Zur Transformation der Querschnitte Riemann'scher Flächen.

Von

J. WELLSTEIN in Strassburg i. E.

1. Wenn man von einem kanonischen Querschnittssystem

$$Q = [a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda], \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots, p$$

einer Riemann'schen Fläche T des Geschlechts p zu einem anderen kanonischen Schnittsystem

$$Q' = [a'_\lambda, b'_\lambda, c'_\lambda], \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots, p$$

übergeht, so drücken sich bekanntlich die Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}'_\mu, \mathfrak{B}'_\mu$ jedes Integrals erster oder zweiter Gattung an den neuen Schnitten a'_μ, b'_μ linear und homogen aus durch seine Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda$ an den alten Querschnitten a_λ, b_λ , also etwa in der Form

$$\mathfrak{A}'_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\alpha_{\mu\lambda} \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{b}_{\mu\lambda} \mathfrak{B}_\lambda), \quad \mathfrak{B}'_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{c}_{\mu\lambda} \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{d}_{\mu\lambda} \mathfrak{B}_\lambda),$$

und zwar sind die Coefficienten $\alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ ganze Zahlen, welche den Gleichungen

$$\text{I. } \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\alpha_{\lambda\mu} c_{\lambda\nu} - \alpha_{\lambda\nu} c_{\lambda\mu}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{b}_{\lambda\mu} \mathfrak{d}_{\lambda\nu} - \mathfrak{b}_{\lambda\nu} \mathfrak{d}_{\lambda\mu}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\alpha_{\lambda\mu} \mathfrak{d}_{\lambda\nu} - \mathfrak{b}_{\lambda\nu} c_{\lambda\mu}) = \left[\frac{\mu}{\nu} \right], \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\alpha_{\mu\lambda} \mathfrak{b}_{\nu\lambda} - \alpha_{\nu\lambda} \mathfrak{b}_{\mu\lambda}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{c}_{\mu\lambda} \mathfrak{d}_{\nu\lambda} - \mathfrak{c}_{\nu\lambda} \mathfrak{d}_{\mu\lambda}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\alpha_{\mu\lambda} \mathfrak{d}_{\nu\lambda} - \mathfrak{c}_{\nu\lambda} \mathfrak{b}_{\mu\lambda}) = \left[\frac{\mu}{\nu} \right], \end{cases}$$

und

$$\text{III.} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & b_{p1} & \dots & b_{pp} \\ c_{11} & \dots & c_{1p} & d_{11} & \dots & d_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1} & \dots & c_{pp} & d_{p1} & \dots & d_{pp} \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{matrix} \text{für } \mu, \nu = 1, 2, \dots, p \\ \left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right] = \begin{matrix} 1, & \text{wenn } \mu = \nu \\ 0, & \text{,, } \mu \neq \nu \end{matrix} \end{matrix}$$

genügen.

Man erhält die Gleichungen I. nach Thomae, Crelle's Journal Bd. 75, indem man die transformirten Periodicitätsmoduln der Integrale 1. Gattung in die bekannten Riemann'schen Relationen einsetzt und die reellen Bestandtheile von den imaginären scheidet; die Formeln II sind eine unmittelbare Folge von I und III, und D wird bis auf sein Vorzeichen aus I bestimmt, indem man in geeigneter Weise das Quadrat dieser Determinante bildet.

2. Nun sind aber die a, b, c, d ganze Zahlen, welche angeben, wie viel mal öfter man beim Integriren über a'_μ, b'_μ die Querschnitte a_2, b_2 vom (+) Rande nach dem (—) Rande überschreiten muss als vom (—) Rande nach dem (+) Rande, wie weiter unten noch einmal genauer nachgewiesen wird. Folglich hängen die Zahlen a, b, c, d nur von der Natur der Schnittsysteme Q, Q' ab, und die Formeln I, II, III haben mit den Integralen 1. und 2. Gattung nichts zu thun. Es scheint daher wünschenswerth und für den systematischen Aufbau der Functionentheorie auf einer gegebenen Riemann'schen Fläche nothwendig, die Gleichungen I, II, III mit rein geometrischen, der analysis situs angehörenden Hilfsmitteln beweisen zu können. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mir gestatten, einen solchen Beweis zu erbringen, der zudem noch den Vorzug haben dürfte, nicht schwerer zu sein als der mit transcendenten Mitteln geführte.

3. Wir legen zu diesem Zwecke jedem Schnitte a_2, b_2 des Systems Q diejenige Richtung bei, in welcher die Periodicitätsmoduln durch Integration bestimmt werden, und versehen die Ränder dieser Schnitte so mit den Marken (+) und (—), dass man, diese Wege in ihrer Richtung durchlaufend,

den (+) Rand von a_2 zur Linken

„ (+) „ „ b_2 „ Rechten

hat, übereinstimmend mit der von Riemann getroffenen Festsetzung. Falls man die Schnitte c_2 nicht ganz vermeidet*), was wegen der Unübersichtlichkeit der Zeichnung nicht immer zu ermöglichen ist, so denken wir uns dieselben von einem Punkte Ω der Fläche strahlenförmig nach den Kreuzungsstellen der Schnittpaare a_2, b_2 auslaufend,

*) Vergl. Klein, Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. Math. Ann. Bd. 21, pag. 184.

und zwar, um keine Unklarheit zu lassen, jedesmal nach der Ecke, wo der (—) Rand von a_2 mit dem von b_2 zusammenstösst. An sich wäre das unwesentlich. Die Richtung, die wir auf c_2 festlegen, soll von Ω nach dieser Ecke führen und den (+) Rand von c_2 zur Linken haben, so dass also die Schnitte a_2, b_2, c_2 in ihrer Kreuzungsstelle folgendermassen orientirt sind: (Fig. 1.)

Fig. 1.

4. Ganz ebenso sei das Schnittsystem Q' mit $\pm$ Marken und Richtungssinn versehen. Ist dann s irgend ein Schnitt aus Q und s' einer aus Q' , so soll das Symbol $\left(\begin{smallmatrix} s \\ s' \end{smallmatrix}\right)$ angeben, wie viel Mal öfter man beim Durchlaufen von s' in seiner Eigenrichtung den Schnitt s von seinem (—) Rande nach dem (+) Rande hin überschreitet als vom (+) Rande nach dem (—) Rande. Es ist für diese Abzählung wesentlich, dass s wirklich überschritten werden muss; wenn s' an einer Stelle an s heranführt, dann etwa eine Strecke lang mit s zusammenfällt und sich darauf auf demselben Rande, also ohne Ueberspringung des Schnittspaltes von s wieder entfernt, so liefert diese Stelle zu $\left(\begin{smallmatrix} s \\ s' \end{smallmatrix}\right)$ keinen Beitrag, doch lässt sich das Vorkommen dieses Falles durch erlaubte Deformationen stets vermeiden; denn wenn s mit s' ganz oder auf eine Strecke l hin zusammenfielen, so könnte man s durch eine kleine Verschiebung von s' entfernen, was ja auf die Werthe der Periodicitätsmoduln keinen Einfluss hat. Man überzeugt sich leicht an einem Beispiele, dass $\left(\begin{smallmatrix} s' \\ s \end{smallmatrix}\right)$ im Allgemeinen nicht gleich $\left(\begin{smallmatrix} s \\ s' \end{smallmatrix}\right)$ ist. Lassen wir vorläufig die Schnitte c_2, c_2' bei Seite, so sind, da

$$s = a_\mu, b_\mu; \quad s' = a'_\nu, b'_\nu; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, p$$

sein kann, im Wesentlichen vier Combinationen möglich:

$$\begin{array}{l} s = a_\mu \\ s' = a'_\nu \end{array} \quad \begin{array}{l} b_\mu \\ a'_\nu \end{array} \quad \begin{array}{l} a_\mu \\ b'_\nu \end{array} \quad \begin{array}{l} b_\mu \\ b'_\nu \end{array},$$

die durch Fig. 2 a | 2 b | 2 c | 2 d veranschaulicht werden:

Fig. 2a.

Fig. 2b.

Fig. 2c.

Fig. 2d.

In Fig. 2a überschreitet a'_ν den Schnitt a_μ vom (—) Rand nach dem (+) Rand; dagegen führt a_μ vom (+) Rand des Schnittes a'_ν nach dem (—) Rand. Würde a'_ν an einer anderen Stelle den Schnitt a_μ von (+) nach (—) hin überspringen, so würde dort a_μ den Schnitt a'_ν von (—) nach (+) kreuzen; also ist $\left(\frac{a_\mu}{a'_\nu}\right) = -\left(\frac{a'_\nu}{a_\mu}\right)$. Stellt man in allen vier Fällen 2a, 2b, 2c, 2d dieselbe Betrachtung an, so erhält man die Formeln:

$$(1) \quad \begin{aligned} \left(\frac{a_\mu}{a'_\nu}\right) &= -\left(\frac{a'_\nu}{a_\mu}\right), & \left(\frac{b_\mu}{a'_\nu}\right) &= +\left(\frac{a'_\nu}{b_\mu}\right), \\ \left(\frac{a_\mu}{b'_\nu}\right) &= +\left(\frac{b'_\nu}{a_\mu}\right), & \left(\frac{b_\mu}{b'_\nu}\right) &= -\left(\frac{b'_\nu}{b_\mu}\right). \end{aligned}$$

5. Wir denken uns nun das Querschnittssystem Q wirklich ausgeführt, dagegen die Schnitte Q' nur in die Fläche T eingezeichnet; die Fläche T mit dem Schnittsystem Q heisse ausführlicher T_Q . Anstatt die Querschnitte a'_μ, b'_μ zu durchlaufen und dabei fortgesetzt die Schnitte Q zu überschreiten, führen wir andere, in T_Q „zulässige“ Bahnen A'_μ, B'_μ ein, welche nirgends in T_Q eine Schnittspalte überspringen, und zwar seien dieselben folgendermassen definirt.

Man folgt a'_μ (bzw. b'_μ) in seiner Richtung, bis $a'_\mu(b'_\mu)$ an den (+) oder (—) Rand eines Schnittes aus Q stösst, und folgt nun, anfangs in der Richtung dieses Schnittes, der Berandung von T_Q so lange, bis man zu der Stelle kommt, wo der Weg $a'_\mu(b'_\mu)$ weiter führt; dann folgt man $a'_\mu(b'_\mu)$ so lange, bis man wieder zu einem Rande von T_Q kommt und verfährt dann ebenso wie vorher. Des Genaueren liegt die Sache so:

- 1) wenn $a'_\mu(b'_\mu)$ einen Schnitt c_λ trifft, so folgt man c_λ bis zu dem Knotenpunkt von a_λ, b_λ (vergl. Fig. 1). Hatte $a'_\mu(b'_\mu)$ den Schnitt c_λ auf der $\left\{ \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right.$ Seite getroffen, so folgt man von dem Schnittpunkt der Linien $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ aus dem Rande von $\left\{ \begin{smallmatrix} -b_\lambda \\ -a_\lambda \end{smallmatrix} \right.$, bis man wieder nach dem Punkt $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$ kommt, dann dem Rande von $\left\{ \begin{smallmatrix} +a_\lambda \\ +b_\lambda \end{smallmatrix} \right.$ nach $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$, dann dem Rande von $\left\{ \begin{smallmatrix} +b_\lambda \\ +a_\lambda \end{smallmatrix} \right.$ bis $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$, dann dem Rande von $\left\{ \begin{smallmatrix} -a_\lambda \\ -b_\lambda \end{smallmatrix} \right.$ bis $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$, und schliesslich dem $\left\{ \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \right.$ Rande von c_λ bis gegenüber der Ausgangsstelle. Wie man sieht, ist a_λ, b_λ und der in Betracht kommende Theil von c_λ je einmal *in* seiner Richtung und *entgegen* seiner Richtung durchlaufen worden; die algebraische Summe der in

$a'_\mu(b'_\mu)$ anlässlich des Schnittes mit c_2 eingeschalteten Umwege ist also gleich Null.

- 2) wenn $a'_\mu(b'_\mu)$ den Schnitt $\left\{ \begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix} \right\}$ trifft, so folgt man $\left\{ \begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix} \right\}$ in seiner Richtung bis zum Kreuzungspunkt (a_2, b_2) , darauf dem Schnitte $\left\{ \begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix} \right\}$ wieder bis zum Kreuzungspunkt, und von da dem Wege $\left\{ \begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix} \right\}$ rückwärts bis gegenüber der Ausgangsstelle. Hatte man sich anfangs dem Schnitte $\left\{ \begin{smallmatrix} a_2 \\ b_2 \end{smallmatrix} \right\}$ von der (—) Seite her genähert, so musste man die Curven $\left\{ \begin{smallmatrix} b_2 \\ a_2 \end{smallmatrix} \right\}$ in ihrer Richtung durchlaufen, im anderen Falle *entgegen* ihrer Richtung, und es ist somit, seiner algebraischen Länge nach,

$$(2) \quad \begin{cases} A'_\mu = a'_\mu + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) b_\lambda + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) a_\lambda, \\ B'_\mu = b'_\mu + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) b_\lambda + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) a_\lambda. \end{cases}$$

6. Ist σ irgend eine geschlossene, mit (+) und (—) Rand versehene Curve in T , und will man abzählen, wie viel mal öfter man, $A'_\mu(B'_\mu)$ in seiner Richtung durchlaufend, σ von seiner (—) Seite nach der (+) Seite überschreitet, als umgekehrt, so kann man $A'_\mu(B'_\mu)$ offenbar in seine in (2) angegebenen Bestandtheile auflösen, indem eine in ihrer und *gegen* ihre Richtung durchlaufene Schnittcurve aus Q zu $\left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ A'_\mu \end{smallmatrix} \right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ B'_\mu \end{smallmatrix} \right)$ keinen Beitrag liefert. Nimmt man für σ insbesondere die Curven a'_ν, b'_ν , so folgt aus (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ A'_\mu \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ b_\lambda \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ a_\lambda \end{smallmatrix} \right), \\ \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ B'_\mu \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ b_\lambda \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ a_\lambda \end{smallmatrix} \right), \\ \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ A'_\mu \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ b_\lambda \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ a_\lambda \end{smallmatrix} \right), \\ \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ B'_\mu \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ b_\lambda \end{smallmatrix} \right) + \sum_{\lambda} \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ a_\lambda \end{smallmatrix} \right), \end{cases}$$

Da a'_ν, a'_μ einander nicht überschreiten, so ist $\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ a'_\mu \end{smallmatrix} \right) = 0$; ebenso

$\begin{pmatrix} b'_\nu \\ b'_\mu \end{pmatrix} = 0$, und auch $\begin{pmatrix} a'_\nu \\ b'_\mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b'_\nu \\ a'_\mu \end{pmatrix}$ verschwinden, wenn $\nu \geq \mu$ ist. Für $\mu = \nu$ dagegen haben beide Symbole den Werth -1 , wie aus Fig. 1 zu entnehmen ist. Mit Rücksicht auf (1) folgt daher aus (3):

$$(4) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} a'_\nu \\ A'_\mu \end{pmatrix} = \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ a'_\nu \end{pmatrix} - \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ a'_\nu \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a'_\nu \\ B'_\mu \end{pmatrix} = -[\mu] + \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ a'_\nu \end{pmatrix} - \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ a'_\nu \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b'_\nu \\ A'_\mu \end{pmatrix} = -[\mu] - \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ b'_\nu \end{pmatrix} + \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ a'_\nu \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b'_\nu \\ B'_\mu \end{pmatrix} = - \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ b'_\nu \end{pmatrix} + \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b'_\nu \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wo

$$[\mu] = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{,, } \mu > \nu. \end{cases}$$

7. Da T_Q einfach zusammenhängend ist, so würde T_Q durch den Schnitt a'_ν , wenn man denselben wirklich ausführte, in Stücke zerfallen, wobei wir also, was nach Art. 4 erlaubt ist, voraussetzen, dass a'_ν nicht mit einem Schnitte a_λ oder b_λ des Systems Q ganz oder theilweise zusammenfällt. Folglich kann man nur dadurch vom $(-)$ Rand von a'_ν zum $(+)$ Rand gelangen, dass man a'_ν irgendwo überschreitet. So oft also A'_μ den Schnitt a'_ν von $(-)$ nach $(+)$ überschreitet, so oft muss A'_μ , um aus dem $(+)$ a'_ν -Gebiete herauszukommen, den Schnitt a'_ν von seiner $(+)$ Seite nach der $(-)$ Seite überspringen, da a'_ν ja eine geschlossene Curve ist; daher ist $\begin{pmatrix} a'_\nu \\ A'_\mu \end{pmatrix} = 0$, und ebenso $\begin{pmatrix} a'_\nu \\ B'_\mu \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} b'_\nu \\ A'_\mu \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} b'_\nu \\ B'_\mu \end{pmatrix} = 0$. Schreibt man nun noch:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} = -\alpha_{\mu\lambda}, \quad \begin{pmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{pmatrix} = -\beta_{\mu\lambda}, \quad \begin{pmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{pmatrix} = -\gamma_{\mu\lambda}, \quad \begin{pmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{pmatrix} = -\delta_{\mu\lambda},$$

so ergibt sich aus (4), indem die beiden mittleren Gleichungen nach Vertauschung von μ und ν in einander übergehen, das Gleichungssystem II des Art. 1.

Betrachtet man umgekehrt das Schnittsystem Q' als das zuerst gegebene, während Q neu eingeführt und die Wege a_λ, b_λ durch „zulässige“ Wege A_λ, B_λ ersetzt werden, so erhält man statt der Gleichungen (4) ganz entsprechend gebildete, deren linke Seiten wiederum Null sind, während die rechten Seiten aus denen von (4) durch Ver-

tauschung der a, b mit a', b' hervorgehen. Wendet man dann auf die Symbole $\begin{pmatrix} a'_1 \\ a_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'_2 \\ b_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b'_1 \\ a_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b'_2 \\ b_\mu \end{pmatrix}$ die Formeln (1) an, so erhält man nach Einführung der in (5) angegebenen Bezeichnungsweise das Gleichungssystem I des Art. 1. Bildet man schliesslich in geeigneter Weise*) das Quadrat der in Art. 1, III angeschriebenen Determinante D , so findet man $D = \pm 1$.

Uebrigens sind ja die Gleichungen II und III eine unmittelbare Folge von I, oder I und III eine Folge von II, so dass wir also den versprochenen Beweis hiermit erbracht haben. Die Bestimmung des Vorzeichens in $D = \pm 1$, das bekanntlich das positive sein muss, ist Sache der Determinantentheorie.

Strassburg i. E., 30. Dezember 1898.

*) Vergl. Krazer u. Prym, Neue Grundl. einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen, Leipzig 1892, Seite 63 u. 64.