*Sur une Propriété du Paramètre de la transformée Canonique
des Formes cubiques ternaires. Par Signor BRIOSCHI.*

[Read January 13th, 1881.]

1°. Dans une lettre adressée à Mr. Hermite il y a quelques années (*Comptes Rendus*, 13 Juillet, 1863) j'ai énoncé le théorème suivant :
" Soit U une forme cubique ternaire, H son hessien, S , T ses invariants ;
si l'on indique par x une racine quelconque de l'équation :

$$(1) \quad x^4 - 6Sx^3 + 8Tx - 3S^3 = 0,$$

l'équation du quatrième degré dont les racines sont les valeurs de X données par la relation :

$$(2) \quad \sqrt{X} = \frac{1}{S} [aS + \frac{1}{2}b(x^3 - 7Sx + 8T)] \sqrt{x}$$

est la suivante :

$$(3) \quad X^4 - 6S_{ab}X^3 + 8T_{ab}X - 3S_{ab}^3 = 0,$$

S_{ab} , T_{ab} étant les invariants de la forme cubique ternaire $aU + bH$,
ou bien :

$$\begin{aligned} S_{ab} &= Sa^4 + 4Ta^3b + 3S^2a^2b^2 + 4STab^3 + (4T^2 - 3S^2)b^4, \\ T_{ab} &= Ta^6 + 6S^2a^5b + 15STa^4b^2 + 20T^2a^3b^3 + 15S^2Ta^2b^4 \\ &\quad + 6S(3S^2 - 2T^2)ab^5 + T(3S^3 - 8T^2)b^6. \end{aligned}$$

J'observais encore dans cette même lettre que, en indiquant par x_0 , x_1 , x_2 les racines de l'équation (1), on a :

$$(4) \quad \sqrt{x_s} = a_0 \sqrt{-3}, \quad \sqrt{x_s} = a_0 + \epsilon^s a_1, \quad (s = 0, 1, 2)$$

dans lesquelles ϵ est une racine cubique imaginaire de l'unité ; et

$$(5) \quad a_0 = ml\sqrt{2}, \quad a_1 = -m\sqrt{2}$$

étant l le paramètre de la transformée canonique :

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$$

de la forme U , et m le module de la transformation. On a aussi, comme il est connu :

$$\begin{aligned} S &= 4m^4(l^3 - 1), \quad T = m^6(8l^3 + 20l^2 - 1), \\ T^2 - S^3 &= m^{12}(1 + 8l^3)^3. \end{aligned}$$

2°. Je pose maintenant dans la relation (2) chacune des valeurs (4),
l'on obtient facilement les suivantes :

$$\sqrt{X_s} = A_0 \sqrt{-3}, \quad \sqrt{X_s} = A_0 + \epsilon^s A_1,$$

étant :

$$\begin{aligned} A_0 &= m\sqrt{2} [al + bm^2(1 + 2l^3)], \\ A_1 &= m\sqrt{2} [-a + 6bm^2l^3]. \end{aligned}$$

Or en supposant: $a = \frac{T}{\sqrt{S^3 - T^3}}, \quad b = -\frac{S}{\sqrt{S^3 - T^3}},$

les valeurs de A_0, A_1 deviennent :

$$A_0 = m \sqrt{2} \frac{3l}{\sqrt{-(1+8l^3)}}, \quad A_1 = m \sqrt{2} \frac{1-4l^3}{\sqrt{-(1+8l^3)}};$$

ou en posant: $\frac{A_1}{A_0} = 2L,$

on aura : (6) $6L = \frac{1-4l^3}{l},$

c'est-à-dire L sera le paramètre de la transformée canonique :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6La\beta\gamma = 0$$

de la courbe de troisième classe qui porte le nom de Mr. Cayley. (Voir Salmon, "A Treatise of the Higher Plane Curves," page 191.)

En substituant les valeurs supérieures de a, b dans l'équation (2), on trouve que deux racines correspondantes des équations (1), (3) sont liées par la relation :

$$(7) \quad X = \frac{Tx + 3S^2}{Sx - T}.$$

Ceci est réciproque et donne aussi :

$$x = \frac{TX + 3S^2}{SX - T}.$$

L'équation (3) devient dans ce cas là :

$$X^3 + 18SX^2 + 8T \frac{T^2 - 9S^3}{S^3 - T^3} X - 27S^3 = 0,$$

ou, si l'on pose: $Y = \frac{1}{27} \frac{(T^2 + 3S^3)^3}{S^3 (S^3 - T^3)^3},$

l'on aura : $Y : Y-1 : 1 =$

$$(X^3 + 3S)^3 (X^3 + 27S) : (X^3 + 18SX^2 - 27S^3)^3 : 12^3 S^3 X^3.$$

La valeur (6) de L nous donne :

$$1 + 2L = \frac{(1-l)(1+2l)^3}{3l},$$

$$1 + 2\epsilon L = \frac{(\epsilon-l)(1+2\epsilon^3 l)^3}{3l},$$

$$1 + 2\epsilon^2 L = \frac{(\epsilon^2-l)(1+2\epsilon l)^3}{3l};$$

on aura ainsi :

$$1 + 2L = \frac{\sqrt{X_0}}{\sqrt{X_1}} \sqrt{-3}, \quad 1 + 2\epsilon L = \frac{\sqrt{X_1}}{\sqrt{X_2}} \sqrt{-3}, \quad 1 + 2\epsilon^2 L = \frac{\sqrt{X_2}}{\sqrt{X_0}} \sqrt{-3},$$

et après :

$$(8) \quad 1+2l = - \left[\frac{X_0 x_\infty}{X_\infty x_0} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{-3}, \quad 1+2e'l = - \left[\frac{X_1 x_\infty}{X_\infty x_1} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{-3}, \\ 1+2e'l = - \left[\frac{X_2 x_\infty}{X_\infty x_2} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{-3}.$$

3°. Un second théorème était énoncé dans cette communication à l'Académie des Sciences, sous cette forme: "L'équation dont les racines sont données par les valeurs de l'expression :

$$(9) \quad \sqrt{Z} = \frac{1}{2S\sqrt{2}} [a(x^3 - 5Sx + 8T) - bS(x^3 - 5S)] \sqrt{x},$$

correspondantes à $x = x_\infty, x_0, x_1, x_2$, est la suivante :

$$(10) \quad Z^4 - 6S^{ab}Z^3 + 8T^{ab}Z - 3(S^{ab})^2 = 0,$$

S^{ab}, T^{ab} étant les invariants de la forme cubique $aP + bQ$, et P, Q les deux contrevariants du troisième ordre de la forme U ."

Or l'on a, comme on sait,

$$S^{ab} = (3S^3 + T^3) a^4 + 16S^2 T a^3 b + 6S(S^3 + 3T^3) a^2 b^2 \\ + 8T(S^3 + T^3) ab^3 + S^2(5T^3 - S^3) b^4, \\ T^{ab} = T(9S^3 - T^3) a^4 + 6S^2(3S^3 + 5T^3) a^3 b + 15ST(5S^3 + 3T^3) a^2 b^2 \\ + 20T^2(7S^3 + T^3) a b^3 + 15S^2 T(S^3 + 7T^3) a^2 b^4 \\ + 6S(S^3 + S^2 T^3 + 6T^4) ab^4 + T(5S^3 - 5S^2 T^3 + 8T^4) b^4;$$

par conséquent, si l'on pose :

$$a = \frac{T}{(S^3 - T^3)^{\frac{1}{2}}}, \quad b = \frac{-S}{(S^3 - T^3)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{on trouve:} \quad S_{ab} = -1, \quad T_{ab} = -\frac{T}{\sqrt{S^3 - T^3}},$$

et l'équation en Z devient là :

$$Y : Y-1 : 1 = \\ = (Z^3 - 1)^2 (Z^3 - 9) : (Z^4 + 6Z^2 - 3)^2 : 4^2 \cdot Z^3,$$

$$\text{étant dans ce cas :} \quad Y = \frac{S^3}{S^3 - T^3}.$$

Enfin, en observant que de la valeur (9) de $\sqrt{Z}$ on déduit la relation :

$$(11) \quad \sqrt{X} = Z \sqrt{x},$$

on pourra substituer aux (8) les suivantes :

$$1+2l = - \sqrt{\frac{Z_0}{Z_\infty}} \cdot \sqrt{-3}, \quad 1+2e'l = - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_\infty}} \cdot \sqrt{-3}, \\ 1+2e'l = - \sqrt{\frac{Z_2}{Z_\infty}} \cdot \sqrt{-3};$$

ou, en posant: (12) $\sqrt{Z_\infty} = -a_0 \sqrt{-3}, \quad \sqrt{Z_1} = a_0 + \epsilon^2 a_1,$

on aura :
$$l = \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0},$$

à laquelle on peut ajouter l'autre qu'on déduit des équations (5),

$$l = -\frac{a_0}{a_1}.$$

4°. Soient k le module des fonctions elliptiques, λ, μ le module transformé et le multiplicateur dans la transformation du troisième ordre. Si dans l'équation (1) on pose :

$$x = \mu \sqrt{S},$$

et l'on suppose déterminé le module k par la relation :

$$\frac{T}{S\sqrt{S}} = 1 - 2k^2,$$

on obtient l'équation du multiplicateur :

$$\mu^4 - 6\mu^2 + 8(1 - 2k^2)\mu - 3 = 0.$$

Soit :

$$X = \nu \sqrt{S},$$

la relation (7) nous donne :

$$\nu = \frac{(1 - 2k^2)\mu + 3}{\mu - (1 - 2k^2)},$$

de laquelle on déduit facilement que :

$$\nu = \frac{\mu(\mu^2 - 9)}{1 - \mu^2};$$

mais l'équation du multiplicateur peut s'écrire des deux manières suivantes :

$$(\mu - 1)^2(\mu + 3) = 16k^2\mu, \quad (\mu + 1)^2(\mu - 3) = -16k^2\mu;$$

en conséquence on aura : $\nu = 4k^2k'^2 \frac{\mu^2}{(1 - \mu^2)^2}.$

Si maintenant on se rappelle les formules connues :

$$\sqrt[4]{\frac{\lambda}{k}} = -2 \frac{\sqrt{k}}{1 - \mu}, \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda'}{k'}} = -2 \frac{\sqrt{k'}}{1 + \mu},$$

on voit que :

$$\nu = \mu^2 \frac{\lambda\lambda'}{kk'}.$$

L'équation du quatrième degré en ν sera :

$$Y : Y - 1 : 1 =$$

$$(\nu^2 + 3)^2(\nu^2 + 27) : (\nu^4 + 18\nu^2 - 27)^2 : 12^2 \cdot \nu^2,$$

étant dans ce cas :
$$Y = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2k'^2)^2}{k^4k'^4}.$$

62 Signor Brioschi *sur une Propriété du Paramètre*, &c. [Jan. 31,

En indiquant avec K, Λ les fonctions complètes de première espèce, la valeur supérieure de ν donne les suivantes :

$$\sqrt{\nu_{\infty}} = -3 \sqrt{\frac{\Lambda^3 \lambda \lambda'}{K^3 k k'}} \cdot \sqrt{-3}, \quad \sqrt{\nu_0} = \sqrt{\frac{\Lambda^3 \lambda \lambda'}{K^3 k k'}};$$

or on sait que, en posant $q = e^{-\frac{K'}{K}}$, on a : *

$$\sqrt{\frac{2k^3 k k'}{\pi^3}} = q^{\frac{1}{2}} \Pi (1 - q^{2m})^3 = F(q),$$

et par conséquent :

$$\sqrt{\nu_{\infty}} = -3 \frac{F(q^3)}{F(q)} \sqrt{-3}, \quad \sqrt{\nu_0} = \frac{F(e^3 q^{\frac{1}{2}})}{F(q)};$$

mais par une autre formule des "Fundamenta Nova," p. 185, on a :

$$F(q) = q^{\frac{1}{2}} [1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{10} + 9q^{14} - 11q^{18} + \dots]$$

et $F(e^3 q^{\frac{1}{2}}) = e^3 q^{\frac{1}{2}} [1 + 5q^2 - 7q^4 - 11q^{10} + \dots] - 3F(q^2)$;

on pourra donc écrire :

$$\sqrt{\nu_{\infty}} = A_0 \sqrt{-3}, \quad \sqrt{\nu_0} = A_0 + A_1 e,$$

étant : $A_0 = -3 \frac{F(q^2)}{F(q)}$, $A_1 = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{F(q)} [1 + 5q^2 - 7q^4 - 11q^{10} + \dots]$,

et on obtiendra pour L la valeur : †

$$L = \frac{1}{2} \frac{A_1}{A_0} = -\frac{1}{6q^{\frac{1}{2}}} \frac{1 + 5q^2 - 7q^4 - 11q^{10} + 13q^{14} \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{10} + \dots}.$$

5°. De la même manière l'équation (11) donne :

$$Z = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} = \mu \sqrt{\frac{\lambda \lambda'}{k k'}},$$

mais l'on a : $\left(\frac{K^3 k k'}{\Pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}} \frac{\Pi(1 - q^{2m})}{\Pi(1 + q^{2m-1})} = f(q)$

et : $f(q) = q^{\frac{1}{2}} [1 - q - q^3 + q^5 + q^{10} - q^{15} - q^{21} + \dots]$;

on déduira donc des équations (12) :

$$a_0 = -\frac{f(q^2)}{f(q)}, \quad a_1 = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{f(q)} [1 - q + q^3 - q^5 - q^7 + q^{13} - q^{15} + \dots],$$

et l'on aura : $l = \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}} \frac{1 - q + q^3 - q^5 - q^7 + \dots}{1 - q^2 - q^4 + q^{10} + \dots}$.

* "Fundamenta Nova," page 89. Cayley, "An Elementary Treatise of Elliptic Functions," page 287.

† Mr. le Prof. Klein avait déjà obtenu cette formule par d'autres considérations dans son beau Mémoire, "Ueber die Transformation der elliptischen Functionen etc." (*Math. Ann.*, Bd. xiv.) Voir aussi un récent travail de Mr. Bianchi (élève de Mr. Klein) dans le même Journal, Bd. xvii.

ou aussi: $l = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}} \frac{1+2q^3+2q^{13}+2q^{27}+\dots}{1+q+q^5+q^9+q^{16}+q^{21}+\dots}$

6. Le caractère *tétraèdrique*, selon la dénomination des MM. Schwarz et Klein, des équations du quatrième degré (3), (10), peut en général se déduire des considérations suivantes. En posant:

$$f(a, b) = S_{ab},$$

soient: $h = \frac{1}{2}(ff)_3$, $\theta = 2(fh)$, $g_3 = \frac{1}{2}(ff)_4$, $g_4 = \frac{1}{2}(fh)_4$,

les deux covariants et les deux invariants de la forme binaire f . On

trouve: $h = (S^3 - T^3)(a^4 - 6Sa^3b^3 - 8Tab^3 - 3S^2b^4)$,

$$\theta = -(S^3 - T^3)T_{ab}, \quad g_3 = 0, \quad g_4 = -4(S^3 - T^3)^2,$$

et par ces valeurs:

$$Y = -\frac{4h^2}{9_3f^3} = \frac{(a^4 - 6Sa^3b^3 - 8Tab^3 - 3S^2b^4)^2}{S_{ab}^3} (S^3 - T^3);$$

mais on a: $S_{ab}^3 - T_{ab}^3 = (S^3 - T^3)(a^4 - 6Sa^3b^3 - 8Tab^3 - 3S^2b^4)^2$,

donc:
$$Y = \frac{S_{ab}^3 - T_{ab}^3}{S_{ab}^3},$$

et l'équation (2) pourra s'écrire:

$$Y : Y-1 : 1 =$$

$$(X^3 - S_{ab})^3 (X^3 - 3S_{ab}) : (X^4 - 6S_{ab}X^2 - 3S_{ab}^2)^2 : -8^3 S_{ab}^2 X^2,$$

et analoguement pour l'autre.

Supplement on Binomial Biordinals.

By Sir JAMES COCKLE, M.A., F.R.S., &c.

[Read February 10th, 1881.]

33. The general form of the second class of cases mentioned in Art. 5 (Vol. xi., p. 123), is characterized by

$$m = \left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right),$$

where i is an integer or zero. Here

$$1 + 16m = 1 + (6i + \frac{1}{2})(6i + \frac{1}{2}) = (6i + \frac{3}{2})^2,$$

and the symbolical terordinal becomes

$$[D]^2 y - (D - \frac{1}{2})(D + 3i - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})(D - 3i - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}) x^2 y = 0,$$