**10. Das Verhalten
der elektromagnetischen Feldgleichungen
gegenüber linearen Transformationen
der Raumzeitkoordinaten;
von Philipp Frank.**

Eine der wichtigsten mathematisch-physikalischen Tatsachen der modernen Physik ist die Invarianz der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes gegenüber der Gruppe der Lorentztransformationen; den Beweis haben H. A. Lorentz für die „spezielle“ Lorentztransformation, H. Minkowski für die allgemeine geliefert. Es erhebt sich nun auch umgekehrt die Frage nach den allgemeinsten Transformationen der Raumzeitkoordinaten, bei denen die Feldgleichungen invariant bleiben. Diese Frage hat Bateman¹⁾ dahin beantwortet, daß dies bei allen Transformationen der Fall ist, welche die quadratische Differentialgleichung

$$dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$$

in sich überführen. Unter diesen sind wieder die allgemeinen Lorentztransformationen die einzigen linearen. Bateman bedient sich zum Beweise dieses Satzes eines Umweges über die Integralinvarianten der elektromagnetischen Feldgleichungen.

Es dürfte daher nicht überflüssig sein, einen Beweis vorzubringen, der nicht nur ganz direkt zeigt, daß die allgemeinen Lorentztransformationen die einzigen linearen Transformationen der Raumzeitkoordinaten sind, welche die Feldgleichungen invariant lassen, sondern der auch die eigentliche Struktur des Gleichungssystems hervortreten und den Invarianzsatz anschaulich und nahezu selbstverständlich erscheinen läßt.

Wir bedienen uns zum Beweise der von Sommerfeld²⁾ eingeführten vierdimensionalen Vektorenrechnung. Zwar ließe

1) H. Bateman, Proc. of the London Math. Soc., Serie 2, 8. p. 223 ff. 1910.

2) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I, §§ 1—4, Ann. d. Phys. 32. p. 749 ff.; II, §§ 5—9, 33. p. 649 ff. 1910.

sich die Rechnung durch Heranziehung und konsequente Verwendung der Grassmannschen Ausdehnungslehre, die es gestatten würde, Sommerfelds Anschaulichkeit mit Minkowskis mathematischer Eleganz zu verbinden, noch wesentlich kürzer und durchsichtiger gestalten; doch will ich den physikalischen Leser, dem in der letzten Zeit in dieser Hinsicht ohnehin schon sehr viel zugemutet wurde, mit einer fremdartigen Symbolik verschonen und mich im Interesse der allgemeinen Verständlichkeit möglichst an die Sommerfeldsche Terminologie und Begriffsbildung halten.

Im § 1 stelle ich die aus der vierdimensionalen Vektorenrechnung verwendeten Begriffe und Sätze zusammen; im § 2 wird die Transformation der Feldgleichungen durchgeführt und die transformierten Gleichungen auf die einfachste Gestalt gebracht; im § 3 endlich wird gezeigt, daß die transformierten Gleichungen nur dann dieselbe Gestalt wie die ursprünglichen haben können, wenn die verwendete lineare Transformation eine allgemeine Lorentztransformation war.

§ 1. Die vierdimensionale Vektorenrechnung.

Im folgenden sollen, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, durch Buchstaben ohne Index Sechservektoren¹⁾, mit einem Index Vierervektoren¹⁾, mit zwei Indizes Skalare bezeichnet werden. Wir gehen von einem rechtwinkligen Koordinatensystem des vierdimensionalen Raumes aus. Die vier Achsen desselben mögen die x_1 -, x_2 -, x_3 -, x_4 -Achse heißen. Mit e_k bezeichnen wir einen Einheitsvektor in der Richtung der x_k -Achse. Es ist also etwa der Vierervektor b_1 mit den Komponenten b_{11} , b_{12} , b_{13} , b_{14} durch die Gleichung:

$$(1) \quad b_1 = \sum_k b_{1k} e_k$$

gegeben; die Summation ist hier wie in allen vorkommenden Summenzeichen von 1—4 zu erstrecken. Wenn wir noch einen zweiten Vierervektor gegeben haben:

$$(2) \quad c_1 = \sum_k c_{1k} e_k,$$

1) A. Sommerfeld, l. c., § 1.

so ist das skalare Produkt¹⁾ der beiden folgendermaßen definiert:

$$(3) \quad (b_1 c_1) = \sum_k b_{1k} c_{1k}.$$

Das vektorielle Produkt²⁾ zweier Vierervektoren, das ein spezieller Sechservektor wird, wollen wir durch Einschließen der Faktoren in eckige Klammern bezeichnen.

So bezeichnet z. B. $[e_1 e_2]$ ein Flächenstück vom Inhalt 1 in der $x_1 x_2$ -Ebene. Wenn wir einen beliebigen Sechservektor f vor uns haben, dessen Komponente nach der $x_i x_k$ -Ebene den Betrag f_{ik} hat, so können wir ihn als Summe seiner Projektionen auf die sechs Koordinatenebenen folgendermaßen darstellen:

$$f = f_{12} [e_1 e_2] + f_{23} [e_2 e_3] + f_{34} [e_3 e_4] + f_{14} [e_1 e_4] \\ + f_{13} [e_1 e_3] + f_{24} [e_2 e_4].$$

Wir wollen diese Gleichung abgekürzt schreiben:

$$(4) \quad f = \sum_{i,k} f_{ik} [e_i e_k].$$

Überhaupt wollen wir bei Summation über Glieder mit zwei Indizes unter $\sum_{i,k} c_{ik}$ immer die Summe aus sechs Gliedern verstehen, die über alle Kombinationen ohne Wiederholung der Indizes erstreckt wird, unter $\sum_i \sum_k c_{ik}$ hingegen die Summe über alle 16 Glieder die durch Variation mit Wiederholung der Indizes entstehen.

Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir dann das vektorielle Produkt der Vierervektoren

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = \sum_r a_{ir} e_r \\ \text{und} \\ a_k = \sum_h a_{kh} e_h \end{array} \right.$$

folgendermaßen³⁾ schreiben:

$$(6) \quad [a_i a_k] = \sum_{r,h} (a_{ir} a_{kh} - a_{ih} a_{kr}) [e_r e_h],$$

1) A. Sommerfeld, l. c., § 3 A.

2) A. Sommerfeld, l. c., § 3 B.

3) A. Sommerfeld, l. c.

oder wegen

$$(7) \quad [e_r e_h] = -[e_h e_r],$$

auch:

$$(8) \quad [a_i a_k] = \sum_r \sum_h a_{ir} a_{kh} [e_r e_h].$$

Wenn wir ferner mit f_k die Komponente von f nach der x_k -Achse verstehen¹⁾, so können wir das Produkt²⁾ des Sechservektors f mit dem Vierervektor a_i (Gleichung (5)) folgendermaßen schreiben:

$$(9) \quad (a_i f) = \sum_r e_r (a_i f_r).$$

Dabei ist:

$$(9a) \quad f_r = \sum_h e_h f_{rh}, \quad (f_{rh} = -f_{hr}).$$

Dasselbe ist wieder ein Vierervektor.

Unter ∇ verstehen wir den symbolischen Vierervektor

$$(10) \quad \nabla = \sum_k e_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Dabei sind die x_k als Koordinaten natürlich Skalare. ∇ entspricht dem Minkowskischen lor , dem Sommerfeldschen³⁾ Div, Rot und Grad.

Mit f^* bezeichnen wir wie Sommerfeld⁴⁾ den zu f „dualen“ Sechservektor, d. h.

$$(11) \quad f^* = \sum_{i,k} f_{ik} [e_i e_k],$$

wo (ik) die beiden Indizes bedeuten, die außer i und k noch unter den Zahlen von 1—4 vorkommen.⁵⁾ Wenn f ein spezieller Sechservektor ist, so steht das von ihm dargestellte Flächenstück normal auf dem durch f^* dargestellten.

§ 2. Die Transformation der Feldgleichungen.

Wir gehen von den Maxwell'schen Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge im leeren Raum aus. Sie sind noch etwas einfacher zu behandeln als die Lorentz'schen

1) A. Sommerfeld, l. c., § 1. p. 758.

2) A. Sommerfeld, l. c., § 3 B. (Formel (11)).

3) A. Sommerfeld, l. c., II, § 5.

4) A. Sommerfeld, l. c., § 1, p. 757.

5) A. Sommerfeld, l. c. p. 756 (Formel (3d)).

Gleichungen der Elektronentheorie und zeigen doch alles wesentliche, worauf es beim Transformationsproblem ankommt. Sie bestehen bekanntlich aus zwei Quadrupeln:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathfrak{E} = 0 \end{cases}$$

und

$$(13) \quad \begin{cases} \text{curl } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathfrak{H} = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ wie gewöhnlich die elektrische bzw. magnetische Feldstärke, c die Lichtgeschwindigkeit.

Wir setzen nun mit Minkowski¹⁾

$$(14) \quad \begin{cases} x = x_1, & y = x_2, & z = x_3, & ict = x_4, \\ \mathfrak{E}_x = f_{23}, & \mathfrak{E}_y = f_{31}, & \mathfrak{E}_z = f_{12}, \\ -i\mathfrak{E}_x = f_{14}, & -i\mathfrak{E}_y = f_{24}, & -i\mathfrak{E}_z = f_{34}. \end{cases}$$

Dabei sei

$$(15) \quad f_{ik} = -f_{ki}.$$

Dann schreiben sich die Feldgleichungen (12) mit Benutzung des in Gleichung (10) definierten Symbols ∇ einfach:

$$(16) \quad \nabla f = 0, \quad ^2)$$

wo f der durch Gleichung (4) definierte Sechservektor ist. Das Quadrupel (13) aber schreibt sich:

$$(17) \quad \nabla f^* = 0, \quad ^3)$$

wo f^* den zu f dualen Sechservektor (11) bedeutet.

Wir wollen nun auf die Feldgleichungen (16) und (17) die folgende allgemeine linear homogene Transformation ausüben:

$$(18) \quad \begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4, \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4, \\ x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4, \\ x_4' = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4. \end{cases}$$

1) H. Minkowski, Göttinger Nachrichten 1908, § 2; ebenso bei A. Sommerfeld, l. c., § 1, p. 754, Gleichung (2).

2) H. Minkowski, l. c., § 12, Gleichung (A); A. Sommerfeld, l. c. II, § 5, Gleichung (18).

3) H. Minkowski, l. c., Gleichung (B); A. Sommerfeld, l. c. p. 656, Gleichung (18*).

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems wollen wir auf zwei Arten zu Vierervektoren zusammenfassen. Wir nennen den aus den Koeffizienten der k^{ten} Horizontalreihe gebildeten Vektor a_k :

$$(19) \quad a_k = \sum_i a_{ki} e_i, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

hingegen:

$$(20) \quad \bar{a}_k = \sum_i a_{ik} e_i, \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Wir führen ferner das Symbol ∇' durch die Gleichung ein:

$$(21) \quad \nabla' = \sum_k e_k \frac{\partial}{\partial x_k'}.$$

Wenn wir nun darangehen, die Feldgleichungen (16) und (17) mit Hilfe der Transformation (18) umzuformen, so bemerken wir zunächst, daß die Koordinaten in ihnen nur in der Zusammenfassung ∇ vorkommen. Wir wollen daher zunächst ∇ durch ∇' ausdrücken. Das geschieht durch die Beziehung:

$$(22) \quad \nabla = \sum_k e_k (\bar{a}_k \nabla').$$

Die Gleichung (16) schreibt sich daher:

$$(23) \quad \sum_k e_k ((\bar{a}_k \nabla') f) = 0.$$

Diese Beziehung kann, da $(\bar{a}_k \nabla')$ ein Skalar ist, auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(24) \quad \sum_k (\bar{a}_k \nabla') (e_k f) = 0.$$

Wir setzen nun für $\bar{a}_k$ seinen durch Gleichung (20) gegebenen Wert ein und erhalten:

$$\sum_k \sum_i (a_{ik} e_i \nabla') (e_k f) = 0,$$

oder umgeordnet:

$$\sum_i (e_i \nabla') \sum_k (a_{ik} e_k f) = 0,$$

oder nach Gleichung (19) und (3)

$$(25) \quad \sum_i (e_i \nabla') (a_i f) = 0.$$

Aus dieser Vektorgleichung wollen wir nun vier skalare Gleichungen bilden, indem wir sie der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, a_4 multiplizieren, wir erhalten dann:

$$\sum_i (e_i \nabla') (a_k (a_i f)) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

oder auch

$$(26) \quad \nabla' \sum_i e_i (a_k (a_i f)) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Wir führen nun einen neuen Sechservektor f' ein, dessen Komponente nach der x_k -Achse

$$(27) \quad f'_k = \sum_i e_i (a_k (a_i f))$$

beträgt.

Die Gleichungen (26) schreiben sich dann:

$$(28) \quad \nabla' f'_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Diese vier Gleichungen können wir wieder in eine Vektorgleichung zusammenfassen, indem wir die k^{te} mit e_k multiplizieren und alle vier addieren. Wir erhalten dann unter Berücksichtigung der Formel (9) einfach:

$$(29) \quad \nabla' f' = 0,$$

also eine Gleichung von genau derselben Form wie (16). Dabei ist:

$$(30) \quad f' = \sum_{i,k} (a_k (a_i f)) [e_i e_k].$$

Nun ist aber nach Gleichungen (9), (9a), (19) und (3)

$$(31) \quad (a_k (a_i f)) = \sum_r \sum_h a_{kr} a_{ih} f_{rh}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (30) ein, so erhalten wir als Koeffizienten von f_{rh} den Ausdruck:

$$\sum_{i,k} a_{kr} a_{ih} [e_i e_k],$$

als Koeffizient von f_{hr} den Ausdruck:

$$\sum_{i,k} a_{kh} a_{ir} [e_i e_k].$$

Wenn wir nun nach Gleichung (15) $f_{hr} = -f_{rh}$ setzen, erhält f_{rh} , wie aus Gleichung (6) ersichtlich ist, gerade den Koeffizienten $[\bar{a}_r, \bar{a}_h]$. Es ist also

$$(32) \quad f' = \sum_{i,k} f_{ik} [\bar{a}_i, \bar{a}_k].$$

Wir können das bisher Bewiesene in den Satz¹⁾ zusammenfassen:

Die Feldgleichung $\nabla f = 0$, wo

$$f = \sum_{i,k} f_{ik} [e_i e_k],$$

geht vermöge der durch die vier Vektoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ in den Vertikalspalten des Koeffizientenschemas gegebene lineare Transformation der Koordinaten, in die Gleichung derselben Gestalt

$$\nabla' f' = 0$$

über, wobei f' sich nur dadurch von f unterscheidet, daß an Stelle der Einheitsvektoren e_k die durch die lineare Transformation gegebenen Vektoren $\bar{a}_k$ treten.

Genau dasselbe gilt natürlich von der Feldgleichung (17).

Sie geht über in

$$(33) \quad \nabla' f^{*'} = 0,$$

wobei

$$(34) \quad f^{*'} = \sum_{i,k} f_{(ik)} [\bar{a}_i \bar{a}_k].$$

§ 3. Invarianz der Feldgleichungen.

Wir haben nun gesehen, daß jede der Feldgleichungen $\nabla f = 0$ und $\nabla f^* = 0$ für sich betrachtet bei jeder beliebigen linearen Transformation der Koordinaten ihre Gestalt beibehält. Das System der beiden Feldgleichungsquadrupel tut dies aber im allgemeinen nicht. Denn f^* ist der zu f duale Sechservektor. Wenn das System der transformierten Gleichungen dieselbe Gestalt haben soll, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß auch $f^{*'}$ der zu f' duale Vektor ist, d. h.

$$\sum_{i,k} f_{(ik)} [\bar{a}_i \bar{a}_k]$$

muß die „Ergänzung“ von

$$\sum_{i,k} f_{ik} [\bar{a}_i \bar{a}_k]$$

sein.

1) H. Minkowski, l. c., § 5, Gleichung (23) und (24) definiert seinen Raumzeitvektor II. Art durch die Forderung, daß er bei einer Lorentztransformation sich transformieren soll wie unser f in f' . Seine Bemerkung (l. c., § 11), daß nach der Lorentztransformation f durch $A^{-1} f A$ zu ersetzen, ist ein Spezialfall unserer Ersetzung von f durch f' . Doch findet sich bei Minkowski nicht die beliebige lineare Transformation; er geht von vornherein von der Lorentztransformation aus.

Dazu ist nun wieder bei beliebigem f notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{aligned} [\bar{a}_1 \bar{a}_2] & \text{ dual zu } [\bar{a}_3 \bar{a}_4], \\ [\bar{a}_1 \bar{a}_3] & \text{ „ „ } [\bar{a}_4 \bar{a}_2], \\ [\bar{a}_1 \bar{a}_4] & \text{ „ „ } [\bar{a}_2 \bar{a}_3] \end{aligned}$$

ist, d. h. geometrisch (nach dem im § 1 gesagten), daß das durch zwei beliebige der Vektoren $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ bestimmte Ebenenstück normal auf dem durch die beiden übrigen bestimmten steht und alle diese Ebenenstücke untereinander flächengleich sind. Das wird natürlich bei willkürlich gewählten Vektoren $\bar{a}_k$, also bei willkürlich gewählter linearer Transformation nicht der Fall sein.

Damit die genannten Bedingungen erfüllt sind, müssen vielmehr, wie geometrisch einleuchtend ist, die vier Vektoren wechselseitig aufeinander normal stehen, also die Bedingungen:

$$(35) \quad (\bar{a}_i \bar{a}_k) = 0, \quad i \neq k$$

und zur Herstellung der Flächengleichheit die Beziehungen:

$$(36) \quad (\bar{a}_k \bar{a}_k) = (\bar{a}_i \bar{a}_i) = a_0^2$$

erfüllen.

Wenn aber (35) und (36) erfüllt sind, folgt aus den Transformationsgleichungen (18)

$$(37) \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = a_0^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),$$

d. h. wir haben eine allgemeine Lorentztransformation¹⁾ vor uns. Diese sind also tatsächlich die einzigen linearen Transformationen, bei denen das System der Feldgleichungen invariant bleibt.

Der in diesem Paragraph geführte Invarianzbeweis läßt sich mit wenigen Worten darstellen und anschaulich machen; schleppend bleibt nur noch die Begründung der Ersetzung von f durch f' und f^* durch f^{**} ; hier müßte eben die Ausdehnungslehre einsetzen, mit Hilfe welcher sich auch dieser Satz des § 2 elegant begründen ließe.

Wien, 14. Mai 1911.

1) H. Minkowski, l. c., § 5.

(Eingegangen 16. Mai 1911.)