 TEORICA DE' MOTI PICCIOLI D' UN GALLEGGIANTE OMOGENEO.

MEMORIA

DEL SIG. PROF. DELFINO CODAZZI.

Prendo a considerare i moti piccioli d'un galleggiante omogeneo, il quale abbia una forma qualunque, e venga deviato in un modo pure qualunque da una posizione d'equilibrio stabile, però fatta astrazione dal movimento del liquido. Quest'argomento, per quanto io sappia, non fu trattato ancora in un modo generale, sebbene si conoscano le soluzioni più o meno complete d'alcuni casi particolari, e sebbene conoscesi qualche sistema d'equazioni, lineari sì ma complicate, dall'integrazione delle quali la soluzione generale dipenderebbe. Il metodo ch'io seguo mi conduce, dopo un primo integrale, ad equazioni di movimento possibilmente semplici.

Farò uso frequente de'teoremi enunciati da Dupin nella Memoria *De la stabilité des corps flottants*, e relativi tanto al piano tangente quanto all'incurvamento della superficie de'centri delle carene e della superficie involuppo delle basi delle medesime carene; de'quali teoremi ho riunito le dimostrazioni analitiche in uno scritto pubblicato negli *Annali di Scienze matematiche e fisiche* del Sig. Tortolini, agosto e settembre 1857.

1.

Un corpo omogeneo di forma qualsivoglia giaccia in equilibrio alla superficie d'un liquido stagnante; saranno, come è noto, in una stessa verticale il centro di gravità del corpo ed il centro della carena. Imaginiamo che questo galleggiante venga alcun poco abbassato od elevato rispetto al livello del liquido ed inclinato in pari tempo rispetto alla retta de'due centri, dipoi ch'esso venga abbandonato a sè medesimo senza velocità iniziale; e proponiamoci di determinare le leggi del movimento ch'esso assumerà, fatta astrazione dal movimento del liquido. Dovremo considerare a parte il moto di traslazione del centro di gravità ed il moto di rotazione di tutto il galleggiante attorno ad esso centro.

In primo luogo formiamo l'equazione che regola il moto verticale del centro di gravità; non occorre considerare il moto orizzontale di questo centro, il quale, ove si facesse astrazione dalla resistenza del liquido, sarebbe uniforme. Si chiamino g la gravità, D la densità del liquido, V^0 il volume della parte di galleggiante immersa nello stato d'equilibrio; dimodochè gDV^0 esprimerà tanto il peso del liquido spostato quanto il peso di tutto il galleggiante. Alla fine del tempo t si chiamino ξ la distanza del centro di gravità dal livello del liquido, la quale quantità sarà tenuta

come positiva o negativa secondochè diretta d'alto in basso o viceversa; V il volume della parte immersa di galleggiante; e ω l'area della sezione fatta al corpo con un piano orizzontale che separi da esso un segmento di volume eguale a V^0 . Il galleggiante è spinto in basso dal proprio peso gDV^0 , ed in alto dalla pressione del liquido esprimibile con gDV ; quindi, indicando con apici le derivate prese rispetto al tempo, avrà luogo l'equazione

$$(1) \quad DV^0\zeta'' = gDV^0 - gDV \quad \text{ovvero} \quad V^0\zeta'' = -g(V - V^0).$$

Si denomini Δ la distanza del centro di gravità dal piano della sezione d'area ω , e si riguardi questa quantità come positiva o come negativa secondochè diretta verso il basso o verso l'alto; inoltre si denomini λ la distanza del livello del liquido dal piano della medesima sezione; avremo manifestamente

$$\lambda = \Delta + \zeta.$$

Ora, indicando con z una ordinata verticale, è facile comprendere che la ω è il valore d'una certa funzione $\omega(z)$ dipendente dalla forma del corpo e relativa a $z = \lambda$; inoltre è pure facile comprendere che

$$V - V^0 = \int_0^\lambda \omega(z) dz.$$

Sostituendo questo valore nella (1), s'ottiene

$$(2) \quad V^0\zeta'' = -g \int_0^\lambda \omega(z) dz;$$

e questa è l'equazione che volevasi formare.

2.

In secondo luogo formiamo le equazioni che regolano il movimento di rotazione del galleggiante attorno al proprio centro di gravità. Si assumano come assi coordinati mobili i tre assi principali d'inerzia riferiti al centro di gravità, e siano a, b, c i tre momenti d'inerzia principali; v_a, v_b, v_c le componenti della velocità di rotazione attorno agli assi; $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ i coseni degli angoli formati dalla verticale con gli assi medesimi. Sussisteranno le seguenti note equazioni

$$(3) \quad \zeta'_a = \zeta_b v_c - \zeta_c v_b, \quad \zeta'_b = \zeta_c v_a - \zeta_a v_c, \quad \zeta'_c = \zeta_a v_b - \zeta_b v_a.$$

Si chiamino $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ le tre coordinate del centro della curva di base ω , e δ la distanza verticale di questo centro di carena dal centro di gravità; ponendo per brevità

$$\psi_a + \psi_b + \psi_c = \sum \psi_i,$$

ove ψ dinota una funzione qualunque, ed osservando che il piano orizzontale passante

pel punto $(\partial_a, \partial_b, \partial_c)$ è tangente la superficie de' centri di carena, avremo

$$(4) \quad \sum \partial_i \zeta_i = \delta, \quad \sum \partial_i \zeta'_i = \delta'.$$

Così, chiamando $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ le tre coordinate del centro di gravità dell'area ω , ed osservando che il piano di quest'area è tangente la superficie inviluppo delle basi delle carene, avremo pure

$$(5) \quad \sum \Delta_i \zeta_i = \Delta, \quad \sum \Delta_i \zeta'_i = \Delta'.$$

Alla fine del tempo t il volume del liquido spostato è V , ovvero

$$V^0 + \int_0^\lambda \omega(z) dz.$$

Ora i momenti del peso di liquido di volume V^0 rispetto agli assi sono

$$gDV^0(\partial_c \zeta_b - \partial_b \zeta_c), \quad gDV^0(\partial_a \zeta_c - \partial_c \zeta_a), \quad gDV^0(\partial_b \zeta_a - \partial_a \zeta_b);$$

i momenti del peso di liquido di volume $\int_0^\lambda \omega(z) dz$ sono

$$gD \int_0^\lambda \omega(z) dz. (x_c \zeta_b - x_b \zeta_c), \quad gD \int_0^\lambda \omega(z) dz. (x_a \zeta_c - x_c \zeta_a), \quad gD \int_0^\lambda \omega(z) dz. (x_b \zeta_a - x_a \zeta_b),$$

ove x_a, x_b, x_c dinotano le tre coordinate del centro di gravità dello stesso volume. Per conseguenza il moto di rotazione del galleggiante attorno al proprio centro di gravità sarà regolato dalle tre seguenti equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} av'_a + (c - b)v_c v_b = gDV^0(\partial_c \zeta_b - \partial_b \zeta_c) + gD \int_0^\lambda \omega(z) dz. (x_c \zeta_b - x_b \zeta_c), \\ bv'_b + (a - c)v_a v_c = gDV^0(\partial_a \zeta_c - \partial_c \zeta_a) + gD \int_0^\lambda \omega(z) dz. (x_a \zeta_c - x_c \zeta_a), \\ cv'_c + (b - a)v_b v_a = gDV^0(\partial_b \zeta_a - \partial_a \zeta_b) + gD \int_0^\lambda \omega(z) dz. (x_b \zeta_a - x_a \zeta_b). \end{cases}$$

3.

Un integrale delle (6) si forma con facilità. Difatto, queste equazioni siano moltiplicate rispettivamente per $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$, e sommate tra loro; avuto riguardo alle (3) risulterà

$$a(\zeta_a v_a)' + b(\zeta_b v_b)' + c(\zeta_c v_c)' = 0,$$

da cui, avvertendo che quando il moto comincia le velocità sono nulle,

$$(7) \quad a \zeta_a v_a + b \zeta_b v_b + c \zeta_c v_c = 0.$$

Le (3) unitamente alla (7) ponno essere risolte rispetto alle tre componenti della velocità di rotazione. Denominando ξ il momento d'inerzia del galleggiante rispetto

alla verticale passante pel suo centro di gravità, cioè ponendo

$$\sum i \zeta_i^2 = \xi,$$

si trovano facilmente

$$(8) \quad \xi v_a = c \zeta_c \zeta'_b - b \zeta_b \zeta'_c, \quad \xi v_b = a \zeta_a \zeta'_c - c \zeta_c \zeta'_a, \quad \xi v_c = b \zeta_b \zeta'_a - a \zeta_a \zeta'_b.$$

Da queste possiamo dedurre un valore della quantità $\sum i v_i^2$, cioè della somma delle forze vive di tutti i punti del galleggiante; difatto, quadrando queste equazioni, moltiplicandole rispettivamente per a, b, c e sommandole, s'ottiene

$$\xi^2 \sum i v_i^2 = \xi (bc \zeta_a'^2 + ca \zeta_b'^2 + ab \zeta_c'^2) - abc (\sum \zeta_i \zeta_i')^2,$$

ovvero

$$(9) \quad \xi \sum i v_i^2 = bc \zeta_a'^2 + ca \zeta_b'^2 + ab \zeta_c'^2.$$

Un'altra espressione della somma delle forze vive può dedursi direttamente dalle (6), moltiplicando queste equazioni rispettivamente per v_a, v_b, v_c , e sommandole tra loro. S'ottiene in tal maniera, avuto riguardo alle (3), (4),

$$\sum i v_i v_i' = -gDV^0 \partial' - gD \int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot \sum x_i \zeta_i';$$

da cui

$$(10) \quad \sum i v_i^2 = \text{cost.} - 2gDV^0 \partial - 2gD \int dt \left\{ \int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot \sum x_i \zeta_i' \right\},$$

4.

Indicando con μ, ν due parametri indipendenti, le equazioni

$$\mu = \text{cost.}, \quad \nu = \text{cost.}$$

esprimano le linee di curvatura della superficie luogo de' punti $(\partial_a, \partial_b, \partial_c)$; i due parametri si riterranno determinati in guisa che s'annullino nel centro di carena corrispondente allo stato d'equilibrio del galleggiante. Si chiamino ordinatamente N, M gli archi de'due sistemi di linee di curvatura; n, m le derivate di questi archi, dimodochè

$$(11) \quad M = \int_0^\mu m d\mu, \quad N = \int_0^\nu n d\nu.$$

Siano ordinatamente pe'due sistemi r_ν, r_μ i raggi di curvatura; $n_a, n_b, n_c, m_a, m_b, m_c$ i coseni degli angoli che le tangenti fanno con gli assi. Siccome $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ sono i coseni degli angoli che la normale alla superficie forma con gli assi, così

$$(12) \quad \begin{cases} m_a = n_b \zeta_c - n_c \zeta_b, & m_b = n_c \zeta_a - n_a \zeta_c, & m_c = n_a \zeta_b - n_b \zeta_a, \\ n_a = m_c \zeta_b - m_b \zeta_c, & n_b = m_a \zeta_c - m_c \zeta_a, & n_c = m_b \zeta_a - m_a \zeta_b; \end{cases}$$

inoltre

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\zeta_a}{d\mu} = -\frac{mm_a}{r_\mu}, \quad \frac{d\zeta_b}{d\mu} = -\frac{mm_b}{r_\mu}, \quad \frac{d\zeta_c}{d\mu} = -\frac{mm_c}{r_\mu}, \\ \frac{d\zeta_a}{d\nu} = -\frac{nn_a}{r_\nu}, \quad \frac{d\zeta_b}{d\nu} = -\frac{nn_b}{r_\nu}, \quad \frac{d\zeta_c}{d\nu} = -\frac{nn_c}{r_\nu}. \end{array} \right.$$

Mediante questi valori le (8) assumono la forma seguente

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi v_a = (b\zeta_b m_c - c\zeta_c m_b) \frac{m\mu'}{r_\mu} + (b\zeta_b n_c - c\zeta_c n_b) \frac{n\nu'}{r_\nu}, \\ \xi v_b = (c\zeta_c m_a - a\zeta_a m_c) \frac{m\mu'}{r_\mu} + (c\zeta_c n_a - a\zeta_a n_c) \frac{n\nu'}{r_\nu}, \\ \xi v_c = (a\zeta_a m_b - b\zeta_b m_a) \frac{m\mu'}{r_\mu} + (a\zeta_a n_b - b\zeta_b n_a) \frac{n\nu'}{r_\nu}; \end{array} \right.$$

e la (9) diviene

$$(15) \quad \xi \sum i v_i^2 = \alpha \frac{m^2 \mu'^2}{r_\mu^2} + 2\beta \frac{m\mu' n\nu'}{r_\mu r_\nu} + \gamma \frac{n^2 \nu'^2}{r_\nu^2};$$

ove si fecero per brevità

$$bcm_a^2 + cam^2 + abm_c^2 = \alpha, \quad bcm_a n_a + cam_b n_b + abm_c n_c = \beta, \\ bcn_a^2 + can_b^2 + abn_c^2 = \gamma.$$

5.

D'ora in avanti adotteremo l'ipotesi de'moti piccoli, e riguarderemo come trascurabili tutti que' termini che saranno a più d'una dimensione rispetto ad una delle quantità $\lambda, \mu, \nu, \mu', \nu', v_a, v_b, v_c$. Indicando con ψ^0 il valore d'una funzione qualunque ψ relativo allo stato d'equilibrio, abbiamo evidentemente

$$(16) \quad \partial_a^0 = \partial^0 \zeta_a^0, \quad \partial_b^0 = \partial^0 \zeta_b^0, \quad \partial_c^0 = \partial^0 \zeta_c^0;$$

inoltre le (11) diventano

$$(17) \quad \mathbf{M} = m^0 \mu, \quad \mathbf{N} = n^0 \nu.$$

Ciò premesso, vediamo quali modificazioni subiscano la (6), (14).

Osserviamo dapprima che

$$\partial_c \zeta_b - \partial_b \zeta_c = (\partial_c^0 + m_c^0 \mathbf{M} + n_c^0 \mathbf{N}) \left(\zeta^0 - \frac{m_b^0}{r_\mu^0} \mathbf{M} - \frac{n_b^0}{r_\nu^0} \mathbf{N} \right) \\ - (\partial_b^0 + m_b^0 \mathbf{M} + n_b^0 \mathbf{N}) \left(\zeta_c^0 - \frac{m_c^0}{r_\mu^0} \mathbf{M} - \frac{n_c^0}{r_\nu^0} \mathbf{N} \right),$$

ovvero fatte le riduzioni

$$\partial_c \zeta_b - \partial_b \zeta_c = n_a^0 (r_\mu^0 + \partial^0) \frac{M}{r_\mu^0} - m_a^0 (r_\nu^0 + \partial^0) \frac{N}{r_\nu^0};$$

ed analoghi valori si troveranno pe' binomii $\partial_a \zeta_c - \partial_c \zeta_a$, $\partial_b \zeta_a - \partial_a \zeta_b$. Osserviamo dipoi che

$$(18) \quad \int_0^\lambda \omega(z) dz = \omega^0 \lambda;$$

inoltre, essendo cilindrico il volume $\int_0^\lambda \omega(z) dz$,

$$x_a = \Delta_a + \frac{1}{2} \lambda \zeta_a, \quad x_b = \Delta_b + \frac{1}{2} \lambda \zeta_b, \quad x_c = \Delta_c + \frac{1}{2} \lambda \zeta_c;$$

per cui

$$\int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot (x_c \zeta_b - x_b \zeta_c) = \omega^0 (\Delta_c^0 \zeta_b^0 - \Delta_b^0 \zeta_c^0) \lambda,$$

ed analoghi valori si troveranno pe' binomii

$$\int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot (x_a \zeta_c - x_c \zeta_a), \quad \int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot (x_b \zeta_a - x_a \zeta_b).$$

In conseguenza le (6) diventeranno

$$(19) \quad \begin{cases} av'_a = gDV^0 \left\{ n_a^0 (r_\mu^0 + \partial^0) \frac{M}{r_\mu^0} - m_a^0 (r_\nu^0 + \partial^0) \frac{N}{r_\nu^0} \right\} + gD\omega^0 (\Delta_c^0 \zeta_b^0 - \Delta_b^0 \zeta_c^0) \lambda, \\ bv'_b = gDV^0 \left\{ n_b^0 (r_\mu^0 + \partial^0) \frac{M}{r_\mu^0} - m_b^0 (r_\nu^0 + \partial^0) \frac{N}{r_\nu^0} \right\} + gD\omega^0 (\Delta_a^0 \zeta_c^0 - \Delta_c^0 \zeta_a^0) \lambda, \\ cv'_c = gDV^0 \left\{ n_c^0 (r_\mu^0 + \partial^0) \frac{M}{r_\mu^0} - m_c^0 (r_\nu^0 + \partial^0) \frac{N}{r_\nu^0} \right\} + gD\omega^0 (\Delta_b^0 \zeta_a^0 - \Delta_a^0 \zeta_b^0) \lambda. \end{cases}$$

Le (14) si mutano nelle seguenti:

$$\xi^0 v_a = (b\zeta_b^0 m_c^0 - c\zeta_c^0 m_b^0) \frac{M'}{r_\mu^0} + (b\zeta_b^0 n_c^0 - c\zeta_c^0 n_b^0) \frac{N'}{r_\nu^0},$$

$$\xi^0 v_b = (c\zeta_c^0 m_a^0 - a\zeta_a^0 m_c^0) \frac{M'}{r_\mu^0} + (c\zeta_c^0 n_a^0 - a\zeta_a^0 n_c^0) \frac{N'}{r_\nu^0},$$

$$\xi^0 v_c = (a\zeta_a^0 m_b^0 - b\zeta_b^0 m_a^0) \frac{M'}{r_\mu^0} + (a\zeta_a^0 n_b^0 - b\zeta_b^0 n_a^0) \frac{N'}{r_\nu^0};$$

e queste somministrano

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \xi^0 v'_a = (b\zeta_b^0 m_c^0 - c\zeta_c^0 m_b^0) \frac{M''}{r_\mu^0} + (b\zeta_b^0 n_c^0 - c\zeta_c^0 n_b^0) \frac{N''}{r_\nu^0} , \\ \xi^0 v'_b = (c\zeta_c^0 m_a^0 - a\zeta_a^0 m_c^0) \frac{M''}{r_\mu^0} + (c\zeta_c^0 n_a^0 - a\zeta_a^0 n_c^0) \frac{N''}{r_\nu^0} , \\ \xi^0 v'_c = (a\zeta_a^0 m_b^0 - b\zeta_b^0 m_a^0) \frac{M''}{r_\mu^0} + (a\zeta_a^0 n_b^0 - b\zeta_b^0 n_a^0) \frac{N''}{r_\nu^0} . \end{array} \right.$$

6.

Ora passiamo all'equazioni de'due movimenti.

Abbiamo

$$\Delta = \Delta^0 + \frac{d\Delta^0}{d\mu} \mu + \frac{d\Delta^0}{d\nu} \nu ;$$

ma seguono dalle (5), (13)

$$\frac{d\Delta^0}{d\mu} = - u_\mu^0 \frac{m^0}{r_\mu^0} , \quad \frac{d\Delta^0}{d\nu} = - u_\nu^0 \frac{n^0}{r_\nu^0} ,$$

ove si posero per brevità

$$\sum \Delta_i m_i = u_\mu , \quad \sum \Delta_i n_i = u_\nu ;$$

perciò

$$(21) \quad \Delta = \Delta^0 - u_\mu^0 \frac{M}{r_\mu^0} - u_\nu^0 \frac{N}{r_\nu^0} .$$

In conseguenza la (2), scrivendo $\lambda = \Delta$ invece di ζ , diventerà

$$(22) \quad \lambda'' + u_\mu^0 \frac{M''}{r_\mu^0} + u_\nu^0 \frac{N''}{r_\nu^0} + G^0 \lambda = 0 ,$$

ove s'è messo

$$\frac{g\omega^0}{V^0} = G^0 .$$

La (22) è l'equazione che regola il moto verticale del centro di gravità.

Dalle (19) si deducono facilmente

$$\sum i m_i^0 v'_i = - g D V^0 (r_\nu^0 + \delta^0) \frac{N}{r_\nu^0} - g D \omega^0 u_\nu^0 \lambda ,$$

$$\sum i n_i^0 v'_i = g D V^0 (r_\mu^0 + \delta^0) \frac{M}{r_\mu^0} + g D \omega^0 u_\mu^0 \lambda .$$

Dalle (20) si deducono pure con facilità

$$\sum i m_i^0 v_i' = -\frac{\beta^0}{\xi^0} \frac{M''}{r_\mu^0} - \frac{\gamma^0}{\xi^0} \frac{N''}{r_\nu^0}, \quad \sum i n_i^0 v_i' = \frac{\alpha^0}{\xi^0} \frac{M''}{r_\mu^0} + \frac{\beta^0}{\xi^0} \frac{N''}{r_\nu^0}.$$

Il confronto tra le due coppie d'equazioni somministra le due seguenti

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^0 \frac{M''}{r_\mu^0} + \gamma^0 \frac{N''}{r_\nu^0} = g D V^0 \xi^0 (r_\nu^0 + \partial^0) \frac{N}{r_\nu^0} + g D \omega^0 \xi^0 u_\nu^0 \lambda, \\ \alpha^0 \frac{M''}{r_\mu^0} + \beta^0 \frac{N''}{r_\nu^0} = g D V^0 \xi^0 (r_\mu^0 + \partial^0) \frac{M}{r_\mu^0} + g D \omega^0 \xi^0 u_\mu^0 \lambda; \end{array} \right.$$

le quali regolano il moto rotatorio del galleggiante attorno al proprio centro di gravità.

7.

Troviamo i valori degli angoli, che la normale alla superficie de' centri di carena nel punto $M = 0$, $N = 0$ fa rispettivamente con le normali condotte alla medesima superficie per gli estremi degli archi M , N .

Si chiamino ordinatamente S_μ , S_ν questi due angoli. Osservando che la ζ_i relativa al punto estremo di M ha per valore

$$\zeta_i^0 + \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} \cdot \mu + \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{2},$$

risulta

$$\cos S_\mu = 1 + \frac{\mu^2}{2} \sum \zeta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu^2},$$

ovvero

$$\cos S_\mu = 1 - \frac{1}{2} \frac{m^{02} \mu^2}{r_\mu^{02}}.$$

Ne segue la prima delle

$$(24) \quad S_\mu = -\frac{M}{r_\mu^0}, \quad S_\nu = -\frac{N}{r_\nu^0};$$

s'ottiene la seconda operando in modo analogo rispetto al punto estremo di N .

Troviamo anche il valore dell'angolo, che il piano tangente alla superficie de' centri di carena nel punto $M = 0$, $N = 0$ fa col piano tangente alla medesima nel punto di coordinate curvilinee M , N .

Si denomini σ quest'angolo, ed osservando che

$$\zeta_i = \zeta_i^0 + \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} \mu + \frac{d\zeta_i^0}{d\nu} \nu + \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu^2} \frac{\mu^2}{2} + \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu d\nu} \mu\nu + \frac{d^2\zeta_i^0}{d\nu^2} \frac{\nu^2}{2},$$

risulterà

$$\cos \sigma = 1 + \frac{\mu^2}{2} \sum \zeta_i^0 \frac{d^2 \zeta_i^0}{d\mu^2} + \frac{\nu^2}{2} \sum \zeta_i^0 \frac{d^2 \zeta_i^0}{d\nu^2},$$

ovvero

$$\cos \sigma = 1 - \frac{1}{2} \frac{m^{02} \mu^2}{r_\mu^{02}} - \frac{1}{2} \frac{n^{02} \nu^2}{r_\nu^{02}};$$

da cui

$$\sigma^2 = \frac{M^2}{r_\mu^{02}} + \frac{N^2}{r_\nu^{02}},$$

o anche

$$(25) \quad \sigma^2 = S_\mu^2 + S_\nu^2.$$

8.

Vediamo come si modifica la (10) equazione delle forze vive.

In primo luogo occorrerà formare il valore di δ . Abbiamo

$$\delta = \delta^0 + \frac{d\delta^0}{d\mu} \mu + \frac{d\delta^0}{d\nu} \nu + \frac{d^2\delta^0}{d\mu^2} \frac{\mu^2}{2} + \frac{d^2\delta^0}{d\mu d\nu} \mu\nu + \frac{d^2\delta^0}{d\nu^2} \frac{\nu^2}{2};$$

ove la seconda (4) somministra

$$\frac{d\delta^0}{d\mu} = 0, \quad \frac{d\delta^0}{d\nu} = 0,$$

$$\frac{d^2\delta^0}{d\mu^2} = \sum \frac{d\delta_i^0}{d\mu} \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} + \sum \delta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu^2}, \quad \frac{d^2\delta^0}{d\mu d\nu} = \sum \frac{d\delta_i^0}{d\nu} \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} + \sum \delta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu d\nu},$$

$$\frac{d^2\delta^0}{d\nu^2} = \sum \frac{d\delta_i^0}{d\nu} \frac{d\zeta_i^0}{d\nu} + \sum \delta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\nu^2}.$$

In seguito si trovano facilmente

$$\begin{aligned} \sum \frac{d\delta_i^0}{d\mu} \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} &= -\frac{m^{02}}{r_\mu^{02}}, & \sum \frac{d\delta_i^0}{d\nu} \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} &= 0, & \sum \frac{d\delta_i^0}{d\nu} \frac{d\zeta_i^0}{d\nu} &= -\frac{n^{02}}{r_\nu^{02}}, \\ \sum \delta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu^2} &= -\delta^0 \frac{m^{02}}{r_\mu^{02}}, & \sum \delta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\mu d\nu} &= 0, & \sum \delta_i^0 \frac{d^2\zeta_i^0}{d\nu^2} &= -\delta^0 \frac{n^{02}}{r_\nu^{02}}; \end{aligned}$$

perciò saranno

$$\frac{d^2\delta^0}{d\mu^2} = - (r_\mu^0 + \delta^0) \frac{m^{02}}{r_\mu^{02}}, \quad \frac{d^2\delta^0}{d\mu d\nu} = 0, \quad \frac{d^2\delta^0}{d\nu^2} = - (r_\nu^0 + \delta^0) \frac{n^{02}}{r_\nu^{02}};$$

e conseguentemente

$$(26) \quad \partial = \partial^0 - \frac{1}{2} (r_\mu^0 + \partial^0) S_\mu^2 - \frac{1}{2} (r_\nu^0 + \partial^0) S_\nu^2.$$

In secondo luogo occorrerà formare il valore di

$$\int dt \left\{ \int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot \sum x_i \zeta'_i \right\}.$$

Abbiamo

$$\sum x_i \zeta'_i = \sum \Delta_i \zeta'_i = \Delta',$$

perciò

$$\int dt \left\{ \int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot \sum x_i \zeta'_i \right\} = \omega^0 \int \lambda \Delta' dt.$$

Ora, osservando che $\Delta = \lambda - \zeta$, si trova

$$\int \lambda \Delta' dt = \frac{1}{2} \lambda^2 - \int \lambda \zeta' dt$$

in seguito la $\zeta'' = -\frac{g\omega^0}{V^0} \lambda$, equivalente della (22), somministra

$$-\omega^0 \int \lambda \zeta' dt = \frac{V^0}{2g} \zeta'^2.$$

Per conseguenza risulterà

$$\int dt \left\{ \int_0^\lambda \omega(z) dz \cdot \sum x_i \zeta'_i \right\} = \frac{\omega^0}{2} \lambda^2 + \frac{V^0}{2g} \zeta'^2.$$

Ciò premesso, la (10) diventerà

$$(27) \quad \sum i v_i^2 = \text{cost.} + gDV^0 \{ (r_\mu^0 + \partial^0) S_\mu^2 + (r_\nu^0 + \partial^0) S_\nu^2 \} - gD\omega^0 \lambda^2 - DV^0 \zeta'^2,$$

ove s'è compreso nella cost. anche il termine $-2gDV^0\partial^0$. Questa equazione rende manifesta la condizione, che deve aver luogo affinchè l'equilibrio del galleggiante sia stabile, ch'è quanto dire affinchè il galleggiante deviato alcun poco dalla sua posizione d'equilibrio e quindi abbandonato a sè medesimo tenda a tornarvi. Difatto essendo positivo il primo membro, tale esser deve anche il secondo; ora le quantità S_μ , S_ν si manterranno costantemente piccole ogni qualvolta i coefficienti de' loro quadrati saranno negativi, perocchè la somma di tutti i termini negativi dev'essere sempre minore di cost.; di conseguenza dovranno sussistere le ineguaglianze

$$(28) \quad -r_\mu^0 > \partial^0, \quad -r_\nu^0 > \partial^0.$$

Si noti che le r_μ^0 , r_ν^0 esprimono i raggi di curvatura della superficie de' centri di carena contati nel senso della normale esterna; per cui le $-r_\mu^0$, $-r_\nu^0$ esprimeranno i raggi di curvatura contati secondo la vera loro direzione. Dunque, le precedenti

ineguaglianze insegnano che *l'equilibrio del galleggiante è stabile quando la distanza del centro di gravità dal centro della carena è minore del più piccolo raggio di curvatura della superficie luogo de'centri di carena*. A questo modo è dimostrato in tutta la generalità, cioè qualunque sia la forma del galleggiante, e qualunque la direzione dello spostamento, il teorema enunciato da Dupin nella Memoria *De la stabilité des corps flottants* (*).

9.

Ammettendo che il centro di gravità del corpo rimanga a distanza costante dal livello del liquido, abbiamo

$$\zeta' = 0;$$

ammettendo di più che le verticali passanti pel centro di gravità dal corpo incontrino durante il tempo t la superficie de'centri di carena in punti d'una sua linea di curvatura, per esempio in punti della $\nu = \text{costante}$, abbiamo

$$N = 0, \quad \text{ovvero} \quad S_\nu = 0.$$

Allora la (27) diviene

$$\sum i v_i^2 = \text{cost.} - gD \{ \omega^0 \lambda^2 + V^0 (-r_\mu^0 - \partial^0) S_\mu^2 \};$$

la quale può facilmente mettersi sotto un'altra forma. Perciò si denomini y la distanza che il centro di gravità della base della carena nello stato d'equilibrio ha dal livello del liquido alla fine del tempo t ; e si chiamino y_a, y_b, y_c le coordinate del punto in cui la y incontra la base della carena attuale. Saranno manifestamente

$$\sum y_i \zeta_i = \Delta, \quad \Delta_i^0 - y_i = (y - \lambda) \zeta_i;$$

dalle quali si conclude

$$y - \lambda = \sum \Delta_i^0 \zeta_i = \Delta.$$

Ma sono

$$\sum \Delta_i^0 \zeta_i = \Delta^0 + \frac{d\Delta^0}{d\mu} \mu + \frac{d\Delta^0}{d\nu} \nu + \sum \Delta_i^0 \frac{d^2 \zeta_i^0}{d\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{2} + \sum \Delta_i^0 \frac{d^2 \zeta_i^0}{d\mu d\nu} \cdot \mu \nu + \sum \Delta_i^0 \frac{d^2 \zeta_i^0}{d\nu^2} \cdot \frac{\nu^2}{2},$$

$$\Delta = \Delta^0 + \frac{d\Delta^0}{d\mu} \mu + \frac{d\Delta^0}{d\nu} \nu + \frac{d^2 \Delta^0}{d\mu^2} \frac{\mu^2}{2} + \frac{d^2 \Delta^0}{d\mu d\nu} \mu \nu + \frac{d^2 \Delta^0}{d\nu^2} \frac{\nu^2}{2};$$

per conseguenza risulterà

$$y - \lambda = - \sum \frac{d\Delta_i^0}{d\mu} \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} \cdot \frac{\mu^2}{2} - \sum \frac{d\Delta_i^0}{d\nu} \frac{d\zeta_i^0}{d\mu} \cdot \mu \nu - \sum \frac{d\Delta_i^0}{d\nu} \frac{d\zeta_i^0}{d\nu} \cdot \frac{\nu^2}{2},$$

la quale manifesta che y differisce da λ di quantità del second' ordine rispetto alle

(*) V. *Applications de Géométrie et de Mécanique*, par Charles Dupin; Paris 1822, p. 24.

μ, ν . Ciò premesso, l'equazione delle forze vive, scrivendo y invece di λ ed il valore dato dalla (25) invece di S_μ , diventa

$$(29) \quad \sum i v_i^2 = \text{cost.} - gD\{\omega^0 y^2 + V^0(-r_\mu^0 - \delta^0)\sigma^a\};$$

ove si noterà che $-V^0 r_\mu^0$ esprime il momento d'inerzia massimo o minimo della base d'area ω^0 secondochè $-r_\mu^0$ è raggio di curvatura minima o massima. La (29) è la sola equazione delle forze vive considerata ne' diversi Trattati di Meccanica razionale (*); da essa è dedotto il teorema che *per la stabilità dell'equilibrio la distanza del centro di gravità del corpo dal centro della carena dev'essere minore del più piccolo momento d'inerzia della base rispetto alle rette condotte pel centro di gravità della medesima diviso pel volume del liquido spostato*. È chiaro che la (29), essendo al tutto particolare, non poteva dar luogo a questo teorema generale.

10.

Avanti d'integrare le equazioni del movimento, esaminiamo quali modificazioni sia necessario d'apportare alle medesime, quando la forma del galleggiante soddisfa a certe condizioni particolari.

Dapprima consideriamo il caso, in cui la verticale passante pel centro di gravità del corpo in equilibrio incontra la base della carena nel centro di gravità della medesima. Allora avremo evidentemente

$$\sum \Delta_i^{02} = \Delta^{02}, \quad \Delta_i^0 = \Delta^0 \zeta_i^0;$$

quindi le modificazioni ad introdurre nelle equazioni del movimento saranno espresse dalle

$$(30) \quad u_\mu^0 = 0, \quad u_\nu^0 = 0.$$

Dipoi consideriamo il caso, nel quale il galleggiante in equilibrio è simmetrico rispetto ad un piano verticale. Allora è manifesto che un asse principale d'inerzia sarà perpendicolare a quel piano, e ritenuto che quest'asse sia quello del momento c avremo

$$(31) \quad \zeta_c^0 = 0.$$

È manifesto inoltre che un asse principale d'inerzia della base della carena sarà perpendicolare al medesimo piano, e quindi una linea di curvatura della superficie dei centri di carena lo sarà pure; perciò, ritenuto che questa linea sia la $\mu = \text{cost.}$, avremo

$$(32) \quad n_c^0 = 1, \quad n_a^0 = n_b^0 = 0, \quad m_c^0 = 0; \quad \text{ed anche} \quad \Delta_c^0 = 0.$$

Seguono da queste

(*) V. *Traité de Mécanique*, 2.^e éd., di Poisson. — *Cours de Mécanique de l'école polytechnique*. Paris 1846, del Sig. Duhamel; — *Traité de Mécanique rationnelle*, Bruxelles 1836, del Sig. Timmermans.

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_v^0 = 0, \quad m_a^0 = -\zeta_b^0, \quad m_b^0 = \zeta_a^0, \\ \alpha^0 = c(a\zeta_a^0 + b\zeta_b^0) = c\zeta^0, \quad \beta^0 = 0, \quad \gamma^0 = ab. \end{array} \right.$$

Le (31), (32), (33) esprimono le modificazioni ad introdurre nelle equazioni del movimento in questo secondo caso.

11.

In primo luogo formiamo gl'integrali delle equazioni del movimento, ammesso che la forma del galleggiante soddisfaccia ad ambe le condizioni esposte nel numero antecedente.

Le (22), (23) diventeranno in questo caso

$$(34) \quad \lambda'' + G^2\lambda = 0, \quad S_\mu'' + P_\mu^0 S_\mu = 0, \quad S_v'' + P_v^0 S_v = 0;$$

ove si posero per brevità

$$\frac{gDV^0\zeta^0}{\alpha^0} (-r_\mu^0 - \partial^0) = P_\mu^0, \quad \frac{gDV^0\zeta^0}{\gamma^0} (-r_v^0 - \partial^0) = P_v^0.$$

La prima (34), non contenendo le S_μ , S_v , manifesta che il moto verticale del centro di gravità succede indipendentemente dal moto rotatorio del galleggiante attorno ad esso centro. Si dinoti con $\bar{\Psi}$ il valore d'una funzione qualunque Ψ relativo a $t=0$, cioè relativo allo stato di spostamento del galleggiante; l'equazione medesima integrata somministra

$$(35) \quad \lambda = \bar{\lambda} \cos t\sqrt{G^0},$$

la quale manifesta il noto teorema che *il moto verticale del centro di gravità succede come quello d'un pendolo semplice di lunghezza $\frac{V^0}{\omega^0}$* . Si denomini t_λ^0 il tempo necessario per battere una mezza oscillazione; la (35) dà

$$(36) \quad t_\lambda^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{G^0}}.$$

Le due ultime (34), contenendo separate le variabili S_μ , S_v , insegnano che i due moti rotatorii attorno alle due linee di curvatura $\mu = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono indipendenti l'uno dall'altro. Le medesime equazioni manifestano che per la stabilità dell'equilibrio le quantità P_μ^0 , P_v^0 devono essere positive; diversamente i valori delle S_μ , S_v conterrebbero qualche esponenziale che crescerebbe col tempo rapidamente. Dunque la stabilità dell'equilibrio richiede quella stessa condizione (28), alla quale eravamo condotti dall'equazione delle forze vive. Le due stesse equazioni somministrano mediante l'integrazione

$$(37) \quad S_\mu = \bar{S}_\mu \cos t \sqrt{P_\mu^0}, \quad S_\nu = \bar{S}_\nu \cos t \sqrt{P_\nu^0} ;$$

le quali insegnano che *i due moti rotatorii attorno alle due linee di curvatura* $\mu = \text{cost.}$, $\nu = \text{cost.}$ *succedono come quelli di due pendoli semplici aventi le lunghezze rispettivamente eguali a* $\frac{\alpha}{DV_{\xi^0}^0(-r_\mu^0 - \delta^0)}, \frac{\gamma^0}{DV_{\xi^0}^0(-r_\nu^0 - \delta^0)}$.

Indicando con t_μ^0 , t_ν^0 i tempi necessari per battere le mezze oscillazioni, abbiamo dalle (37)

$$(38) \quad t_\mu^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{P_\mu^0}}, \quad t_\nu^0 = \frac{\pi}{2\sqrt{P_\nu^0}} .$$

12.

È facile il riconoscere che l'ellissoide in equilibrio soddisfa ad ambe le condizioni di forma esposte nel n.º 10. Infatti le sezioni fatte ad esso con piani paralleli tra loro hanno i centri di figura in una stessa retta, perciò tanto il centro di carena quanto il centro di gravità della base corrispondente saranno sempre in linea retta col centro di gravità del corpo intero. Inoltre questa retta è perpendicolare ai piani paralleli appena quando coincide con uno de' tre assi di figura, perciò l'equilibrio avrà luogo appena quando uno di questi ultimi è verticale. Ciò premesso, indichiamo con l_a, l_b, l_c le lunghezze de' tre semiassi e riteniamo verticale il primo tra essi; avremo

$$V^0 = \frac{\pi l_b l_c}{3l_a^2} (l_a - \Delta^0)^2 (2l_a + \Delta^0), \quad V^0 \delta^0 = \frac{\pi l_b l_c}{4l_a^2} (l_a^2 - \Delta^{02})^2,$$

$$\omega^0 = \frac{\pi l_b l_c}{l_a^2} (l_a^2 - \Delta^{02});$$

ed i momenti d'inerzia principali della base d'area ω^0 relativi al centro di gravità della medesima saranno

$$\frac{\pi l_c l_b^3}{4l_a^4} (l_a^2 - \Delta^{02})^2, \quad \frac{\pi l_b l_c^3}{4l_a^4} (l_a^2 - \Delta^{02})^2;$$

per cui, ritenute le $\mu = \text{cost.}$; $\nu = \text{cost.}$ rispettivamente parallele a' semiassi l_b, l_c , risulteranno

$$-V^0 r_\mu^0 = \frac{\pi l_c l_b^3}{4l_a^4} (l_a^2 - \Delta^{02})^2, \quad -V^0 r_\nu^0 = \frac{\pi l_b l_c^3}{4l_a^4} (l_a^2 - \Delta^{02})^2.$$

Per mezzo di questi valori le (28) diventano

$$l_b > l_a, \quad l_c > l_a;$$

le quali manifestano il noto teorema che *l'equilibrio d'un ellissoide è stabile quando*

il più piccolo de'tre assi è verticale.

In seguito si trovano

$$(39) \quad G^0 = g \frac{3(l_a + \Delta^0)}{(l_a - \Delta^0)(2l_a + \Delta^0)};$$

$$V^0(-r_\mu^0 - \partial^0) = \frac{\pi l_b l_c}{4l_a^4} (l_a^2 - \Delta^{02})^2 (l_b^2 - l_a^2), \quad V^0(-r_\nu^0 - \partial^0) = \frac{\pi l_b l_c}{4l_a^4} (l_a^2 - \Delta^{02})^2 (l_c^2 - l_a^2),$$

$$\frac{\xi^0}{\alpha^0} = \frac{1}{c} = \frac{15}{4\pi D_1 l_a l_b l_c (l_b^2 + l_a^2)}, \quad \frac{\xi^0}{\gamma^0} = \frac{1}{b} = \frac{15}{4\pi D_1 l_a l_b l_c (l_c^2 + l_a^2)},$$

ove D_1 esprime la densità della materia componente l'ellissoide. Risultano per conseguenza

$$(40) \quad P_\mu^0 = \frac{gD}{D_1} \frac{15}{16} \frac{1}{l_a^5} \frac{l_b^2 - l_a^2}{l_b^2 + l_a^2} (l_a^2 - \Delta^{02})^2, \quad P_\nu^0 = \frac{gD}{D_1} \frac{15}{16} \frac{1}{l_a^5} \frac{l_c^2 - l_a^2}{l_c^2 + l_a^2} (l_a^2 - \Delta^{02})^2.$$

Infine, siccome il peso del liquido spostato durante l'equilibrio deve eguagliare quello dell'ellissoide, così

$$DV^0 = \frac{4}{3} \pi D_1 l_a l_b l_c,$$

da cui

$$(41) \quad \frac{D}{D_1} = 4 \frac{l_a^3}{(l_a - \Delta^0)^2 (2l_a + \Delta^0)}.$$

Per mezzo delle equazioni (35), (37) e de' valori (39), (40), (41) si possono determinare tutte le circostanze del movimento.

13.

In secondo luogo formiamo gl'integrali delle equazioni del movimento, ammesso che la forma del galleggiante soddisfaccia soltanto alla prima condizione del n.º 10.

In questo caso le (22), (23) diventano

$$(42) \quad \begin{cases} \lambda'' + G^0 \lambda = 0, \\ S_\mu'' + \frac{\beta^0}{\alpha^0} S_\nu'' + P_\mu^0 S_\mu = 0, & \frac{\beta^0}{\gamma^0} S_\mu'' + S_\nu'' + P_\nu^0 S_\nu = 0. \end{cases}$$

La prima di queste, non contenendo le S_μ , S_ν , insegna che il moto verticale succede indipendentemente dal moto di rotazione, i valori di λ , t_λ^0 sono ancora eguali a quelli dati dalle (35), (36). Le due ultime, essendo simultanee rispetto alle S_μ , S_ν , insegnano che i moti di rotazione attorno alle due linee di curvatura $\mu = \text{cost.}$, $\nu = \text{cost.}$ più non sono indipendenti l'uno dall'altro. Per averne gl'integrali si pongano

$$S_\mu = e^{ft}, \quad S_\nu = Fe^{ft},$$

ove le f , F sono costanti da determinarsi; fatte le sostituzioni risulteranno

$$(43) \quad f^2 + \frac{\beta^0}{\alpha^0} F f^2 + P_\mu^0 = 0, \quad \frac{\beta^0}{\gamma^0} f^2 + F f^2 + F P_\nu^0 = 0;$$

le quali mediante l'eliminazione della F somministrano

$$(44) \quad (1 - \varepsilon^2) f^4 + (P_\mu^0 + P_\nu^0) f^2 + P_\mu^0 P_\nu^0 = 0,$$

ove si fece per brevità

$$\frac{\beta^0}{\sqrt{\alpha^0 \gamma^0}} = \varepsilon.$$

Avanti di discutere le radici della (44) osserveremo che

$$\alpha^0 \gamma^0 - \beta^{0^2} = abc \{ a(m_b^0 n_c^0 - m_c^0 n_b^0)^2 + b(m_c^0 n_a^0 - m_a^0 n_c^0)^2 + c(m_a^0 n_b^0 - m_b^0 n_a^0)^2 \},$$

ovvero

$$(45) \quad \alpha^0 \gamma^0 - \beta^{0^2} = abc \xi^0;$$

per cui la ε è quantità sempre minore dell'unità. Ora, affinchè l'equilibrio sia stabile, la (44) non deve somministrare per f^2 alcun valore positivo e reale, diversamente la f ammetterebbe qualche valore positivo e reale, e le S_μ , S_ν conterrebbero qualche esponenziale che crescerebbe col tempo rapidamente. Quindi, osservando il terzo termine della (44), concluderemo che la P_μ^0 , P_ν^0 devono avere segni eguali; ed osservando il secondo termine della medesima equazione concluderemo che le P_μ^0 , P_ν^0 devono essere entrambe positive; per cui ci troviamo condotti alla stessa condizione espressa con le (28). Risolvendo la (44) rispetto ad f^2 , si ottiene

$$(46) \quad f^2 = - \frac{P_\mu^0 + P_\nu^0}{2(1 - \varepsilon^2)} \pm \frac{\sqrt{\{(P_\mu^0 - P_\nu^0)^2 + 4\varepsilon^2 P_\mu^0 P_\nu^0\}}}{2(1 - \varepsilon^2)};$$

la quale manifesta che, ritenute positive le P_μ^0 , P_ν^0 , saranno negativi e reali i due valori della f^2 .

Si chiamino $-f_1^2$, $-f_2^2$ i due valori della f^2 , indicando con f_1 , f_2 due quantità reali positive; e si chiamino F_1 , F_2 i due valori corrispondenti della F , che dovranno dedursi da una delle (43). Le S_μ , S_ν conterranno quattro esponenziali immaginari, alle quali potranno sostituirsi le note funzioni trigonometriche reali; quindi saranno

$$S_\mu = A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t + B_1 \sin f_1 t + B_2 \sin f_2 t,$$

$$S_\nu = A_1 F_1 \cos f_1 t + A_2 F_2 \cos f_2 t + B_1 F_1 \sin f_1 t + B_2 F_2 \sin f_2 t,$$

ove A_1 , A_2 , B_1 , B_2 sono quattro costanti da determinarsi mediante lo stato del gal-

leggiante quando $t = 0$, cioè mediante lo spostamento iniziale. Siccome quando il moto comincia, le velocità sono nulle, così

$$B_1 f_1 + B_2 f_2 = 0, \quad B_1 F_1 f_1 + B_2 F_2 f_2 = 0;$$

le quali richiedono

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0,$$

perchè diversamente seguirebbe l'assurda $F_1 = F_2$. Dunque i valori delle S_μ , S_ν saranno dati dalle

$$(47) \quad S_\mu = A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t, \quad S_\nu = A_1 F_1 \cos f_1 t + A_2 F_2 \cos f_2 t;$$

ove le A_1 , A_2 si determineranno mediante le

$$(48) \quad A_1 + A_2 = \bar{S}_\mu, \quad A_1 F_1 + A_2 F_2 = \bar{S}_\nu.$$

È poi chiaro che i tempi t_μ^0 , t_ν^0 necessari per battere le mezze oscillazioni si avranno dalle

$$(49) \quad A_1 \cos f_1 t_\mu^0 + A_2 \cos f_2 t_\mu^0 = 0, \quad A_1 F_1 \cos t_\nu^0 + A_2 F_2 \cos t_\nu^0 = 0.$$

14.

In terzo luogo formiamo gl'integrali delle equazioni del movimento, ammesso che la forma del galleggiante soddisfaccia soltanto alla seconda condizione del n.º 10.

Le (22), (23) diventano in questo caso

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'' - u_\mu^0 S_\mu'' + G^0 \lambda = 0, \quad S_\mu'' + P_\mu^0 S_\mu + \sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\alpha^0}} \cdot Q_\mu^0 \lambda = 0, \\ S_\nu' + P_\nu^0 S_\nu = 0; \end{array} \right.$$

ove si pose per brevità

$$\sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\alpha^0}} \cdot u_\mu^0 = Q_\mu^0.$$

La terza equazione, non contenendo nè λ nè S_μ , insegna che il moto rotatorio attorno alla $\nu = \text{cost.}$, ch'è quanto dire attorno ad una retta orizzontale situata nel piano di simmetria, succede indipendentemente dal moto verticale e dal moto rotatorio attorno alla $\mu = \text{cost.}$; i valori di S_ν e di t_ν^0 sono rispettivamente eguali ancora a quelli dati dalla seconda (37) e dalla seconda (38). Le due prime equazioni, essendo simultanee rispetto alle λ , S_μ , insegnano che il moto verticale ed il moto di rotazione attorno alla $\mu = \text{cost.}$ s'influiscono a vicenda. Per avere gl'integrali si facciano

$$S_\mu = e^{f t}, \quad \lambda = F e^{f t},$$

ove le f, F sono costanti da determinarsi; risulteranno fatte le sostituzioni

$$(51) \quad (f^2 + G^0)F - u_\mu^0 f^2 = 0, \quad \sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\alpha^0}} Q_\mu^0 F + f^2 + P_\mu^0 = 0,$$

da cui mediante l'eliminazione della F

$$(52) \quad f^4 + (P_\mu^0 + Q_\mu^{02} + G^0)f^2 + G^0 P_\mu^0 = 0.$$

Affinchè l'equilibrio sia stabile, questa equazione non deve ammettere per f^2 alcun valore positivo e reale; diversamente la f ammetterebbe qualche valore positivo e reale essa pure, e le λ, S_μ conterrebbero qualche esponenziale che crescerebbe col tempo rapidamente. Per conseguenza l'ultimo termine della medesima dev'essere positivo, il che richiede $-r_\mu^0 > \partial^0$; la quale ineguaglianza, unitamente alla $-r_\nu^0 > \partial^0$ relativa alla terza (50), costituisce la condizione già dedotta dall'equazione generale delle forze vive. La (52) risolta rispetto ad f^2 somministra

$$(53) \quad f^2 = -\frac{P_\mu^0 + Q_\mu^{02} + G^0}{2} \pm \frac{\sqrt{\{P_\mu^0 + Q_\mu^{02} + G^0\}^2 - 4G^0 P_\mu^0}}{2};$$

la quale manifesta che, ritenuta P_μ^0 positiva, anche i valori della f^2 sono reali e negativi.

Si chiamino $-f_1^2, -f_2^2$ i due valori della f^2 ; F_1, F_2 i due valori corrispondenti della F , i quali si dedurranno da una delle (51); e si sostituiscano alle esponenziali immaginarie, le funzioni trigonometriche reali risulteranno

$$S_\mu = A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t + B_1 \sin f_1 t + B_2 \sin f_2 t,$$

$$\lambda = A_1 F_1 \cos f_1 t + A_2 F_2 \cos f_2 t + B_1 F_1 \sin f_1 t + B_2 F_2 \sin f_2 t;$$

ove le A_1, A_2, B_1, B_2 sono costanti da determinarsi mediante lo spostamento iniziale. Ora, siccome quando $t = 0$ le velocità sono nulle, così

$$B_1 f_1 + B_2 f_2 = 0, \quad B_1 F_1 f_1 + B_2 F_2 f_2 = 0;$$

le quali richiedono

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0,$$

perchè diversamente seguirebbe l'assurda $F_1 = F_2$. Dunque saranno

$$(54) \quad S_\mu = A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t, \quad \lambda = A_1 F_1 \cos f_1 t + A_2 F_2 \cos f_2 t;$$

ove le A_1, A_2 s'intenderanno determinate per mezzo delle

$$(55) \quad A_1 + A_2 = \bar{S}_\mu, \quad A_1 F_1 + A_2 F_2 = \bar{\lambda}.$$

I tempi t_μ^0, t_λ^0 necessari per battere le mezze oscillazioni si dedurranno, come è chiaro, dalle

$$(56) \quad A_1 \cos f_1 t_\mu^0 + A_2 \cos f_2 t_\mu^0 = 0, \quad A_1 F_1 \cos f_1 t_\lambda^0 + A_2 F_2 \cos f_2 t_\lambda^0 = 0.$$

È noto che il caso considerato in questo numero comprende i bastimenti d'ogni sorta.

15.

In quarto ed ultimo luogo formiamo gl'integrali delle equazioni del movimento, ammesso che la forma del galleggiante non soddisfaccia ad alcuna delle due condizioni del n° 10.

In questo caso le (22), (23) possono scriversi come segue

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'' - u_{\mu}^0 S_{\mu}'' - u_{\nu}^0 S_{\nu}' + G^0 \lambda = 0, \\ S_{\mu}'' + \frac{\beta^0}{\alpha^0} S_{\nu}'' + P_{\mu}^0 S_{\mu} + \sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\alpha^0}} Q_{\mu}^0 \lambda = 0, \\ \frac{\beta^0}{\gamma^0} S_{\mu}'' + S_{\nu}'' + P_{\nu}^0 S_{\nu} + \sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\gamma^0}} Q_{\nu}^0 \lambda = 0, \end{array} \right.$$

ove si pose per brevità

$$\sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\gamma^0}} \cdot u_{\nu}^0 = Q_{\nu}^0.$$

Le (57), essendo simultanee rispetto alle λ , S_{μ} , S_{ν} , manifestano che tanto il moto verticale quanto i due moti rotatorii attorno alle $\mu = \text{cost.}$, $\nu = \text{cost.}$ s'influiscono reciprocamente. Affine d'integrare queste equazioni, si facciano

$$\lambda = e^{ft}, \quad S_{\mu} = H e^{ft}, \quad S_{\nu} = K e^{ft};$$

risulteranno dopo le sostituzioni

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - u_{\mu}^0 H - u_{\nu}^0 K) f^2 + G^0 = 0, \\ (f^2 + P_{\mu}^0) H + \frac{\beta^0}{\alpha^0} f^2 K + \sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\alpha^0}} Q_{\mu}^0 = 0, \\ \frac{\beta^0}{\gamma^0} f^2 H + (f^2 + P_{\nu}^0) K + \sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\gamma^0}} Q_{\nu}^0 = 0; \end{array} \right.$$

le f , H , K sono costanti da determinarsi. Le due ultime (58), risolte rispetto alle H , K , somministrano

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{(f^2 + P_{\mu}^0)(f^2 + P_{\nu}^0) - \varepsilon^2 f^4\} H = -\sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\alpha^0}} \{Q_{\mu}^0 (f^2 + P_{\nu}^0) - \varepsilon Q_{\nu}^0 f^2\}, \\ \{(f^2 + P_{\mu}^0)(f^2 + P_{\nu}^0) - \varepsilon^2 f^4\} K = -\sqrt{\frac{g D_{\omega^0}^0 \xi^0}{\gamma^0}} \{Q_{\nu}^0 (f^2 + P_{\mu}^0) - \varepsilon Q_{\mu}^0 f^2\}; \end{array} \right.$$

le quali riducono la prima alla seguente

$$\{(f^2 + P_\mu^0)(f^2 + P_\nu^0) - \varepsilon^2 f^4 + (f^2 + P_\nu^0)Q_\mu^{02} + (f^2 + P_\mu^0)Q_\nu^{02} - 2\varepsilon Q_\mu^0 Q_\nu^0 f^2\} f^2 + G^0 \{(f^2 + P_\mu^0)(f^2 + P_\nu^0) - \varepsilon^2 f^4\} = 0,$$

ovvero ordinando il primo membro rispetto alle potenze della f^2

$$(60) \quad (1 - \varepsilon^2) f^6 + \{P_\mu^0 + P_\nu^0 + Q_\mu^{02} + Q_\nu^{02} - 2\varepsilon Q_\mu^0 Q_\nu^0 + G^0(1 - \varepsilon^2)\} f^4 + \{P_\mu^0 P_\nu^0 + P_\nu^0 Q_\mu^{02} + P_\mu^0 Q_\nu^{02} + G^0(P_\mu^0 + P_\nu^0)\} f^2 + G^0 P_\mu^0 P_\nu^0 = 0.$$

Per la stabilità dell'equilibrio nessuna fra le tre radici di quest'equazione dev'essere positiva e reale; altrimenti sarebbe positivo e reale qualche valore della f , e quindi le λ , S_μ , S_ν conterrebbero qualche esponenziale che col tempo aumenterebbe rapidamente. Ne segue, osservando l'ultimo termine della (60), che le P_μ^0 , P_ν^0 devono essere entrambe positive, oppure entrambe negative. Esaminiamo se queste due quantità possano entrambe essere negative; e poniamo $P_\mu^0 = -p_\mu^0$, $P_\nu^0 = -p_\nu^0$, ove p_μ^0 , p_ν^0 dinotano due quantità positive. Il primo membro della (60), mettendo 0 invece della f^2 , diventa $G^0 P_\mu^0 P_\nu^0$, quindi acquista un valore positivo; supponendo $p_\nu^0 > p_\mu^0$ e scrivendo p_μ^0 invece della f^2 , lo stesso primo membro diventa dopo le riduzioni

$$- \varepsilon^2 p_\mu^{02} (G^0 + p_\mu^0) - 2\varepsilon p_\mu^{02} Q_\mu^0 Q_\nu^0 - p_\mu^0 Q_\mu^{02} (p_\nu^0 - p_\mu^0),$$

quindi acquista un valore negativo. Per conseguenza, quando si ritengano le P_μ^0 , P_ν^0 entrambe negative, la (60) ammette almeno una radice positiva e reale. Da ciò concluderemo che per la stabilità dell'equilibrio entrambe le P_μ^0 , P_ν^0 devono essere positive; per cui ci troviamo condotti per un galleggiante di forma qualsivoglia alla stessa condizione (28), alla quale eravamo già pervenuti discutendo l'equazione delle forze vive.

Se fosse $\beta^0 = 0$, ovvero $\varepsilon = 0$, la (60) diventerebbe

$$(61) \quad f^6 + \{P_\mu^0 + P_\nu^0 + Q_\mu^{02} + Q_\nu^{02} + G^0\} f^4 + \{P_\mu^0 P_\nu^0 + P_\nu^0 Q_\mu^{02} + P_\mu^0 Q_\nu^{02} + G^0(P_\mu^0 + P_\nu^0)\} f^2 + G^0 P_\mu^0 P_\nu^0 = 0.$$

In questo caso è facile il dimostrare che le tre radici dell'equazioni sono reali e negative, sempre ritenute positive le P_μ^0 , P_ν^0 . Difatto, supponendo $P_\nu^0 > P_\mu^0$, si sostituiscono nella (61) invece della f^2 le quantità

$$0, \quad -P_\mu^0, \quad -P_\nu^0, \quad -\infty;$$

il primo membro diventa successivamente

$$(62) \quad G^0 P_\mu^0 P_\nu^0, \quad -Q_\mu^{02} P_\mu^0 (P_\nu^0 - P_\mu^0), \quad Q_\nu^{02} P_\nu^0 (P_\nu^0 - P_\mu^0), \quad -\infty,$$

i quali risultati manifestano la proprietà dichiarata.

16.

In generale si chiamino $-f_1^2$, $-f_2^2$, $-f_3^2$ le tre radici della (60); H_1 , H_2 , H_3 , K_1 , K_2 , K_3 i tre valori corrispondenti delle H , K , i quali saranno dati dalle (59); e si ponga per brevità

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \sum \psi_\rho,$$

ove ψ dinota una funzione qualunque. Sostituendo alle esponenziali immaginarie le formole trigonometriche reali, saranno

$$\lambda = \sum A_\rho \cos f_\rho t + \sum B_\rho \sin f_\rho t,$$

$$S_\mu = \sum A_\rho H_\rho \cos f_\rho t + \sum B_\rho H_\rho \sin f_\rho t,$$

$$S_\nu = \sum A_\rho K_\rho \cos f_\rho t + \sum B_\rho K_\rho \sin f_\rho t;$$

ove le A_ρ , B_ρ diventano sei costanti da determinarsi mediante lo spostamento iniziale.

Quando il moto comincia, le velocità sono nulle; perciò dovremo avere

$$\sum B_\rho f_\rho = 0, \quad \sum B_\rho H_\rho f_\rho = 0, \quad \sum B_\rho K_\rho f_\rho = 0.$$

Se si ritengono le B_ρ differenti dallo zero, si conclude mediante l'eliminazione delle medesime l'equazione

$$H_2 K_2 - H_2 K_1 + H_2 K_3 - H_3 K_2 + H_3 K_1 - H_1 K_3 = 0.$$

la quale dovrà essere identica. Ora, ponendo per brevità

$$(f_\rho^2 + P_\mu^0)(f_\rho^2 + P_\nu^0) - \varepsilon^2 f_\rho^4 = W_\rho,$$

le (59) somministrano dopo le riduzioni

$$W_2 W_2 (H_1 K_2 - H_2 K_1) = \frac{g D \omega^0 \xi^0}{\sqrt{\alpha^0 \gamma^0}} \{ (Q_\mu^0 - \varepsilon Q_\nu^0) Q_\nu^0 P_\mu^0 - (Q_\nu^0 - \varepsilon Q_\mu^0) Q_\mu^0 P_\nu^0 \} (f_1^2 - f_2^2);$$

ed analoghi valori si troveranno pe'due binomii

$$W_2 W_3 (H_2 K_3 - H_3 K_2), \quad W_3 W_1 (H_3 K_1 - H_1 K_3).$$

Perciò l'equazione antecedente si muta nella

$$W_3 (f_1^2 - f_2^2) + W_1 (f_2^2 - f_3^2) + W_2 (f_3^2 - f_1^2) = 0,$$

ovvero

$$f_3^4 (f_1^2 - f_2^2) + f_1^4 (f_2^2 - f_3^2) + f_2^4 (f_3^2 - f_1^2) = 0.$$

In seguito si mettano successivamente nella (60) in luogo di f^2 le tre radici $-f_1^2$,

$-f_1^2, -f_2^2$; si moltiplichino le tre risultanti equazioni ordinatamente pe' binomii $f_1^2 - f_2^2, f_2^2 - f_3^2, f_3^2 - f_1^2$, e si sommino tra loro; risulterà

$$f_3^6(f_1^2 - f_2^2) + f_1^6(f_2^2 - f_3^2) + f_2^6(f_3^2 - f_1^2) = 0.$$

Queste due ultime equazioni conducono all'assurda

$$(f_1^2 - f_2^2)(f_2^2 - f_3^2)(f_3^2 - f_1^2) = 0;$$

dunque si concluderà che le B_ρ devono essere separatamente nulle.

Avremo per conseguenza

$$(63) \quad \lambda = \sum A_\rho \cos f_\rho t, \quad S_\mu = \sum A_\rho H_\rho \cos f_\rho t, \quad S_\nu = \sum A_\rho K_\rho \cos f_\rho t;$$

ove le A_ρ dovranno essere determinate dalle

$$(64) \quad \sum A_\rho = \bar{\lambda}, \quad \sum A_\rho H_\rho = \bar{S}_\mu, \quad \sum A_\rho K_\rho = \bar{S}_\nu.$$

Infine è chiaro che i valori $t_\lambda^0, t_\mu^0, t_\nu^0$ necessarii per battere le mezze oscillazioni si dedurranno dalle

$$(65) \quad \sum A_\rho \cos f_\rho t_\lambda^0 = 0, \quad \sum A_\rho H_\rho \cos f_\rho t_\mu^0 = 0, \quad \sum A_\rho K_\rho \cos f_\rho t_\nu^0 = 0.$$

Pavia, Giugno 1858.