**SUL MOTO SPONTANEO DI UN SOLIDO DI RIVOLUZIONE,
VINCOLATO PER UN PUNTO DELL'ASSE AD UN CERCHIO FISSO.**

Memoria 1^a di E. DANIELE.

Introduzione.

Nelle ricerche sulla Dinamica di un sistema invariabile i vincoli, che ordinariamente s'intendono imposti al sistema, si riducono a classi molto limitate; se poi, in particolare, consideriamo quei vincoli che hanno per effetto di restringere la libertà di un punto determinato del corpo in movimento, vediamo che le ricerche classiche portano quasi esclusivamente sul caso in cui il punto sia fisso: più raramente, il punto è assoggettato a rimanere su una superficie ¹⁾, che di solito è un piano. Una trattazione larga, e condotta da un punto di vista generale, di casi che differiscano, in riguardo ai vincoli, da quelli ora accennati non si saprebbe facilmente trovare.

Ragione non ultima di questa lacuna può essere il complesso di difficoltà gravi che introduce, nello studio del movimento, l'ipotesi di vincoli diversi da quelli comunemente considerati. Che tali difficoltà esistano effettivamente lo prova il tentativo, contenuto in questa Memoria, per scoprire alcune proprietà del movimento di un solido di cui un punto sia legato ad una linea piana assegnata.

A prima vista non parrebbe che un tale vincolo dovesse dare luogo a difficoltà eccezionali. Si pensi al movimento di un solido pesante nel quale un punto P determinato sia astretto a muoversi in un piano orizzontale: se il solido è di rotazione intorno all'asse contenente il punto P ed il baricentro G, il problema del movimento si riconduce facilmente alle quadrature iperellittiche ²⁾. D'altra parte è noto che un solido della

1) Cfr. Poisson, *Traité de Mécanique*, II, Ch. VI; — Routh, *Die Dynam. d. Systeme starrer Körper*, II, Kap. V; — Klein u. Sommerfeld, *Theorie des Kreisel*; Kap. VI, § 10; Kap. VII, § 3 e segg.; — Maggi, *Stereodinamica*, §§ 16 e segg., 89.

2) Poisson, l. c.; — Klein-Sommerfeld, op. cit., Kap. VI.

natura ora indicata, nel quale il punto P sia fisso, compie intorno a P un movimento che si sa rappresentare mediante funzioni ellittiche. Il caso in cui il punto P debba descrivere una linea piana si può in certo qual modo concepire come intermedio fra i due precedenti; si è quindi facilmente indotti, se non si riflette altro, a credere che le difficoltà presentate dal relativo problema d'integrazione siano press'a poco del medesimo ordine che negli altri due problemi. Le cose invece vanno in modo ben diverso; pur considerando, come ho fatto in questo lavoro, il caso speciale di un solido sul quale non agiscano forze, non sembra tanto facile la via che deve condurre alle quadrature: l'esame delle equazioni differenziali scritte in base all'espressione (2) (v. § 1° della Mem.) della forza viva induce in questa persuasione. La cosa veramente è spiegabile a priori. Per non parlare del caso in cui il punto P è fisso, perchè allora non vi è da occuparsi che della rotazione del solido intorno a P , nell'altro problema, che corrisponde a supporre P mobile in un piano orizzontale, si possono subito scrivere due integrali del baricentro relativi a due direzioni orizzontali perpendicolari fra di loro; dopo di che le equazioni del movimento permettono di studiare separatamente il moto della proiezione orizzontale G' del baricentro G e il moto del solido rispetto a G' considerato come fisso. Passando all'ipotesi che il punto P sia vincolato ad una linea (tolto il caso specialissimo che la linea sia una retta) vengono a mancare gli integrali del baricentro, e quindi svanisce la possibilità di scindere il problema in due più semplici, dei quali uno consistente nello studiare il movimento del solido intorno ad un punto fisso. Si comprende bene come debba complicarsi lo studio del movimento complessivo del solido per il fatto che non esiste in questo alcun punto, il cui movimento non reagisca sul moto del solido intorno al punto stesso.

Date le accresciute difficoltà, è abbastanza naturale che in un primo studio del soggetto mi sia imposto quelle semplificazioni che possono sembrare meglio adatte a raggiungere qualche risultato, sia pure molto particolare. Queste semplificazioni sono di due ordini: le une riguardano la natura del sistema meccanico, cioè la forma e la struttura del solido, le

forze applicate e la forma della linea sulla quale è trattenuto il punto P; le altre si riferiscono al genere di problemi che intendo trattare.

Quanto alle prime io suppongo che

- a) il solido sia simmetrico rispetto ad un asse passante per P (simmetrico nel senso meccanico, cioè nel senso che l'ellissoide d'inerzia relativo a P sia di rotazione), e che su quest'asse cada il baricentro;
- b) sul solido non agiscano forze;
- c) la linea descritta dal punto P sia un cerchio.

Come si vede, non era possibile spingersi più oltre, da questo lato, sulla via delle semplificazioni; anche la scelta della linea vincolante il punto P fu fatta intenzionalmente allo scopo di rendere possibile una rotazione del solido intorno ad un asse fisso nello spazio (l'asse del cerchio), e quindi avere un integrale primo evidente. Il sostituire una retta al cerchio non condurrebbe ad una semplificazione maggiore, perchè l'integrale del baricentro, che si verrebbe ad acquistare, non farebbe che sostituire l'integrale di dianzi, che ora va perduto. Così pure non si avrebbe che un insignificante vantaggio nelle formole riducendo ad una sfera l'ellissoide d'inerzia relativo al punto P.

Le equazioni differenziali del movimento sono dedotte nei §§ 1° e 2°. Nel § 1° feci però astrazione dall'ipotesi c), e calcolai la forza viva supponendo che la linea su cui sta il punto P sia qualunque, purchè piana; dopo aver notato la presenza di un integrale primo lineare (per il significato v. n. 3) esaminai subito il caso particolare in cui P coincida col baricentro G. In tali condizioni la forza viva si spezza nella parte che si riferisce al moto di G e in quella relativa al moto del solido intorno a G; anche le equazioni differenziali del movimento si scindono allora in due sistemi riguardanti rispettivamente i due movimenti singoli, e dicono che, mentre G percorre la sua linea con velocità di grandezza costante, il solido ruota intorno a G come se questo fosse fisso. Il risultato poi è valido non soltanto per un solido sferico, ma anche per un corpo di conformazione qualunque.

L'ipotesi *c*) viene ripresa nel § 2°: le equazioni del movimento (A) mostrano allora un secondo integrale primo, oltre a quello del § precedente. Tanto l'uno che l'altro contengono una proprietà della coppia di quantità di moto, in relazione, rispettivamente, col movimento del solido intorno a P, oppure col suo movimento assoluto (cioè rispetto a tre assi fissi nello spazio. Quest'ultimo integrale è dovuto all'ipotesi speciale *c*), e si distingue dall'altro in quanto si può interpretare in modo puramente meccanico, mentre quello ammette anche un'interpretazione cinematica.

Malgrado le specializzazioni fatte e i due integrali primi ottenuti, non è ancora facile vedere per quale via si possa condurre a termine l'integrazione delle equazioni da cui il movimento dipende. Decisi perciò di restringere il campo della ricerca, limitandomi a verificare se il sistema ammetta dei movimenti particolari di natura determinata, precisandone poi, in caso affermativo, i caratteri quantitativi. Nella scelta dei movimenti, di cui si trattava di ricercare la compatibilità col nostro sistema, seguii lo stesso criterio che m'ero già imposto nello specializzare il sistema medesimo: prendere, cioè, in esame un movimento possibilmente semplice. Pensando allora il movimento complessivo del solido decomposto nel moto del punto P sul cerchio e nel moto del solido intorno a P, e lasciando da parte il primo che offre meno interesse, vien naturale di domandarsi se il secondo movimento possa essere una precessione regolare: è questo difatti il moto che si presenta sotto l'aspetto più elementare (astrazione fatta dalla rotazione intorno ad un asse fisso) fra i varii movimenti d'un solido rispetto ad un punto.

Il § 3° contiene la ricerca e la determinazione di questi, che chiamai *moti precessionali* del sistema, almeno nell'ipotesi, del resto ben naturale, che gli assi delle due rotazioni che compongono la precessione siano l'asse di simmetria del solido (o, come brevemente diremo, l'*asse del solido*) e la perpendicolare in P al piano del cerchio su cui sta il punto P. Il risultato ottenuto si può formulare come segue (v. n. 12): *un moto precessionale ha luogo, oltre che nel caso evidente in cui il punto vincolato sia lo stesso baricentro, tutte le*

volle che rimane fisso un punto della retta PG ; allora il movimento complessivo del solido si riduce ad una precessione regolare.

Per l'analisi completa dei varii casi che si possono presentare si veggano i nn. 11 e 13 della Memoria.

I §§ rimanenti, 4° e 5°, hanno per iscopo di approfondire la natura dei moti precessionali. Le loro proprietà, che sono contenute nella stessa definizione oppure che da questa seguono immediatamente (come quella della costanza della velocità del punto P), invitano a verificare se si possano classificare fra i movimenti stazionarii del sistema. Effettivamente, se noi assumiamo le coordinate in modo che due di esse siano cicliche (cfr. n. 15), la regola di Routh per la ricerca dei moti stazionarii conduce appunto ai moti precessionali già studiati. A dire il vero, da un primo esame apparirebbe che, per essere stazionarii, occorra imporre a certi moti precessionali una limitazione; ma un'analisi ulteriore mostra poi che ad essi spetta, senza alcuna restrizione, il titolo di moti stazionarii. Questo viene esposto nel § 4°.

Una fra le proprietà più caratteristiche dei movimenti stazionarii dedotti da relazioni integrali qualsiasi consiste notoriamente nel fatto che la loro stabilità od instabilità si può provare con un metodo, semplicissimo nelle sue linee generali, nel quale non occorre altro che la considerazione dell'energia totale: il suo fondamento è l'estensione, fatta da Routh, del teorema di Dirichlet sulla stabilità dell'equilibrio, e il completamento che questo teorema esteso riceve dalle ricerche di Liapounoff, le quali permettono di affermare l'instabilità del movimento tutte le volte che non sono soddisfatte le condizioni per la stabilità ¹⁾. In particolare il metodo ora ricordato si applica ai movimenti stazionarii del § 4°, che provengono da integrali primi dovuti all'esistenza di coordinate cicliche: evidentemente una tale applicazione non poteva essere trascurata, tanto più che l'eventuale scoperta di moti stabili non sarebbe stata priva di un certo interesse, data la grande scar-

1) Cfr. Routh, op. cit., II, Kap. III; — Levi-Civita, Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico, ecc. (Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1901); — Id., Sui moti stazionarii dei sistemi olonomi (id., id.).

sità di siffatti movimenti conosciuti nella Dinamica dei sistemi rigidi ¹⁾. Ed il tentativo non è stato inutile, poichè le ricerche del § 5° ci offrono alcuni esempi di moti stabili diversi da quelli già conosciuti: la diversità sta non tanto nel movimento considerato in sè stesso, quanto nella natura delle perturbazioni in cui confronto si fa la verifica della stabilità.

Un saggio di tali moti stabili si ha negli enunciati coi quali terminano i nn. 21 e 23. Nel primo si tratta della rotazione uniforme del solido intorno al suo asse, rotazione che viene riconosciuta stabile rispetto a perturbazioni le quali abbiano anche per effetto di togliere dalla originaria quiete un punto qualunque dell'asse, lanciandolo, con velocità iniziale piccolissima, lungo un cerchio arbitrario.

Nel secondo invece il movimento è una precessione regolare intorno ad un punto Q dell'asse del solido: questa precessione viene riconosciuta stabile od instabile (a seconda dei casi) rispetto a perturbazioni che staccano l'asse precessionale mobile da quello fisso, facendo sì che il punto Q cessi di stare in quiete. Per le precise condizioni alle quali valgono questi teoremi rimando ai numeri citati della Memoria.

A questi casi di stabilità poi se ne può aggiungere un altro, accennato rapidamente al n. 24, la cui diversità da quelli già noti sta pure nel moto considerato in sè stesso: è il movimento che risulta di una rotazione uniforme del solido intorno al proprio asse e di una rotazione uniforme di questo intorno ad una retta ad esso parallela; le perturbazioni nel caso attuale possono deviare l'asse del solido in qualunque direzione, in modo però che rimanga inalterata la traiettoria circolare originariamente descritta dal baricentro.

§ 1°: *Equazioni del movimento nell'ipotesi che il punto vincolato percorra una linea piana qualunque. Caso in cui il punto vincolato è il baricentro.*

1. In tutto questo § faremo astrazione dall'ipotesi che la linea percorsa dal punto P sia un cerchio; supporremo invece

1) Cfr. Levi-Civita, Sui moti stazionarii di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky (Rend. Acc. Lincei, 1° sem., 1901).

che sia una linea piana qualunque, e la indicheremo con (γ) . Riferiremo il sistema a due terne d'assi ortogonali: una, xyz , fissa nello spazio, l'altra, $\xi\eta\zeta$, legata invariabilmente col solido. La prima terna sarà scelta in modo che il piano xy coincida col piano della curva (γ) ; quanto alla seconda, porremo la sua origine nel punto P, e assumeremo come asse ζ positivo l'asse del solido diretto positivamente da P verso G: i sensi positivi di ξ e η si determineranno in modo che le due terne xyz e $\xi\eta\zeta$ siano direttamente congruenti fra di loro. Notiamo subito che, detta E la distanza PG, sarà sempre $E > 0$.

Fig. 1.

Ci occorrerà pure di considerare gli assi coll'origine in P paralleli a xyz : li indicheremo con $x_1 y_1 z_1$. L'orientazione, rispetto a questi, degli assi ξ, η, ζ sarà determinata coll'assegnare i tre angoli d'Eulero $\psi \phi \vartheta$, chiamando ψ e ϕ gli angoli che la linea dei nodi N (passante per P) forma rispettivamente con x_1 e ξ , e ϑ l'angolo degli assi z e ζ positivi: gli angoli ψ e ϕ (in quanto si consideri una determinata posizione del solido) saranno compresi fra 0 e 2π , l'angolo ϑ invece andrà compreso fra 0 e π . Per completare la definizione degli angoli $\psi \phi \vartheta$ (per ciò che riguarda i segni) e per le formole che legano questi angoli ai nove coseni direttori veggasi: Klein-Sommerfeld, *Th. des Kreisels*, p. 17-19. Prenderemo poi la tabella dei coseni nella forma seguente:

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

A individuare la posizione del solido nello spazio sceglieremo, oltre agli angoli $\psi \phi \vartheta$, le coordinate a e b del punto P rispetto agli assi x e y ; le a e b saranno legate da una relazione

$$F(a, b) = 0,$$

che è l'equazione della curva (γ).

2. Possiamo scrivere allora l'espressione della forza viva T. Chiamando u, v, w le componenti della velocità di P rispetto a $\xi \eta \zeta$, e p, q, r le componenti della rotazione istantanea del solido rispetto agli stessi assi, ed osservando che deve essere

$$u^2 + v^2 + w^2 = a'^2 + b'^2,$$

abbiamo per la forza viva:

$$2T = M(a'^2 + b'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2ME(uq - vp);$$

con M intendiamo di indicare la massa del solido, con A il suo momento d'inerzia relativo ad un asse qualunque passante per P e giacente nel piano $\xi \eta$, e con C il suo momento d'inerzia rispetto all'asse ζ .

Le u, v si esprimono mediante a', b' colle formole

$$u = \alpha_1 a' + \beta_1 b', \quad v = \alpha_2 a' + \beta_2 b',$$

ossia, introducendo gli angoli d'Eulero,

$$\begin{aligned} u &= (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \cos \vartheta) a' + (\sin \psi \cos \phi + \\ &\quad + \cos \psi \sin \phi \cos \vartheta) b' \\ v &= -(\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \phi \cos \vartheta) a' + (-\sin \psi \sin \phi + \\ &\quad + \cos \psi \cos \phi \cos \vartheta) b'; \end{aligned}$$

mentre con queste altre formole si esprimono $p q r$ in funzione di $\psi \phi \vartheta$ e loro derivate ¹⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} p = \vartheta' \cos \phi + \psi' \sin \phi \sin \vartheta \\ q = -\vartheta' \sin \phi + \psi' \cos \phi \sin \vartheta \\ r = \phi' + \psi' \cos \vartheta. \end{cases}$$

Si ha quindi per $2T$ l'espressione seguente:

$$(2) \quad \begin{aligned} 2T = & M(a'^2 + b'^2) + A\vartheta'^2 + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi'^2 + \\ & + C(\phi'^2 + 2\psi' \phi' \cos \vartheta) \\ & + 2ME\{a'(\vartheta' \sin \psi \cos \vartheta + \psi' \cos \psi \sin \vartheta) + \\ & + b'(-\vartheta' \cos \psi \cos \vartheta + \psi' \sin \psi \sin \vartheta)\}. \end{aligned}$$

3. Di qui si deducono senz'altro le equazioni del movimento sotto la forma mista di Lagrange; limitandoci alle due relative alle coordinate a e b , abbiamo intanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial a'} &= M a' + ME(\vartheta' \sin \psi \cos \vartheta + \psi' \cos \psi \sin \vartheta) \\ &= M a' + ME x'_s, \\ \frac{\partial T}{\partial b'} &= M b' + ME \beta'_s, \\ \frac{\partial T}{\partial a} &= \frac{\partial T}{\partial b} = 0, \end{aligned}$$

onde, indicando con λ un moltiplicatore indeterminato, le due equazioni in questione diventano:

$$(3) \quad \begin{cases} M \frac{d^2}{dt^2} (a + E x_s) = \lambda \frac{\partial F}{\partial a} \\ M \frac{d^2}{dt^2} (b + E \beta_s) = \lambda \frac{\partial F}{\partial b} \end{cases}$$

Se ora si chiamano x_0, y_0, z_0 le coordinate del baricentro G rispetto agli assi xyz , e ξ_0, η_0, ζ_0 le sue coordinate rispetto agli assi $\xi\eta\zeta$, si ha, osservando che è $\xi_0 = \eta_0 = 0$, $\zeta_0 = E$:

$$x_0 = a + E x_s, \quad y_0 = b + E \beta_s.$$

1) V. Klein-Sommerfeld, Th. d. kr., p. 45.

Quindi le equazioni precedenti si possono scrivere:

$$(3') \quad Mx_0'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial a}, \quad My_0'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial b};$$

se ne deduce che *la proiezione ortogonale di G sul piano xy si muove in modo che la sua accelerazione è in ogni istante parallela alla normale alla curva (γ) nel punto P.*

Osserveremo ancora che, essendo

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0,$$

l'equazione relativa alla coordinata ϕ si riduce a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

e quindi porge l'integrale

$$\dot{\varphi}' + \dot{\psi}' \cos \vartheta = \text{cost.}$$

il quale dice, per la terza delle (1), che è costante la proiezione ortogonale, sull'asse ζ , della rotazione istantanea del solido intorno al punto P. A definire il movimento si potranno allora assumere, fra le sei incognite $a, b, \psi, \varphi, \vartheta, \lambda$, tre delle cinque equazioni di Lagrange, l'integrale ora trovato, l'integrale della forza viva e l'equazione $F(a, b) = 0$.

4. Senza soffermarci oltre sul caso generale, facciamo l'ipotesi che il punto P sia lo stesso baricentro G; basterà supporre, in quanto precede, $E = 0$. La forza viva si scrive

$$2T = M(a'^2 + b'^2) + A\vartheta'^2 + (A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 + C(\varphi'^2 + 2\psi'\varphi'\cos\vartheta),$$

mentre le equazioni (3) diventano:

$$(4) \quad Ma'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial a}, \quad Mb'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial b}.$$

Allora il risultato contenuto nelle (3') si specializza nel senso che lo stesso punto G percorre la curva (γ) in modo che la sua accelerazione è in ogni istante diretta secondo la normale alla

curva stessa. Questo equivale a dire che l'accelerazione tangenziale di G è costantemente nulla, cosa che si ricava anche direttamente dalle (4) moltiplicandole rispettivamente per a', b' e sommandole membro a membro.

Le tre equazioni differenziali poi che si hanno oltre alle (4) non sono altro che le note equazioni del movimento di un solido, non soggetto a forze, intorno ad un punto fisso, nella ipotesi che l'ellissoide d'inerzia relativo a questo punto sia di rivoluzione. D'altra parte le (4) non contengono affatto le coordinate ψ, ϕ, ϑ , e quindi valgono da sole a definire il moto del punto G lungo (γ) . Così le cinque equazioni differenziali del movimento si distinguono nettamente in due gruppi, e a questa distinzione corrisponde la decomposizione del movimento complessivo in due moti più semplici: quello del punto G sulla linea (γ) e quello del solido intorno a G . Il primo si può intendere descritto dalle due equazioni

$$F(a, b) = 0, \quad a'^2 + b'^2 = \text{cost.},$$

di cui la seconda dice che la velocità di G è costante in grandezza; ed il calcolo di a e b è ridotto senz'altro alle quadrature, una volta che la $F=0$ si sia risolta rispetto ad a o a b . Il secondo movimento poi, per l'ipotesi speciale fatta sulla natura del solido, consiste in una precessione regolare risultante di una rotazione uniforme di questo intorno a ζ , e di una rotazione uniforme di ζ intorno ad un altro asse (che può essere qualunque) passante per G .

5. Un semplice sguardo alle formole precedenti fa vedere che il risultato ora ottenuto continua a sussistere quando si ammetta che l'ellissoide d'inerzia relativo a G sia affatto qualunque. Anzi, ci sarà pure lecito supporre che il solido sia pesante, a condizione di ritenere il piano xy orizzontale, poichè allora l'azione della gravità vien distrutta dalla reazione del piano su cui deve mantenersi il baricentro. Abbiamo dunque: *Il moto più generale di un solido pesante, il cui baricentro sia assoggettato a percorrere una linea situata in un piano orizzontale, si può considerare come risultante di un moto uniforme (cioè a velocità di grandezza costante)*

del baricentro lungo la linea, e del moto più generale del solido intorno al baricentro come se questo fosse fisso e sul solido non agissero forze.

§ 2°: *Equazioni del movimento nell'ipotesi che il punto vincolato percorra un cerchio: deduzione di due integrali primi lineari, e loro significato.*

6. Torniamo a supporre che il punto vincolato P sia distinto dal baricentro, e specializziamo invece la linea (γ), supponendo che sia un cerchio di raggio R. Prendendo come origine 0 degli assi xyz il centro del cerchio, l'equazione $F(a, b) = 0$ diventa

$$a^2 + b^2 = R^2,$$

e introducendo l'angolo ω che la retta OP forma coll'asse x , avremo:

$$a = R \cos \omega, \quad b = R \sin \omega.$$

L'espressione (2) della forza viva si muta allora in

$$(5) \quad \begin{aligned} 2T = MR^2\omega'^2 + A\vartheta'^2 + (A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 + C(\varphi'^2 + 2\psi'\varphi'\cos\vartheta) \\ + 2MER\omega'(-\vartheta'\cos\vartheta\cos\chi + \psi'\sin\vartheta\sin\chi), \end{aligned}$$

dove $\chi = \psi - \omega$ rappresenta l'angolo che la linea dei nodi forma col raggio OP. Come coordinate indipendenti del sistema potremo quindi assumere $\chi \psi \vartheta$, e come caratteristiche della velocità $\omega' \psi' \varphi' \vartheta'$, di cui le tre ultime sono le derivate di tre coordinate.

Le equazioni del movimento prendono la seguente forma:

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ MR^2\omega' + MER(\psi'\sin\vartheta\sin\chi - \vartheta'\cos\vartheta\cos\chi) \right\} \\ \quad \quad \quad = -MER\omega'(\psi'\sin\vartheta\cos\chi + \vartheta'\cos\vartheta\sin\chi) \\ \frac{d}{dt} \left\{ (A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\psi' + C\varphi'\cos\vartheta + MER\omega'\sin\vartheta\sin\chi \right\} = MER\omega' \text{ (id.)} \\ \frac{d}{dt} C\varphi' + \psi'\cos\vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} (A\vartheta' - MER\omega'\cos\vartheta\cos\chi) = (A-C)\psi'^2\sin\vartheta\cos\vartheta - C\psi'\varphi'\sin\vartheta + \\ \quad \quad \quad + MER\omega'(\psi'\cos\vartheta\sin\chi + \vartheta'\sin\vartheta\cos\chi), \end{aligned} \right.$$

e si ottengono sia scrivendo le equazioni di Lagrange della seconda forma avendo cura di leggere, nella (5), $\psi = \omega$ in luogo di χ ; sia specializzando le equazioni che il prof. Volterra dedusse per quei sistemi in cui le velocità sono definite mediante caratteristiche di specie qualunque ¹⁾.

Dalle (A) si ricavano subito due integrali primi lineari. L'uno, che si ottiene dalla terza, è

$$\phi' + \psi' \cos \vartheta = r,$$

dove r indica una costante arbitraria; l'altro segue dalle due prime osservando che i secondi membri sono eguali e di segno opposto, ed è

$$(7) \quad \begin{aligned} & M R \omega' (R + E \sin \vartheta \sin \chi) + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta + \\ & + M E R \sin \vartheta \sin \chi) \psi' + C \phi' \cos \vartheta - M E R \vartheta' \cos \vartheta \cos \chi = K, \end{aligned}$$

ove K rappresenta una nuova costante arbitraria. Se a queste due equazioni uniamo quella che esprime il principio della forza viva (e che non è altro se non la (5) nella quale in luogo di T si legga una costante arbitraria h), lo studio del movimento del solido resta ridotto a quello di un sistema di tre equazioni differenziali del 1° ordine e di una del 2°, che potrà essere, ad es., l'ultima delle (A).

7. È facile riconoscere il significato dei due integrali (6) e (7). Il primo è quello stesso che s'è incontrato al n. 3: all'interpretazione cinematica ivi data se ne può aggiungere una meccanica, osservando che la quantità di moto di tutto il solido nella sua rotazione intorno al punto P ha per momento, rispetto all'asse ζ , il prodotto $C r$. Allora possiamo dire che *il momento, rispetto all'asse del solido, della quantità di moto di questo nella sua rotazione intorno al punto P è costante.*

1) Volterra, Sopra una classe di equazioni dinamiche; R. Acc. d. Sc. di Torino, v. 33 (1898). Le equazioni in questione sono le (C) del § 3, nelle quali sono nulli tutti i coefficienti $\sigma_{sk}^{(r)}$, come pure i termini P_s .

8. Per avere il significato della (7) dobbiamo prendere in considerazione il moto del solido non più rispetto al punto P, ma rispetto al sistema xyz o, come diremo, il *moto assoluto* del solido, intendendo che gli assi xyz siano assolutamente fissi. Perciò chiameremo π_1, π_2, π_3 le componenti, rispetto agli assi xyz , della rotazione istantanea del solido intorno a P, ed allora la velocità dell'elemento generico dm del solido avrà per proiezioni sugli assi medesimi:

$$\begin{aligned}v_x &= a' + \pi_2 z - \pi_3 (y - b) \\v_y &= b' + \pi_3 (x - a) - \pi_1 z \\v_z &= \pi_1 (y - b) - \pi_2 (x - a).\end{aligned}$$

Di qui si ha:

$$v_y x - v_x y = b'x - a'y + \{\pi_3(x-a) - \pi_1 z\}x - \{\pi_2 z - \pi_3(y-b)\}y;$$

sostituendo ad a e b le coordinate polari R e ω di P, e osservando che è

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b, \quad z = z_1,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}v_y x - v_x y &= R\omega'(R + x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega) + \\&+ (\pi_3 x_1 - \pi_1 z_1)(x_1 + R \cos \omega) - (\pi_2 z_1 - \pi_3 y_1)(y_1 + R \sin \omega).\end{aligned}$$

Questa espressione, moltiplicata per dm , dà il momento, rispetto all'asse z , della quantità di moto dell'elemento dm nel moto assoluto del solido. Il momento stesso relativo a tutto il solido sarà dunque dato, se diciamo x_1^0, y_1^0, z_1^0 le coordinate di G rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 , da

$$\begin{aligned}\int (v_y x - v_x y) dm &= MR\omega'(R + x_1^0 \cos \omega + y_1^0 \sin \omega) - \\&- MRx_1^0 (\pi_1 \cos \omega + \pi_2 \sin \omega) + MR\pi_3 (x_1^0 \cos \omega + y_1^0 \sin \omega) + \\&+ \pi_3 \int (x_1^2 + y_1^2) dm - \pi_1 \int z_1 x_1 dm - \pi_2 \int z_1 y_1 dm.\end{aligned}$$

Ma si ha geometricamente:

$$x_1^0 = E \sin \psi \sin \vartheta, \quad y_1^0 = -E \cos \psi \sin \vartheta, \quad z_1^0 = E \cos \vartheta,$$

onde

$$x_1^0 \cos \omega + y_1^0 \sin \omega = E \sin \vartheta \sin \chi ;$$

inoltre dalle formole ¹⁾

$$\pi_1 = \vartheta' \cos \psi + \varphi' \sin \vartheta \sin \psi$$

$$\pi_2 = \vartheta' \sin \psi - \varphi' \sin \vartheta \cos \psi$$

$$\pi_3 = \psi' + \varphi' \cos \vartheta ,$$

analoghe alle (1) si ottiene :

$$\begin{aligned} \pi_3 \sin \vartheta \sin \chi - (\tau_1 \cos \omega + \pi_1 \sin \omega) \cos \vartheta = \\ = \psi' \sin \vartheta \sin \chi - \vartheta' \cos \vartheta \cos \chi ; \end{aligned}$$

infine si ha :

$$\int (x_1^2 + y_1^2) dm = \text{mom. d'in.}^2 \text{ risp. all'asse } z_1 = A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta$$

$$\int z_1 x_1 dm = \text{mom. misto risp. agli assi } x_1 \text{ e } z_1 =$$

$$= (A - C) \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \psi$$

$$\int z_1 y_1 dm = \text{mom. misto risp. agli assi } y_1 \text{ e } z_1 =$$

$$= (C - A) \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \psi .$$

Sostituendo nella formola che dà l' $\int (v_x x - v_y y) dm$, si trova che questo s identifica col primo membro della (7).

Ecco dunque cosa significa questo integrale: *il momento, rispetto all'asse del cerchio percorso dal punto P, della quantità di moto del solido nel suo movimento assoluto è costante.*

È da notarsi che, a differenza dell'integrale (6), non si può interpretare il (7) in modo cinematico.

9. Nell'ipotesi che il punto P sia fisso il moto si riduce, come si è già detto, ad una rotazione uniforme intorno ad un asse passante per P ; ciò equivale a dire che sono costanti le componenti della rotazione (ovvero dell'asse momento della coppia di quantità di moto) rispetto sia ad un asse qualunque

1) Cfr. Klein Sommerfeld, Th. d. Kr., p. 45.

fisso nel solido, sia ad un asse qualunque fisso nello spazio. Il confronto di tale proprietà con quelle espresse dagli integrali (6) e (7) nel caso in cui P descriva un cerchio, mostra quanto sia venuto complicandosi il movimento colla maggiore libertà concessa al solido.

§ 3°: *Moti precessionali: loro ricerca e discussione.*

10. Diremo *moti precessionali* del solido quei movimenti nei quali la rotazione che il solido compie intorno al punto P consiste in una precessione regolare, risultante di una rotazione uniforme del solido intorno all'asse ζ e di una rotazione uniforme di ζ intorno a z_1 ; quei movimenti, cioè, nei quali si mantengono costanti le due velocità ψ' e ϕ' e l'angolo ϑ . Ci proponiamo di riconoscere se ed a quali condizioni il solido possa essere animato da un moto precessionale.

Consideriamo perciò l'integrale della forza viva

$$(5)' \quad T = h$$

e l'integrale (7), i quali, nell'ipotesi che ϑ sia costante, si scrivono:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} MR^2\omega'^2 + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi'^2 + C(\phi'^2 + 2\psi'\phi' \cos \vartheta) + \\ \quad + 2MER\omega'\psi' \sin \vartheta \sin \chi = 2h \\ MR^2\omega' + (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \psi' + C\phi' \cos \vartheta + \\ \quad + MER(\omega' + \psi') \sin \vartheta \sin \chi = K. \end{array} \right.$$

Queste due equazioni, moltiplicate rispettivamente per $\omega' + \psi'$ e $-2\omega'\psi'$, indi sommate, danno luogo ad un'equazione di 3° grado in ω' la quale, supposti pure costanti ψ' e ϕ' , è a coefficienti tutti costanti: il valore od i valori reali ch'essa fornisce per ω' sono quindi costanti.

Dopo ciò, introduciamo nelle equazioni non integrate (A) l'ipotesi della costanza di $\vartheta, \psi', \phi', \omega'$; la terza vien soddisfatta senz'altro, e le altre tre prendono la forma seguente:

$$(A') \quad \begin{cases} \text{MER}\psi'^2 \sin \vartheta \cos \chi = 0 \\ \text{MER}\omega'^2 \sin \vartheta \cos \chi = 0 \\ \text{MER}\omega'^2 \cos \vartheta \sin \chi = \{(C - A)\psi' \cos \vartheta + C\phi'\}\psi' \sin \vartheta. \end{cases}$$

Si otterranno tutti i moti precessionali possibili eguagliando a zero separatamente i singoli fattori della prima e della seconda equazione, e introducendo ogni volta la condizione che ne risulta nelle rimanenti due equazioni (A').

11. Vediamo quali sono i movimenti che si vengono così a definire.

1) Si soddisfa alle (A') facendo ad un tempo:

$$(8) \quad E = 0, \{(C - A)\psi' \cos \vartheta + C\phi'\}\psi' \sin \vartheta = 0.$$

Il supporre $E = 0$ equivale ad ammettere che il punto vincolato sia lo stesso baricentro G ; è un caso che dovevamo attenderci, poichè s'è visto nel § 1° che allora il movimento del solido intorno a G avviene come se questo fosse fisso; è dunque una precessione regolare intorno a G , di cui uno degli assi è ζ . L'altro asse poi è z_1 , poichè la condizione complementare

$$(8') \quad (C - A)\psi' \cos \vartheta + C\phi' = 0$$

non è altro che l'equazione alla quale debbono soddisfare le due velocità precessionali ψ' e ϕ' nel moto spontaneo di un solido di rivoluzione fissato per un punto dell'asse, quando gli assi della precessione a cui si riduce il movimento siano z_1 e ζ (Cfr. Klein-Sommerfeld, Th. d. Kreisels, p. 153). L'eguagliare a zero i due rimanenti fattori nella seconda (8) darebbe luogo a due casi limiti della precessione ora detta.

2a) Un secondo moto precessionale si ha supponendo $R = 0$ insieme alla seconda (8). Il punto P questa volta è fisso (cioè descrive un cerchio di raggio nullo); come il precedente, anche questo caso era da prevedersi, perchè il movimento consiste in una precessione regolare intorno al punto P .

Sostanzialmente identico a quello ora trovato è il moto

2b) che si ottiene facendo $\omega' = 0$. Tutt'al più le due ipotesi $R = 0$ e $\omega' = 0$ corrispondono a due modi diversi di con-

cepire il caso del punto P fisso come limite del caso generale: (cioè la prima equivale a pensare il punto P mobile sopra un cerchio il cui raggio si faccia tendere a zero, mentre la seconda equivale a supporre che tenda a zero la velocità di P mobile sopra un cerchio di raggio finito. Affinchè le (A') siano soddisfatte per $\omega' = 0$ bisognerà ancora che sian verificate la seconda (8) e la

$$(9) \quad ER \psi' \sin \vartheta \cos \chi = 0 .$$

Ma è facile vedere che di quest'ultima condizione è inutile tener conto. Difatti siccome il cerchio (γ) è un elemento completamente estraneo al moto del solido, nulla impedisce di attribuirgli le dimensioni che si vogliono: in particolare si può sempre pensare che abbia raggio nullo ($R = 0$). La (9) non potrà essere trascurata nel solo caso che il moto in questione debba venire paragonato con altri movimenti nei quali ω' non sia più nullo e dei quali il moto stesso si consideri come limite: è appunto quello che accadrà nello studio della stabilità che verrà fatto nel § 5°. Per ora noi comprenderemo in un caso unico i due movimenti 2a) e 2b), ritenendoli caratterizzati dalla condizione $R \omega' = 0$ unitamente alla seconda (8).

3) Le due equazioni

$$(10) \quad \sin \vartheta = 0 ,$$

$$(10') \quad ER \omega' \sin \chi = 0$$

ci danno un nuovo moto precessionale; la (10) esprime che l'asse ζ è parallelo a z , ossia che coincidono i piani $\xi \eta$ e xy , onde riesce indeterminata la linea dei nodi N e la sua inclinazione χ sulla retta OP. Allora, potendosi attribuire a $\sin \chi$ il valore che si vuole fra -1 e $+1$, la (10') si riduce semplicemente a $ER \omega' = 0$, e dice, che per $\sin \vartheta = 0$ si ha un moto precessionale solo in uno di questi due casi: quando il punto P è fisso, oppure quando il punto vincolato è il baricentro. Questo movimento si dovrebbe, a rigore, comprendere come caso limite in ciascuno dei precedenti; è bene però tenerne lo distinto per la singolarità che presenta dell'inde-

terminazione di tre coordinate: una, χ , riesce indeterminata completamente, — delle altre due, ψ e ϕ , è determinata soltanto la somma ¹⁾).

4) Una quarta soluzione delle (A') si trova facendo

$$(11) \quad \cos \chi = 0,$$

$$(11') \quad \pm \text{MER}_{\omega''} \cos \vartheta = \{(C - A) \psi' \cos \vartheta + C \varphi'\} \psi' \sin \vartheta.$$

La (11) significa che l'asse del solido incontra l'asse z . Difatti se noi immaginiamo proiettato il baricentro G sul piano xy in G' , la retta PG' riesce evidentemente perpendicolare alla linea dei nodi N ; ora se questa è a sua volta perpendicolare alla

Fig. 2.

retta OP ($\cos \chi = 0$), vuol dire che G' cade sul raggio OP, dal che segue senz'altro che gli assi ζ e z stanno in un mede-

1) In questo movimento il sistema dipende solo più da due coordinate, cioè da ξ e dall'angolo λ degli assi ξ e α ; per la forza viva si ha allora:

$$2T = MR^2 \omega'^2 + A \lambda'^2,$$

e le due equazioni del movimento danno senz'altro

$$\omega' = \text{cost.}, \quad \lambda' = \text{cost.}$$

Siccome poi λ non è altro che la somma dei due angoli ϕ e φ (ciascuno dei quali, preso separatamente, è indeterminato), scrivendo, in luogo dei due integrali precedenti, il sistema equivalente

$$\lambda' = r, \quad M R^2 \omega' + A \lambda' = K,$$

si ritrovano i due integrali (6) e (7) specializzati per $\sin \vartheta = 0$.

simo piano. Chiamando Q il punto comune a questi due assi (punto che rimarrà fisso tanto sull'uno quanto sull'altro in tutto il movimento), si potrà concepire il moto complessivo del solido come una precessione regolare intorno a Q , e precisamente come risultante di una rotazione del solido intorno a ζ con velocità costante ϕ' e di una rotazione uniforme di ζ intorno a z con velocità $\omega' = \psi'$, l'eguaglianza di queste due velocità essendo una conseguenza di $\cos \chi = 0$. Per questa eguaglianza poi la (11') si semplifica in

$$(11') \quad \{(A - C) \psi' \cos \vartheta - C\phi'\} \sin \vartheta \pm MER\psi' \cos \vartheta = 0.$$

5) Vi è ancora un modo di soddisfare alle (A'), e consiste nel fare $\psi' = 0$ insieme a

$$ER\omega' \cos \vartheta \sin \chi = 0, \quad ER\omega' \sin \vartheta \cos \chi = 0.$$

I movimenti

$$\psi' = 0, \quad ER\omega' = 0$$

non sono nuovi, perchè già compresi in 1), 2a), 2b). Restano da considerare le due combinazioni

$$\psi' = 0, \quad \cos \vartheta = 0, \quad \cos \chi = 0$$

$$e \quad \psi' = 0, \quad \sin \vartheta = 0, \quad \sin \chi = 0.$$

Quanto alla prima, rientra sia in 4) sia in 2b), perchè da $\cos \chi = 0$ segue $\chi' = 0$ e quindi $\psi' = \omega' = 0$; quanto alla seconda, non c'è neppure da prenderla in considerazione, poichè per $\sin \vartheta = 0$ gli angoli ϑ e χ perdono ogni significato.

12. Riassumendo, i moti precessionali del sistema si riducono a quattro tipi, i cui caratteri distintivi possiamo compendiarne nella tabella seguente :

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad E = 0, \\ 2) \quad R\omega' = 0, \\ 3) \quad \sin \vartheta = 0, \quad ER\omega' = 0 \\ 4) \quad \cos \chi = 0, \quad \pm MER\psi' = \{(C - A) \psi' \cos \vartheta + C\phi'\} \operatorname{tg} \vartheta. \end{array} \right\} (C - A) \psi' \cos \vartheta + C\phi' = 0$$

Otteniamo dunque come possibile un moto precessionale nei casi seguenti: 1° quando il punto vincolato è il baricentro; — 2° quando un punto dell'asse del solido rimane fisso, e quindi il movimento complessivo del solido si riduce ad una precessione regolare intorno a questo punto. Nel secondo caso il punto fisso non può essere, evidentemente, che lo stesso punto vincolato, a meno che l'asse del solido stia in un piano coll'asse del cerchio (γ), ed allora il punto fisso è il punto (situato a distanza finita od infinita) comune ai due assi; così il secondo caso si suddivide a sua volta in tre altri, che sono quelli da noi denotati con 2), 3), 4).

Tutti e quattro i movimenti hanno in comune una proprietà (s'intende, oltre a quelle che han servito a definirli), e di cui già abbiamo fatto uso, cioè: $\omega' = \text{cost}$. *In tutti i moti precessionali adunque il punto P percorre con velocità costante il cerchio (γ).*

13. Riguardo alla precessione regolare a cui si riduce il moto 4) osserveremo che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto Q è di rotazione intorno all'asse ζ ; perciò il solido compirebbe ancora una precessione regolare intorno a Q quando si tenesse fisso questo punto, sopprimendo il vincolo costituito dal cerchio (γ). Le due precessioni non sonò però da confondersi. Difatti, se A' è il momento d'inerzia del solido rispetto ad un asse perpendicolare nel punto Q all'asse ζ , sappiamo che, nell'ipotesi del punto Q fisso, le costanti del sistema e le velocità precessionali sono legate dalla (8'), come s'è ricordato al n. 11. Ora si ha:

$$A' = A + \frac{MR}{\sin^2 \vartheta} (R \pm 2E \sin \vartheta) ,$$

onde la (8') non coincide colla (11'') se non nel caso eccezionale che si abbia

$$R - E \sin \vartheta = 0 ,$$

cioè il punto Q sia il baricentro G. Esclusa questa ipotesi, vediamo in che cosa la nostra precessione (11'') si differenzi da

quella del solido di rivoluzione fisso per un punto Q del suo asse.

Dobbiamo perciò riferirci alla classificazione che i signori Klein e Sommerfeld fanno delle precessioni regolari in quattro tipi, secondo il valore del rapporto delle velocità ψ' e ϕ' , cioè secondo la posizione relativa dei coni poloide ed erpoloide (Cfr. Th. d. Kr., p. 51 e segg.); nonchè la discussione della precessione regolare spontanea del solido di rivoluzione fisso per un punto del suo asse (ibid., p. 151 e segg.). In base a questa discussione la (8') permette due soli tipi di precessione, cioè la cosiddetta *epicicloidica* se l'ellissoide d'inerzia relativo al punto Q è allungato ($A' > C$), e la *pericicloidica* se quell'ellissoide è schiacciato ($A' < C$): nella prima i due coni, poloide ed erpoloide, sono esterni l'uno all'altro, nella seconda l'erpoloide è interno al poloide e le semiaperture di entrambi sono angoli acuti.

Ora, posto

$$r = \frac{\psi'}{\phi'},$$

dalla (11'') si ha:

$$r = \frac{C \operatorname{tg} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta \pm \operatorname{MER}};$$

noi possiamo sempre supporre, in questo movimento, ϑ acuto, poichè un'eventuale inversione del senso positivo sull'asse z non porta nessun cambiamento essenziale nel sistema; perciò non vi saranno da distinguere, circa la formola precedente, che questi quattro casi:

- (a) $\operatorname{sen} \chi = +1, \quad A - C > 0$
- (b) $\operatorname{sen} \chi = +1, \quad A - C < 0$
- (c) $\operatorname{sen} \chi = -1, \quad A - C > 0$
- (d) $\operatorname{sen} \chi = -1, \quad A - C < 0.$

D'altra parte i quattro tipi di precessioni classificati da Klein e Sommerfeld corrispondono a far variare r entro i seguenti quattro intervalli nei quali si può dividere tutto il campo da $+\infty$ a $-\infty$:

$$+\infty, \quad 0, \quad -\cos\vartheta, \quad -\frac{1}{\cos\vartheta}, \quad -\infty.$$

Nell'ipotesi (a) si ha sempre $\tau > 0$ ¹⁾, e la precessione non può essere che del 1° tipo (*epicicloidica*).

Nell'ipotesi (b) è possibile una precessione del 1° tipo ($\tau > 0$), perchè si può sempre scegliere l'angolo ϑ in modo da avere

$$(A - C) \sin\vartheta + M E R > 0.$$

Per rendere $\tau < 0$ occorre invece che si abbia

$$M E R < C - A;$$

ammessa questa disuguaglianza, si vede facilmente che si cade di necessità in una precessione del 4° tipo (*pericicloidica*: il cono erpoloide è interno al poloide, e le semiaperture di entrambi sono angoli acuti), perchè si ha sempre $\tau < \frac{1}{\cos\vartheta}$. Difatti dalla disuguaglianza evidente

$$A \sin\vartheta + M E R > 0$$

si deduce:

$$(A - C) \sin\vartheta + M E R > -C \sin\vartheta,$$

da cui, ricordando che il primo membro è negativo,

$$\frac{C \sin\vartheta}{(A - C) \sin\vartheta + M E R} < -1,$$

e quindi, dividendo per $\cos\vartheta$:

$$\tau < -\frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Passiamo al caso (c). Si ha τ compreso nel 1° intervallo quando sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(A - C) \sin\vartheta - M E R > 0,$$

il che, per essere $\sin\vartheta$ compreso fra 0 e 1, esige che si abbia

$$M E R < A - C.$$

¹⁾ Non stiamo neppure a considerare i casi limiti che corrisponderebbero ad eguagliare τ ai valori che separano due intervalli consecutivi.

Non si richiede invece alcuna condizione per le costanti del sistema affinchè τ sia negativo, potendosi sempre determinare un angolo ϑ per modo che sia

$$(12) \quad (A - C) \operatorname{sen} \vartheta - M E R < 0.$$

Vediamo di più in quali, fra il 2°, 3°, 4° intervallo, può cadere τ . Affinchè stia nel secondo ($0 > \tau > -\cos \vartheta$) si deve avere, insieme alla (12):

$$(13) \quad \frac{C \operatorname{sen} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - M E R} > -\cos^2 \vartheta,$$

ossia

$$C \operatorname{sen} \vartheta < -\cos^2 \vartheta \{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - M E R\}^1,$$

od anche

$$(C \operatorname{sen}^2 \vartheta + A \cos^2 \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta < M E R \cos^2 \vartheta,$$

ed a questa è sempre possibile soddisfare scegliendo ϑ sufficientemente piccolo, poichè basta osservare che per ϑ prossimo allo 0 il primo membro diventa piccolissimo, mentre il secondo si approssima alla quantità finita $M E R$. È dunque possibile senz'altro una precessione del 2° tipo (*ipocicloidica*: il cono poiloide è interno all'erpoloide).

Volendo che τ appartenga al 3° intervallo

$$\left(-\cos \vartheta > \tau > -\frac{1}{\cos \vartheta}\right),$$

bisognerà vedere se si può trovare un angolo ϑ per cui si abbia

$$-1 < \frac{C \operatorname{sen} \vartheta}{(A - C) \operatorname{sen} \vartheta - M E R} < -\cos^2 \vartheta,$$

ossia

$$(14) \quad \begin{cases} (C \operatorname{sen}^2 \vartheta + A \cos^2 \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta > M E R \cos^2 \vartheta \\ A \operatorname{sen} \vartheta < M E R, \end{cases}$$

delle quali la prima richiede che ϑ sia sufficientemente grande, e la seconda che sia sufficientemente piccolo. Chiamando ϑ_0 il

1) L'inversione del segno $>$ in $<$ s'è fatta perchè si è moltiplicato per una quantità negativa.

massimo valore di ϑ che soddisfa alla $A \sin \vartheta \leq M E R$, e cioè prendendo $\sin \vartheta_0 = 1$ se $M E R \geq A$, e $\sin \vartheta_0 = \frac{M E R}{A}$ se $M E R < A$, si verifica immediatamente che per $\vartheta = \vartheta_0$ è soddisfatta la prima (14): esistono perciò due angoli ϑ_1 e ϑ_2 ($\vartheta_1 < \vartheta_0 < \vartheta_2$) tali che in tutto l'intervallo $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ quella disuguaglianza è soddisfatta, ed allora basta prendere ϑ fra ϑ_1 e ϑ_2 affinchè sian verificate entrambe le (14). Si può dunque avere nel caso (c) anche una precessione del 3° tipo (*anticicloidica*: il cono poiloide contiene nel suo interno l'erpoloide, essendo le semi-aperture dei due coni rispettivamente un angolo ottuso ed un angolo acuto).

Infine per ottenere una precessione del 4° tipo (*pericicloidica*) bisogna fare

$$\tau < -\frac{1}{\cos \vartheta},$$

cioè

$$A \sin \vartheta > M E R,$$

il che può avvenire solo per $M E R < A$.

In sostanza, nell'ipotesi (c) sono possibili senza alcuna restrizione le precessioni del 2° e del 3° tipo; possono inoltre presentarsi quelle del 1° e del 4° quando è $M E R < A - C$, oppure soltanto quelle del 4° se, essendo $M E R > A - C$, si ha però $M E R < A$.

Venendo finalmente al caso (d), si vede subito che si ha sempre $\tau < 0$, onde restano escluse le precessioni del 1° tipo. Quanto alle altre, si arriva alle identiche conclusioni che pel caso (c).

Tutta questa discussione si può riassumere nella seguente tabella:

	tipo 1°	2°	3°	4°
caso (a)		0	0	0
(b)		0	0	$M E R < C - A$
(c)	$M E R < A - C$			$M E R < A$
(d)	0			$M E R < A$

In ogni quadretto s'è scritta la condizione a cui devono soddisfare le costanti A, C, M, E, R affinché sia possibile la corrispondente precessione, lasciandolo vuoto quando nessuna condizione è richiesta, e scrivendovi invece uno zero quando la precessione non esiste affatto.

Si noterà l'analogia che presentano, da un lato, i casi (a) e (b) e, dall'altro, i casi (c) e (d) ; l'analogia fra i casi dell'una coppia o quelli dell'altra si conserva, come vedremo, nel modo di comportarsi di queste precessioni rispetto alla stabilità.

14. Termineremo la discussione del moto 4) facendo notare come la proprietà, di cui esso gode, che si mantengono costanti ω' e χ , è caratteristica per questo movimento; di modo che lo si può caratterizzare sia colla costanza di elementi relativi esclusivamente alla rotazione del solido intorno al punto P , sia colla costanza di elementi che riguardano in parte il moto del punto P ed in parte il moto del solido intorno a P .

Tralascieremo la dimostrazione che non presenta difficoltà, come pure ci limiteremo ad un cenno di un altro aspetto sotto il quale si può mettere il moto 4). In virtù della (6) la costanza di $\mathfrak{S}$ segue dall'ipotesi sulla costanza di ψ' e φ' ; per il moto 4) possiamo dunque dire che dall'essere costanti le velocità ψ' e φ' si deduce che devono pure essere costanti le coordinate $\mathfrak{S}$ e χ (nonchè la velocità ω'). Ora questa proposizione è invertibile, in quanto dalla costanza di $\mathfrak{S}$ e χ segue la costanza delle velocità ψ' e φ' (e quindi quella di ω').