Ueber Fusspunkts-Curven und -Flächen, Normalen und Normalebenen.

Von R. STURM in DARMSTADT.

1. Es sei C eine ebene Curve ν^{ter} Ordnung und ϱ^{ter} Classe; O ein Punkt in der Ebene von C ; F die Fusspunktcurve von O in Bezug auf C . Dieselbe ist bekanntlich von der Ordnung $\nu' = 2\varrho$; denn bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einer Geraden l , während der eine Schenkel stets durch O geht, so hüllt der andere eine Parabel ein, für welche O Brennpunkt, l Scheiteltangente ist und die mit C diejenigen 2ϱ Tangenten gemein hat, deren Fusspunkte auf l liegen. Auf F sind O und die beiden unendlich fernen Kreispunkte ω , ϖ ϱ -fache Punkte; ferner hat F noch so viele Doppel- und Rückkehrpunkte, als C Doppel-, resp. Wendetangenten hat. Daraus ergibt sich leicht, dass die Classe ϱ' von F gleich $\nu + 2\varrho$ ist, was auch auf folgende Weise zu ersehen ist: Dreht sich l um einen Punkt P , so erzeugen die entsprechenden Parabeln eine Schaar, deren Grundtangente G_∞ , die beiden Geraden $O(\omega, \varpi)$ und das Loth auf OP in P sind; eine Curve ν^{ter} Ordnung und ϱ^{ter} Classe wird aber stets von $\nu + 2\varrho$ Kegelschnitten einer Schaar berührt*); also so oft wird l Tangente von F .

2. Wenn die beiden Geraden $O(\omega, \varpi)$ p -fache Tangente von C sind, so wird dadurch die Ordnung von F und die Vielfachheit von O um $2p$, die von ω und ϖ je um p und die Classe von F um $4p$ reducirt. Wird die unendlich ferne Gerade G_∞ eine t -fache Tangente von C , so vermindert sich die Ordnung von F und die Vielfachheit von ω und ϖ je um t , die Classe um $2t$. Fällt der Pol O in einen k -fachen Punkt von C , so haben k -mal je zwei von den ϱ Aesten, welche durch O gehen, eine gemeinsame Tangente, so dass O k Rückkehrpunkte und $\frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1) - k$ Doppelpunkte vertritt, die Classe demnach um k kleiner ist als im allgemeinen Falle.

*) Cremona, Curve piane N. 87.

3. Die Fusspunktcurve eines Punktes O , der nicht in der Ebene der Curve C liegt, ist identisch mit der seiner orthogonalen Projection O' auf die Ebene, welche dann, an Stelle von O selbst, ϱ -facher Punkt von F wird.

4. Betrachten wir nun eine doppeltgekrümmte Curve C ν^{ter} Ordnung und ϱ^{ter} Classe; ihre developpable Tangentenfläche D , welche also ϱ^{ter} Ordnung ist*), habe die Classe μ ; das Geschlecht von C und D sei p . Die Lothe von O auf die Tangenten von C gefällt erzeugen einen Kegel K , der ersichtlich vom Geschlechte p ist. Jedes dieser Lothe ist die Schnittgerade der Ebene, welche O mit der betreffenden Tangente verbindet, und derjenigen, welche aus O normal zu derselben geführt ist. Jene Ebenen hüllen bekanntlich einen Kegel K_1 ν^{ter} Ordnung, ϱ^{ter} Classe eine, diese hingegen einen Kegel K_2 , dessen Schnitt mit E_∞ in Bezug auf den imaginären Kreis C_∞^2 der unendlich fernen Schnittcurve von D polar ist; demnach ist derselbe, weil O nicht in E_∞ liegt, μ^{ter} Ordnung und ϱ^{ter} Classe. Diese Kegel, also beide ϱ^{ter} Classe und offenbar auch beide p^{ten} Geschlechts, sind projectivisch auf einander bezogen und das Erzeugniss der Schnittgeraden entsprechenden Berührungsebenen, der Kegel K , ist $2\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung. Sei θ die Zahl der etwaigen Wendetangenten von C (oder Cuspidalgeneratricen von D), so giebt jeder Kegel, welcher C projectirt, oder jede Schnittebene von D :

$$2(\varrho - 1) = \nu + \mu + \theta - 2p;$$

die Lothe auf die Wendetangenten sind Cuspidalkanten des Kegels K ; demnach liefert derselbe, wenn ϱ' seine Classe und ν' ($= 2\varrho$) seine Ordnung ist:

$$2(\nu' - 1) = \varrho' + \theta - 2p;$$

daraus geht hervor, dass

$$\varrho' = 2\varrho + \mu + \nu.$$

Ersichtlich stimmt aber der Kegel K mit der Fusspunktcurve F von O in Bezug auf C , welche durch ihn aus O projectirt wird, in Ordnung, Classe und Geschlecht überein. Folglich ist die Fusspunktcurve eines Punktes in Bezug auf eine Raumcurve von der Ordnung 2ϱ und der Classe $2\varrho + \mu + \nu$.

Da bei einer ebenen Curve $\mu = 0$ ist, so erweist sich das früher gefundene Resultat als speciellen Fall.

5. Es sei μ' die Classe der Tangentenfläche D' von F , so ist leicht einzusehen, dass Wendetangenten von F durch die Wendebertührungs-

*) Ich halte es mit Herrn Cremona für vorthellhafter, die Ordnung der Tangentenfläche die Classe der Raumcurve zu nennen, weil dann sich die Sätze sehr oft ohne Aenderung des Wortlautes auf die ebenen Curven übertragen lassen.

ebenen von D und nur durch diese veranlasst werden; sei α die Zahl derselben, dann ist, wenn h' noch die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte von F und λ die der etwaigen wirklichen Doppelpunkte von F oder Doppeltangenten von C ist, x endlich die Ordnung der Knoten-curve von D bezeichnet,

$$2\varrho(2\varrho - 1) = 2\varrho + \mu + \nu + 2(h' + \lambda) + 3\theta,$$

$$\mu' + \alpha = 3 \cdot 2\varrho(2\varrho - 2) - 6(h' + \lambda) - 8\theta,$$

$$\alpha = 3\varrho(\varrho - 2) - 6(x + \lambda) - 8(\nu + \theta),$$

$$\varrho(\varrho - 1) = \mu + 2(x + \lambda) + 3(\nu + \theta);$$

aus den beiden ersten Formeln folgt:

$$\mu' = 3\mu + 3\nu + \theta - \alpha,$$

aus den beiden andern:

$$\alpha = 3\mu - 3\varrho + \nu + \theta,$$

also:

$$\mu' = 2\nu + 3\varrho.$$

Auf ebene Curven lässt sich dieses Resultat nicht übertragen, da für dieselben die obigen Formeln theilweise illusorisch werden; μ' ist dann ersichtlich 0.

Wird noch die Zahl der scheinbaren Doppeltangenten von C mit l bezeichnet, so haben wir:

$$\varrho(\varrho - 1) = \nu + 2(l + \lambda) + 3(\theta + \mu),$$

woraus sich mit Hülfe der ersten der obigen Formeln ergibt:

$$h' = \frac{3}{2}\varrho(\varrho - 1) + \mu + l.$$

Dies ist also auch die Zahl der Lothe aus O , die zugleich auf zwei verschiedenen Tangenten von C senkrecht stehen.

Ist die Curve C eben, so ist $\mu = l = 0$, und die $\frac{3}{2}\varrho(\varrho - 1)$ scheinbaren Doppelpunkte von F sind drei ϱ -fache Punkte geworden, von denen zwei auf C_{∞}^2 liegen; die unebenen Fusspunktscurven haben 2ϱ einfache Punkte auf C_{∞}^2 .

6. Die eben betrachtete Curve kann auch die *Generatricen-Fusspunktscurve der abwickelbaren Fläche D* genannt werden. Die Tangentenebenen von D geben noch zu einer zweiten Fusspunktscurve f Veranlassung. Der Kegel der aus O auf diese Tangentenebenen gefällten Normalen ist ersichtlich die Enveloppe der durch O gehenden Ebenen, welche auf den Erzeugenden von D senkrecht sind, also der obige Kegel K_2 p^{ten} Geschlechts, μ^{ter} Ordnung und ϱ^{ter} Classe. Der Punkt O enthält μ Fusspunkte; folglich ist die Ordnung ν'' und die Classe ϱ'' der Tangentenebenen-Fusspunktscurve der abwickelbaren Fläche D gegeben durch:

$$\nu'' = 2\mu, \quad \varrho'' = \varrho + 2\mu.$$

Alle 2μ Punkte, die in E_∞ liegen, befinden sich auf C_∞^2 ; es sind die Berührungspunkte der Tangenten, welche C_∞^2 mit D gemein hat.

Der Kegel K_2 hat so viele Wendebertührungsebenen, als C Punkte in E_∞ hat, demnach ν ; da im Allgemeinen keine Wendetangenten von f anzunehmen sind, so sind dies ν Osculationsebenen von f durch O , zu denen noch die 3μ des μ -fachen Punktes kommen; die Classe μ'' der Tangentenfläche D'' von f ist mithin

$$\mu'' = \nu + 3\mu.$$

Rückkehrpunkte hat f offenbar α und wirkliche Doppelpunkte so viele als D wirkliche doppelte Berührungsebenen hat; sei deren Zahl γ und g die Zahl der scheinbaren doppelten Berührungsebenen, d. h. der nicht von wirklichen doppelten Berührungsebenen herrührenden Doppeltangenten eines ebenen Schnitts von D , endlich h'' die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte von f , so hat man:

$$2\mu(2\mu - 1) = \varrho + 2\mu + \mu(\mu - 1) + 2(h'' + \gamma) + 3\alpha,$$

$$\mu(\mu - 1) = \varrho + 2(g + \gamma) + 3\alpha,$$

demnach:

$$h'' = \mu(\mu - 1) + g.$$

In g haben wir ersichtlich auch die Zahl der Linien aus O , die die Curve f noch zweimal treffen, also der Lothe, die auf zwei verschiedenen Ebenen von D normal sind.

7. Die Kegel gehören auch zu den abwickelbaren Flächen; die Cuspidalcurve ist in einen Punkt zusammengeschrumpft, so dass $\nu = 0$, die Classe dieser Curve ist aber immerhin noch gleich der Ordnung ϱ des Kegels; Doppel- und Wendetangenten der Curve sind die Doppel- und Rückkehrkanten des Kegels; dagegen ist ersichtlich $l = g = x = 0$. Für die Kanten-Fusspunktcurve eines Kegels ϱ^{ter} Ordnung und μ^{ter} Classe erhalten wir demnach aus Nr. 4. und 5.:

$$\nu' = 2\varrho, \quad \varrho' = 2\varrho + \mu, \quad \mu' = 3\varrho, \quad h' = \frac{3}{2}\varrho(\varrho - 1);$$

aber von diesen h' scheinbaren Doppelpunkten haben sich $\frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1)$ zu einem wirklichen ϱ -fachen Punkt vereinigt, nämlich der Kegelspitze; es bleiben also nur $\varrho(\varrho - 1)$ scheinbare Doppelpunkte; es scheint danach, als gingen von O so viele Doppellothe aus, was mit der Convergenz aller Kegelkanten nicht vereinbar wäre. Die Fusspunktcurve ist aber ersichtlich der Schnitt des Kegels mit der Kugel, welche die Verbindungsgerade von O mit dem Kegelscheitel zum Durchmesser hat; die beiden imaginären Geraden dieser Kugel, die sich in O kreuzen (und C_∞^2 treffen), begegnen der Fusspunktcurve je ϱ -mal, so dass dieselbe von O aus gesehen zwei imaginäre scheinbare ϱ -fache Punkte hat.

Für die Tangentenebenen-Fusspunktcurve, die auch auf der erwähnten Kugel liegt, erhalten wir durch Nr. 6.:

$$\nu'' = 2\mu, \quad \varrho'' = \varrho + 2\mu, \quad \mu'' = 3\mu, \quad h'' = \mu(\mu - 1);$$

die scheinbaren Doppelpunkte gehen wiederum für den Punkt O in zwei imaginäre scheinbare μ -fache Punkte über. Reelle Doppellothe kann es nicht geben.

8. Für die Cylinder artet die Kugel in die durch O senkrecht zu den Mantellinien gefällte Ebene (und E_∞) aus; beide Curven werden eben und zwar ist die Kanten-Fusspunktcurve der Schnitt N dieser Ebene selbst, die Tangentenebenen-Fusspunktcurve die Fusspunktcurve von O in Bezug auf N ; μ' und μ'' sind Null geworden und die scheinbaren Doppelpunkte haben sich in wirkliche verwandelt. Zur vollständigen Curve wird die erstere erst durch die ϱ in E_∞ gelegenen Cylinderkanten ergänzt, die sich auf die Curve N stützen und auch den ϱ -fachen Punkt enthalten, wodurch ν' , ϱ' , μ' resp. um ϱ , 2ϱ , 3ϱ , also auf ϱ , μ , 0 reducirt werden. Auch dass $\mu'' = 3\mu$ in $\mu'' = 0$ übergeht, erklärt sich leicht, weil die 3μ Osculationsebenen von dem μ -fachen Punkte O herrührten, von dem sie bei einer ebenen Curve nicht abgeleitet werden können.

9. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Fläche Σ der Fusspunkte der aus O auf die Tangentenebenen einer eigentlichen Fläche S gefällten Lothe. Die Ordnung von S sei n , der Rang — d. i. die Ordnung des aus einem beliebigen Punkte ihr umschriebenen Kegels und seiner Berührungcurve oder die Classe eines beliebigen ebenen Schnitts und der längs desselben umschriebenen Developpable, oder auch, um beides zusammenzufassen, der Grad des Complexes der Tangenten der Fläche — sei r , die Classe von S sei m ; besitze ferner S eine doppelt umschriebene Torse*) D_τ (node couple torse) τ^{ter} Classe und eine stationär umschriebene D_σ (spinode torse) σ^{ter} Classe, so dass $r = m(m - 1) - 2\tau - 3\sigma$. Ordnung, Rang und Classe von Σ mögen mit n' , r' , m' bezeichnet werden.

Wenn L eine beliebige Gerade ist, so enthalten die $2m$ Ebenen, welche S mit dem parabolischen Cylinder gemein hat, dessen Focallinie auf der Ebene (O, L) in O und dessen Scheitelkanten-Berührungsebene auf derselben Ebene in L senkrecht steht, die auf L befindlichen Punkte von Σ , folglich ist

$$n' = 2m.$$

Da eine durch O gehende Gerade die Fläche Σ ausser in O , welcher wegen des aus ihm an S gelegten Berührungskegels ersichtlich auf Σ liegt, nur in den Fusspunkten der m zu der Geraden normalen Berührungsebenen von S trifft, so ist O ein m -facher Punkt von Σ .

*) Ich erlaube mir, dieses von Herrn Cayley gebrauchte kurze Wort in die deutsche Sprache überzutragen.

Durch jede Tangente ferner von C_∞^2 gehen m Berührungsebenen von S ; die Fusspunkte derselben fallen in den Berührungspunkt der Tangente mit C_∞^2 ; demnach ist C_∞^2 eine m -fache Curve auf Σ . Die beiden Developpablen τ^{ter} und σ^{ter} Classe veranlassen auf Σ eine Doppelcurve $2\tau^{\text{ter}}$ Ordnung $d_{2\tau}$ und eine Rückkehrcurve $2\sigma^{\text{ter}}$ Ordnung $d_{2\sigma}$, welche τ -mal, resp. σ -mal durch O gehen. Aus der Zahl der scheinbaren Doppeltangentenebenen g_τ und g_σ von D_τ und D_σ ergibt sich leicht nach Nr. 6. die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte dieser beiden Curven, nämlich $\tau(\tau - 1) + g_\tau$, resp. $\sigma(\sigma - 1) + g_\sigma$. Einzelne singuläre Ebenen von S werden natürlich entsprechende singuläre Punkte auf Σ bewirken.

Die $2m$ Berührungsebenen, welche der Kegel (O, C_∞^2) mit S gemein hat, liefern so viele (imaginäre) auf Σ befindliche Geraden. Ist der Kegel der Fläche ganz umschrieben, wie dies z. B. bei einer Kugel der Fall ist, die in O ihr Centrum hat, so zweigt er sich von der Fläche Σ ganz ab, so dass sich die Ordnung derselben vermindert; im erwähnten Falle ist die Kugel ihre eigene Fusspunktsfläche. Eine Reduction der Ordnung findet ferner statt, wenn die Originalfläche von E_∞ berührt wird, weil dann S ausser E_∞ , in Bezug auf welche der Fusspunkt, da sie als auf allen Geraden normal anzusehen ist, unbestimmt wird und sich über die ganze Ebene ausbreitet, nicht mehr $2m$ Ebenen mit dem parabolischen Cylinder gemein hat. Die Fusspunktscuren in Bezug auf die der Fläche S umschriebenen Kegel sind je die Schnittecurve von Σ mit der Kugel, die den Pol O und den Kegelscheitel zu Endpunkten eines Durchmessers hat.

10. Eine beliebige Ebene E schneidet Σ in einer Curve C $2m^{\text{ter}}$ Ordnung; sei x ein Punkt von C , X die Spur der Berührungsebene T von S , in welcher x der Fusspunkt ist, O' die orthogonale Projection von O auf E ; so ist $O'x$ normal auf X , also ist die Curve $C = (E, \Sigma)$ die Fusspunktscurve von O' (oder auch von O) in Bezug auf die Enveloppe E' der Spuren derjenigen Berührungsebenen von S , welche ihren Fusspunkt in Bezug auf O in E haben. Diese Enveloppe ist $2m^{\text{ter}}$ Classe; denn wenn P ein Punkt von E ist, so liefert die Fusspunktscurve von O in Bezug auf den aus P der Fläche S umschriebenen Kegel (m^{ter} Classe), welche $2m^{\text{ter}}$ Ordnung ist, in E $2m$ Punkte, die mit P verbunden die Tangenten aus P an E' sind. Danach müsste C , als Fusspunktscurve in Bezug auf E' , $4m^{\text{ter}}$ Ordnung sein und $2m$ -mal durch O' gehen, was nicht der Fall ist. Die Enveloppe E' kann aber noch auf andere Weise erzeugt werden; est ist bekannt, dass alle Ebenen des Raumes, welche die Fusspunkte der aus O auf sie gefällten Lothe in E haben, ein Rotationsparaboloid Π einhüllen, welches O zum Brennpunkte und die Ebene E zur Scheitelberührungsebene, also O' zum Scheitel hat. Die Torse, welche Π und S gemeinsam

ist und die Classe $2m$ hat, schneidet die Enveloppe E' in E ein. Diese Ebene hat mit Π die beiden Geraden gemein, welche O' mit den Punkten ω und ϖ von E verbinden. Die m Ebenen, welche jede dieser beiden Geraden an S sendet, werden alle von E in $O'\omega$ oder $O'\varpi$ geschnitten; folglich sind $O'\omega$ und $O'\varpi$ m -fache Tangenten von E' ; daraus geht nach Nr. 2. hervor, dass die Ordnung der Fusspunktcurve C um $2m$ reducirt wird, desgleichen die Vielfachheit von O' , so dass jene $2m$ ist und dieser Punkt nicht auf C liegt. Berührt hingegen E die Fläche S , in welchem Falle O' ja der Fusspunkt ist und also der Curve C angehören muss, so ist E selbst eine gemeinsame Ebene von Π und S und liefert keine Spur; demnach ist die Enveloppe E' von der Classe $2m - 1$ und jede der Geraden $O'(\omega, \varpi)$ nur noch $(m - 1)$ -fach; die Ordnung von C demnach $2(2m - 1) - 2(m - 1) = 2m$, wie oben, die Vielfachheit von O' hingegen $2m - 1 - 2(m - 1) = 1$.

11. Ermitteln wir nun noch die Classe der Curve C in einer beliebigen Ebene, also den Rang r' der Fläche Σ . Die Curve E' , welche, wie eben gefunden, $2m^{\text{ter}}$ Classe ist und zwei m -fache Tangenten besitzt, hat ausserdem 2τ Doppeltangenten und 2σ Wendetangenten, weil Π 2τ resp. 2σ Ebenen mit D_τ resp. D_σ gemein hat, folglich ist die Ordnung von E' gleich $2m(2m - 1) - 4\tau - 3\sigma - 2m(m - 1) = 2(m + r)$; die Classe der Fusspunktcurve C ist demnach in Folge von Nr. 1. und 2. gleich $2m + 2r + 2 \cdot 2m - 4m = 2m + 2r$. Also ist auch der Rang der Fusspunktsfläche Σ

$$r' = 2m + 2r;$$

dies Resultat konnte freilich auch leicht aus der Ordnung $2m$ der Fläche Σ und der schon bekannten Existenz der vielfachen Curven C_∞^2 , $d_{2\tau}$ und $d_{2\sigma}$ abgeleitet werden.

12. Der Kegel (O, C_∞^2) , welchen ersichtlich die beiden durch den Brennpunkt gehenden Tangenten der Meridianparabel von Π bei der Rotation beschreiben, ist dem Paraboloid umschrieben; alle Paraboloiden also, die den Ebenen eines Büschels um die Gerade L entsprechen, sind demnach diesem Kegel und dem parabolischen Cylinder, welcher der Geraden L zugehört (Nr. 9), eingeschrieben und bilden in Folge dessen eine Flächenschaar zweiter Classe.

Sei T' nun eine durch L gehende Berührungsebene von Σ ; ihr Berührungspunkt t' muss ein Doppelpunkt von $C' = (T', \Sigma)$ sein, der nicht von einem singulären Punkte von Σ , also nicht von einer singulären Ebene von S herrührt. Die Spur der Ebene von S , die ihn veranlasst, muss eine Doppeltangente der Enveloppe E' sein, also entweder von zwei sich auf T' schneidenden Berührungsebenen der Torse, welche dem zu T' gehörigen Paraboloiden Π und S gemeinsam ist, oder von einer Doppelebene T dieser Torse herrühren, welche nicht zugleich

singuläre Ebene von S ist (Π hat überhaupt keine singulären Ebenen); aber da durch jede Gerade auf T' ausser T' selbst nur noch eine Ebene von Π möglich ist, so kann ersteres nicht der Fall sein (oder einfacher: auf Ot' können in t' nicht zwei Ebenen normal sein); also tritt das letztere ein; folglich berühren sich die beiden Flächen S und Π in dem Punkte, in welchem S von T berührt wird.

Die Classe der Fusspunktsfläche ist demnach gleich der Anzahl der Rotationsparaboloide, welche dem Kegel (O, C_∞^2) und einem parabolischen Cylinder, dessen Focallinie durch O geht, einbeschrieben sind und die Originalfläche berühren.

Diejenigen Ebenen nun, die in Bezug auf eine Fläche m^{ter} Classe und eine Fläche einer Schaar zweiter Classe den nämlichen Pol haben, hüllen eine Torse von der Classe $m^2 + 2$ ein, welche sowohl alle singulären Ebenen der Fläche wie der Schaar enthält*). In unserm Falle gehört jedenfalls zur Schaar ein ganzes Büschel Doppelebenen, dessen Axe die Scheitel der beiden der ganzen Schaar umschriebenen Kegel verbindet; dadurch reducirt sich die Classe der Torse auf $m^2 + 1$. Eine weitere Reduction wird durch die Torsen D_τ und D_σ bewirkt; die gemeinsamen Ebenen der übrig bleibenden Developpable und der Fläche S , welche nicht zu D_τ und D_σ gehören, geben die Zahl der Berührungen zwischen S und Flächen der Schaar.

Ist an S keine Torse D_τ oder D_σ vorhanden, so wird S von $m(m^2 + 1)$ Rotationsparaboloiden berührt.

Die Classe der Fusspunktsfläche einer Fläche m^{ter} Classe, welche keine doppelt oder stationär umschriebene Torse und überhaupt keine singuläre Tangentenebene hat, ist $m(m^2 + 1)$.

13. Dies Resultat lässt sich auch aus der Ordnung $2m$ von Σ und der Existenz der m -fachen Curve C_∞^2 und des m -fachen Punktes O ableiten. Denken wir uns durch C_∞^2 eine Fläche 2. Grades, also eine Kugel A gelegt. Die erste Polarfläche eines beliebigen Punktes P in Bezug auf Σ schneidet Σ ausser in C_∞^2 noch in einer Curve T von der Ordnung $2m^2$, der Berührungscurve des Kegels aus P an Σ , und die Kugel A in einer Curve V $2m^{\text{ter}}$ Ordnung; Σ und A haben eine Curve U $2m^{\text{ter}}$ Ordnung gemein; U sowohl wie V , beide auf A gelegen, begegnen den (imaginären) Geraden beider Schaaren von A in m Punkten, demnach einander in $2m^2$ Punkten; dies sind die ausserhalb C_∞^2 gelegenen Begegnungspunkte von T mit A , mithin trifft T die Curve C_∞^2 in $2m^2$ Punkten.

Der Kegel (P, C_∞^2) schneidet Σ ausser in C_∞^2 noch in einer Curve Q von der Ordnung $2m$ und A noch in einem Kreise W ; U und W ,

*) Cremona, Teoria delle superficie no. 113, wo der allgemeine reciproke Satz sich befindet.

beide auf A gelegen, treffen sich in $2m$ Punkten, in denen zugleich Q der Kugel A ausserhalb C_∞^2 begegnet; folglich liegen auf C_∞^2 $2m$ Punkte von Q . Diese Punkte sind die mit P veränderlichen Begegnungspunkte von T mit C_∞^2 und $2m$ ist somit auch die Classe der längs C_∞^2 der Fläche Σ umschriebenen (imaginären) Torse; die $2m(m-1)$ übrigen Begegnungspunkte (T, C_∞^2) sind fest: es sind die Cuspidalpunkte der vielfachen Curve C_∞^2 , in denen alle ersten Polarflächen einander und die Fläche Σ berühren.

Die erste Polarfläche eines zweiten Punktes P_1 hat mit der des ersten ausser C_∞^2 eine Curve R gemein von der Ordnung $m(3m-2)$; der Kugel A begegnet sie noch in einer Curve V_1 , die ähnlich beschaffen ist wie V ; V und V_1 treffen sich in $2m^2$ Punkten; so viele Punkte hat demnach R mit A ausserhalb C_∞^2 gemein; folglich begegnen sich R und C_∞^2 in $4m(m-1)$ Punkten; unter diesen sind die $2m(m-1)$ festen Cuspidalpunkte und also $2m(m-1)$ mit den beiden Polen P und P_1 sich ändernde. In den ersteren berührt R die Fläche Σ , hat also mit ihr je $m+1$ Punkte gemein, in den andern nur m ; der m -fache Punkt O liegt auf jeder ersten Polarfläche $(m-1)$ -fach, folglich ist er ein $m(m-1)^2$ -facher Begegnungspunkt von R und Σ ; ausser diesen auf C_∞^2 oder in O befindlichen Punkten haben R und Σ noch

$$2m \cdot m(3m-2) - 2m(m-1)(m+1) - 2m(m-1) \cdot m - m(m-1)^2 \\ = m(m^2+1)$$

gemeinsame Punkte: die Berührungspunkte der von PP_1 an Σ gelegten Tangentialebenen.

14. Die Classe der Fusspunktsfläche allgemein zu ermitteln, ist mir noch nicht gelungen; für die Benutzung der von Herrn Cayley in seiner Abhandlung on reciprocal surfaces*) gegebenen Formel fehlt mir die Art und Weise, wie die Begegnungspunkte von $d_{2\sigma}$ und $d_{2\tau}$ mit C_∞^2 , die in O befindlichen vielfachen Punkte dieser beiden Curven und die aus dem Systeme $(d_{2\tau}, C_\infty^2)$ sich ergebenden scheinbaren Doppelpunkte zu verrechnen sind.

Es ist nun aber überaus wahrscheinlich, dass die Classe m' von Σ , ebenso wie die Ordnung und der Rang, sich sehr einfach durch m , r , n ausdrücken lässt, nämlich

$$m' = 2m + 2r + n.$$

Hat die Originalfläche S keine singuläre Ebene, so ist

$$r = m(m-1), \quad n = m(m-1)^2,$$

also

$$2m + 2r + n = m(m^2+1) = m',$$

*) Philosophical Transactions, Jan. 1869, S. 203.

wie oben gefunden. Einzelne singuläre Ebenen von S bringen auf Σ die reciproken singulären Punkte hervor und denselben Einfluss, welchen jene auf die Ordnung von S , haben diese auf die Classe von Σ , was mit der Formel übereinstimmt. Ferner, sehen wir eine Developpable q^{ter} Ordnung, μ^{ter} Classe als eine eigentliche Fläche (n, r, m) an, so ist

$$n = q, \quad r = \mu, \quad m = 0;$$

für die Fusspunktsfläche ist demnach

$$n' = 0, \quad r' = 2\mu, \quad m' = 2\mu + q;$$

aus $n' = 0$ geht hervor, dass die Fusspunktsfläche zu einer Curve degenerirt, wie wir das ja auch schon wissen; wird nun eine Curve v^{ter} Ordnung, q''^{ter} Classe als Fläche (n', r', m') aufgefasst (eingehüllt durch sämtliche Berührungsebenen der Curve), so ist ausser $n' = 0$ noch

$$r' = v'', \quad m' = q'',$$

also

$$v'' = 2\mu, \quad q'' = 2\mu + q,$$

wie wir oben (Nr. 6) gefunden haben. Eine weitere Bestätigung werden die windschiefen Regelflächen geben (Nr. 16.).

15. Es sei t ein Punkt der Originalfläche S , T seine Berührungsebene, t' der Fusspunkt der Normalen aus O auf T , also ein Punkt von Σ , T' die Berührungsebene von Σ in t' ; so berührt nach Nr. 12 das Rotationsparaboloid Π , welches O zum Brennpunkt und T' zur Scheitelberührungsebene hat, die Fläche S in t . T' tangirt ferner die Kugel über Ot als Durchmesser in t' , denn der Kegel aus t an S hat T zur Doppelebene, also die Fusspunktcurve von O in Bezug auf diesen Kegel, welche den Schnitt der Kugel (Ot) mit Σ (ausser C_2^2) bildet, in t' einen Doppelpunkt; die Normale auf Σ in t' halbirte also die Strecke Ot . Der Scheitel des Rotationsparaboloids ist ersichtlich ein Punkt der zweiten Fusspunktsfläche.

Die Meridianparabel von Π , welche durch t geht, berührt dort die Fläche S und ihre Ebene steht auf der gemeinsamen Berührungsebene T von S und Π normal.

Wenn also t ein Punkt der Originalfläche und T seine Berührungsebene ist und man legt die Ebene durch Ot normal zu T und construirt in derselben die Parabel, welche O zum Brennpunkte hat und T in t berührt, so tangirt die Ebene, welche auf der Parabel-Axe im Scheitel senkrecht steht, die Fusspunktsfläche in dem Punkte t' , welchen die Ebene T geliefert hat; der Parabel-Scheitel selbst ist der zugehörige Punkt der zweiten Fusspunktsfläche. Fällt t' mit t zusammen, haben wir es also mit einer der aus O an die Fläche S gezogenen Normalen zu thun, so sind auch T und T' identisch, weil dann S und Σ die Kugel (Ot) tangiren; aber auch der Punkt der

zweiten und ebenso jeder weitem Fusspunktsfläche fällt dann 1. In den Fusspunkten der aus einem Punkte auf eine Fläche gezeichneten Normalen berühren sich diese Fläche und alle ihre Fusspunktsflächen in Bezug auf den Punkt. Ist N ein q -facher Punkt von S , so ist die Kugel (ON) die Fläche Σ längs der Fusspunktscurve in Bezug auf den Anschmiegungskegel des q -fachen Punktes.

16. Ein besonderes Interesse bietet die Fusspunktsfläche windschiefen Regelfläche; bei einer solchen Fläche ist bekanntlich die Ordnung und Classe gleich ($m = n$) und werden beide gemeinschaftlich Grad genannt; stationär berührende Ebenen giebt es nur in einer bestimmten Zahl, nämlich die längs der Torsallinien (Nr. 20.) der Fläche berührenden; also existirt auf der Fusspunktsfläche Σ keine Curve. Diese Fläche Σ wird offenbar erhalten, wenn man aus O auf alle diejenigen sowohl normale Ebenen als normale Geraden fällt, die durch O gehen und die Fläche Σ in O berühren. Die Tangenten an diese Kreise in O ergeben die Tangenten an den Anschmiegungskegel n -ter Ordnung des n -fachen Punktes O der Fläche Σ . Es ist leicht einzusehen, dass dieser Kegel ein Polar- oder Suppletarkegel ist zu dem von O an die Originalfläche S geführten Kegel K_1 (r -ter Ordnung, n -ter Classe); also ist seine Ordnung r , wenn r wiederum der Rang von S ist. An dem ganzen Kegel Σ gelegten Tangentialkegel participirt der Anschmiegungskegel seiner Classe nach zweifach, ebenso wie die Berührungscurve zweifach der Ebene zweifach zu zählen ist. Zu dem Tangentialkegel Σ ferner der von den Ebenen der Kreise B eingehüllte Kegel K_2 ; die Ebenen auf den Generatricen normal sind, so ist K_2 r -ter Ordnung, n -ter Classe. Eine solche Kreisebene ist im Allgemeinen eine Berührungsebene von Σ ; zunächst ist ersichtlich, dass jeder Kreis B die Curve $d_{2\tau}$ ($n - 2$)-mal begegnet, denn durch jede Generatrix gehen $n - 2$ doppelte Berührungsebenen dieser Fläche; der Kreis B , nämlich, der von einem Punkte der Generatrix an S gelegt ist, fällt in das Büschel um dieselbe und einen Kegel ($n - 1$)-ter Ordnung; diese haben ausser der Berührungsebene des Punktes noch $n - 2$ andere Ebenen gemein, welche demnach zweifach berührende Ebenen von S sind, also zu $d_{2\tau}$ gehören. In jedem Punkte von $d_{2\tau}$ schneiden sich die beiden Kreise, welche den Generatricen zugehören, auf der Ebene, die die beiden Berührungspunkte der Ebene liegen, welche den Punkt O geliefert hat. Ferner trifft jeder der Kreise die Curve C_2^2 zweifach; der fernere Schnitt der Ebene eines Kreises B , welcher 2 ($n - 1$)-mal geht also ($n - 1$)-mal durch den Punkt O , durch den beiden Punkte (B, C_2^2) und einmal durch jeden der $n - 2$ Punkte $(B, d_{2\tau})$, folglich hat er mit B nur noch $4(n - 1) - 3(n - 1) - ($

d. i. einen Begegnungspunkt, in welchem die Ebene die Fläche berührt.

Endlich giebt es auf Σ , wie Nr. 9 gefunden, $2n$ (imaginäre) Gerade G , welche durch O gehen. Die Ebenen durch eine solche Gerade sind im Allgemeinen ebenfalls einfache Tangentialebenen von Σ ; denn jede dieser Geraden stützt sich auf C_2^2 , aber nicht auf $d_{2\tau}$, da die Berührungsebene von S , welche die Gerade geliefert hat, im Allgemeinen nicht zu D_τ gehört; also begegnet G der sie in der Ebene ergänzenden Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung je in einem $(n-1)$ -fachen Punkte auf C_2^2 und in O und noch in dem Berührungspunkte der Ebene. Damit ist aber der Tangentialkegel aus O erschöpft; denn wenn t' der Berührungspunkt einer von O an Σ gelegten Tangente ist, so berührt die Ebene des durch t' gehenden Kreises B , in der sich ersichtlich die Tangente befindet (weil sie zwei Punkte t' und O derselben verbindet), in t' , da die Tangente von B in t' eine zweite Flächentangente in dieser Ebene ist; also alle nicht in O oder auf den G tangirenden Berührungsebenen aus O an Σ sind Ebenen von Kreisen B . Daraus geht hervor, dass die Classe des vollständigen Kegels aus O , mithin auch die der Fläche Σ gleich $2n + n + 2r = 2m + n + 2r$ ist; der erste Summand nämlich, die Zahl der Geraden G , rührt von der Classe $m = n$ der Fläche S her, der zweite Summand aber, die Classe des Kegels K_2 , von der Ordnung von S ; somit finden wir bei den windschiefen Regelflächen die Behauptung von Nr. 13. bestätigt.

17. Eine windschiefe Regelfläche giebt durch ihre Generatricen noch Veranlassung zu einer Fusspunktcurve φ . Die Fusspunkte der aus O auf die Erzeugenden gefüllten Lothe sind Punkte der Kreise B (Gegenpunkte von O), also liegt φ auf Σ ; die Lothe sind die Schnittlinien der Ebenen, welche O mit den Generatricen von S verbinden, und derer, die aus O auf sie normal geführt sind; da jene den Kegel K_1 , diese den Kegel K_2 einhüllen, welche beide r^{ter} Ordnung, n^{ter} Classe sind, so ist die Ordnung des Kegels K_3 der Lothe $2n$, also auch die Ordnung v_1 der Fusspunktcurve φ . Folglich

$$v_1 = 2n.$$

Das Geschlecht von φ muss mit dem (p) von S übereinstimmen und Rückkehrpunkte hat φ so viele, wie S Cuspidalgeneratricen besitzt; seien deren θ und sei ϱ_1 die Classe der Fusspunktcurve, so giebt die Fläche S :

$$2(n-1) = r - 2p + \theta,$$

die Curve φ :

$$2(v_1-1) = \varrho_1 - 2p + \theta,$$

demnach

$$\varrho_1 = r + 2n.$$

Ist die Doppelcurve von S von der Ordnung δ , so hat die Fusspunkts-curve

$$h_1 = \frac{3}{2} n (n - 1) + \delta$$

scheinbare Doppelpunkte; so viele Lothe aus O stehen also zugleich auf 2 Generatricen senkrecht. Die Classe endlich der Tangentenfläche von φ ist

$$\mu_1 = 3r + \theta.$$

Alle $2n$ unendlich fernen Punkte von φ liegen auf C_∞^2 .

Die Flächen 2. Grades S^2 haben wegen ihrer zwei Schaaren von Geraden je zwei solche Fusspunktscurven (Curven vierter Ordnung zweiter Species); dieselben bilden den vollen Schnitt der S^2 mit ihrer Fusspunktsfläche; jede begegnet den Geraden der zugehörigen Schaar einmal, denen der andern dreimal, also begegnen sie sich zehnmal. Von diesen Punkten liegen 4 auf C_∞^2 , die andern 6 sind die Fusspunkte der aus O auf S^2 herabgelassenen Normalen.

18. Jedes Loth aus O auf eine Generatrix von S steht auch normal auf einer durch dieselbe gehenden Ebene; sei f der Fusspunkt des Lothes, b der Berührungspunkt dieser Ebene, so fragt es sich, wie oft fällt f mit b zusammen; d. h. wie viele Normalen gehen aus dem Punkte O an die Fläche? Denken wir uns durch O eine beliebige Gerade l und durch dieselbe und je den Punkt f , sowie den Punkt b auf jeder Generatrix eine Ebene E_f , resp. E_b gelegt, so stehen die beiden coaxialen Büschel um l in folgender Beziehung:

In jeder Ebene E_f befinden sich, weil die Curve φ 2^{ter} Ordnung ist, $2n$ Punkte f , also entsprechen ihr $2n$ Ebenen E_b . Die Torse D' , welche der Fläche S längs des Schnitts einer Ebene E_b umschrieben ist, ist r ter Classe, folglich auch ihr Schnitt D'_∞ mit E_∞ ; dessen Polarcurve D''_∞ in Bezug auf C_∞^2 ist demnach r ter Ordnung und projectivisch auf die Curve n ter Ordnung (S, E_∞) bezogen; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte umhüllen deshalb eine Curve $(n + r)$ ter Classe, welche in E_∞ die Spur derjenigen Developpable D'' ist, die von den zu den Ebenen von D normalen und je durch die nämliche Generatrix gehenden Ebenen eingehüllt wird; da E_∞ im Allgemeinen nicht S berührt, so ist die Classe von D'' ebenfalls $n + r$; man kann sich die Developpable D'' auch als Enveloppe der Verbindungsebenen je einer Generatrix der Fläche S n ten Grades und des entsprechenden Punktes der Curve D'_∞ denken, welche r ter Ordnung ist; einer Generatrix g entspricht nämlich der Pol (in Bezug auf C_∞^2) der Spur der auf g berührenden Ebene von D' in E_∞ . Also gehen auch durch O $n + r$ Ebenen von D'' ; folglich enthält jede Ebene E_b $n + r$ Berührungspunkte von Ebenen, für welche die längs der Generatrix normale Ebene durch O geht, also auf denen das Loth, welches auf die durch den Berührungspunkt gehende Generatrix aus O gefällt ist, auch normal ist;

jeder Ebene E_b entsprechen demnach $n + r$ Ebenen E_f . Daraus geht hervor, dass es $3n + r$ Coincidenz-Ebenen giebt; unter diesen befinden sich die n Berührungsebenen, welche von l an S gehen; die $2n + r$ übrigen markiren auf den Erzeugenden, denen sie zugehören, einen Punkt f , der mit seinem entsprechenden Punkte b zusammenfällt.

An eine windschiefe Regelfläche vom Grade n und vom Range r gehen von einem Punkte aus stets $2n + r$ Normalen.

19. So viel mir bekannt, ist die Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine beliebige Fläche noch nicht ermittelt. Es ist sehr wahrscheinlich, dass diese Zahl jederzeit gleich der Summe $n + r + m$ ist*). Bei einer Fläche n^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte ist $r = n(n - 1)$, $m = n(n - 1)^2$; die Summe dieser 3 Grössen sowohl, als auch die für diesen Fall längst bekannte Zahl der Normalen ist $n(n^2 - n + 1)$. Bei den windschiefen Regelflächen ist $m = n$, folglich $n + r + m = 2n + r$, also gleich der oben gefundenen Zahl. Bei einer Curve v^{ter} Ordnung ϱ^{ter} Classe ergibt sich, wenn dieselbe wiederum wie oben als Fläche (n, r, m) aufgefasst wird, so dass $n = 0$, $r = v$, $m = \varrho$ ist, $n + r + m = v + \varrho$, d. i. der bekannten Zahl der Normalen an die Curve aus einem Punkte, der übrigens auch bei ebenen Curven ersichtlich nicht nothwendig in der Ebene der Curve zu liegen braucht. Die Zahl der Normalen endlich aus einem Punkte auf eine Developpable D ϱ^{ter} Ordnung, μ^{ter} Classe ist gleich der Classe der Developpablen Δ , welche von den Ebenen eingehüllt, die auf den Berührungsebenen senkrecht stehen und durch die Berührungs-Generatrix gehen, also der sogenannten rectificirenden Fläche der Developpablen D , durch deren Abwicklung die Cuspidalcurve von D eine Gerade wird. Δ ist die Enveloppe der Ebenen, welche die Generatricen der Fläche D ϱ^{ter} Ordnung (oder die Tangenten ihrer Cuspidalcurve C ϱ^{ter} Classe) mit den entsprechenden Punkten der Curve μ^{ter} Ordnung verbinden, welche der Curve (D, E_∞) in Bezug auf O_∞^2 polar ist, also ist Δ von der Classe $\varrho + \mu$. Die beiden Torsen D' und D'' , die wir zu jedem ebenen Schnitte einer windschiefen Regelfläche fanden, sind hier bei der developpablen Regelfläche D , welches auch der ebene Schnitt sei, stets D selbst und die rectificirende Fläche Δ , welche letztere freilich nicht D tangential umschrieben ist, wie D' der windschiefen Regelfläche. Also die Zahl der Normalen aus einem Punkte auf eine Developpable ϱ^{ter} Ordnung, μ^{ter} Classe ist $\varrho + \mu$. Wird die Developpable als eigentliche Fläche (n, r, m) aufgefasst, so ist $n = \varrho$, $r = \mu$, $m = 0$, also $n + r + m = \varrho + \mu$, womit die Richtigkeit des oben vermuthungsweise ausgesprochenen Gesetzes auch für diesen Fall bestätigt ist.

*) Dass die Zahl der Normalen in einer Ebene stets r ist, bedarf kaum eines Beweises.

An einen allgemeinen Kegel n^{ter} Ordnung (also von der Classe $n(n-1)$) gehen demnach von einem Punkte n^2 Normalen, an eine allgemeine Fläche n^{ter} Ordnung $n(n^2 - n + 1)$; der n -fache Punkt hat folglich eine Verminderung um $n(n-1)^2$ herbeigeführt, was auch aus der Zahl $n + r + m$ zu entnehmen sein würde, da durch einen n -fachen Punkt nur die Classe afficirt und zwar um $n(n-1)^2$ vermindert wird.

Ist diese Zahl $n + r + m$ richtig, so würde sich auch das interessante Resultat ergeben, dass für zwei polare Flächen die Zahl der Normalen aus einem Punkte (wie auch die in einer Ebene) dieselbe ist.

20. Gehen wir zur windschiefen Regelfläche S zurück.

Die beiden längs zweier ebenen Schnitte C_1 und C_2 umschriebenen Torsen D_1' und D_2' r^{ter} Classe schneiden in eine beliebige Ebene E zwei Curven r^{ter} Classe ein, welche ersichtlich projectivisch auf einander bezogen sind, indem sich solche Tangenten entsprechen, welche Spuren von auf derselben Generatrix berührenden Ebenen sind. Das Erzeugniss der Schnittpunkte entsprechender Tangenten müsste $2r^{\text{ter}}$ Ordnung sein, ist aber nur von der Ordnung n , nämlich der ebene Schnitt (E, S) ; dies weist auf $2r - n$ coincidirende entsprechende Tangenten hin: n von denselben sind die Spuren der Tangentenebenen in den n Punkten (C_1, C_2) , die $2r - 2n$ übrigen sind Spuren von Berührungsebenen, die längs einer ganzen Generatrix berühren; dies geschieht, sobald eine Generatrix von der ihr unendlich nahen getroffen wird. Die Regelfläche nimmt längs einer solchen Generatrix den Charakter einer Torse an; Herr Cayley nennt derartige Geraden deshalb Torsallinien. Diese Torsallinien bilden die Wendecurve (spinode curve) der Regelfläche; die Berührungsebenen längs derselben ersetzen die stationär berührende Torse. *Eine windschiefe Regelfläche n^{ten} Grades und r^{ten} Ranges hat demnach $2(r - n)$ Torsallinien**. Die Begegnungspunkte einer Torsallinie mit ihrer unendlich nahen Generatrix nennen wir mit Herrn de la Gournerie eine Spitze der Regelfläche (sommel); während die Regelfläche in allen andern Punkten der Torsallinie immer von derselben Ebene (die durch die beiden auf einander folgenden Generatricen geht) berührt wird, berühren alle übrigen Ebenen durch die Torsallinie, also auch unter andern die zu jener senkrechte in der Spitze. Die Berührungscurven aller Flächen D'' gehen demnach stets durch alle $2(r - n)$ Spitzen.

21. Zu der Betrachtung dieser Berührungscurven C'' wollen wir uns nun wenden; ist die ebene Curve C' , längs deren die Fläche D' umschrieben ist, die unendlich ferne Curve C_∞ von S , so ist C'' —

*) Aus Nr. 17 ist zu entnehmen: $r = 2(n + p - 1) - \theta$; folglich ist die oben ermittelte Zahl der Torsallinien gleich $2n + 4(p - 1) - 2\theta$; also wenn $\theta = 0$, ist sie $2n + 4(p - 1)$, wie Herr Lüroth, Borchardt's Journ. Bd. 67 S. 139, gefunden hat.

dann C_0 genannt — die Strictionslinie der Regelfläche: die Curve der Centralpunkte der Generatricen, d. i. der Punkte, welche je der Nachbargeneratrix am nächsten sind.

Die Paare der zu einander normalen Ebenen durch jede Generatrix bilden bekanntlich eine im Allgemeinen elliptische Involution; desgleichen die Paare der zugehörigen Berührungspunkte ebenfalls eine elliptische Involution. Die Coincidenzebenen der Ebenen-Involution berühren den Kreis C_∞^2 ; die (imaginäre) Developpable D_i sämtlicher Coincidenzebenen ist deshalb 2^{ter} Classe. Die Berührungscurve B_i von D_i , also die Curve der Coincidenzpunkte der Punkt-Involutionen ist von der Ordnung $2r$, da jede Torse D' mit C_∞^2 $2r$ Tangenten gemein hat. Auf den Torsallinien ist die Involution parabolisch; die Spitze ist allen andern Punkten zugeordnet und vereinigt beide Coincidenzpunkte, liegt demnach auf B_i ; auf den $2n$ Generatricen ferner, welche C_∞^2 treffen, ist die Involution gleichfalls parabolisch; alle andern Punkte einer solchen Generatrix g_i sind dem Punkte b_i zugeordnet, in dem diejenige Ebene durch g_i berührt, welche C_∞^2 tangirt; denn diese ist zu allen andern Ebenen durch g_i normal. Liegt eine Generatrix (g_∞) von S in E_∞ , so ist die Involution derselben auch parabolisch, alle endlichen Ebenen durch g_∞ sind normal zu E_∞ , diese also die Coincidenzebene; sei b_∞ ihr Berührungspunkt. B_i und D_i behalten ihre Ordnung, resp. Classe. Die Curve C'' kann C' nur dort begegnen, wo letztere von B_i getroffen wird; also ist C'' von der 2^{ten} Ordnung.

Die Curve also der Punkte, welche in den Involutionen der Generatricen einer windschiefen Regelfläche n^{ten} Grades, r^{ten} Ranges den Punkten einer ebenen Schnittcurve zugeordnet sind, ist 2^{ter} Ordnung und geht durch alle Spitzen der Regelfläche; dies gilt auch im speciellen Falle von der Strictionslinie. Die längs beider Curven umschriebenen Torsen sind von der Classe r , resp. $n + r$.

Enthält E_∞ q Generatricen (g_∞) von S , so zerfällt C_∞^2 in q Gerade und eine Curve $(n - q)^{\text{ter}}$ Ordnung, die Torse D' in q Büschel und eine eigentliche Torse $(r - q)^{\text{ter}}$ Classe; die Curve B_i berührt jede dieser Geraden g_∞ in dem Punkte b_∞ und trifft E_∞ in $2r - 2q$ andern Punkten. Jeder der Punkte b_∞ ist allen andern Punkten seiner Geraden g_∞ zugeordnet. Die $2(r - q)$ übrigen Punkte sind die Begegnungspunkte der eigentlichen Strictionslinie C_0 mit E_∞ ; also ist die Strictionslinie in diesem Falle von der Ordnung $2(r - q)$; die längs derselben umschriebene Torse D_0'' , deren Ebenen auf denen der asymptotisch berührenden Torse D_∞' normal sind, hat die Classe $n + r - 2q$.

22. Bei den Regelflächen 2. Grades gehören wegen der zwei Schaaren zu jedem ebenen Schnitte C' zwei Curven C'' ; bei den Hy-

hyperboloiden sind dieselben 4. Ordnung; dies erhellt in diesem einfachen Falle auch daraus, dass von dem Pole einer beliebigen Ebene E an die betreffende Torse D'' , welche 4^{ter} Classe ist, 4 Ebenen gehen, deren Berührungspunkte — Punkte von C'' — also auf E liegen. In Folge der projectivischen Beziehung, in der die beiden C'' zu dem Kegelschnitte C' stehen, ist ihr Geschlecht 0; da ein Doppelpunkt unmöglich ist, so sind sie zweiter Species. Jede trifft die Geraden der zugehörigen Schaar in einem Punkte, dem sie erzeugenden, also begegnen beide C'' einander in 10 Punkten; von diesen liegen 4 imaginäre auf der Curve C' : es sind dies die Berührungspunkte der 4 Ebenen des längs C' umschriebenen Kegels, welche C''_2 tangiren, und durch sie gehen beide Curven B_i . Die Tangentenebene der S^2 in jedem der 6 andern Punkte ist zu der Geraden normal, welche den Punkt mit dem Pole der Ebene von C' verbindet. Haben wir es mit den beiden Strictionslinien C_0 zu thun, so ist dieser Pol der Mittelpunkt von S^2 ; wir sehen also, dass die beiden Strictionslinien eines allgemeinen Hyperboloids sich im Endlichen in den Scheiteln der Fläche (Axen-Endpunkten), von denen zwei freilich auch imaginär sind, treffen. Aus der normal symmetrischen Lage der beiden Schaaren gegen jede der 3 Hauptebenen folgt selbstverständlich auch die der beiden Strictionslinien und in Folge dessen die Identität ihrer orthogonalen Projectionen auf eine Hauptebene oder eine ihr parallele Ebene.

23. Wenn das Hyperboloid ein Rotationshyperboloid ist, so degenerirt jede der beiden Strictionslinien. C_∞ berührt in diesem Falle den Kreis C''_2 doppelt; die reelle Berührungssehne p_∞ ist allen Parallelkreis-Ebenen gemeinsam, und ihr Pol A_∞ in Bezug auf C''_2 liegt auf der Rotationsaxe. Die beiden (imaginären) Berührungspunkte seien t_∞ . Wir unterscheiden die beiden Schaaren g und l , und beschäftigen uns zunächst bloß mit den g ; die beiden Geraden g , welche nach den t_∞ gehen, seien g_i ; die Ebene, welche S^2 in einem t_∞ tangirt, ist, weil sie C''_2 berührt, zu allen Ebenen durch die betreffende g_i normal. Also nehmen diese beiden Geraden an der Strictionslinie der Geraden g theil; der übrige Bestandtheil, die eigentliche Strictionslinie C''_0 , ist, weil die volle Curve zweiter Species ist, ein Kegelschnitt. Die Polarcurve von C_∞ in Bezug auf C''_2 berührt auch beide Curven in den t_∞ ; und die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden polaren Curven gehen, wie leicht einzusehen ist, alle durch A_∞ ; diese Geraden sind aber die Spuren der Ebenen des längs C''_0 umschriebenen Kegels; derselbe hat mithin seine Spitze in A_∞ . Folglich ist C''_0 der Kehlkreis. Dasselbe gilt aber ersichtlich für C''_0 . Der Kehlkreis ist also gemeinsame Strictionslinie der beiden Schaaren eines Rotationshyperboloids: ein bekanntes und auf anderem Wege sehr leicht zu beweisendes Resultat; hier kam es uns vorzüglich darauf an, es aus dem allgemeinen

Resultate abzuleiten und besonders die Art und Weise der Degeneration zu erkennen.

24. Das hyperbolische Paraboloid enthält in jeder Schaar eine unendlich entfernte Gerade g_∞ , resp. l_∞ ; die Strictionslinie ist deshalb für jede der beiden Schaaren nach Nr. 21. nur noch ein Kegelschnitt. Wenn α_∞^g der Pol der Geraden l_∞ in Bezug auf C_0^g ist, also der unendlich ferne Normalpunkt der Leitebenen der Schaar g , so ist dieser Punkt oder besser sein Strahlbüschel in E_∞ als die Polarfigur von l_∞ , dem Schnitt von E_∞ mit dem Paraboloid ausser g_∞ , zu betrachten, demnach auch als die Spur der längs der Strictionslinie C_0^g der Schaar g umschriebenen Torse D'' ; da die Strictionslinie ein Kegelschnitt ist, so ist diese Torse ein Kegel 2. Grades, α_∞^g also sein Scheitel, folglich ist die Ebene von C_0^g diejenige Diametralebene, welche den zur Leitebene der g senkrechten Sehnen conjugirt ist, C_0^g selbst eine Parabel. Ähnliches gilt für die andere Strictionslinie C_0^l . Ausser im Berührungspunkte (g_∞, l_∞) der Ebene E_∞ treffen sich diese beiden Parabeln noch in einem endlichen Punkte, dessen Berührungsebene, wie beim Hyperboloide, auf dem nach ihm gehenden Durchmesser normal ist, also im Scheitel des Paraboloids, und beide Parabelebenen gehen mithin durch die Axe. *Die Strictionslinien der beiden Schaaren eines hyperbolischen Paraboloids sind zwei sich im Scheitel begegnende Parabeln, deren Ebenen je die zur Leitebene der betreffenden Schaar senkrechten Sehnen halbiren.*

25. Wenn das Paraboloid gleichseitig ist, also die beiden Leitebenen zueinander normal sind, so sind g_∞ und l_∞ in Bezug auf C_0^g conjugirt; α_∞^g liegt auf g_∞ , der Kegel, welcher längs der Strictionslinie C_0^g umschrieben ist, zerfällt in zwei Ebenenbüschel, die Berührungcurve in die Gerade g_∞ und die durch α_∞^g gehende Gerade l , welche die eigentliche Strictionslinie ist.

Die Strictionslinie also jeder der beiden Schaaren eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids ist diejenige Gerade der andern Schaar, welche auf der Leitebene der betreffenden Schaar senkrecht steht. Beide Strictionsgeraden begegnen sich im Scheitel des Paraboloids. Dieses bekannte Resultat ist natürlich leicht auch auf andere Weise zu erreichen*).

26. Wir wenden uns nochmals zu den Raumcurven zurück, um die von den Normalebenen einer solchen Curve C eingehüllte Developpable N zu betrachten; ν , φ , μ haben für C dieselbe Bedeutung wie oben (Nr. 4). N ist ersichtlich von der Classe

*) Man vergleiche Herrn de la Gournerie's *Traité de géométrie descriptive*, Livre VII.

$$\mu' = \varrho + \nu,$$

denn die Normalebenen verbinden die Punkte der Curve C ν^{ter} Ordnung mit den ihnen projectivisch entsprechenden Tangenten der Curve n_{∞} ϱ^{ter} Classe und μ^{ter} Ordnung, welche dem Schnitt D_{∞} der Ebene E_{∞} mit der Tangentenfläche D von C in Bezug auf C_{∞}^2 polar ist.

Durch jeden Punkt gehen demnach stets $\varrho + \nu$ Normalebenen und auch, was daraus folgt, so viele Normalen an eine Curve C ν^{ter} Ordnung ϱ^{ter} Classe; so dass der nämliche Satz wie für die ebenen Curven gilt (Nr. 19). Hat die Curve C θ Wendetangenten W , so resultiren daraus θ Generatricen W' von N in E_{∞} , welche, da E_{∞} für diese nicht Berührungsebene ist, an dem fernern Schnitt n_{∞} Wendetangenten sind*); sie sind ja auch reciprok zu den Rückkehrpunkten, welche durch die Geraden W auf D_{∞} veranlasst werden.

Für die ν Punkte $R_{\infty} = (E_{\infty}, C)$ ist E_{∞} die Normalebene, so dass diese Ebene eine ν -fache Berührungsebene von N ist; da die Classe der Developpable N $\nu + \varrho$ und die von n_{∞} ϱ ist, so muss jede der ν Berührungen eine gewöhnliche sein; bei einer solchen ist im Allgemeinen die Berührungsgeneratrix eine einfache Tangente des fernern Schnitts*); in unserem Falle aber sind die ν Generatricen, längs deren E_{∞} berührt, ersichtlich Wendetangenten von n_{∞} , da sie den ν Rückkehrpunkten R_{∞} von D_{∞} polar sind. Nimmt man nun an, dass diese Generatricen — wir wollen sie Γ' nennen — Cuspidalgeneratricen von N sind, so ergibt sich zunächst, dass die Ordnung von N ist

$$\varrho' = \mu + 3\nu + \theta;$$

vergleichen wir einen beliebigen vollständigen ebenen Schnitt n von N mit dem unvollständigen Schnitte n_{∞} , so zeigt sich, da jener von der Ordnung $\mu + 3\nu + \theta$, der Classe $\nu + \varrho$ ist und $\nu' + \nu + \theta'$ Rückkehrpunkte hat (wobei ν' die Ordnung der Cuspidalcurve K' von N und θ' die Zahl der Cuspidalgeneratricen von N ausser den Γ' ist), während n_{∞} μ^{ter} Ordnung, ϱ^{ter} Classe ist und $\nu' - 4\nu - 2\theta + \theta'$ Rückkehrpunkte hat, dass n_{∞} $\nu + \theta$ Wendetangenten mehr hat als n : die Geraden W' und Γ' . Also sind die Γ' in der That Cuspidalgeneratricen.

Die Normalebenen einer Raumcurve (ν, ϱ, μ) mit θ Wendetangenten hüllen also eine abwickelbare Fläche von der Classe $\nu + \varrho$, der Ordnung $\mu + 3\nu + \theta$ ein, welche in E_{∞} ν Cuspidalgeneratricen hat, längs deren sie von dieser Ebene berührt wird**).

*) Cremona, Teoria delle superficie Nr. 13.

**) Ist die Curve C rational, ihr Geschlecht also 0, und hat sie β Rückkehrpunkte, so ist $\varrho = 2(\nu - 1) - \beta$, $\mu + \theta = 3(\nu - 2) - 2\beta$; folglich $\mu' = 3\nu - 2 - \beta$, $\varrho' = 6(\nu - 1) - 2\beta$; was für $\beta = 0$ mit Herrn Em. Weyr's Angabe stimmt. Journ. f. Math. Bd. 74 S. 277.

Man überzeugt sich leicht, dass, *ceteris paribus*, die Summe $\mu + \theta$ constant bleibt, also hängt die Ordnung der Normalebenen-Torse nur scheinbar von der Anzahl der Wendetangenten der ursprünglichen Curve ab; θ ist am grössten, wenn die Curve eben ist, weil dann $\mu = 0$ ist.

Die Curve n_∞ hat offenbar nur $\nu + \theta$ Wendetangenten, also n keine: die Torse N hat demnach keine Wendeberührungsebene. Auch aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Gleichungen

$$2(\varrho + \nu - 1) = \mu + 3\nu + \theta + \alpha' - 2p$$

und

$$2(\varrho - 1) = \nu + \mu + \theta - 2p,$$

in denen α' die Zahl der Wendeberührungsebenen von N und p das Geschlecht von C und von N ist und von denen die erstere für einen ebenen Schnitt von N , die andere für einen Projectionskegel von C gilt, lässt sich folgern, dass $\alpha' = 0$; was übrigens auch a priori zu erwarten war.

27. Die Ordnung ν' der Cuspidalcurve K' von N ist, weil jede der $\alpha = 3(\mu - \varrho) + \nu + \theta$ Wendeebenen von D einen unendlich fernen Punkt von K' liefert,

$$\nu' = 4\nu + \alpha + 2\theta = 3(\mu - \varrho + \theta) + 5\nu,$$

worin wiederum nur die Summe $\mu + \theta$ auftritt.

Da N ausser den ν Cuspidalgeneratricen Γ' in E_∞ angenommenermassen noch θ' andere hat, so liefert ein ebener Schnitt von N , weil er $\nu' + \nu + \theta' = 3(\mu + \theta - \varrho) + 6\nu + \theta'$ Rückkehrpunkte hat,

$$2(\mu + 3\nu + \theta - 1) = \varrho + \nu + 3(\mu + \theta - \varrho) + 6\nu + \theta' - 2p;$$

dies in Verbindung mit

$$2(\varrho - 1) = \nu + \mu + \theta - 2p$$

gibt:

$$\theta' = 0;$$

also existiren ausser den unendlich entfernten Γ' keine Cuspidalgeneratricen auf N .

K' ist die Curve der Mittelpunkte der Schmiegunugskugeln von C , die Rückkehrpunkte auf K' sind Centra von Kugeln mit Maximal- oder Minimalradien; sei deren Zahl β' , so ist wegen

$$\alpha' - \beta' = 2(\mu' - \nu') \text{ und } \alpha' = 0:$$

$$\beta' = 6(\mu + \theta) - 8(\varrho - \nu).$$

Die Formeln für die übrigen Singularitäten von N sind von minder einfacher Gestalt.

Wenn die Curve C eben ist, so degenerirt die Developpable D in die ϱ -fache Ebene E der Curve, die Curve n_∞ demnach zu dem ϱ -fachen

Strahlbüschel um den unendlich fernen Normalpunkt der Ebene E . Die Normalebenenfläche einer ebenen Curve v^{ter} Ordnung, ϱ^{ter} Classe mit θ Wendetangenten ist also ein auf der Ebene der Curve normaler Cylinder von der Classe $v + \varrho$, der Ordnung $3v + \theta$, welcher in E_∞ v Cuspidalmantellinien hat, längs deren er von dieser Ebene berührt wird. Sein Schnitt mit der Ebene E ist die Evolute der Curve. Die Formeln für die Cuspidalcurve sind natürlich, weil dieselbe sich auf einen Punkt reducirt, illusorisch. — Als einziges Beispiel möge die cubische Raumcurve dienen; bei derselben ist: $v = \mu = 3$, $\varrho = 4$, $\theta = 0$; also:

$$\mu' = 7, \varrho' = v' = 12, \beta' = 10.$$

28. Wenn man weiss, dass eine Raumcurve der totale oder partielle Schnitt zweier Flächen ist, und in wie vielen Punkten sie im letzteren Falle dem weitem Schnitt begegnet, so kann man auch leicht die Classe der Developpable der Normalebenen ermitteln. Um nicht die Betrachtung zu sehr zu compliciren, nehmen wir die beiden sich durchschneidenden Flächen ohne singuläre Curven an. Zunächst betrachten wir bloß eine derselben, F , welche n^{ter} Ordnung sei. Die längs der Curve C^v der Fläche F^n umschriebene Torse ist von der Classe $(n - 1)v$ [und von der Classe $(n - 1)v - s_b - 2s_c$, falls F^n mit einer Doppelcurve b^{ter} Ordnung und einer Cuspidalcurve c^{ter} Ordnung behaftet wäre, denen die Curve C^v in s_b resp. s_c Punkten begegnete]. Die Polarcurve N_∞ der unendlich fernen Curve dieser Torse in Bezug auf C_∞^2 ist demnach von der Ordnung $(n - 1)v$; die Flächennormalen von F^n längs C^v verbinden nun die Punkte von C^v mit den projectivisch entsprechenden Punkten von N_∞ , folglich erzeugen sie eine Fläche (Normalie) vom Grade $(n - 1)v + v = nv$ und vom selben Geschlechte p wie C^v ; die Normalen in den Doppel- und Rückkehrpunkten, deren C^v δ resp. β habe, sind Doppel- und Cuspidalgeneratricen der Normalie. Hat C^v die Classe ϱ , so ist der Rang r der Normalie gleich $\varrho + 2v(n - 1)$, weil sowohl $2(nv - 1) - r$, als auch $2(v - 1) - \varrho = \beta - 2p$ ist. Die Normalie hat demnach $2(nv + \varrho - 2)$ Torsallinien (Nr. 20), also an so vielen Stellen ist ein Element von C^v Krümmungslinie.

29. Die zweite Fläche, auf welcher C^v liegt, sei F^{n_1} n_1^{ter} Ordnung. Dieselbe liefert eine Normalie vom Grade vn_1 . Beide Normalien sind ersichtlich projectivisch auf einander bezogen, indem sich die in dem nämlichen Punkte von C^v errichteten Normalen beider Flächen entsprechen. Die Verbindungsebenen entsprechender Normalen, also die Normalebenen von C^v , hüllen eine abwickelbare Fläche ein, deren Classe durch die eines ebenen Schnitts am besten ermittelt wird. Die Schnittcurven einer Ebene mit den beiden Normalien würden durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve von der

Classe $\nu (n + n_1)$ erzeugen, wenn nicht Coincidenzen entsprechender Punkte stattfinden. Solche kommen aber vor und zwar erstens in den ν Spuren der Curve C^ν , ferner in den Spuren der Normalen in den s Begegnungspunkten von C^ν mit dem fernerem Schnitte der beiden Flächen F^n und F^{n_1} , endlich in den Spuren der Normalen in den Doppel- und Rückkehrpunkten der C^ν ; denn in den beiden letzten Fällen haben die Flächen wegen der Berührung gemeinsame Normalen; in den Rückkehrpunkten sogar haben beide Flächen eine gemeinsame Berührungsebene in zwei unendlich nahen Punkten (in der Richtung der Rückkehrtangente), also die Normalen nicht bloß die Cuspidalgeneratrices, sondern auch noch je die Nachbargeneratrix gemein. Daraus geht hervor, dass, während jeder Coincidenzpunkt der beiden ersten Arten die Classe der Normalebenen-Fläche um 1 und jede durch einen Doppelpunkt bewirkte Coincidenz um 2 vermindert, jeder der durch die Rückkehrpunkte hervorgerufenen Coincidenzpunkte eine Reduction um 3 veranlasst.

Die Classe der Developpable der Normalebenen einer Curve ν^{ter} Ordnung, in der sich 2 allgemeine Flächen n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung durchschneiden und welche δ Doppel- und β Rückkehrpunkte hat und dem etwaigen fernerem Schnitte der beiden Flächen in s Punkten begegnet, ist folglich

$$\mu' = \nu (n + n_1 - 1) - 2\delta - 3\beta - s.$$

Stellen wir dies mit dem früheren Resultat zusammen:

$$\mu' = \nu + \varrho,$$

so ergibt sich die bekannte Formel:

$$\varrho + s = \nu (n + n_1 - 2) - 2\delta - 3\beta *).$$

Treffen sich 2 andere Flächen von den Ordnungen n_2 und n_3 ebenfalls in der Curve C^ν und begegnet dieselbe in diesem Falle dem fernern Schnitt in s' Punkten, so ist ersichtlich

$$s' - s = \nu (n_2 + n_3 - n - n_1),$$

welche Formel ein Mittel liefert, das eine s zu finden, wenn das andere bekannt ist.

30. Befindet sich unter den fernerem Schnittcurven von F^n und F^{n_1} z. B. eine, welche auf F^n σ -fach, auf F^{n_1} σ_1 -fach ist, und begegnet C^ν dieser Curve in s' Punkten [von denen auch mehrere zusammenfallen können, so dass dann die beiden F statt an verschiedenen Stellen mit je einem Mantel sich an derselben Stelle mit meh-

*) Salmon-Fiedler, anal. Geom. des Raumes II S. 108; Cremona, Teoria delle superficie Nr. 96.

rerer Mänteln tangiren], so sind die beiden Normalien vom Grade $n\nu - s'(\sigma - 1)$ resp. $n_1\nu - s'(\sigma_1 - 1)$, also die Normalebenen-Torse von der Classe

$$\mu' = \nu(n + n_1 - 1) - s'(\sigma + \sigma_1 - 1) - 2\delta - 3\beta - s'',$$

wobei s'' die Zahl der Begegnungspunkte von C' mit dem einfachen Theile des ferneren Schnitts ist. Aehnlich sind andere Fälle zu behandeln; sie alle in einer Formel zu vereinigen, würde diese zu sehr compliciren, abgesehen davon, dass es überhaupt nicht leicht sein möchte, alle zu übersehen. Auch die obige Formel dürfte, wenn μ' und das eine s bekannt sind, oft ein Mittel bieten, das andere s zu ermitteln.

Darmstadt, Anfang October 1872.