)$ -fache algebraische Mannichfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ erfüllen können, so mögen sich alle durch die Gleichungen (13) definirten algebraischen Functionen x' auf die p Gattungen vertheilen, welche durch die Gleichungen

$$(14) \quad F_0(x^{(v)}, u; C^{(v)}) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, p$$

definiert werden. Dann lässt sich zeigen, dass alle diese Gattungen identisch sind.

Zum Beweis dieser Behauptung soll indirect bewiesen werden, dass eine Wurzel x der Gleichung (12) durch eine der Wurzeln $x^{(v)}$ der Gleichungen (14) rational ausdrückbar ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnten in der auf den Bereich $\mathfrak{R}_1$ bezogenen Gruppe der reducibeln Gleichung

$$(15) \quad F_0(x, u; v) \prod_{v=1}^p F_0(x, u; C^{(v)}) = 0$$

unter den Substitutionen, welche eine der Wurzeln x des ersten Factors am Platze lassen, niemals die sämtlichen Substitutionen vorkommen, welche eine der Grössen $x^{(v)}$, also eine der Wurzeln der p übrigen Factoren am Platze lassen. Dagegen giebt es, wenn das Werthsystem c , den Mannichfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ nicht angehört, in der Gleichung

$$(16) \quad F_0(x, u; c) \prod_{v=1}^p F_0(x, u; C^{(v)}) = 0$$

zu jeder Wurzel x' des ersten Factors eine Wurzel $x^{(e)}$ eines der p letzten Factoren, durch welche jene Wurzel x' rational ausdrückbar ist; in der auf den Bereich $\mathfrak{R}_1$ bezogenen Gruppe der Gleichung (16) kommt also unter den Substitutionen, welche eine Wurzel x' am Platze lassen, stets ein vollständiges System aller derjenigen Substitutionen vor, welche eine gewisse Wurzel $x^{(e)}$ am Platze lassen. Die Gruppen der Gleichungen (15) und (16) sind demnach verschieden.

Ist nun etwa $\Gamma(\xi; v)$ ein irreducibeler Factor der Galois'schen Resolvente der Gleichung (15), so ist offenbar $\Gamma(\xi; c)$ ein rationaler Factor der Galois'schen Resolvente der Gleichung (16); die Gruppe der letzteren ist also in der Gruppe der Gleichung (15) enthalten oder mit ihr identisch. Letzteres kann, wie soeben gezeigt ist, nicht eintreten; also muss für jedes der Werthsysteme c , welche den Mannichfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ nicht angehören, das Polynom $\Gamma(\xi; c)$ reducibel sein, während bei unbestimmten Werthen v , das Polynom $\Gamma(\xi; v)$ irreducibel ist. Dies Resultat würde aber nach § 3 (B) unmöglich sein, weil höchstens eine $(\kappa - 1)$ -fache algebraische Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c existiren kann, für welche das irreducibele Polynom $\Gamma(\xi; v)$ bei Ersetzung von v , durch c , reducibel wird. Die Annahme, von welcher man ausgegangen ist, dass nämlich keine Wurzel der Gleichung (12) durch eine der Wurzeln der Gleichungen (14) rational ausdrückbar sei, ist also unrichtig, und es muss demnach für eine Wurzel x der Gleichung (12) eine Gleichung von folgender Gestalt bestehen:

$$(17) \quad x = \varphi(x^{(e)}, u; v),$$

in welcher die rechte Seite von $x^{(e)}$ und u rational, von den Grössen v algebraisch abhängt. Da nun im Bereich $\mathfrak{R}_1$ die Grössen x und $x^{(e)}$ Wurzeln irreducibeler Gleichungen desselben Grades sind, so besteht, wenn unter ψ ein ähnlicher Ausdruck wie φ verstanden wird, auch eine Gleichung

$$(18) \quad x^{(e)} = \psi(x, u; v);$$

aus den Gleichungen (17) und (18) aber folgt

$$F_0(\varphi(x^{(e)}, u; v), u; v) = 0$$

also auch

$$F_0(\varphi(x^{(e)}, u; c), u; c) = 0;$$

ebenso andererseits

$$F_0(\psi(x, u; v), u; C^{(e)}) = 0,$$

also, da x in x' übergeht, wenn v , durch c , ersetzt wird

$$F_0(\psi(x', u; c), u; C^{(e)}) = 0.$$

Somit ergibt sich das Resultat, dass die durch (13) definirten Functionen x' sich nicht nur auf eine endliche Anzahl von Gattungen vertheilen, sondern sogar alle einer und derselben Gattung angehören. Hieraus fliesst sofort der folgende

Lehrsatz I.

Sind die Coefficienten der eine algebraische Function von einer Variablen definirenden Gleichung, nicht aber die Verzweigungspunkte dieser Function von gewissen κ Parametern algebraisch abhängig, so gehören alle für specielle Werthe der Parameter erhaltenen algebraischen Functionen, abgesehen höchstens von einer $(\kappa - 1)$ -fachen algebraischen Mannichfaltigkeit im Gebiet der κ Parameter, einer und derselben Gattung an.)*

Ein weiteres Resultat, welches aus der Gleichung (18) abgelesen werden kann, ist dieses, dass die von den $\kappa + 1$ Variablen $u, v_1, \dots, v_\kappa$ abhängige Grösse x durch eine algebraische Function von u allein, nämlich $x^{(u)}$, und die in den Coefficienten des Ausdruckes φ auftretenden algebraischen Functionen der Grössen v , welche alle durch eine einzige algebraische Function dieser Grössen ausgedrückt werden können, also auch durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der Grössen v allein im Bereich $\mathcal{R}_0$ rational ausdrückbar ist. Damit ist die Umkehrung des in § 1 erhaltenen Resultats erwiesen und es ergibt sich der folgende

Lehrsatz II.

Eine algebraische Function der Variablen $u, v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ ist dann und nur dann rational ausdrückbar durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der Grössen v allein, wenn bei Betrachtung von x als algebraischer Function von u allein und dementsprechender Adjunction aller algebraischer Functionen der Grössen v die Discriminante der gegebenen, die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Theiler besitzt.

Hieraus kann nun leicht ein Kriterium dafür* abgeleitet werden, ob eine algebraische Function von mehreren Variablen rational durch algebraische Functionen von je einer dieser Variablen ausgedrückt werden kann oder nicht.

Die algebraische Function x der h Variablen $u_1, u_2, \dots, u_h$ sei für jeden Werth von v rational durch eine algebraische Function von u , allein und eine algebraische Function der übrigen $h - 1$ Grössen u rational ausdrückbar, sodass man setzen kann

$$\begin{aligned} x &= \vartheta_1(\sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h), \tau_1(u_1)) \\ (19) \quad &= \vartheta_2(\sigma_2(u_1, u_3, \dots, u_h), \tau_2(u_2)) = \dots \\ &= \vartheta_h(\sigma_h(u_1, u_2, \dots, u_{h-1}), \tau_h(u_h)) \end{aligned}$$

*) In der Riemann'schen Terminologie einer und derselben „Classe“.

wobei unter $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ rationale Ausdrücke, deren Coefficienten von den Grössen u nicht irrational abhängig sind, und unter σ, τ algebraische Functionen der beigelegten Argumente zu verstehen sind. Dann kann man annehmen, dass die Ordnung der algebraischen Function σ_1 dieselbe ist wie die Ordnung der Grösse x nach Adjunction aller algebraischen Functionen von u_1 , d. h. gleich dem Grade der nach dieser Adjunction irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse x genügt. Denn sind die Wurzeln dieser Gleichung $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, so bestände andernfalls das Gleichungssystem

$$(20) \quad \begin{aligned} x_0 &= \vartheta_1(\sigma_{1v}, \tau_1(u_1)), \\ x_1 &= \vartheta_1(\sigma_{1, n_1+v}, \tau_1(u_1)), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \vartheta_1(\sigma_{1, (n-1)n_1+v}, \tau_1(u_1)) \end{aligned} \quad \begin{aligned} v &= 1, 2, \dots, n_1 \\ r &= n n_1, \end{aligned}$$

wo unter $\sigma_{11} = \sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h)$, $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \dots, \sigma_{1r}$ die sämtlichen r conjugirten Werthe der algebraischen Function σ_1 zu verstehen sind. Diese conjugirten Werthe sind dieselben, gleichviel ob man den Rationalitätsbereich aller Constanten oder denjenigen aller algebraischen Functionen von u_1 zu Grunde legt; denn die nach Adjunction aller Constanten irreducibele Gleichung, welcher die Grösse $\sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h)$ genügt, kann offenbar durch Adjunction algebraischer Functionen von u_1 nicht reducibel werden. Aus den Gleichungen (20) und der Verschiedenheit der Werthe x_v folgt, dass der mit der Unbestimmten α gebildete Ausdruck

$$s_\lambda = \prod_{v=1}^{n_1} \{ \alpha - \vartheta_1(\sigma_{1, \lambda n_1 + v}, \tau_1(u_1)) \} \quad \lambda = 0, 1, \dots, n-1$$

keinem formell von ihm verschiedenen Ausdrucke, welcher aus ihm durch Umsetzung der r Grössen $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1r}$ entsteht, dem Werthe nach gleich sein kann; durch s_λ sind also alle symmetrischen Functionen der Grössen

$$(21) \quad \sigma_{1, \lambda n_1 + 1}, \sigma_{1, \lambda n_1 + 2}, \dots, \sigma_{1, (\lambda+1)n_1}$$

rational nach dem bekannten Theorem von Lagrange ausdrückbar; da nun aber offenbar die Gleichung

$$s_2 = (\alpha - x_2)^{n_1}$$

besteht, so folgt, wenn man

$$S_\lambda = \prod_{v=1}^{n_1} (\alpha - \sigma_{1, \lambda n_1 + v})$$

setzt, dass die symmetrischen Functionen der Grössen $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$

nach Adjunction algebraischer Functionen von u_1 rational sind; da nun aber die Grössen S_1 von u_1 unabhängig sind, so sind die genannten symmetrischen Functionen nach alleiniger Adjunction von Constanten rational, d. h. sie sind rationale Functionen von $u_2, u_3, \dots, u_h$. Weil ferner die Grösse S_1 keiner formell von ihr verschiedenen Grösse, welche durch Umsetzung der Grössen $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \tau_{1r}$ aus ihr entsteht, dem Werthe nach gleich ist, so kann durch S_1 jede symmetrische Function der Grössen (21), also auch die Grösse

$$x_2 = \frac{1}{n_1} \sum_{r=1}^{n_1} \vartheta_1(\sigma_{1,2n_r+1}, \tau_1(u_1))$$

rational ausdrückbar, speciell kann man setzen

$$x_0 = x = \Theta(S_0, \tau_1(u_1)),$$

wenn unter Θ ein rationaler Ausdruck derselben Art wie ϑ_1 verstanden wird. Da nun S_0 eine n -werthige algebraische Function von $u_2, u_3, \dots, u_h$ ist, so ist bewiesen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, in der Gleichung

$$x = \vartheta_1(\sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h), \tau_1(u_1))$$

sei σ_1 eine n -werthige algebraische Function, wenn die Grösse x bei Adjunction aller algebraischen Functionen von u_1 einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades genügt. Dann sind x und σ_1 algebraische Grössen derselben Ordnung, also folgt aus der rationalen Ausdrückbarkeit von x durch σ_1 auch umgekehrt, dass man setzen kann

$$\sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h) = \vartheta_0(x, \tau_0(u_1), u_1, u_2, \dots, u_h),$$

wobei ϑ_0 einen rationalen Ausdruck mit constanten Coefficienten, und τ_0 eine algebraische Function bedeutet. Hieraus folgt, wenn für $u_1 = c_1$ die Function x in x' übergeht,

$$(22) \quad \sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h) = \vartheta_0(x', \tau_0(c_1), c_1, u_2, \dots, u_h).$$

Nun ergeben die Gleichungen (19):

$$\begin{aligned} x' &= \vartheta_2'(\sigma_2(c_1, u_3, \dots, u_h), \tau_2(u_2)) \\ &= \vartheta_3'(\sigma_3(c_1, u_2, u_4, \dots, u_h), \tau_3(u_3)) \\ &\vdots \\ &= \vartheta_h'(\sigma_h(c_1, u_2, \dots, u_{h-1}), \tau_h(u_h)) \end{aligned}$$

wenn der rationale Ausdruck ϑ für $u_1 = c_1$ in ϑ' übergeht; also lehrt die Gleichung (22), dass die Function $\sigma_1(u_2, u_3, \dots, u_h)$, wenn unter μ ein beliebiger der Werthe 2, 3, $\dots$, h verstanden wird, rational ausgedrückt werden kann durch eine algebraische Function von u_μ allein, und eine algebraische Function der Grössen $u_2, u_3, \dots, u_h$ mit Ausschluss von u_μ . Demnach besteht für die Function σ_1 ein den Glei-

chungen (19) ganz analoges Gleichungssystem. In diesen neuen Gleichungen treten algebraische Functionen von $h - 2$ Variabeln auf, für welche dieselben Schlüsse wie für σ_1 entwickelt werden können, und durch Fortsetzung dieses Beweisverfahrens kommt man schliesslich zu dem Resultat,

dass eine den Gleichungen (19) genügende algebraische Function der Grössen $u_1, u_2, \dots, u_h$ aus algebraischen Functionen von je einer der h Grössen u rational zusammengesetzt werden kann.

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit dem Lehrsatz II der folgende

Lehrsatz III.

Eine algebraische Function x der Variabeln $u_1, u_2, \dots, u_h$ ist dann und nur dann durch h algebraische Functionen von je einer der h Variabeln u rational ausdrückbar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Wählt man den Index μ in der Reihe der Zahlen $1, 2, \dots, h$ beliebig, und betrachtet x als algebraische Function von u_μ allein, indem man alle algebraischen Functionen von $u_1, u_2, \dots, u_{\mu-1}, u_{\mu+1}, \dots, u_h$ adjungirt, so muss die Discriminante der ursprünglich gegebenen die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen $u_1, u_2, \dots, u_{\mu-1}, u_{\mu+1}, \dots, u_h$ unabhängigen wesentlichen Theiler besitzen.

Ein ganz ähnlich lautendes Criterium für die Ausdrückbarkeit einer algebraischen Function von h Variabeln durch algebraische Functionen von mehr als einer, aber weniger als h Variabeln kann nach einer der hier gebrauchten ähnlichen Beweismethode abgeleitet werden; doch wird die Darstellung dieses allgemeinen Criteriums besser mit einer genaueren Untersuchung der Verzweigung der algebraischen Functionen von mehreren Variabeln verbunden, und mag deshalb einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Breslau, November 1886.