Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen solcher
linearen Substitutionen einer Variablen, deren Coefficienten
Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten.

(Mit einer Figurentafel).

Von

ROBERT FRICKE in Berlin.

In meiner vorigen Arbeit*) habe ich eine gewisse Classe von Substitutionsgruppen auf arithmetischem Wege definirt, die in der complexen Ebene durchgehends einen endlichen Fundamentalbereich hatten. Die betreffenden Substitutionscoefficienten waren rational aus der Quadratwurzel einer ganzen Zahl q aufgebaut; und es war q aus Zweckmässigkeitsgründen als positive Primzahl der Form $(4h + 3)$ angenommen. Das damals zur Definition der Gruppen benutzte Princip lässt sich nun leicht noch um einen Schritt verallgemeinern, und zwar derart, dass die Substitutionscoefficienten der einzelnen Gruppe rational aus zwei verschiedenen Quadratwurzeln $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ aufgebaut sind**). Wie die Substitutionscoefficienten des näheren gestaltet sein sollen, werde ich in einem ersten Theile der vorliegenden Arbeit auseinandersetzen; des leichten Ueberblicks halber wird r als positive oder negative Primzahl der Gestalt $(4h + 1)$ vorausgesetzt. Ueberdem aber werden wir nach dieser Beschränkung nur zu Gruppen ohne parabolische Substitutionen gelangen, die also durch keine Transformation mit der Modulgruppe commensurabel werden können. Im weiteren soll es sich um die Anwendung der in Rede stehenden Gruppen auf die arithmetische Theorie gewisser binärer quadratischer Formen handeln, wie eine solche Anwendung der Modulgruppe auf die ganzzahligen binären quadratischen Formen der überkommenen Zahlentheorie in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen ihre Durchbildung gefunden hat.***)

*) Bd. XXXVIII der Annalen, p. 461.

**) Auf diese Verallgemeinerung bin ich durch eine Bemerkung des Herrn Bianchi aufmerksam geworden, mit dem ich über die gruppentheoretischen Gegenstände des Textes letzthin eine lebhafte Correspondenz hatte.

***) Die letztgemeinte Anwendung ist zu einem ersten Theile in Band I der „Vorlesungen über die Modulfunctionen“, Abschnitt II, Capitel 3 zur Darstellung

I.

Substitutionsgruppen und Fundamentalpolygone.

1.

Einführung der zu betrachtenden Gruppen.

Man verstehe unter a, b, c, d irgend welche ganze Zahlen, unter q und r aber, wie schon einleitend bemerkt, Primzahlen der Form $q = 4h - 1$, $r = 4h + 1$, von denen die erstere positiv sein soll. Man bilde daraufhin alle linear-gebrochenen Substitutionen der Variablen ω , welche wir abgekürzt in der Gestalt:

$$(1) \quad S = \left(\begin{array}{cc} \frac{a + b\sqrt{q}}{2}, & \frac{c\sqrt{r} + d\sqrt{rq}}{2} \\ -\frac{c\sqrt{r} + d\sqrt{rq}}{2}, & \frac{a - b\sqrt{q}}{2} \end{array} \right), \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qr d^2 = 4$$

schreiben, und die also durchgehends die Determinante 1 haben sollen. Zufolge dieser letzten Bedingung werden bei den über q und r gemachten Voraussetzungen die vier Zahlen a, b, c, d entweder durchgehends ungerade oder gerade ausfallen. Hieraus folgt, dass bei Combination zweier Substitutionen S der zunächst in den Coefficienten der neuen Substitution auftretende Nenner 4 sich stets auf 2 oder 1 kürzt: Die Substitutionen S bilden sonach in ihrer Gesamtheit eine Gruppe, die wir als $\Gamma_s^{(q,r)}$ bezeichnen wollen.

Es giebt eine Reihe von Gruppen, in denen $\Gamma_s^{(q,r)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe von endlichem Index ist, und es ist unser nächstes Ziel, bis zur umfassendsten Gruppe dieser Art vorzudringen. Zu dem Ende reihen wir zuvörderst die Substitutionen der Determinante 1:

$$(2) \quad T = \left(\begin{array}{cc} \frac{a + b\sqrt{q}}{2}, & \frac{c\sqrt{r} + d\sqrt{qr}}{2} \\ \frac{c\sqrt{r} - d\sqrt{qr}}{2}, & -\frac{a + b\sqrt{q}}{2} \end{array} \right), \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qr d^2 = -4$$

an, bei denen also wieder a, b, c, d zugleich gerade oder ungerade sind. Ebendeshalb beweist man leicht, dass zwei Substitutionen T combinirt stets ein S liefern, dass aber ST oder auch TS stets eine Substitution T ist. Es folgt: Die Gesamtheit der Substitutionen S, T

gebracht; die tiefer gehenden Ausführungen, welche namentlich auf der Verwendung der Transformationstheorie und insbesondere der Modulargleichungen beruhen, habe ich neuerdings für den zweiten Band der genannten Vorlesungen redigirt [Februar 1891].

bildet eine Gruppe $\Gamma_4^{(q,r)}$, in der $\Gamma_8^{(q,r)}$ ausgezeichnet vom Index zwei enthalten ist.

Es reihen sich die zwei weiteren Arten von Substitutionen der Determinante 1 an:

$$(3) \quad U = \begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \frac{a-b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 2,$$

$$(4) \quad V = \begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \\ \frac{c\sqrt{r}-d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \frac{-a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qrd^2 = -2.$$

Hier werden unter den vier bei der einzelnen Substitution zur Geltung kommenden Zahlen a, b, c, d offenbar immer zwei gerade, die beiden andern ungerade sein. Man muss dies berücksichtigen, um betreffs der vier definirten Arten von Substitutionen folgende allgemeine Regeln zu belegen: Combinirt man ein S mit einer Substitution einer der drei Arten T, U, V , so entspringt eine Substitution der nämlichen Art, und zwar unabhängig von der Reihenfolge der Combination; combinirt man irgend zwei Substitutionen derselben Art, so entspringt stets eine Substitution S ; combinirt man endlich zwei Substitutionen aus zwei verschiedenen der drei Reihen T, U, V , so entspringt eine Substitution der dritten Reihe. Es folgt: Die gesammten Operationen S, T, U, V bilden eine Gruppe $\Gamma_2^{(q,r)}$, in welcher $\Gamma_8^{(q,r)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index vier ist; jene erstere Gruppe reducirt sich bezüglich der letzteren auf eine Vierergruppe.

Ist $r = 1$, so kommen wir hier überall auf die Resultate meiner vorigen Arbeit zurück. Ist $r > 1$, so bemerke man, dass sich die Operation $t(\omega) = \frac{-1}{\omega}$ in der Γ_2 noch nicht findet; gleichwohl ist leicht deutlich, dass bei Transformation der einzelnen Substitution (1) bis (4) vermöge t nichts anderes als Zeichenwechsel der beiden Zahlen b und d eintritt. Γ_2 ist sonach mit t vertauschbar, und eben deshalb wird diese Gruppe durch Zusatz von t zu einer Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ erweitert, in welcher $\Gamma_8^{(q,r)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 8 ist. Diese $\Gamma^{(q,r)}$ umfasst neben den S, T, U, V noch die vier weiteren Arten von Substitutionen der Determinante 1:

$$(5) \quad S', T' = \begin{pmatrix} \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{2}, & \frac{a+b\sqrt{q}}{2} \\ \pm \frac{-a+b\sqrt{q}}{2}, & \pm \frac{c\sqrt{r}-d\sqrt{qr}}{2} \end{pmatrix}, \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qrd^2 = \pm 4,$$

$$(6) \quad U', V' = \begin{pmatrix} \frac{cV\bar{r} + dV\bar{q}r}{V_2}, & \frac{a + bV\bar{q}}{V_2} \\ \pm \frac{-a + bV\bar{q}}{V_2}, & \pm \frac{cV\bar{r} - dV\bar{q}r}{V_2} \end{pmatrix}, \quad a^2 - qb^2 + rc^2 - qrd^2 = \pm 2,$$

wobei sich unter den doppelten Vorzeichen die oberen stets auf S' , U' , die unteren auf T' , V' beziehen. Da eine Operation S , T , U , V durch t stets in eine Operation derselben Art transformirt wird, so muss irgend eine der Substitutionen (5), (6) mit einer ihr gleichartigen Substitution combinirt, stets ein S liefern. Demgemäss wird sich $\Gamma^{(q,r)}$ bezüglich der $\Gamma_s^{(q,r)}$ auf eine endliche G_8 reduciren, die neben der Identität noch sieben Operationen der Periode *zwei* besitzt. Nebenher ziehen wir daraus auf Grund bekannter Sätze den Schluss, dass $\Gamma_s^{(q,r)}$ niemals zum Geschlechte $p = 0$ gehören kann; dagegen giebt es bei $p = 1$ eine Gruppe G_8 der fraglichen Structur.

Ist r eine negative Zahl, so muss man an Stelle von t die Substitution $t'(\omega) = \frac{1}{\omega}$ zur Anwendung bringen und findet alsdann völlig entsprechende Verhältnisse. Es sind für diesen Fall übrigens die zweiten und dritten Coefficienten der Substitutionen durchweg rein imaginäre Zahlen; inzwischen kommt man einfach durch Ausübung der Transformation $s(\omega) = i\omega$ auf Substitutionen mit lauter reellen Coefficienten zurück. Es mag genügen, wenn wir unsere Besprechung allenthalben auf den Fall $r > 0$ einschränken.

Alle bislang betrachteten Gruppen sind der Erweiterung durch die Spiegelung $A(\omega) = -\bar{\omega}$ an der imaginären Axe fähig. Wir gelangen so insbesondere von $\Gamma^{(q,r)}$ aus zu einer erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$, welches die umfassendste Gruppe ist, zu der wir in der bisherigen Weise überhaupt vordringen können. Wenigstens darf man behaupten, dass $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ allgemein nicht mehr eine ausgezeichnete Untergruppe in einer noch umfassenderen Gruppe linearer Substitutionen ist; man wird dies in den weiter unten zu betrachtenden Einzelfällen unmittelbar aus der Gestaltung der Fundamentalbereiche wahrnehmen.

2.

Periodicität der Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$.

Die Periodicität einer Substitution erster Art der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ hängt bekanntermassen einzig von der Summe σ ihres ersten und vierten Coefficienten ab. Ist diese Zahl σ ihrem absoluten Werthe nach grösser als zwei, so liegt eine *hyperbolische* Substitution vor. Es giebt deren in unserer Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ eine grosse Mannigfaltigkeit, deren

nähere Betrachtung wir indessen an dieser Stelle nicht unternehmen können. Die Summe $\sigma = \pm 2$ zeigt eine *parabolische* Substitution an; soll aber eine derartige überhaupt innerhalb $\Gamma^{(q,r)}$ vorkommen, so muss es auch parabolische Substitutionen S geben. Eine solche müsste $a = 2$ haben, während b, c, d der Gleichung $qb^2 - rc^2 + qrd^2 = 0$ genügen. Soll diese Gleichung eine ganzzahlige Lösung haben, so muss b durch r , c aber durch q theilbar sein. Schreiben wir demgemäss $b = b_0 r$, $c = c_0 q$, so kommt:

$$rb_0^2 - qc_0^2 + d^2 = 0;$$

nach bekannten Sätzen ist indes diese Gleichung nur dann ganzzahlig lösbar, wenn zugleich die beiden Bedingungen

$$\left(\frac{q}{r}\right) = +1, \quad \left(\frac{-r}{q}\right) = -\left(\frac{r}{q}\right) = +1$$

bestehen, was man vermöge des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste sogleich als unmöglich beweist. *Hiernach kommen parabolische Substitutionen in der Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ überhaupt nicht vor.*

Für die *elliptischen* Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ bleiben die Werthe $\sigma = \pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}$, ± 1 , 0 übrig; der Fall $\pm\sqrt{2}$ tritt indes nur bei den Substitutionen U , der Fall ± 1 nur bei den S und endlich $\sigma = \pm\sqrt{3}$ allein im Specialfall $q = 3$ bei den T auf. Um mit letzterem Fall zu beginnen, so haben wir also in der $\Gamma^{(3,r)}$ Substitutionen:

$$(1) \quad T_6: a^2 + rc^2 - 3rd^2 = -1, \quad \omega_0 = \frac{a \pm i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{3})},$$

und zwar für jede ganzzahlige Lösung (a, c, d) der neben T_6 geschriebenen Gleichung; die Zahl b ist gleich ± 1 zu nehmen, und ω_0 giebt die beiden Fixpunkte, welche der elliptischen Substitution T_6 in der ω -Ebene zukommen. Für die elliptischen Substitutionen der Periode vier reihen wir sogleich das nachfolgende Schema an:

$$(2) \quad U_4: -qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 1, \quad \omega_0 = \frac{-b\sqrt{q} \pm i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \quad \left(\frac{q}{r}\right) = 1;$$

es ist für sie $a = \pm 1$, und übrigens muss q offenbar quadratischer Rest von r sein, falls Substitutionen U_4 auftreten sollen. Es folgt für die S_3 mit $a = \pm 1$:

$$(3) \quad S_3: -qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 3, \quad \omega_0 = \frac{-b\sqrt{q} \pm i\sqrt{3}}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}.$$

Im Falle $q = 3$ sind die Substitutionen T_6 und S_3 einander eindeutig zugeordnet, indem stets $T_6^2 = S_3$ wird; ist $q > 3$, so hat man als Bedingung für das Auftreten von Substitutionen S_3 :

$$(4) \quad \left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{r}{3}\right), \quad \left(\frac{r}{q}\right) = -\left(\frac{q}{3}\right),$$

so dass insbesondere q und r einander nicht modulo 3 congruent sein können.

Dem Bisherigen gegenüber ist die Anzahl verschiedener Arten elliptischer Substitutionen der Periode zwei eine sehr viel grössere. Es erfordert $\sigma = 0$ offenbar, dass eine der vier Zahlen a, b, c, d mit Null identisch sei, und dabei liefern für $a = 0$ die S und U , für $b = 0$ die T und V u. s. w. elliptische Substitutionen der Periode zwei. Wir werden hier gleich wieder die Resultate einer leichten Zwischenbetrachtung wie bisher übersichtlich zusammenstellen:

$$(5) \quad a = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2: -qb^2 + rc^2 - qrd^2 = +4, \quad \omega_0 = \frac{-b\sqrt{q} \pm 2i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \\ U_2: -qb^2 + rc^2 - qrd^2 = +2, \quad \omega_0 = \frac{-b\sqrt{q} \pm i\sqrt{2}}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \end{array} \right.$$

$$(6) \quad b = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_2: a^2 + rc^2 - qrd^2 = -4, \quad \omega_0 = \frac{a \pm 2i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \\ V_2: a^2 + rc^2 - qrd^2 = -2, \quad \omega_0 = \frac{a \pm i\sqrt{2}}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \end{array} \right.$$

$$(7) \quad c = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2': a^2 - qb^2 - qrd^2 = +4, \quad \omega_0 = \frac{d\sqrt{qr} \pm 2i}{-a + b\sqrt{q}}, \\ U_2': a^2 - qb^2 - qrd^2 = +2, \quad \omega_0 = \frac{d\sqrt{qr} \pm i\sqrt{2}}{-a + b\sqrt{q}}, \end{array} \right.$$

$$(8) \quad d = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_2': a^2 - qb^2 + rc^2 = -4, \quad \omega_0 = \frac{c\sqrt{r} \pm 2i}{a - b\sqrt{q}}, \\ V_2': a^2 - qb^2 + rc^2 = -2, \quad \omega_0 = \frac{c\sqrt{r} \pm i\sqrt{2}}{a - b\sqrt{q}}. \end{array} \right.$$

Elementare Betrachtungen über quadratische Reste lehren, dass Substitutionen S_2 höchstens dann eintreten können, wenn r Rest von q ist, dass sich Substitutionen V_2 jedenfalls nur für $r = 8h + 1$ finden können u. s. w.

Die Operationen zweiter Art der erweiterten $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ sind SA, TA, UA etc. In der einzelnen Substitution dieser Art werden wir stets und nur dann eine *Spiegelung* besitzen, wenn in der mit A combinirten Operation erster Art der erste Coefficient mit dem letzten identisch ist, und solches erfordert wieder, dass eine der Zahlen a, b, c, d verschwindet. Indem wir sonach abgekürzt $SA = \bar{S}, TA = \bar{T}$ etc. setzen, ergiebt sich die folgende Tabelle der Spiegelungen, in welcher jedesmal auch vom zugehörigen Symmetriekreis Vermerk genommen wurde:

$$(9) \quad a = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_2: qb^2 - rc^2 + qrd^2 = 2, \\ (c - d\sqrt{q})\sqrt{r}(x^2 + y^2) - 2b\sqrt{q}x + (c + d\sqrt{q})\sqrt{r} = 0, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad b = 0 \begin{cases} \bar{S}_2, \bar{U}_2: a^2 + rc^2 - qrd^2 = 4, 2, \\ (-c + d\sqrt{q})\sqrt{r}(x^2 + y^2) - 2ax + (c + d\sqrt{q})\sqrt{r} = 0, \end{cases}$$

$$(11) \quad c = 0 \begin{cases} \bar{V}_2': a^2 - qb^2 - qrd^2 = -2, \\ (a - b\sqrt{q})(x^2 + y^2) - 2d\sqrt{qr}x + (a + b\sqrt{q}) = 0, \end{cases}$$

$$(12) \quad d = 0 \begin{cases} \bar{S}_2', \bar{U}_2': a^2 - qb^2 + rc^2 = 4, 2, \\ (-a + b\sqrt{q})(x^2 + y^2) - 2c\sqrt{r}x + (a + b\sqrt{q}) = 0. \end{cases}$$

Natürlich treten keineswegs in jedem Einzelfall alle sechs Arten von Spiegelungen auf; vielmehr bemerkt man leicht: $\bar{V}_2$ tritt höchstens dann auf, wenn $q + r \equiv 4, \pmod{8}$ ist und q modulo r denselben quadratischen Charakter hat wie 2, u. s. w.

3.

Das Fundamentalpolygon der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$.

Wo sich auch im Innern der ω -Halbebene zwei bei der einzelnen $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ auftretende Symmetriekreise kreuzen, immer wird dort der Fixpunkt für eine in der $\Gamma^{(q,r)}$ enthaltene elliptische Substitution gelegen sein; und wenn letztere die Periode ν hat, so wird der Winkel, unter dem sich jene Kreise schneiden, ein Multiplum von $\frac{\pi}{\nu}$ sein. Die Symmetriekreise der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ können sich demnach höchstens zu Paaren unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ oder zu dreien unter den Winkeln $\frac{\pi}{3}$ oder zu vierten unter den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ oder endlich bei $q = 3$ zu sechs unter den Winkeln $\frac{\pi}{6}$ überkreuzen. Man denke sich jetzt die gesammten bei der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ auftretenden Symmetriekreise innerhalb der ω -Halbebene wirklich gezogen, wodurch letztere eine für die $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ charakteristische Eintheilung erfährt, die wir nun zu betrachten haben. Was die Existenz der Symmetriekreise angeht, so erblickt man erstlich in jedem Falle (q, r) eine unendliche Schaar concentrischer Kreise um den Nullpunkt, die den gesammten Lösungen der bei $\bar{S}_2'$ auftretenden Pell'schen Gleichung $a^2 - qb^2 = 4$ zugehören, zweitens eine unendliche Schaar zum Einheitskreise orthogonaler Symmetriekreise, welche bei $\bar{S}_2$ für $c = 0$, $a^2 - qrd^2 = 4$ auftreten. Jetzt wolle man weiter bemerken, dass die Fixpunkte der in $\Gamma^{(q,r)}$ enthaltenen hyperbolischen Substitutionen die reelle ω -Axe überall dicht bedecken, und zwar noch mehr: Wenn wir irgend zwei endliche, wenn auch noch so kleine Linienstücke an zwei willkürlich gewählten Stellen der reellen ω -Axe

markiren, so kann man eine hyperbolische Substitution in der $\Gamma^{(q,r)}$ nachweisen, deren einer Fixpunkt auf dem einen, der andere auf dem anderen jener beiden Linienstücke gelegen ist; (man wird diesen Satz etwas weiter unten unmittelbar als gegründet erkennen). Nimmt man hinzu, welcher Art die Umgestaltung der Halbebene bei Ausübung einer hyperbolischen Substitution ist, so ist evident, dass sich für jeden Punkt der reellen ω -Axe ein denselben umschliessender Kreis von endlichem Radius finden lässt, der als Symmetriekreis der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ angehört. Bei dieser Sachlage zerschneidet die Gesammtheit der Symmetriekreise die positive Halbebene in Kreisbogenpolygone, deren einzelnes überall in endlicher Entfernung von der reellen Axe bleibt, und welches eben deshalb nur eine endliche Anzahl von Seiten aufweist. Diese Polygone entspringen aus einem unter ihnen nach dem Symmetrieprincip und schaaren sich um ihre Ecken in Anzahlen zu vier, sechs, acht oder bei $q = 3$ möglicher Weise auch zu zwölf; einem gewohnten Brauche folgend denken wir uns die Polygone abwechselnd schraffirt und frei.

Die besprochene Eintheilung der Halbebene wird durch jede Substitution der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ in sich transformirt. Infolge dessen definirt ein einzelnes jener Kreisbogenpolygone, als Fundamentalbereich betrachtet, eine Gruppe $\bar{\Gamma}_\nu^{(q,r)}$, welche als ausgezeichnete Untergruppe des endlichen Index ν in $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ enthalten ist. Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist $\nu = 1$, und das Kreisbogenpolygon ist direct der Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$; oder es giebt innerhalb der letzteren Gruppe noch Substitutionen, welche von der Identität verschieden sind und jenes Kreisbogenpolygon in sich transformiren. Solche Substitutionen können nur von der ersten Art sein; eine Operation zweiter Art nämlich, welche ein Kreisbogenpolygon in sich überführt, muss evidenten Weise auf dem Rande desselben zwei Fixpunkte besitzen, und da diese in unserem Falle im Innern der Halbebene liegen würden, so hätten wir es mit einer Spiegelung zu thun, die jedoch sämmtlich schon der $\bar{\Gamma}_\nu^{(q,r)}$ angehören. Weiter ist es geometrisch ohne weiteres ersichtlich, dass unser Polygon nur durch elliptische Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ in sich überführbar ist, und dass diese in ihrer Gesammtheit eine cyklische Untergruppe bilden werden. Also kann ν nur gleich 1, 2, 3, 4, 6 sein, und wir haben das Resultat: Entweder ist das Kreisbogenpolygon Fundamentalbereich der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ und also diese Gruppe allein aus Spiegelungen erzeugbar, oder das Polygon hat einen Mittelpunkt, welcher Fixpunkt einer cyklischen G_2, G_3, G_4 oder endlich G_6 elliptischer Substitutionen ist; im letzteren Falle ist $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ nicht aus Spiegelungen allein erzeugbar, und der Fundamentalbereich dieser Gruppe entspringt aus dem Polygon erst durch 2-, bez. 3-, 4-, oder 6-Theilung, eine Theilung,

die offenbar stets durch zwei vom Mittelpunkte des Polygons nach zwei gewissen Ecken ziehende Kreise bewerkstelligt werden kann.

Je nachdem der erste oder zweite der eben besprochenen Fälle eintritt, giebt es keine oder doch eine *einzig*e Classe cyklischer Untergruppen aus elliptischen Substitutionen in der $\Gamma^{(q,r)}$, durch deren Fixpunkte Symmetriekreise der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ nicht hindurchziehen. Die Fixpunkte aller anderen elliptischen Substitutionen sind auf Symmetriekreisen gelegen, und wir müssen hierbei unsere bisherige Betrachtung noch durch den Satz ergänzen, dass die Anzahl unterschiedener Kreise, welche durch den einzelnen Fixpunkt hindurchziehen, gleich der Periode ν der betreffenden elliptischen Substitution ist. Bei ungeradem ν ist dies evident; bei geradem ν bemerke man, dass die cyklische G_ν durch die Spiegelung an einem in Betracht kommenden Kreise zu einer in $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ enthaltenen $\bar{G}_{2\nu}$ erweitert wird, deren ν Operationen zweiter Art nur Spiegelungen sein können; ihnen gehören dann die fraglichen ν Kreise zu. Diese Resultate haben merkwürdige Sätze im Gefolge über die Beziehung der ganzzahligen Lösungen der Gleichungen (5) bis (8) des vorigen Artikels zu den ganzzahligen Lösungen von (9) bis (12) ebenda.

Zur Veranschaulichung der gewonnenen allgemeinen Sätze können in erster Linie die Beispiele meiner vorigen Arbeit gelten, welche sich auf die Specialfälle $(q, r) = (3, 1), (7, 1), (11, 1), (19, 1), (23, 1)$ beziehen. Die beiden Gruppen $\bar{\Gamma}^{(3,1)}, \bar{\Gamma}^{(11,1)}$ erwiesen sich als allein aus Spiegelungen erzeugbar; in den übrigen Fällen war die oben mit ν bezeichnete ganze Zahl gleich 2. Unter den niedersten Fällen mit $r > 1$ finde ich drei $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$, die wieder allein aus Spiegelungen erzeugbar sind, nämlich für $(q, r) = (3, 5), (3, 13)$ und $(7, 5)$; mögen für diese Gruppen hier die Einzelresultate noch zusammengestellt werden.

In der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(3,5)}$ finden sich vier Arten von Spiegelungen, nämlich $\bar{S}_2, \bar{V}_2', \bar{U}_2', \bar{S}_2'$, für welche wir in sofort verständlicher Abkürzung die Beispiele $(2, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 0)$ anführen. Die ihnen der Reihe nach entsprechenden Symmetriekreise:

$$(1) \quad \begin{cases} x = 0, (1 - \sqrt{3})(x^2 + y^2) + (1 + \sqrt{3}) = 0, \\ \sqrt{3}(x^2 + y^2) - 2\sqrt{5}x + \sqrt{3} = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

schliessen ein Kreisbogenviereck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ ein, welches man in Fig. 1 der beigegebenen Tafel nachsehen wolle. Die Ecken des Vierecks liegen in der in der Figur angezeigten Folge an den Stellen:

$$(2) \quad \omega_0 = i, \quad \frac{i\sqrt{2}}{-1 + \sqrt{3}}, \quad \frac{3 + i}{\sqrt{5}(-1 + \sqrt{3})}, \quad \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

und bilden die Fixpunkte von vier in der $\Gamma^{(3,5)}$ vorkommenden elliptischen Substitutionen S_2', V_2', T_6, U_2 . Alle in der $\bar{\Gamma}^{(3,5)}$ enthaltenen Arten von Spiegelungen, sowie cyklischen Untergruppen aus elliptischen Substitutionen, welche die Tabellen des vorigen Paragraphen liefern, bestehen demnach je nur aus *einer* Classe. Spiegeln wir das Viereck (1) etwa an der imaginären Axe und fügen ihm sein Spiegelbild an, so entspringt ein Fundamentalbereich der Gruppe $\Gamma^{(3,5)}$; wir finden daraufhin als ein System von erzeugenden Substitutionen für diese Gruppe:

$$(3) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0, & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

In der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(3,13)}$ findet man gleichfalls vier Arten von Spiegelungen, nämlich $\bar{S}_2', \bar{S}_2, \bar{V}_2', \bar{U}_2'$, für welche wir die folgenden Beispiele aufstellen: $(2, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$. Die zugehörigen Symmetriekreise:

$$(4) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, & x = 0, & (1 - \sqrt{3})(x^2 + y^2) + (1 + \sqrt{3}) = 0, \\ (-1 + 2\sqrt{3})(x^2 + y^2) - 2\sqrt{13}x + (1 + 2\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

bilden ein Kreisbogenviereck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ (cf. Fig. 2) und den Ecken:

$$(5) \quad \omega_0 = i, \quad \frac{i\sqrt{2}}{-1 + \sqrt{3}}, \quad \frac{5 + i}{\sqrt{13}(-1 + \sqrt{3})}, \quad \frac{2\sqrt{3} + i}{\sqrt{13}},$$

welch' letztere die Fixpunkte für vier elliptische Substitutionen S_2', V_2', T_6, U_4 abgeben. Indem wir wieder wie oben durch Spiegelung an der imaginären Axe einen Fundamentalbereich der $\Gamma^{(3,13)}$ herstellen, ergibt sich für diese Gruppe folgendes System von erzeugenden Substitutionen:

$$(6) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0, & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, & \frac{-1+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Endlich ergeben sich auch in der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(7,5)}$ insgesamt vier Arten von Spiegelungen, nämlich $\bar{S}_2', \bar{S}_2, \bar{U}_2', \bar{V}_2$; für die ersten beiden

benutze man wieder die Beispiele $(2, 0, 0)$, wie bisher; für $\overline{U}_2'$ müssen wir die beiden Lösungen $(3, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$ der betreffenden Gleichung heranziehen und endlich $(1, 1, 0)$ für $\overline{V}_2$. Den so charakterisirten Spiegelungen gehören der Reihe nach die Symmetriekreise zu:

$$(7) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, & x = 0, & (-3 + \sqrt{7})(x^2 + y^2) + (3 + \sqrt{7}) = 0, \\ & (-2 + \sqrt{7})(x^2 + y^2) - 2\sqrt{5}x + (2 + \sqrt{7}) = 0, \\ & \sqrt{5}(x^2 + y^2) - 2\sqrt{7}x + \sqrt{5} = 0, \end{cases}$$

welche das in Fig. 3 gegebene Kreisbogenfünfeck der Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bilden. Die Ecken desselben:

$$(8) \quad \omega_0 = i, \quad \frac{i\sqrt{2}}{3 - \sqrt{7}}, \quad \frac{\sqrt{7} + i\sqrt{3}}{\sqrt{5}(3 - \sqrt{7})}, \quad \frac{\sqrt{5} + i}{-1 + \sqrt{7}}, \quad \frac{\sqrt{5} + i\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

ergeben die Fixpunkte von fünf der $\Gamma^{(7,5)}$ angehörnden elliptischen Substitutionen S_2' , U_2' , S_3 , T_2' , V_2' . Hier wie im vorausgehenden Falle bilden die elliptischen Substitutionen und Spiegelungen der einzelnen Art innerhalb der $\bar{\Gamma}^{(7,5)}$ auch nur *eine* Classe. Indem wir übrigens für $\Gamma^{(7,5)}$ einen Fundamentalbereich in gewohnter Weise herstellen, findet sich für $\Gamma^{(7,5)}$ als ein System von Erzeugenden:

$$(9) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0, & \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}, & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, & \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dass alle drei betrachteten Gruppen zum Geschlechte $p = 0$ gehören, wird man aus den Figuren sofort ablesen. Man bemerke aber noch, dass ganz allgemein die Gruppen $\Gamma^{(q,r)}$ zum Geschlechte Null gehören. Es ist nämlich jede Gruppe Γ von endlichem Fundamentalbereich, die durch Zusatz einer Spiegelung auf eine *allein* aus Spiegelungen erzeugbare Gruppe $\bar{\Gamma}$ erweitert werden kann, vom Geschlechte $p = 0$. In der That, liefert das Polygon von $\bar{\Gamma}$ durch Reproduction am Grenzkreis K einen Fundamentalbereich von Γ , so sind je zwei Randpunkte des letzteren, die bezüglich K symmetrisch liegen, einander zuzuordnen.

II.

Aequivalenz und Reduction quadratischer Formen.

1.

Die zur $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ gehörenden binären quadratischen Formen. Ternäre Gestalt der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$.

Wie die Modultheilung in innigster Beziehung zu den ganzzahligen binären quadratischen Formen steht, so ergibt uns die soeben besprochene Polygontheilung der ω -Halbebene eine zweckmässige Handhabung für die arithmetische Theorie gewisser binärer quadratischer Formen, die wir als zur $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ gehörig bezeichnen. Wir schreiben diese Formen in der Gestalt:

$$(1) \quad (\kappa, \lambda, \mu) = (\kappa + \lambda\sqrt{q})x^2 + 2\mu\sqrt{r}xy - (\kappa - \lambda\sqrt{q})y^2*)$$

und verstehen dabei unter κ, λ, μ irgend drei rationale ganze Zahlen; die Determinante der Form (1) ist:

$$(2) \quad D = \kappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2.$$

Die Zugehörigkeit der Formen (κ, λ, μ) zur Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ wird durch die nachfolgende Betrachtung begründet. Man übe auf (1) die Substitution:

$$(3) \quad x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

aus, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Zahlen der Determinante 1 sind; diese Substitution schreiben wir abgekürzt in der Gestalt $v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und werden übrigens die Substitutionen der Determinante -1 , die wir vorab ausschliessen, späterhin von selbst mit erledigen. Wir verlangen, dass (κ, λ, μ) durch v wieder in eine Form ihrer Art übergeführt wird, und schreiben demgemäss:

$$(4) \quad \begin{cases} \kappa' + \lambda'\sqrt{q} = (\kappa + \lambda\sqrt{q})\alpha^2 + 2\mu\sqrt{r}\alpha\gamma - (\kappa - \lambda\sqrt{q})\gamma^2, \\ \mu'\sqrt{r} = (\kappa + \lambda\sqrt{q})\alpha\beta + \mu\sqrt{r}(\alpha\delta + \beta\gamma) - (\kappa - \lambda\sqrt{q})\gamma\delta, \\ -\kappa' + \lambda'\sqrt{q} = (\kappa + \lambda\sqrt{q})\beta^2 + 2\mu\sqrt{r}\beta\delta - (\kappa - \lambda\sqrt{q})\delta^2, \end{cases}$$

wo also κ', λ', μ' gleichfalls ganze rationale Zahlen sein müssen. Um zu sehen, welche Zahlwerthe für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zugänglich sind, entwickeln wir aus (4) das nachfolgende Gleichungssystem:

*) Die beiden Wurzeln $\sqrt{q}, \sqrt{r}$ sollen stets positiv genommen werden.

$$(5) \quad \begin{cases} \kappa' = \kappa \cdot \frac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + \lambda \cdot \frac{1}{2} \sqrt{q} (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) \\ \quad + \mu \sqrt{r} (\alpha\gamma - \beta\delta), \\ \lambda' = \kappa \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}} (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) + \lambda \cdot \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \\ \quad + \mu \sqrt{\frac{r}{q}} (\alpha\gamma + \beta\delta), \\ \mu' = \kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} (\alpha\beta - \gamma\delta) + \lambda \sqrt{\frac{q}{r}} (\alpha\beta + \gamma\delta) + \mu (\alpha\delta + \beta\gamma) \end{cases}$$

und knüpfen weiter an den sofort evidenten Satz: Einem beliebig gewählten Tripel ganzer Zahlen κ, λ, μ entspricht stets und nur dann immer wieder ein Tripel ganzer Zahlen κ', λ', μ' , wenn die neun Coefficienten der ternären Substitution (5) durchgängig ganze rationale Zahlen sind, was wir nun des nähern zu untersuchen haben.

Wir nennen die Coefficienten der Substitution (5) a_{ik} und bemerken: Da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und a_{33} ganzzahlig ist, so werden $2\alpha\delta$ und $2\beta\gamma$ ganze Zahlen sein; ein Gleiches gilt von $\alpha^2 + \delta^2 = a_{11} + a_{22}$, $\beta^2 + \gamma^2 = -a_{11} + a_{22}$. Es folgt, dass auch die vier Grössen $(\alpha \pm \delta)^2$, $(\beta \pm \gamma)^2$ ganze Zahlen sind, und daraufhin schreibe man:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha + \delta = a\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\pi_1}, & \beta + \gamma = c\sqrt{\sigma_2}\sqrt{\pi_2}, \\ \alpha - \delta = b\sqrt{\tau_1}\sqrt{\pi_1}, & \beta - \gamma = d\sqrt{\tau_2}\sqrt{\pi_2}; \end{cases}$$

hierbei sind a, b, c, d , sowie die σ_i, τ_i, π_i ganze Zahlen, von denen die letzten sechs keinen Primfactor mehr quadratisch zu enthalten brauchen; die Formeln (6) sind überdies so gewählt, dass sowohl für $i = 1$, wie $i = 2$ keine zwei unter den drei Zahlen σ_i, τ_i, π_i einen Primfactor > 1 gemeinsam haben sollen. Die Coefficienten von v nehmen daraufhin die Gestalt an:

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a\sqrt{\sigma_1} + b\sqrt{\tau_1}}{2} \cdot \sqrt{\pi_1}, & \beta = \frac{c\sqrt{\sigma_2} + d\sqrt{\tau_2}}{2} \cdot \sqrt{\pi_2}, \\ \gamma = \frac{c\sqrt{\sigma_2} - d\sqrt{\tau_2}}{2} \cdot \sqrt{\pi_2}, & \delta = \frac{a\sqrt{\sigma_1} - b\sqrt{\tau_1}}{2} \cdot \sqrt{\pi_1}. \end{cases}$$

Jetzt setze man die beiden Gleichungen an:

$$\begin{aligned} + a_{12} + qa_{21} &= (\alpha^2 - \delta^2)\sqrt{q} = ab\pi_1\sqrt{\sigma_1\tau_1q}, \\ - a_{12} + qa_{21} &= (\beta^2 - \gamma^2)\sqrt{q} = cd\pi_2\sqrt{\sigma_2\tau_2q}, \end{aligned}$$

aus denen folgt, dass die beiden ganzen Zahlen $\sigma_1 \cdot \tau_1 \cdot q$ und $\sigma_2 \cdot \tau_2 \cdot q$ reine Quadrate sein müssen. Dies ist nur dadurch möglich, dass jedesmal die eine der beiden Zahlen σ_i, τ_i gleich q , die andere aber gleich 1 wird, was vier verschiedene Fälle giebt. Von diesen sind aber die beiden $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \tau_1 = \tau_2 = q$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = q, \tau_1 = \tau_2 = 1$

unmöglich, weil für sie z. B. a_{23} nur dann ganzzahlig ausfallen kann, wenn eine der Zahlen π_1, π_2 durch q theilbar ist, entgegen dem Umstande, dass π_i relativ prim gegen σ_i, τ_i ist. Wir behalten also nur die beiden Fälle:

$$(8) \quad \begin{cases} \text{I. } \sigma_1 = 1, & \tau_1 = q, & \sigma_2 = q, & \tau_2 = 1, \\ \text{II. } \sigma_1 = q, & \tau_1 = 1, & \sigma_2 = 1, & \tau_2 = q. \end{cases}$$

Der grösste gemeinsame Factor ε von π_1 und π_2 muss offenbar $4(\alpha\delta - \beta\gamma) = 4$ theilen; wir haben also nur zwei Möglichkeiten 1) $\varepsilon = 1$, 2) $\varepsilon = 2$ und demgemäss von (8) aus die vier Fälle I, 1) I, 2) II, 1) II, 2). Für $\varepsilon = 2$ schreiben wir $\pi_i = 2\pi'_i$ und heben den in den Ausdrücken von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auftretenden Factor $\sqrt{2}$ gegen die 2 im Nenner. Indem wir weiter fordern, dass a_{23} ganzzahlig wird, entspringt die fernere Bedingung, dass die ganze Zahl $\pi_1\pi_2 \cdot r$ ein reines Quadrat sein muss, und das giebt die Alternative $\pi_1 = 1, \pi_2 = r$, bez. $\pi_1 = r, \pi_2 = 1^*$). So haben wir letzten Endes acht verschiedene Fälle, und man wird bemerkt haben, dass wir für v hier gerade zu den acht Arten der Substitutionen S, T etc. der $\Gamma^{(q,r)}$ zurückgeführt sind. Diese ergeben denn auch durchgehends ganzzahlige ternäre Substitutionen (5), und wir haben also den Satz: *Die Substitutionen v , durch welche die in (1) gegebenen quadratischen Formen (κ, λ, μ) wieder in Formen ihrer Art transformirt werden, coincidiren gerade mit den gesammten Substitutionen unserer Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$.*

Die Substitutionen (3) der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, welche (1) in eine Form gleicher Art überführen, entspringen aus den bisher gefundenen v einfach durch Combination mit der einzelnen Substitution $x' = x, y' = -y$. Operiren wir mit den nicht-homogenen ω -Substitutionen, so erzielen wir für unsere Formen (κ, λ, μ) denselben Effect, wenn wir an Stelle der eben gemeinten Substitutionen der Determinante -1 die Operationen zweiter Art der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ setzen; ihnen entsprechen ganzzahlige ternäre Substitutionen (5) der Determinante -1 .

Die Gesammtheit der solcherweise erhaltenen ternären Substitutionen (5) bildet eine mit der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ holoeidrisch isomorphe Gruppe, welche wir auch als Gruppe der ganzzahligen ternären Substitutionen der ternären quadratischen Form $(\kappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2)$ in sich ansprechen können**). Indem wir also κ, λ, μ als homogene Coordinaten der Ebene deuten, und zwar derart fixiren, dass $\kappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2 = 0$ eine Ellipse darstellt, wird sich die Eintheilung der ω -Halbebene in bekannter

*) Im Falle $\varepsilon = 2$ tritt π'_i an Stelle von π_i .

**) Solchergestalt ist hier wieder Anschluss an die Poincaré'sche Originalarbeit gewonnen, von der ich in meiner vorletzten Arbeit ausging (cf. Bd. 38 der Annalen p. 50).

Weise (cf. „Vorl. über Moduln.“ pag. 60) in eine geradlinige Eintheilung des Ellipseninneren projeciren lassen, wie sie direct der ternären Gestalt der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(2,r)}$ zugehört.

2.

Repräsentation, Aequivalenz u. s. w. der Formen. Erledigung des Falles $D < 0$.

Die Begriffsbestimmungen der Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen übertragen sich jetzt zwanglos auf die Theorie der Formen (κ, λ, μ) . Wir scheiden zuvörderst die Formen *positiver* Determinante D von denen *negativer* Determinante und bezeichnen eine Form mit $D < 0$ als positiv oder negativ, je nachdem $(\kappa + \lambda\sqrt{q})$ einen positiven oder negativen Zahlwerth hat. Natürlich treten nur solche Determinanten D auf, welche Darstellungen in der Gestalt $\kappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2$ durch ganze Zahlen κ, λ, μ zulassen. Den grössten gemeinsamen Theiler τ der drei Zahlen κ, λ, μ benennen wir als *Theiler der Form* (κ, λ, μ) ; ist $\tau = 1$, so möge (κ, λ, μ) als *ursprüngliche* Form bezeichnet werden, für $\tau > 1$ aber als *abgeleitete*.

Bei negativer Determinante betrachten wir etwa nur die positiven Formen und repräsentiren die einzelne unter ihnen durch den in der positiven ω -Halbebene gelegenen Punkt

$$(1) \quad \omega = \frac{-\mu\sqrt{r} + i\sqrt{-D}}{\kappa + \lambda\sqrt{q}},$$

welcher die eine Wurzel $x : y$ der mit Null identisch gesetzten Form angiebt. In entsprechender Weise kommen einer Form positiver Determinante die beiden reellen Wurzeln zu:

$$(2) \quad \omega_1 = \frac{-\mu\sqrt{r} + \sqrt{D}}{\kappa + \lambda\sqrt{q}}, \quad \omega_2 = \frac{-\mu\sqrt{r} - \sqrt{D}}{\kappa + \lambda\sqrt{q}},$$

und wir benennen hier ($\sqrt{D}$ stets positiv genommen) ω_1 als erste, ω_2 als zweite Wurzel der Form (κ, λ, μ) . Letztere Form repräsentiren wir durch den in der positiven Halbebene gelegenen Halbkreis

$$(3) \quad (\kappa + \lambda\sqrt{q})(x^2 + y^2) + 2\mu\sqrt{r}x - (\kappa - \lambda\sqrt{q}) = 0,$$

welcher die beiden Punkte (2) verbindet, und der mit einem von ω_1 nach ω_2 hinweisenden Pfeile versehen sein soll; die beiden Formen (κ, λ, μ) und $(-\kappa, -\lambda, -\mu)$ der Determinante $D > 0$ werden zwar durch denselben Halbkreis (3) repräsentirt, aber die zugehörigen Pfeilrichtungen sind gerade entgegengesetzt.

Eine Form negativer Determinante heisst *ambig*, so oft ihr repräsentirender Punkt auf einem Symmetriekreise der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(2,r)}$ liegt. Eine Form positiver Determinante heisst *ambig* falls ihr repräsen-

tirender Halbkreis orthogonal gegen einen und damit (wie wir sehen werden) gleich gegen unendlich viele Symmetriekreise der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ verläuft.

Zwei Formen (κ, λ, μ) und $(\kappa', \lambda', \mu')$ heissen einander *äquivalent* oder des genaueren *eigentlich äquivalent*, wenn die eine in die andere durch eine Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$ überführbar ist; sie heissen *uneigentlich äquivalent*, wenn die eine in die andere durch eine Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$, combinirt mit $\omega' = -\omega$, überführbar ist. Aequivalente Formen haben denselben Theiler und dieselbe Determinante; ist letztere negativ, so sind beide Formen entweder positiv oder beide negativ. Die repräsentirenden Elemente beider Formen (Punkte, Halbkreise mit Pfeilen) gehen bei eigentlicher Aequivalenz durch Substitutionen erster Art, bei uneigentlicher Aequivalenz aber durch solcher zweiter Art der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ in einander über; jedoch ist sehr zu betonen, dass für $D > 0$ bei uneigentlicher Aequivalenz die Pfeilrichtung des einen Halbkreises beim Fortgang zum andern umzukehren ist, um die richtige Pfeilrichtung für die uneigentlich äquivalente Form zu erhalten. Man wird dies im Hinblick auf die Folge der Wurzeln (2) leicht durch die Bemerkung bestätigen, dass die Ausübung der Substitution $\omega' = -\omega$ nur einen Zeichenwechsel von μ bewirkt.

Soll eine Form sich selbst uneigentlich äquivalent sein, so muss für $D < 0$ der repräsentirende Punkt auf einem Symmetriekreise der Theilung liegen; für $D > 0$ muss eine Operation zweiter Art in $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ existiren, welche den repräsentirenden Halbkreis unter Permutation seiner beiden Fusspunkte in sich transformirt. Dieselbe muss im Innern der Halbebene auf jenem Kreise einen Fixpunkt aufweisen und ist sonach nothwendig eine Spiegelung, deren Symmetriekreis gegen den repräsentirenden Halbkreis der Form orthogonal verläuft. Es folgt: *Jede sich selbst uneigentlich äquivalente Form ist ambig.**

Den Ausgangsraum für die Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ wählen wir, wie schon stets in den oben betrachteten Fällen, jetzt ganz allgemein derart, dass er sich unmittelbar oberhalb des Punktes $\omega = i$ zur rechten und linken Seite der imaginären Axe symmetrisch anlegt. Von den Randpunkten des Bereiches rechnen wir nur die auf der linken Seite der imaginären Axe gelegenen demselben zu. Dies gilt freilich nur, falls $\bar{\Gamma}$ allein aus Spiegelungen erzeugbar ist; in den übrigen Fällen wird man die Vorschrift in leicht ersichtlicher Weise modificiren.

Eine quadratische Form negativer Determinante heisst *reducirt*, falls ihr repräsentirender Punkt dem Ausgangsraume angehört; eine

*) Infolge der etwas veränderten Begriffsbestimmung der ambigen Formen, erscheint der Wortlaut dieses Resultates gegenüber dem bekannten Satze der gewöhnlichen Zahlentheorie ein wenig modificirt.

quadratische Form positiver Determinante heisst *reducirt*, falls ihr repräsentirender Halbkreis den Ausgangsraum schneidet. *Eine Form negativer Determinante ist stets mit einer und nur einer reducirten Form äquivalent, eine Form positiver Determinante wenigstens mit einer.* Uebrigens bemerkt man bei $D > 0$ als particuläre Formen diejenigen, deren repräsentirende Halbkreise Symmetriekreise der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ sind; diese werden wir *reducirt* nennen, wenn der betreffende Kreis den Ausgangsraum begrenzt und ihm zugerechnet wird*). Indem wir alle äquivalenten Formen in eine *Classe* vereinigen, werden wir dieselbe bei $D < 0$ durch ihre eine *reducirte* Form, bei $D > 0$ durch das System ihrer *Reducirten* repräsentiren können.

Indem wir weiterhin zunächst allein die Formen negativer Determinante erledigen, müssen wir die Anzahl der Substitutionen abzählen, durch welche eine Form in eine mit ihr äquivalente Form und also in sich selbst transformirt wird. Die Eintheilung der Halbebene ergibt hier sofort die Antwort: *Eine Form (x, λ, μ) negativer Determinante wird im Allgemeinen nur durch die Identität in sich transformirt; eine Ausnahme bilden nur die Formen, deren repräsentirende Punkte Fixpunkte elliptischer Substitutionen sind; ist im Einzelfall deren Periode v , so giebt es v Substitutionen der Form in sich.* Die Determinanten dieser besonderen Formen sind, sofern wir letztere ursprünglich wählen, $D = -1, -2, -q, -2q, -r, -2r, -qr, -2qr$, von denen im Einzelfalle (q, r) natürlich im Allgemeinen nur eine beschränkte Zahl auftritt, z. B. drei für $(3, 1)$, vier für $(11, 1)$ u. s. w.**). Die in Rede stehenden Formen sind entweder ambig, wobei ihre repräsentirenden Punkte Schnittpunkte verschiedener Symmetriekreise sind, oder die repräsentirenden Punkte stellen die Centren der von den Symmetriekreisen gebildeten Polygone dar.

Die Bedingungen für die *reducirten* Formen lassen sich leicht in eine rein arithmetische Gestalt umsetzen. Man hat zum Ausdruck zu bringen, dass der repräsentirende Punkt (1) der Form (x, λ, μ) innerhalb bez. ausserhalb gewisser Kreise liegt, derjenigen Kreise nämlich, welche den Ausgangsraum einschliessen. Zu dem Ende hat man in die linke Seite der betreffenden Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = -\frac{x - \lambda\sqrt{q}}{x + \lambda\sqrt{q}}, \quad x = \frac{-\mu\sqrt{r}}{x + \lambda\sqrt{q}}$$

einzusetzen, die solcherweise entweder > 0 oder < 0 werden muss. Man sieht, dass sich die Bedingungen für die *reducirten* Formen stets

*) Jedoch bilden hier wieder die Formen $(0, 0, \mu)$ eine leicht erkennbare Ausnahme.

**) Unter Zugrundelegung der im vierten Abschnitt zu gebrauchenden Schreibweise der Formen sind die im Texte gemeinten besonderen Formen diejenigen der Determinanten $D = -1$ und -2 .

durch eine Anzahl linearer Ungleichungen ausdrücken. Die Zahl derselben ist gleich der Anzahl der Seiten des Ausgangsraumes, und übrigens ist noch hinzuzusetzen, dass für die ambigen Formen eine oder zwei jener Ungleichungen in Gleichungen übergehen.

Beispielsweise wird im Falle $(q, r) = (3, 1)$ der Ausgangsraum von den drei Kreisen begrenzt:

$$(1 - \sqrt{3})(x^2 + y^2) + (1 + \sqrt{3}) = 0, \quad x^2 + y^2 \pm 2x - 1 = 0.$$

Es ergeben sich daraufhin als Bedingungen einer reducirten positiven Form die nachfolgenden:

$$(4) \quad x + \lambda \geq 0, \quad x + \mu \leq 0, \quad x < \mu,$$

wobei im Falle des Gleichheitszeichens der ersten Formel überdies noch $\mu \geq 0$ zu fordern ist. Im Falle $(q, r) = (11, 1)$ haben wir die Grenzkreise:

$$(3 - \sqrt{11})(x^2 + y^2) + (3 + \sqrt{11}) = 0, \quad x^2 + y^2 \pm 2x - 1 = 0, \\ (-3 + \sqrt{11})(x^2 + y^2) \pm 4x + (3 + \sqrt{11}) = 0;$$

man findet als Bedingungen einer reducirten positiven Form:

$$(5) \quad \begin{cases} x + 3\lambda \geq 0, & x + \mu \leq 0, & x < \mu, \\ 3x + 11\lambda - 2\mu \geq 0, & 3x + 11\lambda + 2\mu > 0, \end{cases}$$

mit der Nebenbedingung $\mu \geq 0$, falls in der ersten Formel das Gleichheitszeichen gilt. Natürlich ist von diesen fünf Bedingungen keine einzige entbehrlich.

3.

Erledigung der Formen von positiver Determinante.

Die Frage, welches die Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ sind, die eine Form (x, λ, μ) positiver Determinante in sich überführen, lässt sich (gerade wie bei den ganzzahligen quadratischen Formen) nur erst durch eine arithmetische Betrachtung beantworten. Soll es hyperbolische Substitutionen in $\Gamma^{(q,r)}$ geben, welche (x, λ, μ) in sich überführen, so werden dieselben eine cyklische Untergruppe bilden, die entweder nur aus Substitutionen S besteht, oder deren Substitutionen S eine in ihr ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei bilden. Jedenfalls wird es genügen, wenn wir für jede Form (x, λ, μ) positiver Determinante hyperbolische Substitutionen S nachweisen, welche (x, λ, μ) in sich transformiren; hierbei dürfen wir (x, λ, μ) offenbar als ursprüngliche Form voraussetzen.

Gehört zu (x, λ, μ) im mehrfach genannten Sinne die unter (1) pag. 63 genannte Operation S , so müssen die beiden Ausdrücke:

$$(\kappa + \lambda\sqrt{q})\omega^2 + 2\mu\sqrt{r}\omega - (\kappa - \lambda\sqrt{q}),$$

$$(-dqr + cr\sqrt{q})\omega^2 + 2bq\sqrt{r}\omega + (dqr + cr\sqrt{q}),$$

mit Null identisch gesetzt, gleiche Wurzeln haben. Demnach setzen wir, unter π einen Proportionalitätsfactor verstehend,

$$(1) \quad -dqr = \pi\kappa, \quad cr = \pi\lambda, \quad bq = \pi\mu$$

und berechnen unter Einführung der Determinante D von (κ, λ, μ) für die Zahl a der Substitution S die Gleichung:

$$(2) \quad \pi^2 D = qr(a^2 - 4).$$

So oft umgekehrt in Uebereinstimmung mit (1) und (2) vier ganze Zahlen a, b, c, d gefunden werden können, von den die drei letzten nicht alle verschwinden, ist dadurch eine Substitution S gesuchter Art wirklich bestimmt.

Indem wir vorab bemerken, dass π jedenfalls eine ganze Zahl ist (da κ, λ, μ ohne gemeinsamen Theiler sind), müssen wir für die weitere Discussion von (1) und (2) eine vierfache Fallunterscheidung treffen.

I. κ, μ nicht zugleich durch q theilbar; κ, λ nicht zugleich durch r theilbar.

In diesem Falle ist π eine durch qr theilbare Zahl; wir substituieren $\pi = qrv$, $qrD = D'$, so dass v und D' ganze Zahlen sind, und schreiben übrigens der Gewohnheit wegen $a = u$. Die Gleichungen (1), (2) liefern:

$$(3) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = vr\mu, \quad c = vq\lambda, \quad d = -v\kappa.$$

Die unendlich vielen Lösungen der zuerst stehenden Pell'schen Gleichung liefern die zu (κ, λ, μ) gehörende Gruppe hyperbolischer S .

II. $\kappa \equiv \mu \equiv 0, \pmod{q}$; κ, λ nicht zugleich durch r theilbar.

In diesem Falle ist π durch r , D aber durch q theilbar. Schreiben wir also $a = u$, $\pi = rv$, $rD = qD'$, so sind v und D' sicher ganze Zahlen. Die Gleichungen (1) und (2) gehen über in:

$$(4) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = vr \cdot \frac{\mu}{q}, \quad c = v\lambda, \quad d = -v \cdot \frac{\kappa}{q}$$

und liefern die gewünschten Substitutionen S .

III. κ, μ nicht zugleich durch q theilbar; $\kappa \equiv \lambda \equiv 0, \pmod{r}$.

Jetzt ist π durch q , D aber durch r theilbar. Man setze also $\pi = qv$, $qD = rD'$ und reihe den Formeln (4) die nachfolgenden an:

$$(5) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = v\mu, \quad c = vq \cdot \frac{\lambda}{r}, \quad d = -v \cdot \frac{\kappa}{r}.$$

IV. $\kappa \equiv \mu \equiv 0, (\text{mod. } q); \kappa \equiv \lambda \equiv 0, (\text{mod. } r).$

Nun wird man direct $\pi = v, qrD' = D$ setzen und hat in D' eine ganze Zahl, da D durch qr theilbar ist. Es wird aber des Weiteren:

$$(6) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = v \cdot \frac{\mu}{q}, \quad c = v \cdot \frac{\lambda}{r}, \quad d = -v \cdot \frac{\kappa}{qr}.$$

Solcherweise haben wir das Resultat erhalten: *Zu jeder ursprünglichen, und also überhaupt zu jeder Form (κ, λ, μ) positiver Determinante gehört eine in $\Gamma^{(q,r)}$ enthaltene cyklische Untergruppe von hyperbolischen Substitutionen, welche (κ, λ, μ) in sich transformiren.* Auf Grund dieses Resultates lässt sich zugleich unsere oben (in I, 3) betreffs der Mannigfaltigkeit hyperbolischer Substitutionen in der $\Gamma^{(q,r)}$ gemachte Behauptung rechtfertigen. Die Verhältnisse werden am Deutlichsten, wenn man sie sich in der Ebene der homogenen Coordinaten κ, λ, μ veranschaulicht. Statt dabei die Form (κ, λ, μ) durch eine geradlinige Transversale der Ellipse $\kappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2 = 0$ zu repräsentiren, kann man zu diesem Zweck direct den ausserhalb der Ellipse gelegenen Pol dieser Transversale benutzen, dessen Coordinaten gerade die Zahlen κ, λ, μ sind. Alle ausserhalb der Ellipse gelegenen Punkte mit rationalen Coordinaten repräsentiren dann Formen positiver Determinanten, und dass diese Punkte ausserhalb der Ellipse überall dicht liegen, ist unmittelbar evident. Dieses ist aber im Grunde, was wir oben behaupteten.

Im Allgemeinen lässt sich eine Form (κ, λ, μ) positiver Determinante nur durch die Substitutionen der ihr soeben zugewiesenen cyklischen G_∞ in sich transformiren, in die wir übrigens neben den S die vielleicht sonst noch in Betracht kommenden hyperbolischen Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ aufgenommen denken. Aber es giebt besondere Formen (κ, λ, μ) , die ausser der G_∞ noch weitere Substitutionen in sich zulassen. Wir gedenken hier nur im Vorbeigehen der ambigen Formen, deren Substitutionen in sich offenbar eine erweiterte $\overline{G}_{2\infty}$ bilden. Wichtiger sind die Formen, deren repräsentirende Kreise durch einen und damit durch unendlich viele Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode *zwei* gehen. Die einzelne solche Substitution wird den repräsentirenden Kreis von (κ, λ, μ) unter Wechsel der Pfeilrichtung in sich transformiren. Nennen wir sonach die beiden Formen (κ, λ, μ) , $(-\kappa, -\lambda, -\mu)$ der positiven Determinante D einander *invers*, so gilt ersichtlich der Satz: *Eine Form (κ, λ, μ) positiver Determinante ist stets und nur dann mit ihrer inversen Form äquivalent, wenn der repräsentirende Kreis durch Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode 2 geht.* Sehen wir in diesem Falle die beiden einander inversen Formen als nicht wesentlich von einander verschieden an, so kommt

eine $G_{2\infty}$ von Substitutionen in sich in Betracht, welche eine den Diedergruppen analoge Structur zeigt.

Als eine Besonderheit gegenüber den ganzzahligen quadratischen Formen müssen wir noch hervorheben, dass auch zu den Symmetriekreisen der Halbebenenentheilung von $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ cyklische G_∞ hyperbolischer Substitutionen gehören. Diese Kreise werden im Allgemeinen durch eine $\bar{G}_{4\infty}$ in sich transformirt; die zugehörigen ursprünglichen Formen gehören den Determinanten $D = 1, 2, 2q, r, 2r, 2qr$ an*).

Die Theorie der reducirten Formen gestaltet sich nun genau, wie bei den ganzzahligen binären Formen positiver Determinante. Der repräsentirende Halbkreis einer Form (κ, λ, μ) wird durch eine Reihe von Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ auf eine *endliche* Anzahl von im Ausgangsraum gelegenen Kreissegmenten transformirt. Diese Kreissegmente setzen sich in bekannter Weise zu einer geschlossenen Kette zusammen, welche die Periode der reducirten Formen versinnlicht. Haben wir insbesondere mit einer „sich selbst inversen Classe“ zu thun, so besteht jene Kette aus zwei mit einander coincidirenden Hälften, die in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen sind.**)

Natürlich ist es wieder ein Leichtes, die Bedingungen für eine reducirte Form in rein arithmetische Gestalt umzusetzen; wir müssen zum Ausdruck bringen, dass die Eckpunkte des Ausgangsraumes nicht zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreises:

$$(7) \quad (\kappa + \lambda\sqrt{q})(x^2 + y^2) + 2\mu\sqrt{r}x - (\kappa - \lambda\sqrt{q}) = 0$$

gelegen sind. So sind z. B. im Falle $q = 3, r = 1$ die drei Ecken des Ausgangsdreiecks bei $\omega = i, \frac{1+i}{-1+\sqrt{3}}, \frac{-1+i}{-1+\sqrt{3}}$ gelegen. Die Bedingung einer reducirten Form ist also diese, dass die drei ganzen Zahlen

$$(8) \quad \lambda, \kappa + 3\lambda + \mu, \kappa + 3\lambda - \mu$$

nicht alle dasselbe Vorzeichen haben dürfen; ist im Besonderen eine dieser Zahlen Null, so müssen die beiden anderen verschiedenes Vorzeichen haben; das Verschwinden von zwei Zahlen (8) tritt nur ein, wenn (7) Grenzkreis des Ausgangsraumes ist.

*) Wie im vorigen Artikel kommen wir hier auf die Determinanten $D = 1, 2$ zurück, falls wir die spätere Schreibweise der Formen gebrauchen (Absch. IV).

**) Man vergl. hier überall die eingehenden Auseinandersetzungen in den „Vorlesungen über die Modulfunctionen“.

III.

Congruenzgruppen und Transformationstheorie.

1.

Die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe innerhalb der $\Gamma^{(q,r)}$.

Die eleganten Anwendungen, welche die in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden Modulargleichungen auf die ganzzahligen quadratischen Formen zulassen, legten den Wunsch nahe, nach analogen Entwicklungen im Gebiete der Gruppen $\Gamma^{(q,r)}$ und der zugehörigen quadratischen Formen zu suchen. Wir beginnen diese Entwicklung mit der Betrachtung derjenigen Untergruppe von $\Gamma^{(q,r)}$, welche wir nach Analogie der Modulgruppe als Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezeichnen. Die Verhältnisse gestalten sich am durchsichtigsten bei Rückgang auf die ternäre Gestalt der Gruppe $\Gamma^{(q,r)*}$. Alle in (5) II, 1 angegebenen Substitutionen der ternären $\Gamma^{(q,r)}$, deren Coefficienten die Congruenzen:

$$(1) \quad a_{ii} \equiv 1, \quad a_{ik} \equiv 0, \pmod{n}, \quad i \geq k$$

befriedigen, bilden offenbar eine in der Gesamtgruppe ausgezeichnete Untergruppe, die wir als *Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe* bezeichnen.

Um diese Untergruppe bei Gebrauch der gewöhnlichen ω -Substitutionen direct definiren zu können, müssen wir auf die Formeln in Artikel II, 1 zurückgehen. Hierbei werden wir n sogleich auf ungerade gegen q und r relativ prime Zahlwerthe einschränken, um die Untersuchung nicht zu complicirt zu gestalten. Soll nun (5) II, 1 der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe angehören, so ist jede der sechs Zahlen $(a_{12} \pm qa_{21})$, $(a_{13} \pm ra_{31})$, $(qa_{23} \pm ra_{32})$ durch n theilbar, und daraus folgt durch leichte Zwischenrechnung für die vier ganzen Zahlen a, b, c, d der entsprechenden ω -Substitution:

$$(2) \quad ab \equiv ac \equiv ad \equiv bc \equiv cd \equiv db \equiv 0, \pmod{n}.$$

Die Congruenzen $a_{11} + a_{22} \equiv 2$, $a_{11} - a_{22} \equiv 0$ liefern weiter:

$$(3) \quad a^2\sigma_1\pi_1 + b^2\tau_1\pi_1 \equiv 4, \quad c^2\sigma_2 + d^2\tau_2 \equiv 0, \pmod{n},$$

und endlich folgt aus $a_{33} \equiv 1$ unter Rücksicht auf die Determinante 1 der fraglichen ω -Substitution:

$$(4) \quad a^2\sigma_1\pi_1 - b^2\tau_1\pi_1 \equiv 4, \quad c^2\sigma_2 - d^2\tau_2 \equiv 0, \pmod{n}.$$

Da hiernach b^2 durch n theilbar ist, so muss a prim gegen n sein, und also geben die Congruenzen (2) $b \equiv c \equiv d \equiv 0, \pmod{n}$, während a der Congruenz $a^2\sigma_1\pi_1 \equiv 4$ genügen muss. Umgekehrt überblickt man sofort, dass jede diesen Bedingungen genügende ω -Substitution

*) Cf. Poincaré's öfter gen. Arbeit in Liouville's Journal, 4^{te} Folge, Bd. 3.

umgekehrt eine die Congruenzen (1) befriedigende ternäre Operation liefert, und also kommt als erstes Resultat:

Alle den Bedingungen

$$(5) \quad a^2 \sigma_1 \pi_1 \equiv 4, \quad b \equiv c \equiv d \equiv 0, \pmod{n}$$

genügenden Substitutionen (7) in II, 1 der $\Gamma^{(q,r)}$ bilden eine ausgezeichnete Untergruppe, die wir durch $\Gamma_{(n)}^{(q,r)}$ oder kurz $\Gamma_{(n)}$ bezeichnen und natürlich wieder Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe nennen.

Man untersuche jetzt zuvörderst, welche von den acht Substitutionsarten S, T etc. sich an der Untergruppe $\Gamma_{(n)}$ betheiligen, und stelle sich zu dem Ende eine ausführliche Tabelle über die acht im Artikel II, 1 unterschiedenen Fälle auf. Man wird aus derselben leicht ablesen, dass den in der ersten der nachfolgenden Reihen aufgeschriebenen Werthen von $\sigma_1 \pi_1$ jeweils die darunter stehende Substitutionsart entspricht:

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_1 \pi_1 &= 1, q, 2, 2q, r, rq, 2r, 2rq, \\ &= S, T, U, V, S', T', U', V'. \end{aligned}$$

Hier ist es nun weiter eine Vereinfachung unserer Betrachtung, wenn wir n als Primzahl annehmen; es liegt diese Voraussetzung zwar keineswegs im Wesen unserer Untersuchung begründet; inzwischen ist es zweckmässig, wenigstens vorab in diesem Specialfall eines primzahligen n die Entwicklung durchzuführen. Soll jetzt die einzelne Substitutionsart an $\Gamma_{(n)}$ theilhaben, so ist als Bedingung dafür aufzustellen, dass ihr $\sigma_1 \pi_1$ quadratischer Rest von n ist. Betreffs des quadratischen Charakters der drei Zahlen $2, q, r$ modulo n treten nun acht verschiedene Fälle ein. *Im ersten, wo alle drei Zahlen Reste sind, nehmen alle acht Arten $S, T, \dots$ an der $\Gamma_{(n)}$ theil; in den übrigen sieben Fällen jeweils nur vier z. B. S, U, S', U' für den Fall*

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = 1, \quad \left(\frac{q}{n}\right) = -1 \text{ u. s. w.}$$

Dies ist andererseits von gruppentheoretischer Seite her verständlich. Die $\Gamma^{(q,r)}$ reducirt sich bezüglich $\Gamma_s^{(q,r)}$ auf eine endliche G_8 , die wir als die Gruppe der acht Substitutionen $S = 1, T, U, \dots, V'$ ansehen können*). Die acht Operationen der G_8 sind alle vertauschbar, und eine solche Gruppe hat, wie man sofort überblickt, sieben ausgezeichnete G_4 vom Vierertypus zu Untergruppen. Diesen entsprechen innerhalb $\Gamma^{(q,r)}$ sieben**) ausgezeichnete Γ_2 vom Index zwei, und diese sind den oben unterschiedenen Fällen eindeutig zugeordnet, bei denen

*) Hier ist $r > 1$ angenommen. Die Modification für $r = 1$ wird man immer leicht durchführen.

**) Für $r = 1$ werden es nur drei.

nicht alle drei Zahlen $2, q, r$ Reste von n sind. Im Einzelfall ist $\Gamma_{(n)}$ Untergruppe ihrer Γ_2 .

Mögen wir jetzt ein Repräsentantensystem für $\Gamma_{(n)}$ und zwar der Gesamtgruppe im Falle $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = +1$, sonst jedoch der zugehörigen Γ_2 aufstellen. Dieses System mag zuvörderst aus allen acht bez. vier Substitutionsarten zusammengesetzt sein. Indess bemerke man, dass jede überhaupt eintretende Art auch Substitutionen für $\Gamma_{(n)}$ liefert. Indem wir also eine der letzteren mit jener zum Repräsentanten aufgegriffenen Substitution combiniren und lieber die so entspringende Substitution in das Repräsentantensystem wählen, wird letzteres ausschliesslich aus Operationen S aufgebaut sein. Von hieraus entspringt durch eine elementare Zwischenrechnung der Satz: *Der Index der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{(n)}$ in Bezug auf die Gesamtgruppe $\Gamma_{(q,r)}$ ist im Falle $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = 1$ identisch mit der Anzahl modulo n incongruenter Substitutionen S , in den übrigen sieben Fällen ist er das Doppelte dieser letzteren Anzahl.*

Nun aber lässt sich auf's Leichteste angeben, auf, wieviel incongruente Substitutionen die Γ_8 der S modulo n zurückkommt, falls q und r quadratische Reste von n sind. Hier verstehe man einfach unter $\sqrt{q}, \sqrt{r}$ jeweils eine der beiden ganzen Zahlen mod. n , deren Quadrate $\equiv q$ bez. r sind und brauche das Symbol 2^{-1} modulo n im bekannten Sinne. Dann liefert die einzelne Substitution S vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo n :

$$(7) \quad \begin{cases} (a + b\sqrt{q}) 2^{-1} \equiv \alpha, & (c\sqrt{r} + d\sqrt{qr}) 2^{-1} \equiv \beta, \\ (-c\sqrt{r} + d\sqrt{qr}) 2^{-1} \equiv \gamma, & (a - b\sqrt{q}) 2^{-1} \equiv \delta, \end{cases}$$

welche eine mit 1 congruente Determinante bilden $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$, und umgekehrt liefert jedes solche Zahlenquadrupel offenbar eine Classe modulo n congruenter Substitutionen S : *Die Anzahl modulo n unterschiedener Substitutionen S ist gleich der Anzahl bezüglich n incongruenter Moduls substitutionen, d. i. sie ist $\frac{n(n^2-1)}{2}$. Aber zugleich ist durch den eingeschlagenen Beweisgang ohne Weiteres evident geworden, dass die durch (7) begründete Beziehung der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ modulo n incongruenter Substitutionen S auf die an analoger Stelle bei den Modulfunctionen eintretende $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ holodrischen Isomorphismus beider Gruppen darstellt. *)*

*) Auch dieser Satz war Gegenstand der Correspondenz des Hrn. Bianchi mit mir, und ich wollte hier jedenfalls ausdrücklich hervorheben, dass Hr.

Dieser merkwürdige Satz ist hier freilich nur erst in den beiden Fällen

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = 1 \quad \text{und} \quad -\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = 1$$

bewiesen; es ist aber kaum zweifelhaft, dass er ganz allgemein gültig ist. In der grösseren Zahl der übrigen Fälle gelingt der Beweis leicht durch Gebrauch der Galois'schen imaginären Zahlen; inzwischen scheinen einzelne Fälle sich auch auf die Weise noch nicht erledigen zu lassen. Ich will hier nicht auf die Discussion aller dieser Einzelfälle eingehen, um so mehr als fortan eine weitere Specialisation unserer Untersuchung eintreten soll, dahin gehend, dass wir nur noch den Fall I, nämlich $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = 1$ berücksichtigen wollen. Die zu betrachtenden Primzahlen n sollen also nur noch gewissen arithmetischen Reihen der Differenz $8qr$ entnommen sein, wobei wir ja noch über unendlich viele in Betracht kommende n verfügen. So z. B. handelt es sich für $q = 3$, $r = 1$ um alle Primzahlen n der Form $n = 24h + 1$.

Nach dieser Beschränkung reducirt sich also die Gesamtgruppe $\Gamma^{(q,r)}$ bezüglich ihrer ausgezeichneten Untergruppe $\Gamma_{(n)}$ auf eine endliche $G_{\frac{1}{2}n(n^2-1)}$, welche direct mit der wohlbekannten Gruppe dieser Ordnung in der Theorie der Modulfunktionen holodrisch isomorph ist*). Indem wir das Fundamentalpolygon der $\Gamma^{(q,r)}$ zur geschlossenen Fläche $F_{(n)}^{(q,r)}$ umgestalten, wird diese eine reguläre Eintheilung in $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ Be-

Bianchi von seinen Untersuchungen über die automorphen Functionen der Gruppen des Textes aus das in Rede stehende interessante Resultat unabhängig und etwa zu gleicher Zeit mit mir aufgefunden hat.

*) Man könnte gegenüber dieser ganzen Entwicklung den Zweifel haben, ob sich nicht vielleicht $\Gamma^{(q,r)}$ modulo n auf eine von der Gesamtheit verschiedene Untergruppe der $G_{\frac{1}{2}n(n^2-1)}$ reduciren möchte. Inzwischen widerlegt man dies am

einfachsten auf gruppentheoretischem Wege, indem man einerseits die in ihrer Gesamtheit bekannten Untergruppen von $G_{\frac{1}{2}n(n^2-1)}$ heranzieht, sowie anderer-

seits z. B. die von den Symmetriekreisen $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ und den Ecken der ω -Halbebenenentheilung herrührenden Operationen in der modulo n reducirten $\Gamma^{(q,r)}$ verfolgt. Da übrigens $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ von ungerader Periode (mod. n), sind, so lassen sich diese Operationen immer in der Gestalt der Substitutionen S fixiren, und aus ihnen lässt sich die ganze $G_{\frac{1}{2}n(n^2-1)}$ erzeugen. Sicher werden

also schon die Substitutionen S und demnach auch die übrigen Arten $T, U, \dots$ modulo n im Ganzen $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Typen aufweisen.

reiche tragen, welche bei den $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ eindeutigen Transformationen der Fläche in sich unter einander vertauscht werden. *) *Allen den unendlich vielen beim einzelnen n eintretenden Werthcombinationen (q, r) entsprechen solcherweise ebenso viele im Wesen verschiedene regulär-getheilte Flächen, die gleichwohl alle zur nämlichen Gruppe $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ der Transformationen in sich Anlass geben.* Um dies noch deutlicher zu sehen, gestalte man $F_{(n)}^{(q,r)}$ in eine $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ -blättrige Riemann'sche Fläche über einer Ebene um. So kommt z. B. bei $(q, r) = (3, 1)$ eine Fläche, die an drei Stellen verzweigt ist, und zwar hängen an der ersten Stelle die Blätter immer zu zweien, an der zweiten Stelle zu je vier, an der dritten zu je sechs zusammen. Dem stelle man die entsprechende Fläche der Modulfunctionen gegenüber; diese wird nicht nur im allgemeinen ein ganz anderes Geschlecht aufweisen, sondern die geometrischen Verhältnisse der Transformationen in sich gestalten sich beiderseits völlig verschieden, was man leicht in's Einzelne verfolgen wird. Einige hierauf bezügliche Ausführungen fügen wir sogleich im folgenden Paragraphen an.

2.

Einzelausführungen über die Untergruppen von $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$. Das Transformationspolygon n^{ter} Ordnung.

Die Periodicität der Operationen der $\Gamma^{(q,r)}$, modulo n betrachtet, lässt sich auf Grund bekannter Sätze ohne Weiteres angeben. Die Periode einer Substitution S ist gleich n oder ein Theiler von $\frac{n-1}{2}$ bez. $\frac{n+1}{2}$, je nachdem $(a^2 - 4)$ durch n theilbar oder Rest oder Nichtrest von n ist; bei den Substitutionen U giebt in entsprechender Weise $(a^2 - 2)$ den Ausschlag u. s. w. Als eine erste Besonderheit gegenüber der Modulgruppe haben wir zu nennen, dass in einigen Fällen auch Substitutionen der Periode vier und sechs Fixpunkte besitzen. Wir müssen in diesem Betracht einem leicht entstehenden Bedenken begegnen. Man nehme z. B. den Fall $q = 3, r = 1$, wo auf der geschlossenen Fläche drei Arten von Eckpunkten auftreten. Die Eckpunkte der ersten Art sind von vier, die der zweiten Art von acht, diejenigen der dritten endlich von zwölf Elementardreiecken umlagert. Da diese Anzahlen immer durch vier theilbar sind, so könnte man annehmen, dass es in der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ drei verschiedene Arten von Substitutionen der

*) Dass die in Rede stehende Fläche sogar eine regulär-symmetrische Theilung in $n(n^2-1)$ Bereiche trägt, verfolgen wir nicht weiter.

Periode *zwei* giebt, was doch im Widerspruch gegen die bekannte Structur der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ steht. In der That aber wird die Sachlage die

sein, dass eine einzelne Substitution der Periode zwei unter ihren Fixpunkten immer zugleich alle drei Arten von Eckpunkten der Theilung aufweisen wird. So z. B. muss für $n = 24h - 1$ die einzelne Substitution fraglicher Periode immer $22h$ Fixpunkte haben, die sich bez. zu $12h$, $6h$ und $4h$ auf die genannten drei Arten von Eckpunkten vertheilen. Man wird diess sogleich noch unmittelbar bestätigt sehen.

Neben den Eckpunkten der Theilung der Fläche $F_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ nehmen

die Symmetrielinien derselben besondere Aufmerksamkeit in Anspruch; man wird insbesondere die Diedergruppe aufsuchen wollen, welche die einzelne Symmetrielinie in sich transformirt. Um auch hier gleich wieder den Fall $q = 3$, $r = 1$ heranzuziehen, so unterscheiden wir *drei* Arten von Symmetriekreisen. Von der ω -Halbebene her entnehmen wir als Beispiele dieser drei Arten die imaginäre Axe, den Einheitskreis und den nächst grösseren mit letzterem concentrischen Kreis der ursprünglichen Halbebenenentheilung. Zu diesen drei Kreisen gehören cyklische Gruppen hyperbolischer Substitutionen, als deren Erzeugende ich der Reihe nach die folgenden drei berechne:

$$(1) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3}, & 0 \\ 0, & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}, & \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Da 2 und also auch 2^{-1} Rest von n ist, so erkennt man sofort, dass die Periode aller drei Substitutionen (1) die Zahl $\frac{n-1}{2}$ theilt. Setze man nun z. B. $n = 23$, so muss eine einzelne Substitution der Periode 11 immer zugleich Symmetrielinien aller drei Arten in sich transformiren. Ueberdies muss offenbar jede Symmetrielinie aus 2.11 Elementardreiecksseiten bestehen, und dies hat für die Substitutionen von der Periode 2 interessante Folgen. Wir wollen die Eckpunkte der Theilung in der oben charakterisirten Folge als Punkte a, b, c bezeichnen. Durch den einzelnen Punkt 0 gehen zwei Symmetrielinien, und die beiden jenem Punkte a auf diesen Linien diametral gegenüberliegenden Punkte (gleichfalls Fixpunkte der zu a gehörenden Substitution) sind bez. ein Punkt b und ein Punkt c . In demselben Sinne weist man einem Punkte b als (auf den in Betracht kommenden Symmetrielinien) diametral gegenüberliegend zwei Punkte a und zwei Punkte c nach,

sowie endlich jedem Punkte c drei a und drei b . Indem man bemerkt, dass mit dem einzelnen Eckpunkte auch jeder gegenüberliegende ein Fixpunkt der zugehörigen Substitution der Periode zwei ist, entspringen die obigen Anzahlen 12, 6, 4 der Fixpunkte sofort aufs Neue.

Für die Anwendungen, die wir weiterhin entwickeln wollen, sind diejenigen $(n + 1)$ gleichberechtigten Congruenzgruppen Γ_{n+1} des Index $(n + 1)$ besonders wichtig, welche den halbmetacyklischen Untergruppen der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ entsprechen. Wie in der Theorie der Modul-

functionen bevorzuge ich auch hier diejenige unter ihnen, welche durch die Bedingung $\gamma \equiv 0, (\text{mod. } n)$ charakterisirt ist. Diese Untergruppe gestattet noch eine etwas andere, den vorliegenden Verhältnissen mehr entsprechende Definition. Man nehme an, dass sich die Zahl $\left(\frac{-1}{n}\right)n$ in das Product zweier complexen Primfactoren:

$$(2) \quad \left(\frac{-1}{n}\right)n = (e_1 + e_2\sqrt{q})(e_1 - e_2\sqrt{q})$$

mit ganzzahligen e_1, e_2 zerlegen lässt, Factoren, die ich auch wohl kurz e und $\bar{e}$ nenne.*) Braucht man $\sqrt{q} \pmod{n}$ in der schon genannten Bedeutung und denkt das Vorzeichen fest fixirt, so wird einer der beiden Factoren $e, \bar{e} \equiv 0 \pmod{n}$ sein, aber nicht beide. Man denke das Vorzeichen von e_2 so gewählt, dass

$$(3) \quad \bar{e} = e_1 - e_2\sqrt{q} \equiv 0 \pmod{n}$$

zutrifft. Ist umgekehrt die ganze complexe Zahl $(a - b\sqrt{q})$ des Körpers $(1, \sqrt{q})$, modulo n betrachtet, $\equiv 0$, so enthält sie den Theiler $\bar{e}$. Ist nämlich a bereits durch n theilbar, so gilt dies auch von b , und der Satz ist bewiesen. Ist aber a und also auch b prim gegen n , so definire man zwei ganze Zahlen μ, ν durch $a \equiv e_1\mu, b \equiv e_2\nu, (\text{mod. } n)$. Es folgt dann aus $a - b\sqrt{q} \equiv \mu(e_1 - e_2\nu\mu^{-1}\sqrt{q}) \equiv 0$ sofort $\mu \equiv \nu$; schreibt man also $a = e_1\nu + f_1n, b = e_2\nu + f_2n$, wo f_i ganze rationale Zahlen sind, so kommt, wie behauptet wurde:

$$a - b\sqrt{q} = \nu(e_1 - e_2\sqrt{q}) + (f_1 - f_2\sqrt{q})n.$$

*) Hierzu ist zu bemerken, dass in einigen Fällen q (nämlich immer dann, wenn es nur eine Classe von ganzzahligen binären quadratischen Formen der positiven Determinante q giebt) die gekennzeichnete Zerlegung unter den für uns gültigen Voraussetzungen stets möglich ist. In den übrigen Fällen trifft dies freilich nicht mehr durchweg zu; aber es giebt alsdann noch unendlich viele Primzahlen n , welche die fragliche Zerlegung gestatten, ein Satz, der (in anderer Form) von Dirichlet aufgestellt und von Hrn. H. Weber ausführlich begründet ist (cf. „Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist,“ Math. Ann. Bd. 20 (1882)). Der Einfachheit wegen beziehen wir die Entwicklung des Textes nur auf diese zerlegbaren n ; in den übrigen Fällen hat man zu entsprechenden Entwicklungen die Begriffsbestimmungen der Idealtheorie heranzuziehen.

Alle Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$, bei denen im Zähler des zweiten Coefficienten eine durch $e = e_1 + e_2\sqrt{q}$ theilbare ganze Zahl steht, und also im Zähler des dritten Coefficienten eine durch $\bar{e} = e_1 - e_2\sqrt{q}$ theilbare ganze complexe Zahl des Körpers $(1, \sqrt{q})$, bilden eine Untergruppe Γ_{n+1} , welche jene oben besonders herausgegriffene Congruenzgruppe ist.

Das Fundamentalpolygon F_{n+1} dieser Γ_{n+1} benennen wir aus im folgenden Artikel ersichtlich werdenden Gründen als *Transformationspolygon n^{ter} Ordnung*. Da die zur imaginären ω -Axe gehörenden hyperbolischen Substitutionen stets der Γ_{n+1} angehören, so werden wir F_{n+1} zwischen dem Einheitskreise und dem übernächst grösseren, mit ihm concentrischen Symmetriekreise einlagern können (cf. die Figuren). Auch im übrigen bietet es nicht besondere Schwierigkeit, gegebenen Falls das Transformationspolygon zu construiren. Man wolle bemerken, dass ein Repräsentantensystem der Γ_{n+1} modulo n auf die $(n+1)$ Substitutionen $1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix}$ mit $\nu \equiv 0, 1, \dots, n-1$ zurückkommt. Reducirt sich aber eine einzelne Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$ modulo n auf $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit einem gegen n primen γ , so giebt es eine mit $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$ congruente Substitution in $\Gamma^{(q,r)}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } n)$$

zutrifft. Hier ist $\delta' \equiv \gamma^{-1}$ und also $\nu \equiv \gamma^{-1}\delta$, (mod. n); so ordnet man jeder Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$, die nicht schon selbst der Γ_{n+1} angehört, sehr leicht ein ν zu, welches wir sogleich auch als Nummer dem zur Substitution gehörigen Bereich der Halbebene zuertheilen. An den Ausgangsbereich, der die Nummer ∞ bekommt, reihe man jetzt weiter ν Bereiche mit den Nummern $0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Diese Arbeit wird bedeutend erleichtert, wenn man zugleich auf die *Verzweigung* des Transformationspolygons Bedacht nimmt. In manchen Fällen lässt sich dieselbe ohne Weiteres angeben. So z. B. verfolge man in dem oft herangezogenen Beispiele $(3, 1)$ die Transformationsgrade $n = 24h - 1$. Die halbmetacyklischen $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ ent-

halten dann weder cyclische G_2 noch G_3 ; sagen wir also gleich: Die $(n+1)$ -blättrige Fläche über der Ebene ist nur an drei Stellen verzweigt; und zwar finden sich an der ersten Stelle $\frac{n+1}{2}$ Verzweigungspunkte zu je zwei, an der zweiten $\frac{n+1}{4}$ Verzweigungspunkte zu je vier, endlich an der dritten $\frac{n+1}{6}$ Verzweigungspunkte zu je sechs Blättern.

Für den Fall $n = 23$ habe ich bei $q = 3$, $r = 1$ das Transformationspolygon F_{24} wirklich construiert und in Figur 4 der Tafel aufgezeichnet, und zwar unter gleichzeitiger Angabe der Zusammengehörigkeit der Randcurven. Dass sich die Verzweigung dieses Polygons unter das soeben angegebene allgemeine Resultat subsumirt, wird man leicht überblicken. Zu einer weiteren Bestätigung für die Richtigkeit der Figur habe ich die erzeugenden Substitutionen der Γ_{24} alle berechnet. Es sind in der in der Figur angegebenen Folge die sieben Substitutionen:

$$(4) \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & 0 \\ 0, & \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}}, & \frac{5 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-5 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{7 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{7 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{3}, & -5 - 4\sqrt{3} \\ -5 + 4\sqrt{3}, & -5 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{3}, & 5 + 4\sqrt{3} \\ 5 - 4\sqrt{3}, & -5 + \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$v_6 = \begin{pmatrix} \frac{2 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{-7 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{7 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{2 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_7 = \begin{pmatrix} \frac{2 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{7 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-7 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{2 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Formel (2) lautet im gegenwärtigen Falle

$$-23 = (2 - 3\sqrt{3})(2 + 3\sqrt{3}),$$

und nun finden wir für die Mittelcoefficienten der Substitutionen (4): $5 + 4\sqrt{3} = -(2 + \sqrt{3})(2 - 3\sqrt{3})$, $7 + \sqrt{3} = -(1 + \sqrt{3})(2 - 3\sqrt{3})$, womit sich der obige allgemeine Satz über die Definition der Γ_{n+1} bestätigt. Uebrigens geht das Transformationspolygon F_{n+1} durch Spiegelung an der imaginären Axe in sich selbst über, während durch Spiegelung an dem mitten durch dasselbe hindurchziehenden Kreise um $\omega = 0$ aus F_{n+1} das Polygon der durch $\beta \equiv 0, (\text{mod. } n)$ zu charakterisirenden Γ'_{n+1} entspringt. — Weit einfacher als das hiermit durchgeführte Beispiel ist übrigens $n = 7$, $(q, r) = (11, 1)$, wo sich das Transformationspolygon aus 2.8 Elementarvierecken aufbaut; es ist hier leider nicht Raum, dasselbe ausführlich zu beschreiben. Für $n = 8h \pm 3$ tritt eine Γ_{2n+2} an Stelle der bisher betrachteten Gruppe; die hierher gehörigen einfachsten Beispiele sind $n = 3$, $q = 7$, $r = 1$; $n = 3$, $q = 19$, $r = 1$; $n = 5$, $q = 11$, $r = 1$ u. s. w. "

3.

Die Transformation n^{ter} Ordnung und die zugehörige Hypermodulargleichung.

Es fand sich am Schlusse des Artikels I, 3, dass die Gruppen $\Gamma^{(q,r)}$ für die gesammten, von uns überhaupt zugelassenen Werthe q, r zum Geschlechte Null gehören. Es hat das ohne Weiteres den Fundamentalsatz zur Folge:

Alle zur Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ gehörenden automorphen Functionen sind rational in einer unter ihnen darstellbar, welch' letztere wir $J(\omega)$ nennen und dadurch fixiren, dass sie in drei vorgeschriebenen Ecken des Ausgangsraums die Werthe $J=0, 1, \infty$ annimmt; beispielsweise sollen diese Werthe bei $q=3, r=1$ in den drei Ecken a, b, c des Ausgangsraumes stattfinden.

Jetzt verstehe man unter $w(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ eine Substitution, welche ihrer äusseren Gestalt nach mit einer der acht Substitutionsarten der $\Gamma^{(q,r)}$ übereinstimmt, nur dass ihre Determinante $(ad - bc)$ nicht 1 sondern n sein soll, die Zahl n in der bisherigen Bedeutung gebraucht. Den Uebergang von $J(\omega)$ zu $J'(\omega) = J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$ bezeichnen wir als Transformation n^{ter} Ordnung von $J(\omega)$, wie auch im Einzelfall die Substitution w gewählt sein mag.*)

Um zu untersuchen, zu welcher Untergruppe von $\Gamma^{(q,r)}$ die Function $J'(\omega) = J(w(\omega))$ gehört, sei v irgend eine Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$. Es ist dann $J'(v(\omega)) = J'(\omega)$ stets und nur erfüllt, wenn $vwv^{-1} = v'$ wieder eine Substitution der Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ ist. Bei der Discussion dieser Bedingung schreibe man $w^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und bemerke überdies, dass die vier ganzen rationalen Zahlen in den Zählern der Coefficienten von w modulo 2 eben jenen Bedingungen genügen, die wir in I, 1 für die Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ namhaft zu machen hatten. Es folgt, dass auch v' eine der oft genannten acht Substitutionsgestalten zeigt, wogegen freilich v' die Determinante n^2 besitzt. Soll hiernach v' der $\Gamma^{(q,r)}$ angehören, so ist dafür hinreichend und nothwendig, dass die Zähler in den Coefficienten von v' durch n theilbar sind. Nennt man die Coefficienten von v kurz $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so kleidet sich diese Bedingung in die vier Congruenzen ein:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} ad\alpha - ac\beta + bd\gamma - bc\delta \equiv 0, \\ ab\alpha - a^2\beta + b^2\gamma - ab\delta \equiv 0, \\ cd\alpha - c^2\beta + d^2\gamma - cd\delta \equiv 0, \\ bca - ac\beta + bd\gamma - ad\delta \equiv 0, \end{array} \right\} \pmod{n},$$

*) Vergl. auch Poincaré l. c.

von denen übrigens keine entbehrlich ist. Dies sind gerade die nämlichen Congruenzen, welche an analoger Stelle in der Theorie der elliptischen Functionen bei Transformation n^{ter} Ordnung der absoluten Invariante $J(\omega)$ auftraten. Die Congruenzen (1) definirten damals eine der $(n+1)$ gleichberechtigten Γ_{n+1} der Modulgruppe. Da nun die Operationen unserer jetzigen $\Gamma_{n+1}^{(g,r)}$ offenbar *alle* den Bedingungen (1) genügen, so werden bei dem oben begründeten holodrischen Isomorphismus der jetzigen $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ auf die $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ der Modulfuctionen die

Congruenzen (1) innerhalb $\Gamma_{n+1}^{(g,r)}$ eine mit der Γ_{n+1} der vorigen Nummer gleichberechtigte Congruenzgruppe n^{ter} Stufe des Index $(n+1)$ definiren.

Zufolge dieses Resultats giebt es eine mit $J'(\omega)$ gleichberechtigte Function, die zur Γ_{n+1} des vorigen Artikels gehört. Indem wir offenbar diese letzte Function gleich selbst wieder $J(\omega(\omega))$ nennen dürfen, wollen wir die hier insbesondere eintretenden Transformationen näher betrachten. Soll aber die einzige Bedingung $\gamma \equiv 0$ zur Befriedigung der vier Congruenzen (1) schon ausreichen, so muss bei dem willkürlich bleibenden β offenbar $a \equiv c \equiv 0, \pmod{n}$ sein, womit denn auch alle Congruenzen (1) erfüllt sind. Es sind also die in den Zählern von a und c auftretenden ganzen complexen Zahlen Multipla der Zahl $(e_1 - e_2\sqrt{q})$, so dass sich weiter in b , sowie d der Factor $(e_1 + e_2\sqrt{q})$ findet. Schreiben wir hiernach

$$\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1 - e_2\sqrt{q}), & 0 \\ 0, & (\frac{-1}{n})(e_1 + e_2\sqrt{q}) \end{pmatrix},$$

so hat offenbar $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine der acht oft genannten Gestalten und ist zudem von der Determinante 1; diese Substitution gehört also der $\Gamma_{n+1}^{(g,r)}$ an. Die gesuchte mit J' gleichberechtigte Function ist demnach

$$(2) \quad J\left(\left(\frac{-1}{n}\right) \cdot \frac{e_1 - e_2\sqrt{q}}{e_1 + e_2\sqrt{q}} \cdot \omega\right).$$

Das hiermit gewonnene merkwürdige Resultat kleiden wir in den Satz:
Durch Transformation n^{ter} Ordnung von $J(\omega)$ entspringen insgesamt nur $(n+1)$ unterschiedene Grössen $J'(\omega)$, die alle mit (2) gleichberechtigt sind. Diese Grössen sind die Wurzeln einer irreducibeln algebraischen Relation:

$$(3) \quad f(J', J) = 0,$$

in welcher J' und J bis auf den Grad $(n+1)$ ansteigen, und die ich mit Hrn. Bianchi als die zur n^{ten} Ordnung gehörende Hypermodulargleichung bezeichne. Unter Gebrauch des gleich zu nennenden Haupt-

repräsentanten erkennt man gerade wie in der Theorie der elliptischen Functionen, dass die linke Seite der Hypermodulargleichung, als ganze Function ihrer beiden Argumente J', J geschrieben, in ihnen *symmetrisch* ausfällt. Die Gleichung (3) stimmt demnach mit der Modulargleichung in Grad, Vertauschbarkeit der Argumente und Monodromiegruppe überein; sie sind aber von einander verschieden in Geschlecht und Verzweigung. Im Anschluss an die hiermit befürwortete Terminologie werde ich übrigens die automorphe Function $J(\omega)$ gelegentlich als einen *Hypermodul* bezeichnen.

Nichts hindert, dass wir die Transformationstheorie der zur $\Gamma^{(q,r)}$ gehörenden automorphen Functionen in derselben Weise ausbauen, wie die Transformation der Modulfunctionen. Die gesammten Transformationen n^{ter} Ordnung wird man nach wohlbekanntem Princip in $(n+1)$ Classen theilen und jegliche Classe durch eine zweckmässig ausgewählte Transformation repräsentiren. Für die Γ_{n+1} des vorigen Artikels wählen wir etwas verschieden von Formel (2):

$$(4) \quad R_0(\omega) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{e_1 + e_2 \sqrt{q}}{(e_1 - e_2 \sqrt{q}) \omega}$$

und benennen R_0 als *Hauptrepräsentant*. Für die übrigen Repräsentanten haben wir dann $R_i = R_0 v_i$, wo v_i ein Repräsentantensystem der Γ_{n+1} durchläuft; weiter sind alle Transformationen der $(i+1)^{\text{ten}}$ Classe $v R_i$, wo v die $\Gamma^{(q,r)}$ zu beschreiben hat.

Die Auswahl des Hauptrepräsentanten (4) ist deshalb besonders günstig, weil $\omega' = R_0(\omega)$ eine Substitution der Periode *zwei* darstellt, und weil andererseits durch R_0 die Gruppe Γ_{n+1} direct in sich transformirt wird. Dies hat auch geometrisch einige wichtige Folgen: Man übe auf die ω -Halbebene die Substitution $\omega' = R_0(\omega)$ aus und bringe die so entstehende neue Gestalt der Halbebene mit der ursprünglichen zur Coincidenz. Da die Kreisbogentheilung durch $\omega' = R_0(\omega)$ nicht in sich übergeht, so wird die Halbebene nunmehr von einer doppelten Theilung überlagert sein, die wir offenbar als ω -Theilung und ω' -Theilung unterscheiden können. Die letztere wird durch die Substitutionen der Gruppe $\Gamma' = R_0 \Gamma R_0^{-1}$ in sich übergeführt, und nun wolle man beachten, dass Γ_{n+1} die gemeinsame Untergruppe von Γ und Γ' vorstellt. Schneidet man also aus der ω -Theilung ein Transformationspolygon F_{n+1} aus, so wird dasselbe gerade auch aus $(n+1)$ ω' -Bereichen zusammengesetzt sein (die freilich am Rande zerstückt erscheinen) und wird solcherweise zugleich für Γ' ein Transformationspolygon F'_{n+1} vorstellen.

Legen wir das Polygon zur geschlossenen Fläche zusammen, so wird uns dieselbe vermöge ihrer zweifachen Eintheilung in je $(n+1)$ Bereiche das anschauliche Bild für die Correspondenz ihrer beiden

algebraischen Functionen J' , J liefern, die durch die Hypermodulargleichung an einander gebunden sind. Für die geschlossene Fläche F_{n+1} aber bedeutet R_0 eine Transformation (erster Art) von der Periode *zwei* in sich. Diese Transformation der Fläche in sich permutirt die beiden Eintheilungen mit einander und stellt sich analytisch einfach durch Vertauschung von J und J' dar. — In welcher inniger Beziehung die doppelt-getheilte Fläche oder auch gleich das doppelt getheilte Polygon der Halbebene zur Theorie der binären quadratischen Formen des vorigen Abschnitts steht, haben wir nun zu erörtern.

IV.

Smith'sche Curven und singuläre Hypermoduln.

1.

Die zur n^{ten} Ordnung gehörende Smith'sche Curve und ihre Beziehung zu den Formen positiver Determinante.

Bevor wir die Anwendung der Transformationstheorie auf die in Abschnitt II betrachteten Formen (κ, λ, μ) auseinandersetzen, ist es zweckmässig, eine kleine Ergänzung betreffs der Schreibweise dieser Formen hier vorausszuschicken. Man erinnere sich der vier Fälle, welche wir in II, 3 zu unterscheiden hatten; in den drei letzten Fällen wies (κ, λ, μ) die Factoren $\sqrt{q}$ bez. $\sqrt{r}$, $\sqrt{qr}$ auf. Wir wollen uns entschliessen, diese Factoren fortzuheben; und das kommt darauf hinaus, dass wir in den vier Fällen die nachfolgende, sofort verständliche Bezeichnungsweise gebrauchen:

- $$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} \kappa = \kappa_0, \lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0; & D_0 = \kappa_0^2 - q\lambda_0^2 + r\mu_0^2, \\ (\kappa_0, \lambda_0, \mu_0) = (\kappa_0 + \lambda_0\sqrt{q})\omega^2 + 2\mu_0\sqrt{r}\omega - (\kappa_0 - \lambda_0\sqrt{q}); \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} \kappa = q\kappa_1, \lambda = \lambda_1, \mu = q\mu_1; & D_1 = q\kappa_1^2 - \lambda_1^2 + qr\mu_1^2, \\ (\kappa_1, \lambda_1, \mu_1) = (\lambda_1 + \kappa_1\sqrt{q})\omega^2 + 2\mu_1\sqrt{qr}\omega + (\lambda_1 - \kappa_1\sqrt{q}). \end{cases} \\ \text{(III)} \quad & \begin{cases} \kappa = r\kappa_2, \lambda = r\lambda_2, \mu = \mu_2; & D_2 = r\kappa_2^2 - qr\lambda_2^2 + \mu_2^2, \\ (\kappa_2, \lambda_2, \mu_2) = (\kappa_2 + \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r}\omega^2 + 2\mu_2\omega - (\kappa_2 - \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r}; \end{cases} \\ \text{(IV)} \quad & \begin{cases} \kappa = qr\kappa_3, \lambda = r\lambda_3, \mu = q\mu_3; & D_3 = qr\kappa_3^2 - r\lambda_3^2 + q\mu_3^2, \\ (\kappa_3, \lambda_3, \mu_3) = (\lambda_3 + \kappa_3\sqrt{q})\sqrt{r}\omega^2 + 2\mu_3\sqrt{q}\omega + (\lambda_3 - \kappa_3\sqrt{q})\sqrt{r}. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Entwicklungen des Abschnitts II über Transformation der Formen in sich oder in gleichartige Formen sind offenbar von Factoren, die wir den Formen anhängen oder nehmen, ganz unabhängig. Insbesondere folgt, dass die ternären Substitutionen von $(\kappa_0, \lambda_0, \mu_0)$, auf eines der drei anderen Variabelensysteme $(\kappa_i, \lambda_i, \mu_i)$ umgerechnet,

wiederum ganzzahlig ausfallen müssen. In ihrer ersten Gestalt werden also die ternären Substitutionen die Bedingungen

$$a_{12} \equiv a_{32} \equiv 0, \pmod{q}, \quad a_{13} \equiv a_{23} \equiv 0, \pmod{r}$$

befriedigen müssen, was auch ein Blick auf (5) in II, 1 sofort bestätigt. Infolge unserer Massnahme haben wir bei der einzelnen Determinante D jetzt immer vier Formarten zu unterscheiden, und es ist sofort evident, dass eine einzelne Form immer nur wieder mit einer gleichartigen Form äquivalent sein kann; natürlich brauchen keineswegs beim einzelnen D alle vier Arten aufzutreten.

Die Eckpunkte des Ausgangsraums, in welchen wir für die automorphe Function $J(\omega)$ die Werthe $0, 1, \infty$ vorschrieben, sollen jedenfalls durchgehends Schnittpunkte von Symmetriekreisen der $\Gamma(q, r)$ sein. Es wird alsdann $J(\omega)$ auf der imaginären Axe, wie überhaupt auf allen Symmetriekreisen allenthalben reell sein, und also müssen die numerischen Coefficienten der Hypermodulargleichung durchgängig reell sein. In dieser Gleichung führe man jetzt die Transformation aus:

$$(1) \quad J = X + iY, \quad J' = X - iY,$$

wodurch die Hypermodulargleichung übergeht in:

$$(2) \quad f(X - iY, X + iY) = F(X, Y) = 0.$$

Da f seine beiden Argumente vertauschungsfähig enthielt, so weist $F(X, Y)$ nur gerade Potenzen von Y auf und hat demnach gleichfalls ausschliesslich reelle Coefficienten. Deutet man J', J als Cartesische Coordinaten, so benenne man die durch $f(J', J) = 0$ dargestellte Curve als Hypermodularcurve; andererseits benennen wir die in den Coordinaten X, Y durch $F(X, Y) = 0$ dargestellte Curve als *Smith'sche Curve**). Diese beiden beim n^{ten} Transformationsgrad auftretenden Curven sind durch (1) collinear auf einander bezogen; die zur n^{ten} Ordnung gehörende Smith'sche Curve ist sonach irreducibel und besitzt also insbesondere keine doppelt zählende Curvenzüge.

Es sind nun vor allen Dingen die *reellen* Punkte der Smith'schen Curve, denen unsere Untersuchung gilt. Wir denken uns diese Punkte in der XY -Ebene, d. i. in der Ebene der Variabeln J wirklich markirt, wo sie dann gewisse reelle Curvenzüge oder auch isolirte Punkte vorstellen mögen. Man sieht aber sofort: *Die so gezeichneten Punkte der J -Ebene sind gerade alle diejenigen, für welche wenigstens eine der zugehörigen Wurzeln J' der Hypermodulargleichung einen zu J conjugirt complexen Werth aufweist.* An diesen Umstand knüpft die

*) Die hier im Texte zu gebende Ideenentwicklung ist im Bereich der Modulfunctionen und also der ganzzahligen quadratischen Formen von Stephen Smith angegeben worden, was die im Texte gebrauchte Bezeichnung rechtfertigen mag; man vergl. übrigens die bezüglichen im Bande II der „Modulfunctionen“ zu gebenden Citate.

nachfolgende arithmetische Betrachtung, zu deren Einleitung wir die J -Ebene vermöge $\omega(J)$ auf den Ausgangsraum der $\Gamma^{(2,r)}$ conform abbilden. Dabei geht der reelle Theil der Smith'schen Curve in gewisse Linienstücke (oder auch Punkte) des Ausgangsraumes über, und die Bedeutung der letzteren wollen wir jetzt allererst erklären.

Greifen wir die einzelne Wurzel $J(\omega(\omega))$ der Hypermodulargleichung auf, so hat dieselbe im Punkte ω des Ausgangsraumes stets und nur dann einen mit $J(\omega)$ conjugirt complexen Werth, falls sich eine der Bedingung $v\omega(\omega) = -\bar{\omega}$ genügende Substitution v in der Gruppe $\Gamma^{(2,r)}$ auffinden lässt. Fassen wir $v\omega$ zur Transformation n^{ter} Ordnung $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ zusammen, so schreibt sich die ausgesprochene Bedingung explicite:

$$C\omega\bar{\omega} + D\bar{\omega} + A\omega + B = 0.$$

Da A, B, C, D reelle Zahlen sind, so kann diese Gleichung für einen Punkt ω des Ausgangsraumes nur dann bestehen, wenn $A = D$ ist; sie ist dann aber sogleich für alle Punkte des Kreisbogens:

$$(3) \quad C(x^2 + y^2) + 2Ax + B = 0$$

erfüllt. Man nehme nun an, $v\omega$ habe die Gestalt S ; dann ist unter den vier ganzen rationalen Zahlen a, b, c, d dieser Substitution die zweite Null, und also sind die drei übrigen gerade. Setzen wir also:

$$c = -2\kappa_2, \quad d = 2\lambda_2, \quad a = 2\mu_2,$$

so geht die Gleichung (3) in die folgende über:

$$(4) \quad (\kappa_2 + \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r}(x^2 + y^2) + 2\mu_2x - (\kappa_2 - \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r} = 0.$$

Ersichtlich haben wir hier den repräsentirenden Halbkreis einer Form $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ gewonnen; dieselbe hat die positive Determinante n und ist reducirt, insofern ja der Halbkreis (4) den Ausgangsraum durchsetzen soll. Hat des weiteren $v\omega$ die Gestalt einer Substitution T, S', T' , so kommen wir zu einem völlig gleichlautenden Resultate, nur dass jetzt die reducirt Form der Determinante n bez. der vierten, ersten oder zweiten Art (p. 95) angehört. Zieht man jetzt auch die Gestalten U', V', U, V heran, so entspringen wieder reducirt Formen der vier Arten, nun jedoch der positiven Determinante $2n$.

Das erhaltene Resultat ist sofort der Umkehrung fähig. Jede reducirt Form der Determinante n oder $2n$ liefert eine Transformation n^{ten} Grades w , welche der Gleichung $w(\omega) = -\bar{\omega}$ genügende Punkte ω des Ausgangsraumes ergiebt. So z. B. gewinnen wir von einer Form $(\kappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ der Determinante $2n$ aus die Transformation n^{ter} Ordnung:

$$(5) \quad w(\omega) = \frac{\frac{\mu_2}{V_2}\omega + \frac{-\kappa_2\sqrt{r} + \lambda_2\sqrt{qr}}{V_2}}{\frac{\kappa_2\sqrt{r} + \lambda_2\sqrt{qr}}{V_2}\omega + \frac{\mu_2}{V_2}},$$

welche die Gestalt einer Substitution U besitzt. *Die Gesamtheit aller reellen Punkte der zur n^{ten} Ordnung gehörenden Smith'schen Curve stellt also, auf den Ausgangsraum übertragen, dortselbst das System aller zu den reducirten Formen der Determinanten n und $2n$ gehörenden Kreis-segmente vor.* Indem wir uns aber an die Zusammenordnung dieser Kreissegmente zu den geschlossenen Ketten erinnern, entspringt bei Rückgang vom Ausgangsraume zur complexen J -Ebene (unter Vorbehalt einer gleich folgenden Ergänzung) der nachfolgende Hauptsatz: *Die Smith'sche Curve $F = 0$ weist sovieler geschlossene, allenthalben stetig gekrümmte reelle Züge auf, als es Formclassen der positiven Determinanten n und $2n$ giebt.* Zerschneidet man die reelle J -Axe längs derjenigen Stücke, welche beim Fortgang zum Ausgangsraum offene Randcurven desselben werden, so wird dadurch jeder reelle Zug in sovieler Stücke geschnitten, als die zugehörige Formenperiode reducirte Formen enthält.

Die Ergänzung, welche noch nöthig ist, betrifft die sich selbst inversen Classen. Da die Smith'sche Curve keine doppelt zählenden Curvenzüge aufweist, so kommt in dem soeben ausgesprochenen Hauptsatze unter zwei inversen Formen immer nur eine zur Geltung. Ist nun eine Classe sich selbst invers, so war die zugehörige Kette der Kreisbogen nur erst dadurch zu einer geschlossenen geworden, dass jedes einzelne Segment zweimal (in entgegengesetzter Richtung) durchlaufen wurde. Der betreffende Zug von $F = 0$, für sich betrachtet, wird also nicht geschlossen sein; Anfangs- und Endpunkt werden vielmehr in zwei singulären *) Stellen J liegen, und wenn sie ja coincidiren sollten, so würde doch der betrachtete Curvenzug dortselbst eine stetige Krümmung im allgemeinen nicht aufweisen. Inzwischen bemerkt man doch aus dem Bisherigen leicht, dass sich der in Rede stehende Curvenzug über jeden singulären Punkt hinaus unter *stetiger* Krümmung weiter fortsetzt. Indem wir also noch betonen, dass die hier zur Geltung kommenden singulären Punkte J diejenigen sind, deren zugehörige elliptische Substitutionen eine *gerade* Periode aufweisen, haben wir das ergänzende Resultat auszusprechen: *Sollte ein reeller Zug der Smith'schen Curve durch singuläre Punkte fraglicher Art gehen, so entspricht jedem zwischen zwei aufeinanderfolgenden solchen Punkten liegenden Theile dieses Curvenzuges eine sich selbst inverse Classe.*

Durch Rückgang zur ω -Halbebene entspringt der nachfolgende Satz: Zieht der repräsentirende Halbkreis einer Form der Determinante n oder $2n$ durch den Fixpunkt einer elliptischen Substitution der Periode 2ν , und man construirt denjenigen zur reellen Axe orthogonalen

*) Es seien damit für den Augenblick kurz diejenigen Punkte J bezeichnet, welche Fixpunkten elliptischer Substitutionen der ω -Halbebene entsprechen.

Halbkreis, welcher jenen ersten im fraglichen Fixpunkt unter dem Winkel $\frac{\pi}{2\nu}$ schneidet, so repräsentirt auch dieser neue Halbkreis eine Form der Determinante n oder $2n$, die übrigens im allgemeinen mit jener ersten Form nicht äquivalent ist.

2.

Uebertragung der Smith'schen Curve auf das Transformationspolygon.

Eine viel allgemeinere Auffassung der Entwicklungen des vorigen Paragraphen gewinnen wir durch Benutzung des Transformationspolygons n^{ter} Ordnung F_{n+1} . Den Uebergang zu demselben findet man in folgender Art: Wenn wir vorhin die $(n+1)$ Wurzeln der Hypermodulargleichung mit dem ursprünglichen J im Ausgangsbereich verglichen, so erreichen wir dasselbe, falls wir die eine zum Hauptrepräsentanten gehörende Wurzel $J'(\omega) = J(R_0(\omega))$ in allen $(n+1)$ Bereichen des Transformationspolygons vergleichen. Jedes beim ersten Vergleich gefundene Kreissegment des Ausgangsbereichs wird sich dann in einem und nur einem bestimmten jener $(n+1)$ Bereiche von F_{n+1} wiederfinden; was also vorher in einem einzelnen Bereich über einander geschichtet war, finden wir jetzt in $(n+1)$ Bereichen auseinandergelegt.

Wenn wir F_{n+1} zur geschlossenen Fläche umgestalten, werden sich die Punkte conjugirt complexer J, J' zu einer reellen Curve zusammenlegen, welche auf die reelle Smith'sche Curve der J -Ebene wechselseitig eindeutig bezogen ist. Indem wir sie als „die auf der Fläche F_{n+1} gelegene Smith'sche Curve“ bezeichnen, besitzen wir in der doppelten Eintheilung der Fläche F_{n+1} ein anschauliches Hilfsmittel, den Verlauf der Curve unmittelbar zu erblicken. Die ω -Bereiche sind zur Hälfte schraffirt zur Hälfte frei, und es wird immer die schraffirte Hälfte die eine, etwa positive J -Halbebene abbilden, die freie Hälfte aber die negative*). Indem ein Gleiches für die ω' -Theilung stattfindet, wird die doppelt getheilte F_{n+1} sehr viel kleinere Bereiche aufweisen, die theils frei, theils einfach, theils doppelt schraffirt sind. Die Smith'sche Curve wird immer nur durch einfach schraffirte Bereiche hindurchziehen können; wo sie eine Grenzlinie**) der einen Theilung schneidet, muss sie immer zugleich auch eine der andern Theilung kreuzen. Wofern also beide fraglichen Linien nicht coincidiren (was vereinzelt auftritt, nämlich für die reellen Züge der Hypermodularcurve), wird die Smith'sche Curve durch die Kreuzungspunkte der beiderlei

*) Man überzeugt sich leicht, dass diese Verhältnisse auch bei denjenigen $\bar{\Gamma}(q, r)$ zutreffen, die nicht mehr allein aus Spiegelungen erzeugbar sind.

**) Diese Linien sind im allgemeinen keine Symmetrielinien der Theilung.

Grenzlinsen hindurchgehen; sie setzt sich also, allgemein zu reden, aus einer Reihe von Diagonalen solcher einfach schraffirten Bereiche zusammen, welche durch die Doppeltheilung der Oberfläche entspringen.

Eine besonders elegante Deutung für die auf der geschlossenen Fläche F_{n+1} gelegene Smith'sche Curve gewinnen wir dadurch, dass wir die Transformationen der F_{n+1} in sich analytisch durch das zugehörige Functionssystem J, J' darstellen. Wir bemerkten schon wiederholt, dass F_{n+1} neben der Identität noch drei Transformationen in sich zulässt, von denen zwei von den ω -Substitutionen R_0 und A herrühren (letztere in der gewohnten Bedeutung $A(\omega) = -\bar{\omega}$ gebraucht). Vor allem wichtig ist nun für uns die dritte Transformation $R_0 A$, und indem wir die transformirten J, J' durch untere Indices auszeichnen, haben wir für dieselbe die Darstellung

$$(1) \quad (R_0 A) \quad J_1 = \bar{J}', \quad J_1' = \bar{J}.$$

$R_0 A$ stellt nun eine symmetrische Umformung der F_{n+1} in sich dar und weist als solche eine Reihe von Symmetrielinien auf der Fläche auf, die wir aus (1) einfach dadurch ableiten, dass wir das transformirte Functionssystem J_1, J_1' mit dem ursprünglichen J, J' identisch setzen*). Hier ist nun bei der Gestalt von (1) ohne weiteres evident: *Die auf F_{n+1} übertragene Smith'sche Curve stellt das System der Symmetrielinien dar, welche F_{n+1} bei ihrer symmetrischen Umformung $R_0 A$ aufweist; die Zahl dieser Symmetrielinien giebt uns also die Classenzahl der Formen der positiven Determinanten n und $2n$.* — Die Uebertragung aller dieser Sätze auf das ursprüngliche Polygon F_{n+1} , wo wir die Smith'sche Curve als eine Reihe dasselbe durchsetzender Kreisbogen wiederfinden, bietet sich von selbst dar. Insbesondere wolle man bemerken, dass die im Polygon F_{n+1} gezeichnete Smith'sche Curve nur dann durch einen Eckpunkt der ω -Theilung hindurchziehen kann, wenn eben dortselbst auch ein gleichartiger Eckpunkt der ω' -Theilung gelegen ist. Eine solche Stelle wird leicht ersichtlich auf der geschlossenen F_{n+1} nur von je zwei Elementarbereichen der einzelnen Theilung umlagert sein, und also folgt der Satz: *Soll es bei den Determinanten n oder $2n$ sich selbst inverse Classen geben, so müssen*

*) Zur Sicherstellung dieses Schlussverfahrens mag man sich übrigens die Verhältnisse veranschaulichen, die bei einer Transformation erster Art der F_{n+1} in sich eintreten. Die Fixpunkte einer solchen werden wir sicher alle erhalten, indem wir das transformirte Functionssystem mit den ursprünglichen identisch setzen. Aber dabei können wir auch noch solche fremde Punkte erhalten, deren zugehörige Werthsysteme J, J' zu jenen particulären gehören, welche mehr als einmal auf der Fläche vorkommen. Weil indessen solche Punkte eben nur einzeln vorkommen, so werden wir die besondere Rücksichtnahme auf sie im Texte ausser Acht lassen können, wo es sich doch immer um ganze festbleibende Linienzüge handelt.

auf dem Rande des Polygons F_{n+1} Fixpunkte elliptischer Substitutionen gerader Periode zu finden sein, die der Γ_{n+1} angehören; so z. B. werden bei $(q, r) = (3, 1)$ und $n = 24h - 1$ sich selbst inverse Classen überhaupt nicht auftreten.

Statt übrigens der analytischen Formulirung der geschilderten geometrischen Verhältnisse die $(n+1)$ -werthige Function J der Fläche F_{n+1} zu Grunde zu legen, können wir zu diesem Zweck auch eine geringer werthige Function z verwenden. Nur werden wir dieselbe so wählen, dass sie auf der imaginären ω -Axe durchgehends reelle Werthe aufweist und jedenfalls nicht durch die Substitution R_0 in sich transformirt wird. Es hat dies einerseits den Vortheil, dass wir z und $z'(\omega) = z(R_0(\omega))$ zu einem vollen Functionssystem der Fläche F_{n+1} wählen können, welche beiden Grössen alsdann durch eine algebraische Relation:

$$(2) \quad g(z', z) = 0$$

mit ausschliesslich reellen Coefficienten an einander gebunden sind; auf der anderen Seite stellt sich die Umformung $R_0 A$ wieder in der Gestalt: $z_1 = \bar{z}$, $z_1' = \bar{z}$ dar, so dass unter der Substitution $z = \xi + i\eta$ die auf die $\xi\eta$ -Ebene übertragene Smith'sche Curve direct durch die Gleichung:

$$(3) \quad g(\xi - i\eta, \xi + i\eta) = G(\xi, \eta) = 0$$

gegeben ist. Ist z. B. $p = 0$, so wähle man z als Hauptfunction; alsdann wird (3) einen Kreis darstellen, und es giebt demnach in diesem Falle im Bereich der Determinanten n , $2n$ entweder nur eine Formclassen oder mehrere, die dann jedoch alle sich selbst invers sind und im Sinne des vorigen Artikels zu einem System gehören. Die eindeutige Beziehung zwischen den beiden Curven $G(\xi, \eta) = 0$, $F(X, Y) = 0$ entwickelt man übrigens analytisch sehr leicht aus den Formeln

$$(4) \quad z = R'(J', J), \quad z' = R'(J, J'); \quad J = R(z', z), \quad J' = R(z, z').$$

3.

Die singulären Hypermoduln und ihre Beziehung zu den quadratischen Formen negativer Determinante.

Letzten Endes bleibt noch übrig, die Anwendung der Hypermodulargleichung auf die quadratischen Formen negativer Determinante zu skizziren, wobei gleichfalls wieder volle Analogie zu den betreffenden Entwicklungen in der Theorie der elliptischen Functionen vorliegt. Indem wir in der Hypermodulargleichung $J' = J$ setzen, entspringt eine algebraische Gleichung $f(J, J) = 0$ mit ausschliesslich numerischen Coefficienten, deren Wurzeln wir als die zur Ordnung n gehörenden singulären Hypermoduln bezeichnen. Die reellen Wurzeln von $f(J, J) = 0$

könnte man auch als die Werthe X in den Schnittpunkten der reellen Züge der Smith'schen Curve $F(X, Y) = 0$ mit der X -Axe definiren. Die Beziehung der singulären Hypermoduln zu den quadratischen Formen wird durch folgende arithmetische Ueberlegung klargelegt.

Soll der zum Punkte ω des Ausgangsraums gehörende Werth J singulärer Hypermodul n^{ter} Ordnung sein, so ist dazu hinreichend und nothwendig, dass es eine Transformation n^{ter} Ordnung $w = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ giebt, für welche die Gleichung

$$(1) \quad C\omega^2 + (D - A)\omega - B = 0$$

erfüllt ist. Hier stellt offenbar die linke Seite von (1) eine reducirte quadratische Form negativer Determinante vor; und wir müssen, um des genaueren Art und Determinante von (1) zu gewinnen, für w wieder die oft genannte achtfache Fallunterscheidung durchführen.

Hat w eine der Gestalten S, T, S', T' , so nehme man überdies in die linke Seite von (1) den Factor 2 auf und findet alsdann bez. eine Form der 4^{ten}, 3^{ten}, 2^{ten}, ersten Art (cf. p. 95); für die zugehörigen Determinanten $D = -\Delta$ findet man bez. die Zahlwerthe:

$$(2) \quad \Delta_4 = 4n - a^2, \quad \Delta_3 = 4n - qb^2, \quad \Delta_2 = 4n - rc^2, \quad \Delta_1 = 4n - qrd^2,$$

wo a die im Zähler von A stehende ganze Zahl ist, falls w die Gestalt S hat u. s. w. Hat zweitens w eine der Gestalten U, V, U', V' , so nehme man den Factor $\sqrt{2}$ in die linke Seite von (1) auf und erhält alsdann wieder eine Form der 4^{ten} bez. 3^{ten}, 2^{ten}, ersten Art, jetzt jedoch der Determinante:

$$(3) \quad \Delta_4 = 2n - a^2, \quad \Delta_3 = 2n - qb^2, \quad \Delta_2 = 2n - rc^2, \quad \Delta_1 = 2n - qrd^2.$$

Die Entwicklung ist nun wieder sofort der Umkehrung fähig. Liegt z. B. für irgend eine ganze Zahl c , für welche $\Delta_2 = 2n - rc^2 > 0$ wird, eine reducirte Form $(\kappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ zweiter Art der Determinante $-\Delta_2$ vor, so gewinnen wir von ihr aus in

$$(4) \quad w = \begin{pmatrix} \frac{c\sqrt{r} + \mu_1\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \frac{\lambda_1 - \kappa_1\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\lambda_1 + \kappa_1\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \frac{c\sqrt{r} - \mu_1\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine Transformation n^{ter} Ordnung der Gestalt U' . In derselben Weise gestaltet sich die Umkehrung auch in den übrigen Fällen. Die genauere Untersuchung der in Rede stehenden Verhältnisse erledigt sich in derselben Weise, wie in der Theorie der elliptischen Functionen. Wir finden, dass jeder reducirten Form und also jeder Formklasse einer Determinante $-\Delta_i = -2n$ oder $-4n$ immer ein einfacher Nullpunkt von $f(J, J)$ wechselweise eindeutig zugeordnet ist, jeder Formklasse einer grösseren Determinante (2), (3) jedoch ein Paar coincidirender

Nullpunkte; haben wir z. B. eine Classe vierter Art der Determinante $-\Delta_4 = -(2n - a^2)$, so entspricht der eine Nullpunkt dem positiven Zeichen von a , der andere dem negativen u. s. w. Hierbei ist jedoch noch hinzuzusetzen, dass die Formclassen, deren repräsentirende Punkte im Fixpunkte einer elliptischen Substitution der Periode ν coincidiren, nur erst zu ν ein Paar coincidirender Nullpunkte von $f(J, J)$ ergeben.

Die Anzahl einfacher Nullpunkte von $f(J, J)$ im Ausgangsraum, d. i. der Grad der Gleichung $f(J, J) = 0$ ist hiernach sofort durch eine Summe von Classenzahlen ausdrückbar. Bezeichnen wir durch $H_i(\Delta)$ die Classenzahl quadratischer Formen i^{ter} Art der Determinante $-\Delta$, wobei jedoch die Classen, deren repräsentirende Punkte Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode ν sind, nur mit $\frac{1}{\nu}$ in Anrechnung kommen sollen, so berechnet sich der Grad m der Gleichung $f(J, J) = 0$ offenbar zu:

$$(5) \quad m = \sum_{d=0, \pm 1, \dots} H_1(2n - qrd^2) + \dots + \sum_{a=0, \pm 1, \dots} H_4(2n - a^2) \\ + \sum_{d=0, \pm 1, \dots} H_1(4n - qrd^2) + \dots + \sum_{a=0, \pm 1, \dots} H_4(4n - a^2).$$

In der einzelnen dieser acht Classenzahlsummen soll der Summationsbuchstabe $d, c, \dots$ jedesmal alle ganzzahligen Werthe durchlaufen, für welche das Argument des betreffenden H_i positiv ausfällt.

Andrerseits können wir m auch als Anzahl einfacher Unstetigkeitspunkte von $f(J, J)$ im Ausgangsraum definiren, wobei dann durch Abzählung dieser Zahl und Identischsetzen derselben mit (5) eine *Classenzahlrelation* entspringen würde. Die Bestimmung von m auf diesem neuen Wege würde bei primzahligen n nicht schwer sein; im Falle $n = 12h - 1$ ist sie sogar besonders einfach. In diesem Falle werden sich auf der geschlossenen Fläche F_{n+1} die Bereiche um die Eckpunkte der Eintheilung gerade so gruppiren, wie in der ursprünglichen Eintheilung der ω -Halbebene, weil in Γ_{n+1} für diesen Fall elliptische Substitutionen nicht enthalten sein können. In den Ecken einer gewissen Art von F_{n+1} liegen die Unstetigkeitspunkte der Function J . Sollte in einem dieser Punkte auch $J' = \infty$ werden, so würde in der Umgebung dieser Stelle J, J' ein *mehrwerthiges* Functionssystem darstellen, was unmöglich ist. Der höchste Term der Hypermodulargleichung ist also $J'^{n+1} \cdot J^{n+1}$, so dass wir auf diesem functionentheoretischen Wege für m den Werth $(2n+2)$ gewinnen.

Es ist kaum fraglich, dass man auf Grundlage der bisherigen Entwicklungen der Theorie der singulären Hypermoduln eine analoge Ausbildung verleihen kann, wie sie diejenige der singulären Moduln der elliptischen Functionen erfahren hat. Diejenige Gleichung, deren

Wurzeln die „eigentlich“ zur Determinante $-\Delta$ gehörenden singulären Hypermoduln sind*), dürfte in algebraischer wie arithmetischer Rücksicht eine ähnliche Rolle spielen, wie die entsprechende Gleichung der elliptischen Functionen. Wenn übrigens die Hypermodulargleichung gegenüber der Modulargleichung nicht wesentlich neu war, insofern sie mit jener Grad und Monodromiegruppe gemein hat, so gestaltet sich dies ganz anders, wenn wir die Substitution $J' = J$ ausführen und die beiderseits entspringenden Gleichungen mit rein numerischen Coefficienten betrachten. In der That scheint's, dass die Gleichungen der singulären Hypermoduln gegenüber denjenigen der singulären Moduln, wenn auch von analogem Charakter, so doch wesentlich neu sind.

Endlich mögen wir noch überlegen, welche Ausgestaltung die bisherige Entwicklung durch consequente Heranziehung des Transformationspolygons F_{n+1} erfährt. Zur Einführung von F_{n+1} benutzen wir wieder denselben Gedankengang wie oben bei den positiven Determinanten: Statt alle $(n+1)$ Wurzeln J' im Ausgangsraum in Bezug auf ihr Identischwerden mit J zu untersuchen, betrachten wir nur die dem Hauptrepräsentanten entsprechende Wurzel J' , diese jedoch in allen $(n+1)$ Bereichen von F_{n+1} . Die Nullpunkte von $f(J, J)$, welche wir vordem alle im Ausgangsraum aufsuchten, sind jetzt auf die $(n+1)$ Bereiche von F_{n+1} vertheilt, und man erhärtet durch eine leichte Zwischenbetrachtung, dass auf der geschlossenen F_{n+1} keine zwei von diesen Nullpunkten mehr coincidiren. Wo der reelle Zug der auf F_{n+1} gelegenen Smith'schen Curve die Linien der beiderlei Eintheilungen kreuzt, ist jedesmal ein Nullpunkt mit reellem singulären Hypermodul J zu finden, dem eine *ambige* Formclasse im Bereich der Determinanten (2), (3) entspricht. Sonstige Nullpunkte liegen im Innern freier oder doppelt-schraffirter Bereiche der Doppeltheilung und ergeben nicht-ambige Classen.

Für die Berechnung der singulären Hypermoduln scheint es stets unbequem zu sein, direct die Werthe von J selbst in Erfahrung bringen zu wollen**). Das ist durchaus verständlich, da J eine $(n+1)$ -, d. i. verhältnissmässig viel-werthige Function der F_{n+1} ist. Zweckmässiger Weise wird man in den soeben auf der F_{n+1} markirten singulären Punkten die Zahlwerthe einer möglichst einfachen Function z der F_{n+1} bestimmen und sich bezüglich der singulären Werthe J auf die Darstellung $J = R(z', z)$ berufen (vergl. die Formeln des vorigen Artikels).

*) Die betreffenden Entwicklungen kommen für die elliptischen Functionen ausführlich im zweiten Bande der „Modulfunctionen“ zur Darstellung.

**) Diese Bemerkung scheint im elliptischen Gebiete z. B. auch Hr. Weber bei seinen Untersuchungen über die singulären Moduln gemacht zu haben; doch benutzt derselbe zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit eine andere Massregel, als die, welche ich im Texte befürworte.

Die fraglichen Werthe z werden wir aber einfach durch Auflösung des Gleichungssystems

$$(6) \quad R(z', z) - R(z, z') = 0, \quad g(z', z) = 0$$

gewinnen.

Die Mehrzahl der in Rede stehenden singulären Hypermoduln J ergibt solche Punkte der complexen J -Ebene, welche mehrfache Punkte der Hypermodulcurve $f(J', J) = 0$ sind; einzig die zu den Determinanten $-2n$ und $-4n$ gehörenden J bilden hiervon eine Ausnahme. Es lässt sich nun stets der Ausdruck $R'(J', J)$ der Function z derart wählen, dass R' an den Stellen der letzteren Art nicht unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint; es folgt: Wie wir auch die Function z auswählen mögen, an den zu den Determinanten $-2n$ und $-4n$ gehörenden singulären Stellen von F_{n+1} ist stets $z = z'$. Bei der Unbestimmtheit von z ist dies nur dann möglich, wenn bei der Transformation R_0 der F_{n+1} eine Stelle fraglicher Art in sich selbst übergeht. Umgekehrt gehört zu jedem Fixpunkte der Transformation R_0 von F_{n+1} nicht nur $J' = J$, sondern man kann überdies leicht zeigen, dass die zugehörige quadratische Form eine durch n theilbare Determinante hat, was für die in Betracht kommenden Determinanten nur bei $\Delta = 2n, 4n$ eintritt. Es ergibt sich so das Resultat: *Die zu den Formclassen der Determinanten $-2n$ und $-4n$ gehörenden singulären Stellen der F_{n+1} sind die Fixpunkte, welche diese Fläche bei der Transformation R_0 in sich aufweist, ein Satz, der dem im vorigen Artikel bei den positiven Determinanten gewonnenen Hauptresultate bis ins einzelne entspricht.*

Alle diese Entwicklungen der letzten beiden Abschnitte wird man wünschen durch zweckmässige Einzelbeispiele illustriert zu sehen. Ich kann in dieser Beziehung nur erst anführen, dass ich neuerdings im elliptischen Gebiete sowohl den Gebrauch der doppelt-getheilten Polygone zur Aufstellung der Formclassen, als auch die Berechnung der singulären Moduln nach der gekennzeichneten Methode in den Fällen $n = 5$ und $n = 7$ ohne jede Mühe zu Ende geführt habe. Aber es ist wohl kaum fraglich, dass sich im Gebiete der Gruppen $\Gamma(q, r)$ namentlich, wenn man unter q, r auch zusammengesetzte Zahlen verstehen will, eine grössere Reihe von Einzelbeispielen auffinden lässt, bei denen die volle Durchführung unserer allgemeinen Entwicklungen keinen erheblichen Schwierigkeiten begegnet; und ich hoffe bald in diesem Betracht meiner gegenwärtigen Arbeit eine Ergänzung folgen lassen zu können. Andererseits wollte ich noch auf die offen zu Tage liegende Möglichkeit der Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate hinweisen. In der That wird man ja auch bei denjenigen automorphen Gruppen,

denen Zahlkörper von einem höheren als zweiten Grade zu Grunde liegen, auf ganz analogem Wege eine Theorie der Formen, der Congruenzgruppen etc. construiren können. Als ein Beispiel erwähne ich nur die zur s -Function mit der Verzweigung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8})$ gehörende Gruppe, welcher der durch $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ definirte Zahlkörper vierten Grades zu Grunde liegt; mit gleicher Leichtigkeit, wie oben sehen wir auch hier, dass die Reduction modulo n auf die bekannte $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ zurückführt, sofern $x^4 - 2x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ reelle Wurzeln x

besitzt u. s. w. Zum Schluss mag noch die Ueberzeugung Ausdruck finden, dass die interessante Gebietserweiterung der überkommenen Zahlentheorie, auf welche wir im Verlauf unserer Entwicklungen gestossen sind, am leichtesten unter consequentem Gebrauch *der algebraischen Zahlen* durchführbar ist, dass aber auf der anderen Seite diese Durchführung in *den geometrischen Anschauungen*, die wir überall zu Grunde legen, ihr wichtigstes Hilfsmittel zur behenden Erledigung der entspringenden Probleme findet.

Berlin, den 19. März 1891.