**5. Die ponderomotorischen Drehwirkungen
der Lichtwelle und das Prinzip von Wirkung
und Gegenwirkung;
von K. Schaposchnikow.**

In dem vorliegenden Artikel bemühe ich mich zu zeigen, daß die Abrahamsche Theorie der ponderomotorischen Wirkungen im elektromagnetischen Felde¹⁾ eine Tatsache nicht erklären kann. Der von mir betrachtete Fall scheint mir darum besonders wichtig, weil er die Frage über das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung der klassischen Dynamik einigermaßen berührt.

A. Sadowsky²⁾ folgerte aus der Maxwellschen Theorie, daß die Kristallplatten in der Lichtwelle ponderomotorische Drehwirkungen erfahren müssen. Als Beispiel fassen wir ins Auge die Kristallplatte von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, auf deren Oberfläche normal eine ebene planpolarisierte Welle fällt. Diese Platte wandelt bekanntlich planpolarisierte Strahlen in elliptisch polarisierte um. Das entstandene Drehmoment bestrebt nun die Platte in Bewegung zu setzen, die entgegengesetzt der Drehung der elektromagnetischen Vektoren in den elliptisch polarisierten Strahlen gerichtet ist. Auf dem elektronentheoretischen Wege kann diese Wirkung folgendermaßen abgeleitet werden: Es möge $\mathfrak{E} = (X, Y, Z)$ der Vektor der elektrischen Kraft in einem Punkte des Feldes sein und $\mathfrak{P} = (p, r, s)$ die in diesem Punkte unter dem Einfluß der Kraft entstandene Polarisation des Dielektrikums. Wenn diese zwei Vektoren nicht parallel gegeneinander sind, so entsteht ein Drehmoment, das auf das Dielektrikum wirkt, und dessen Größe auf Volumeneinheit berechnet, lautet:

$$m = [\mathfrak{P}, \mathfrak{E}].$$

1) M. Abraham, Theorie der Strahlung p. 33. 1908, Leipzig u. Berlin.

2) A. Sadowsky, Ponderomotorische Wirkungen der Lichtwelle (Dissert.), 1899, Dorpat.

Oder für die Komponenten geschrieben:

$$m_z = r \cdot Z - s \cdot Y, \quad m_y = s \cdot X - p \cdot Z, \quad m_x = p \cdot Y - r \cdot X.$$

Wie bekannt, ist nun ein folgender Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ in Kristallen vorhanden:

$$4\pi p = (\epsilon_1 - 1) \cdot X, \quad 4\pi r = (\epsilon_2 - 1) \cdot Y, \quad 4\pi s = (\epsilon_3 - 1) \cdot Z.$$

Daher zum Beispiel:

$$(1) \quad m_z = \frac{X \cdot Y}{4\pi} (\epsilon_1 - \epsilon_2).$$

A. Sadowsky hat folgenden Fall in Betracht gezogen: Eine durchsichtige, unbegrenzte Kristallplatte, die parallel ihren Symmetrieachsen abgeschliffen ist und normal zu deren Oberfläche, die ebene unbegrenzte Lichtwelle fällt. Wenn die Koordinatenachsen xy parallel den Symmetrieachsen der Kristallplatte gerichtet sind, also z normal zur Oberfläche, so kommt nur die z -Komponente des ponderomotorischen Drehmomentes in Betracht, nämlich die Größe (1). Für das Innere des Kristalls lauten die Gleichungen des Lichtstrahles:

$$X = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda_1} - \delta \right), \quad Y = B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda_2} - \delta \right),$$

wo A und B die Amplituden, λ_1 und λ_2 die zwei Wellenlängen nach den Symmetrieachsen, δ Phasendifferenz, T die Periode der Schwingung ist. Diese Größen in der Gleichung (1) eingesetzt und das mittlere Drehmoment pro Periode gerechnet, d. h.

$$m_z = \frac{1}{T} \int_0^T m_z dt,$$

ergibt sich:

$$\overline{m}_z = \frac{A B}{4\pi} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\pi \left(\frac{z}{\lambda_1} - \frac{z}{\lambda_2} \right).$$

$\overline{m}_z$ ist das mittlere Drehmoment in der Volumeneinheit. Es möge die Kristallplatte die Dicke h haben. Denken wir uns auf der (xy) Ebene der Platte ein Quadrat von 1 qcm Fläche ausgeschnitten, dessen Seiten parallel den xy laufen. Durch die Seiten dieses Quadrates sind vier Ebenen parallel der z -Achse durchgeführt. Aus der Kristallplatte ist also ein Parallelepipedon von 1 qcm Fläche und h cm Höhe aus-

geschnitten. Für das mittlere Drehmoment in diesem Parallelepipedon haben wir nach A. Sadowsky:

$$M = \int_0^h \text{III}_z dz = \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \frac{AB}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\pi \left(\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} \right).$$

Daraus für die Kristallplatte von $1/4$ Wellenlänge ($h/\lambda_1 - h/\lambda_2 = 1/4$):

$$M = \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \frac{AB}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Wenn man darin die Maxwellschen Beziehungen

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_2} = n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$$

einführt, ergibt sich schließlich:

$$(2) \quad M = \frac{AB}{(4\pi)^2} \cdot (n_1 + n_2) \cdot \lambda.$$

M ist die Größe des mittleren Drehmomentes in dem Parallelepipedon, die auch als pro Flächeneinheit berechnet, aufgefaßt werden kann.

Die Frage über die Beziehung zwischen der Sadowskyschen Arbeit einerseits und der Abrahamschen Theorie andererseits hat schon ihre kleine Vorgeschichte. Zuerst hat J. H. Poynting¹⁾ eine Vermutung ausgesprochen, ohne einen strengen Beweis dafür zu geben, daß in den zirkularpolarisierten Strahlen, die die Kristallplatte verlassen, ein elektromagnetisches Drehmoment ausgestrahlt werden muß. In bezug auf diese Behauptung von Poynting hat P. Ehrenfest²⁾ darauf hingewiesen, daß, wenn man die Größe dieses elektromagnetischen Momentes vom Standpunkt der Abrahamschen Theorie ableiten will, bekommt man den Wert Null. Diese von der Theorie geforderte Ausstrahlung kann ganz gut in dem Falle der Druckkräfte des Lichtes aufgefaßt sein, aber für das Sadowskysche Drehmoment bietet sie große Schwierigkeiten.

Nach der Abrahamschen Theorie muß das ponderomotorische Drehmoment $\mathfrak{M}$, das in einem Bereiche des elektromagnetischen Feldes wirksam ist, folgendermaßen ausgedrückt sein:

1) J. H. Poynting, Proc. of the R. S. A. 82. p. 565. 1909.

2) P. Ehrenfest, Journal Russ. Phys. Gesellschaft 48. p. 17. 1911.

$$\mathfrak{N} = \int df [\mathfrak{r}, \mathfrak{T}] - \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Das Integral an der linken Seite ist auf die Begrenzung des Bereiches ausgedehnt, $\mathfrak{r}$ ist ein Radiusvektor, von einem Punkte des Raumes, auf den das Drehmoment bezogen ist, bis zu dem Element df der Fläche gezählt, $\mathfrak{T}$ die Größe der Maxwellschen Spannungen. Die Funktion $\mathfrak{B}$ ist für unsere weiteren Rechnungen belanglos. Die z -Komponente des Vektors $\mathfrak{N}$ hat die Bedeutung:

$$(3) \quad \mathfrak{N}_z = \int (x \mathfrak{T}_y - y \mathfrak{T}_x) df - \frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}.$$

Ich wende diese Formel zu dem Volumen und der Oberfläche des von mir betrachteten Parallelepipedons an und nehme die mittlere Größe:

$$(4) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{N}_z dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int (x \mathfrak{T}_y - y \mathfrak{T}_x) df.$$

Das letzte Glied der rechten Seite der Gleichung (3) verschwindet bei der Mittelwertbildung, weil $\mathfrak{B}_z$ eine periodische Funktion der Zeit mit der Periode T ist. Wenn die Resultate von M. Abraham und A. Sadowsky übereinstimmten, müßte die linke also auch die rechte Seite der Gleichung (4) der Größe (2) gleich sein. Tatsächlich aber kann man beweisen, daß das Integral der rechten Seite der Gleichung (4):

$$(5) \quad \int (x \mathfrak{T}_y - y \mathfrak{T}_x) df$$

über die Grenzfläche unseres Parallelepipedons ausgedehnt, den Wert Null hat. Um das klarzustellen, legen wir den Anfang der Koordinatenachsen in das Zentrum des Parallelepipedons und nehmen ihn als Bezugspunkt für das resultierende Drehmoment an. Die Größe der Maxwellschen Spannungen $\mathfrak{T}$ hat bekanntlich den Wert:

$$(6) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{8\pi} \{ 2 \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}_n + 2 \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}_n - n (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \},$$

wobei $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft und n die äußere Normale im betreffenden Punkte der Oberfläche ist. Bezeichnet man die Flächen des Parallelepipedons, die senk-

recht zu den Achsen x, y, z gelegt sind, beziehungsweise durch $f_{+x}, f_{-x}, f_{+y}, f_{-y}, f_{+z}, f_{-z}$, so ist leicht zu sehen, daß das Integral (5) für die Flächen f_{+z}, f_{-z} den Wert Null hat, weil $da \mathfrak{T}_x = \mathfrak{T}_y = 0$. Zu den Seitenflächen übergehend, führen wir zwei Ebenen z und $z + dz$, die unendlich schmale Streifen in den Seitenflächen ausschneiden. Dann kann das Integral (5) wie folgt geschrieben werden:

$$\int_{z=-a}^{z=+a} \{ \int x \mathfrak{T}_y df_{+x} + \int x \mathfrak{T}_y df_{-x} + \int x \mathfrak{T}_y df_{+y} + \int x \mathfrak{T}_y df_{-y} \\ - \int y \mathfrak{T}_x df_{+x} - \int y \mathfrak{T}_x df_{-x} - \int y \mathfrak{T}_x df_{+y} - \int y \mathfrak{T}_x df_{-y} \} dz$$

wobei die Integrale in den Klammern über die zugehörige Streifen genommen werden müssen und $z = a, z = -a$ die zwei Begrenzungsebenen der Kristallplatte sind. Mit Hilfe der Gleichung (6) ist leicht zu sehen, daß der Ausdruck in den Klammern identisch verschwindet.

Ich bin daher zu dem Schlusse gedrängt, daß die Größe (4), die nach der Theorie von M. Abraham das Drehmoment in der Kristallplatte darstellen muß, den Wert Null hat, was mit dem Resultate von A. Sadowsky nicht vereinbar ist.

Bekanntlich bricht die Theorie von M. Abraham mit dem Prinzipie von der Wirkung und Gegenwirkung der klassischen Dynamik. Wenn das ponderomotorische Drehmoment auf den Kristall wirkt, so ist nach Abraham keine Gegenwirkung vorhanden. In der Tat, für die Aufrechterhaltung des dritten Prinzips der klassischen Dynamik müssen zwei Körper anwesend sein: auf dem einen macht sich die Wirkung geltend, auf dem anderen die Gegenwirkung. H. Hertz, der den Standpunkt der klassischen Dynamik behalten wollte, nahm als den zweiten Körper den Äther an. Es gibt noch die Möglichkeit, als den zweiten Körper, die in dem Parallelepipeton eingeschlossene elektromagnetische Energie anzunehmen. *Dieser Standpunkt setzt voraus, daß die Kräfte an die Energie angreifen können.* M. Abraham erkennt nun nicht die Kräfte, die auf den Äther oder auf die Energie wirken, an und so kommt er zur Verneinung der Gültigkeit des dritten Prinzips der klassischen Dynamik. *Das Prinzip wird vernichtet, weil nach M. Abraham kein zweiter Körper, auf den die Kraft wirken kann,*

vorhanden ist. Bei der Ableitung der Formel (3) setzt M. Abraham voraus, daß nur das ponderomotorische Drehmoment allein vorhanden ist. Die vorige Berechnung zeigt, daß dann die Sadowskysche Wirkung gleich Null sein muß. Stellt man sich dagegen auf den Standpunkt der klassischen Dynamik, so muß man erwarten, daß die Summe der Drehmomente in dem Parallelepipedon auch gleich Null ist, weil die Wirkung und Gegenwirkung sich gegenseitig aufheben. Aber diese Tatsache widerspricht nicht im mindesten dem Sadowskyschen Resultate.

Für meine weiteren Auseinandersetzungen ist wichtig, daß das Drehmoment in Kristallplatten aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit abgeleitet werden kann. Wenn F das Drehmoment der Volumeneinheit ist, so hat die virtuelle Arbeit desselben folgende Bedeutung:

$$F \cdot \delta \alpha,$$

wo α der Drehwinkel ist. Diese Arbeit vergrößert die Dichte der elektromagnetischen Energie in Kristallplatte w um den Betrag δw . Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit haben wir:

$$(7) \quad F \delta \alpha = \delta w$$

und daraus:

$$(8) \quad F = \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Diese Formel gibt einen Fingerzeig für unsere Berechnungen: Man muß die Energiedichte in solcher Form darstellen, damit der Parameter α explizite vorkommt. Dazu führen wir noch ein zweites Bezugssystem x_1, y_1, z_1 ein, das unbeweglich im Raume ist und dessen z_1 -Achse parallel der z -Achse des ersten mit dem Kristalle beweglichen Systems gerichtet ist. Es möge X und Y die Komponenten des elektrischen Vektors der Lichtwelle im System (x, y, z) sein und X_1, Y_1 die Komponenten im System (x_1, y_1, z_1) . Die Transformationsgleichungen lauten wie folgt:

$$(9) \quad \begin{cases} X_1 = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ Y_1 = X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases}$$

wobei α der Winkel zwischen x und x_1 ist. Bei der Drehung der Kristallplatte um die z -Achse gibt er die Größe dieser

Drehung wieder. Was die Energiedichte betrifft, so drückt sie sich im System (x_1, y_1, z_1) folgendermaßen aus:

$$(10) \quad w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_{11} X_1^2 + \epsilon_{22} Y_1^2 + 2\epsilon_{12} X_1 Y_1) + w_1.$$

Dagegen im System (x, y, z) nimmt sie die kanonische Form an:

$$(11) \quad w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_1 X^2 + \epsilon_2 Y^2) + w_1.$$

In (10) und (11) stellt der in Klammern eingeschlossene Ausdruck die elektrische und w_1 die magnetische Energiedichte dar. Die Größen (9) in (10) eingesetzt und das Entstandene mit dem (11) verglichen, bekommt man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha + \epsilon_{12} \sin 2\alpha &= \epsilon_1, \\ \epsilon_{11} \sin^2 \alpha + \epsilon_{22} \cos^2 \alpha - \epsilon_{12} \sin 2\alpha &= \epsilon_2, \\ -\epsilon_{11} \sin^2 2\alpha + \epsilon_{22} \sin^2 2\alpha + 2\epsilon_{12} \cos 2\alpha &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\alpha}{2}, & \epsilon_{22} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\alpha}{2}, \\ \epsilon_{12} &= \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formeln nimmt die Energiedichte (10) die von mir gewünschte Gestalt an:

$$w = \Phi(X_1, Y_1) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{16\pi} \{X_1^2 \cos 2\alpha - Y_1^2 \cos 2\alpha + 2X_1 Y_1 \sin 2\alpha\} + w_1.$$

Dabei ist Φ eine Funktion, die nur von X_1 und Y_1 abhängt und die für unsere weiteren Rechnungen belanglos ist. Durch die Differentiation dieses Ausdruckes nach α bekomme ich:

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{8\pi} \{-X_1^2 \sin 2\alpha + Y_1^2 \sin 2\alpha + 2X_1 Y_1 \cos 2\alpha\}.$$

Wenn man die X_1 und Y_1 aus den Formeln (9) einsetzt, ergibt sich nach der elementaren Vereinfachung:

$$F = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{4\pi} X Y,$$

d. h. die Größe (1). Aus der Gleichung (7) folgt also die Größe des Drehmomentes, die völlig mit der von F. Sadowsky gefundenen übereinstimmt.

Jetzt stelle ich folgende Betrachtungen an: Bei der Drehung der Kristallplatte um den Winkel $d\alpha$ ist die Arbeit des mittleren ponderomotorischen Drehmomentes gleich:

$$M d\alpha,$$

wo M die Bedeutung (2) hat. Diese Arbeit ist durch die Änderung der Energieströmung durch die Grenzflächen des Parallelepipedons bedingt, d. h. die einfallende elektromagnetische Energie ist größer, und zwar um die geleistete Arbeit größer, als die austretende. Wenn die elektromagnetische Energie außerhalb des Parallelepipedons, die die Arbeit des Drehmomentes bedingt, um dU vermindert ist, so folgt:

$$dU = Md\alpha.$$

Andererseits vergrößert die Arbeit $Md\alpha$ den Energieinhalt des Parallelepipedons gemäß der Gleichung (7). Daher

$$Md\alpha = dE,$$

wo E die mittlere elektromagnetische Energie ist, die sich in dem Parallelepipedon befindet. Aus den zwei vorigen Gleichungen folgt:

$$(12) \quad dU = dE.$$

Jetzt betrachte ich den Fall vom Standpunkt des Poyntingschen Satzes: die Energieströmung dU muß alle Prozesse, die im Inneren des Parallelepipedons entstehen, kompensieren.

Nach der klassischen Dynamik sind nun drei Prozesse im Inneren der Parallelepipedons zu erwarten: 1. die Arbeit des Sadowskyschen Drehmomentes $Md\alpha$, 2. die Vergrößerung der Energie dE , 3. die Arbeit des gegenwirkenden Drehmomentes $-Md\alpha$. Daher:

$$dU = Md\alpha + dE - Md\alpha,$$

was mit der Bedingung (12) völlig übereinstimmt.

Moskau, Oktober 1913.

(Eingegangen 6. November 1913.)