Recurrierende Reihen und bilineare Formen.

Von E. Study in Marburg i. H.

Zweck der folgenden Untersuchung ist die Aufstellung eines gewissen Systems von irrationalen Covarianten einer bilinearen Form mit einander dualistisch gegenüberstehenden (contragredienten) Veränderlichen.

Eine bilineare Form T (z. B. des quaternären Gebietes) stellt, gleich Null gesetzt, eine lineare Transformation (des Raumes) dar. Es gibt bekanntlich im Allgemeinen nur vier Punkte und vier Ebenen, die von einer solchen Transformation $T=0$ in Ruhe gelassen werden; sie sind die Ecken und Seitenflächen eines gewissen Tetraeders. Dieses bleibt in Ruhe nicht allein bei der gegebenen Transformation, sondern bei allen Transformationen einer dreigliedrigen Gruppe von vertauschbaren linearen Transformationen. Diese Gruppe kann, ohne Einführung einer Irrationalität, in sehr einfacher Weise dargestellt werden, wenn man nicht allein die gegebene Transformation, sondern auch die identische Transformation, und die aus der gegebenen durch zwei- und dreimalige Wiederholung entstehenden Transformationen durch bilineare Formen ausdrückt. Man erhält so im Ganzen vier Transformationen,

$$T^0 = 0, \quad T = 0, \quad T^2 = 0, \quad T^3 = 0,$$

aus deren linken Seiten (bilinearen Formen) sich die allgemeine Transformation der Gruppe linear zusammensetzen lässt. Sie lautet:

$$k_0 T^0 + k_1 T + k_2 T^2 + k_3 T^3 = 0,$$

sofern $k_0 : k_1 : k_2 : k_3$ irgendwelche homogene Parameter bedeuten. In der so bestimmten Schaar von bilinearen Formen befinden sich nun vier ausgezeichnete in je zwei getrennte Factoren zerfallende Formen, die, gleich Null gesetzt, jedesmal eine Ecke und die gegenüberliegende Seitenfläche des genannten Tetraeders bedeuten. Diese vier Formen lassen sich, wie man weiss, als

irrationale Covarianten der Form T darstellen. Sie sind natürlich nur in einer Weise vorhanden; aus ihnen kann man wiederum die Form T , wie überhaupt jede bilineare Form der obigen Schar linear zusammensetzen.

Es soll nun gezeigt werden, wie sich diese bekannten Resultate auf beliebige bilineare Formen ausdehnen lassen. Im System einer bilinearen Form, sie mag so speciell gewählt werden, als man will, lässt sich immer ein System von algebraischen, im Allgemeinen irrationalen Covarianten angeben, die sich ähnlicher, wenn auch nicht ganz so einfacher Eigenschaften erfreuen, wie jene vier Formen. Sie sind immer nur in einer Art vorhanden; sie sind linear-unabhängig, und durch sie lässt sich die vorgelegte Form in bestimmter Weise linear ausdrücken. Mit ihrer Hilfe wird die gegebene Form als Summe anderer bilinearer Formen dargestellt, die einzeln einfachere Eigenschaften besitzen; eine noch weitergehende Zerlegung der gegebenen Form in demselben Sinne aber kann durch invariante Processe nicht geleistet werden: Die besprochene Zerlegung ist die einfachste invariante Zerlegung einer bilinearen Form, die es gibt.

Die erwähnten Resultate, die in dem Satze des § 7 genauer präcisiert werden, ergeben sich einzig und allein aus der Thatsache, dass unter den „Potenzen“ $T^0, T^1, T^2, \dots$ einer bilinearen Form T eine endliche Zahl n linear unabhängig sind, während alle höheren durch jene linear mit constanten Coefficienten ausdrückbar werden.

Allgemein wird die k^{te} Potenz von T sich durch die Potenzen $T^{k-1}, T^{k-2}, \dots, T^{k-n}$ linear ausdrücken lassen mit Coefficienten, die unabhängig sind von k . Die Potenzen von T genügen also einer linearen Recursionsformel mit constanten Coefficienten; sie bilden eine (im engeren Sinne) sogenannte recurrierende Reihe.

Mit der Erkenntnis, dass die in Rede stehende Darstellung einer bilinearen Form T durch irrationale Covarianten ihre Quelle ausschließlich in diesem Umstande hat, war für die vorliegende Untersuchung der Ausgangspunkt gewonnen. Zugleich aber machte sich eine genauere Untersuchung der recurrierenden Reihen selbst nothwendig. Dieser durchaus dem Gebiete der elementaren Analysis angehörige Gegenstand ist, seit Daniel Bernoulli sich mit ihm beschäftigt hat, mehrfach abgehandelt worden; so von Euler in der *Introductio in analysin infinitorum*, und von Jacobi in seiner *Inaugural-Dissertation*, auf deren Inhalt ich mich mehrfach zu stützen haben werde. Indessen ist ein Theil der Eigenschaften der recurrierenden Reihen, auf die es für den gegenwärtigen Zweck ankommt, noch gar nicht, oder nicht eingehend genug behandelt worden. So musste denn

eine ziemlich ausführliche, und sogar den größten Theil des Inhaltes dieser Arbeit einnehmende Theorie der recurrierenden Reihen vorausgeschickt werden. Sollte eine einheitliche und zusammenhängende Darstellung erzielt werden, so war hierbei eine Wiederholung von vielen mehr oder weniger bekannten Dingen natürlich nicht zu vermeiden.

Der § 1 behandelt die recurrierenden Reihen unter der Voraussetzung, dass die zugehörige „charakteristische Gleichung“ lauter getrennte Wurzeln hat. Zugleich wird der Zusammenhang mit der Lehre von der Partialbruchzerlegung einer rationalen Function und mit der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten ausführlich dargelegt.

In § 2 wird gezeigt, wie man das allgemeine Glied einer recurrierenden Reihe in mannigfacher Weise als Summe der allgemeinen Glieder anderer recurrierender Reihen darstellen kann, die einfachere Eigenschaften haben, als die ursprüngliche Reihe.

Der § 3 enthält eine Auswertung des allgemeinen Gliedes der recurrierenden Reihe in geschlossener rationaler Form für den Fall $n = 3$.

In § 4 und § 5 wird der Fall gleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung ausführlich behandelt.

Die §§ 6—9 endlich bringen die Anwendung auf die Theorie der bilinearen Formen.

Der allgemeine Satz des § 7, das Hauptergebnis dieser Arbeit, steht in einem nahen Zusammenhange mit den bekannten Untersuchungen, die von den Herren Weierstraß und Kronecker in den Monatsberichten der k. preussischen Akademie der Wissenschaften veröffentlicht worden sind. Im Vergleich zu diesen in mancher Richtung viel weiter gehenden Untersuchungen habe ich nur ein bescheidenes Ziel angestrebt: Ich habe mich auf die Behandlung solcher Eigenschaften der bilinearen Formen beschränkt, die aus der Theorie der recurrierenden Reihen entspringen.

§ 1.

Der Fall getrennter Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

Wir betrachten eine unendliche Reihe von Größen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$, von denen die n ersten $a_0 \dots a_{n-1}$ ganz willkürlich bleiben sollen, während sich die übrigen aus jenen mit Hilfe einer linearen Recursionsformel

$$(1) \quad a_k = \alpha_1 a_{k-1} + \dots + \alpha_n a_{k-n} \quad (k = n, n+1, \dots)$$

mit constanten Coefficienten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ berechnen lassen. Wir bezeichnen den Inbegriff der Größen $a_0 a_1, \dots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots a_k \dots$ in dieser Anordnung, wie gebräuchlich, als eine „recurrierende Reihe“; die Zahl n nennen wir den „Grad“ des Recursionsformel. Gleichzeitig mit der Recursionsformel (1) und den durch sie definierten recurrierenden Reihen betrachten wir die Gleichung n^{ten} Grades

$$(2) \quad \lambda^n = \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

die wir die „charakteristische Gleichung“ der Recursionsformel nennen wollen, ferner die homogene lineare Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{d^n y}{d x^n} = \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + \alpha_n y,$$

endlich die rationale Function

$$(4) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \dots - \alpha_n},$$

in der wir die Coefficienten des Zählers $b_0 \dots b_{n-1}$ einer näheren Bestimmung vorbehalten.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Formeln (1) ... (4) zunächst unter der Voraussetzung darlegen, dass die Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_n$ der charakteristischen Gleichung (2) alle von einander und von Null verschieden sind, dass also die Discriminante von (2) und der letzte Coefficient α_n nicht verschwinden.

Berechnet man aus (1) das allgemeine Glied a_k der Folge $a_0, a_1, \dots$, so erhält man eine lineare Function der ersten Glieder $a_0 \dots a_{n-1}$, mit Coefficienten, die ganze Functionen von $\alpha_1 \dots \alpha_n$ sind; und zwar sind in dem Inbegriff der Glieder $a_n, a_{n+1}, \dots$ die Parameter $a_0 \dots a_{n-1}$ bei der von uns gemachten Annahme alle wesentlich. Andererseits liefert auch die Gleichung (2) eine unendliche Folge von Größen, die unabhängig von den Werten gewisser n in ihnen linear auftretender wesentlicher Parameter der Recursionsformel (1) genügen, und deren allgemeines Glied daher mit dem allgemeinen Glied unserer recurrierenden Reihe indentificiert werden kann: Die Reihe der Ausdrücke

$$(5) \quad a_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \dots + c_n \lambda_n^k,$$

in denen $c_1 \dots c_n$ die genannten Parameter, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ wie oben die Wurzeln der Gleichung (2) bedeuten.

Der Zusammenhang zwischen den Constanten $a_0 \dots a_{n-1}$ und den Constanten $c_1 \dots c_n$ wird vollständig ausgedrückt durch die in (5) enthaltenen Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} a_0 = c_1 & + c_2 & + \dots + c_n \\ a_1 = c_1 \lambda_1 & + c_2 \lambda_2 & + \dots + c_n \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} = c_1 \lambda_1^{n-1} & + c_2 \lambda_2^{n-1} & + \dots + c_n \lambda_n^{n-1}. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den Größen $c_1 \dots c_n$ lässt sich in einer eleganten Form mit Hilfe eines Symbols s schreiben. Nimmt man nämlich an, dass $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots$ Potenzen einer und derselben Größe s sind, und die Werte haben $s^0 = 1, s^1, s^2, \dots, s^{n-1}$, so erhält man zum Beispiel für c_1 den Ausdruck:

$$(7) \quad c_1 = \frac{(s - \lambda_2 s^0)(s - \lambda_3 s^0) \dots (s - \lambda_n s^0)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_n)}.$$

Führt man hier die angezeigte Multiplication aus und ordnet man nach Potenzen von s , so erhält man eine Formel, die die gesuchte Lösung auch dann noch darstellen muss, wenn man die Potenzen $s^0, s^1, \dots, s^{n-1}$ durch die ganz beliebigen Größen $a_0 \dots a_{n-1}$ ersetzt. Denn die Form des Ausdrucks von c_i als einer linearen Function von $a_0 \dots a_{n-1}$ kann doch nur dann abgeändert werden, wenn $a_0 \dots a_{n-1}$ sich als lineare Functionen von weniger als n Größen darstellen lassen; dies ist aber bei den Potenzen $s^0, s^1, \dots, s^{n-1}$ einer veränderlichen Größe s bekanntlich nicht der Fall. Wir können daher die Formel (7) auf Grund der angegebenen Rechnungsregel als einen abgekürzten Ausdruck der Auflösung des Gleichungssystems (6) betrachten.

Ferner hat die vollständige Lösung der Differentialgleichung (3) bekanntlich die Form

$$(8) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

worin $\lambda_1 \dots \lambda_n$ wiederum die Wurzeln der Gleichung (2) sind. Identificiert man die Constanten $c_1 \dots c_n$ mit den ebenso bezeichneten Constanten der Formeln (5) ... (7), so erhält man bei Entwicklung der Function y nach aufsteigenden Potenzen von x die überall convergente Reihe

$$(9) \quad y = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \dots + \frac{a_k x^k}{k!} + \dots,$$

worin der Coefficient von $\frac{x^k}{k!}$ die durch die Recursionsformel

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\beta_1 = \alpha_1 \\ -\beta_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2 \\ -\beta_3 = \alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3 \\ \dots \\ -\beta_m = \sum \frac{(\lambda + \mu + \nu + \dots)!}{\lambda! \mu! \nu! \dots} \alpha_1^\lambda \alpha_2^\mu \alpha_3^\nu \dots, \\ \dots \end{array} \right.$$

die Summe erstreckt über alle Werte von $\lambda, \mu, \nu, \dots$ die der Bedingung genügen

$$\lambda + 2\mu + 3\nu + \dots = m.$$

In der That findet man sogleich $\beta_m = \alpha_1 \beta_{m-1} + \alpha_2 \beta_{m-2} + \dots + \alpha_m$, woraus sich ohne Weiteres der angeschriebene Wert von β_m ergibt.

Auch die Constanten $c_1 \dots c_n$ haben eine einfache Beziehung zu der rationalen Function (4): Sie sind nichts Anderes, als die Zähler der Partialbrüche, in die man den Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zerlegen kann. Es ist also

$$(14) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{c_1}{x-\lambda_1} + \frac{c_2}{x-\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{x-\lambda_n}.$$

Um dies einzusehen, braucht man nur die einzelnen Glieder der rechten Seite von (14) nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ zu entwickeln; man erhält dann die Reihe

$$\sum_1^n c_i \left\{ \frac{1}{x} + \frac{\lambda_i}{x^2} + \frac{\lambda_i^2}{x^3} + \dots \right\},$$

deren Vergleichung mit der Reihe (10) zeigt, dass die Größen c_i mit den Größen a_k durch die Gleichungen (5) verknüpft sind, dass also unsere Größen c_i mit den früher ebenfalls durch c_i bezeichneten Größen übereinstimmen. Dasselbe ergibt sich, wenn man in dem Ausdruck (7) von c_1 die symmetrischen Functionen der Wurzeln $\lambda_2 \dots \lambda_n$ durch die elementaren symmetrischen Functionen $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ sämtlicher Wurzeln und durch die Wurzel λ_1 ausdrückt. Man findet dann

$$(15) \quad c_i = \frac{f(\lambda_i)}{\varphi'(\lambda_i)},$$

was der bekannte Ausdruck für die Partialbruchzähler der rationalen Function (14) ist.

Hier kann man die Parameter $\beta_1 \dots \beta_{m-n}$ eindeutig so bestimmen, dass die Coefficienten von $a_{k-1} \dots a_{k-m+n}$ die Werte $-\gamma_1 \dots -\gamma_{m-n}$ erhalten. Dann aber werden beide Recursionsformeln m^{ten} Grades identisch. Denn wäre dies nicht der Fall, wären also die Coefficienten von $a_{k-m+n-1} \dots a_{k-m}$ in ihnen verschieden, so könnte man durch Bildung der Differenz sofort eine neue Recursionsformel für die Größen a_k herleiten, deren Grad kleiner als n wäre.

Der hiermit bewiesene elementare Satz lässt sich einfach aussprechen:

„Ist $\varphi(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung der linearen Recursionsformel niedrigsten Grades, der eine gegebene Folge von Größen $a_0, a_1, \dots$ genügt, und ist $\psi(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung irgend einer anderen Recursionsformel, der die nämlichen Größen genügen, so ist die ganze Function φ ein Theiler von ψ .“

Es wird nämlich in unserem Falle offenbar

$$\psi(\lambda) = (\lambda^{m-n} - \beta_1 \lambda^{m-n-1} \dots - \beta_{m-n}) \cdot \varphi(\lambda).$$

Es seien nun mehrere Reihen von Größen vorgelegt,

$$a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots, \dots,$$

die linearen Recursionsformeln niedrigster Ordnung mit den charakteristischen Gleichungen $\varphi_\alpha(\lambda) = 0, \varphi_\beta(\lambda) = 0, \dots$ genügen. Dann folgt aus unserem Satze, dass auch die Reihe der Größen

$$a_k = c_\alpha a_k + c_\beta b_k + \dots,$$

worin $c_\alpha, c_\beta, \dots$ unbestimmte Parameter bedeuten, einer unbegrenzten Zahl von linearen Recursionsformeln genügt, und dass man die linke Seite der charakteristischen Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ der ihrer Gesammtheit zugehörigen Recursionsformel niedrigsten Grades findet, indem man das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Functionen $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots$ bestimmt.

Betrachten wir die Größen $a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\beta-1} \dots$ nicht mehr als fest gegeben, sondern betrachten wir sie als unbeschränkt veränderliche Parameter, so werden wir die Allgemeinheit der Größen a_k offenbar nicht beeinträchtigen, wenn wir den Constanten $c_\alpha, c_\beta, \dots$ der obigen Formel allen den Wert Eins beilegen. Wir wollen nun außerdem noch voraussetzen, dass die Functionen $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots$ keinen gemeinsamen Theiler haben, dass also $\varphi = \varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta \dots$ sei. Betrachten wir

dann die Größen a_k , die der durch φ bestimmten Recursionsformel genügen, als im Übrigen willkürlich gegeben, so gilt der Satz, dass man aus den Gleichungen

$$a_k = a_k + b_k + \dots$$

die Größenfolgen $a_k, b_k, \dots$ immer und nur auf eine Art so bestimmen kann, dass sie den Recursionsformeln niedrigsten Grades mit den charakteristischen Gleichungen $\varphi_\alpha = 0, \varphi_\beta = 0, \dots$ Genüge leisten.

In der That hängt sowohl der Ausdruck a_k als auch die Summe $a_k + b_k + \dots$ von $n = \alpha + \beta + \dots$ wesentlichen Parametern linear ab — a_k von den Größen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, die Summe $a_k + b_k + \dots$ von $a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\beta-1}, \dots$. Beide Ausdrücke genügen unabhängig von den Werten der in ihnen auftretenden Parameter der linearen Recursionsformel, deren charakteristische Gleichung ist $\varphi(\lambda) = 0$. Drückt man also vermöge der zu $\varphi_\alpha = 0$ gehörigen Recursionsformel $a_\alpha \dots a_{n-1}$ aus durch $a_0 \dots a_{\alpha-1}$, und verfährt man ähnlich mit den Größen $b_\beta \dots b_{n-1}$ u. s. f., so kann man aus dem System der Gleichungen

$$a_k = a_k + b_k + \dots \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

die Unbekannten $a_0 \dots a_{\alpha-1}, b_0 \dots b_{\beta-1}, \dots$ als lineare Functionen von $a_0 \dots a_{n-1}$ bestimmen; nach Substitution der gefundenen Werte ist dann die angeschriebene Gleichung von selbst erfüllt für $k = n, n+1, \dots$

Es gehört also zu jeder Zerlegung der linken Seite der charakteristischen Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ in Factoren $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots$, von denen keine zwei einen gemeinsamen Theiler haben, eine bestimmte Darstellung des allgemeinen Gliedes der recurrierenden Reihe als Summe gewisser Größen $a_k, b_k, \dots$ die einzeln Recursionsformeln mit den charakteristischen Gleichungen $\varphi_\alpha = 0, \varphi_\beta = 0, \dots$ genügen.

Unter allen so erhaltenen Zerlegungen der Reihe a_k in einfachere Reihen $a_k, b_k, \dots$ befindet sich nun eine eindeutig ausgezeichnete: die, bei der eine weitergehende Zerlegung einer der Reihen $a_k, b_k, \dots$ in demselben Sinne nicht mehr möglich ist. Sei

$$(16) \quad \varphi(\lambda) = (\lambda - \mu)^\alpha (\lambda - \mu')^\beta \dots,$$

wobei $\alpha + \beta + \dots = n$ ist, und $\mu, \mu', \dots$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ bedeuten, so ist die genannte Zerlegung definiert durch den Ansatz

$$\varphi_\alpha = (\lambda - \mu)^\alpha, \varphi_\beta = (\lambda - \mu')^\beta, \dots$$

Diese Zerlegung nun ist es, die wir in § 1 für den einfachsten Fall, $\alpha = \beta = \dots = 1$, ausgeführt haben; es erhalten in diesem Falle $a_k, b_k, \dots$ die Form $a_k = c_1 \lambda_1^k, b_k = c_2 \lambda_2^k, \dots$, wie bereits Daniel Bernoulli gezeigt hat. Im Allgemeinen werden die Ausdrücke der Größen $a_k, b_k, \dots$ weniger einfach. Wir werden ihre entwickelte Darstellung im nächsten Paragraphen geben, wollen aber hier schon ihre allgemeine Form bestimmen.

Nehmen wir an, es vereinigen sich von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ $\lambda_1 \dots \lambda_\alpha$ in einem und demselben Werte μ , den wir als von Null verschieden annehmen wollen, so kommen von den particulären, der Recursionsformel (1) genügenden recurrierenden Reihen $(\lambda_1^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^k \dots), \dots (\lambda_\alpha^0, \lambda_\alpha^1, \dots, \lambda_\alpha^k \dots)$ im Ganzen $\alpha - 1$ in Wegfall. An ihre Stelle treten aber ebensoviele andere, die man sofort angeben kann. Es ist nämlich μ eine α -fache Wurzel einer jeden Gleichung:

$$\lambda^k = \alpha_1 \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_n \lambda^{k-n} \quad (k \geq n),$$

genügt also den aus ihr durch Differentiation hervorgehenden weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} k\lambda^{k-1} &= \alpha_1 \cdot k - 1 \cdot \lambda^{k-2} + \dots + \alpha_n \cdot k - n \cdot \lambda^{k-n-1} \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} &= \alpha_1 \cdot \binom{k-1}{2}\lambda^{k-3} + \dots + \alpha_n \binom{k-n}{2} \cdot \lambda^{k-n-2} \\ &\vdots \\ \binom{k}{\alpha-1}\lambda^{k-\alpha+1} &= \alpha_1 \cdot \binom{k-1}{\alpha-1}\lambda^{k-\alpha} + \dots + \alpha_n \binom{k-n}{\alpha-1} \cdot \lambda^{k-n-\alpha+1}. \end{aligned}$$

Daraus geht hervor, dass man an Stelle der particulären recurrierenden Reihen $(\lambda_1^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^k \dots) \dots (\lambda_\alpha^0, \lambda_\alpha^1, \dots, \lambda_\alpha^k \dots)$ jetzt diese setzen kann:

$$\mu^k, \binom{k}{1} \mu^{k-1}, \binom{k}{2} \mu^{k-2}, \dots, \binom{k}{\alpha-1} \mu^{k-\alpha+1} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Aus ihnen wird sich dann das allgemeine Glied a_k der recurrierenden Reihe $a_0, a_1, \dots$ linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen.

Man erkennt unschwer, in welchem Sinne die eben gefundenen speciellen recurrierenden Reihen einfacher sind, als die Reihe der Größen a_k : Es genügt die Folge (μ^k) der Recursionsformel, deren charakteristische Gleichung ist $(\lambda - \mu) = 0$; $\binom{k}{1} \mu^{k-1}$ genügt der Recursionsformel, deren charakteristische Gleichung ist $(\lambda - \mu)^2 = 0$, und verschwindet außerdem für $k = 0$, u. s. f.:

$\binom{k}{\alpha-1} \mu^{k-\alpha+1}$ endlich genügt als niedrigster Recursionsformel der zu der Gleichung $(\lambda - \mu)^\alpha = 0$ gehörigen, hat aber den Wert Null für $k = 0, 1, \dots, \alpha - 2$. Es lässt sich also das allgemeine Glied der recurrierenden Reihe a_k als Summe der allgemeinen Glieder von im ganzen α einfacheren recurrierenden Reihen darstellen, die die soeben genannten Eigenschaften haben. Auch diese Zerlegung ist immer und nur in einer Art ausführbar; sie kann offenbar nicht durch eine noch einfachere ersetzt werden.

Wie also auch die charakteristische Gleichung einer recurrierenden Reihe n Grades beschaffen sein möge — immer kann man das allgemeine Glied der Reihe auf eine einzige Weise als Summe von n Ausdrücken darstellen, die einzeln linearen Recursionsformeln von bestimmten einfachen Eigenschaften genügen. Diese neuen Reihen können ihrerseits nicht mehr in einfachere Reihen zerlegt werden.

§ 3.

Das allgemeine Glied der recurrierenden Reihe im Fall $n = 3$.

Die Auswertung des allgemeinen Gliedes der recurrierenden Reihe in geschlossener Form mit Hilfe der einfacheren Reihen $a_k, b_k, \dots$ ist ihrer Natur nach in der Mehrzahl der Fälle nicht durch rationale Operationen zu bewerkstelligen; zudem erhält man auf diesem Wege keinen alle Fälle gleichmäßig umfassenden Ausdruck für a_k . Man wird sich daher die Frage vorlegen, wie denn der rationale Ausdruck von a_k durch $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ und $\alpha_1 \dots \alpha_n$ lautet. Es wird dieser Ausdruck, wie bemerkt, die allgemeine Form haben:

$$(17) \quad a_k = A_k a_{n-1} + B_k a_{n-2} + \dots + N_k a_0,$$

worin die Coefficienten $A_k, B_k, \dots, N_k$ augenscheinlich ebenfalls der Recursionsformel (1) genügen müssen. Das Bildungsgesetz der Functionen $A_k \dots N_k$ von $\alpha_1 \dots \alpha_n$ scheint nicht einfach zu sein. Man findet nicht ganz ohne Mühe im Falle $n = 3$, wenn man die Recursionsformel (1) so schreibt:

$$(18) \quad a_k = \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2} + \gamma a_{k-3},$$

durch vollständige Induction die Werte

$$\begin{aligned}
(19) \quad A_k = & \binom{k-2}{0} \alpha^{k-2} \\
& + \binom{k-3}{1} \alpha^{k-4} \beta + \binom{k-4}{1} \alpha^{k-5} \gamma \\
& + \binom{k-4}{2} \alpha^{k-6} \beta^2 + 2 \binom{k-5}{2} \alpha^{k-7} \beta \gamma + \binom{k-6}{2} \alpha^{k-8} \gamma^2 \\
& + \binom{k-5}{3} \alpha^{k-8} \beta^3 + 3 \binom{k-6}{3} \alpha^{k-9} \beta^2 \gamma + 3 \binom{k-7}{3} \alpha^{k-10} \beta \gamma^2 + \binom{k-8}{3} \alpha^{k-11} \gamma^3 \\
& \dots \dots \dots \\
B_k = & \binom{k-3}{0} \alpha^{k-3} \beta + \binom{k-4}{0} \alpha^{k-4} \gamma \\
& + \binom{k-4}{1} \alpha^{k-5} \beta^2 + 2 \binom{k-5}{1} \alpha^{k-6} \beta \gamma + \binom{k-6}{1} \alpha^{k-7} \gamma^2 \\
& + \binom{k-5}{2} \alpha^{k-7} \beta^3 + 3 \binom{k-6}{2} \alpha^{k-8} \beta^2 \gamma + 3 \binom{k-7}{2} \alpha^{k-9} \beta \gamma^2 + \binom{k-8}{2} \alpha^{k-10} \gamma^3 \\
& \dots \dots \dots \\
C_k = & \binom{k-3}{0} \alpha^{k-3} \gamma \\
& + \binom{k-4}{1} \alpha^{k-5} \beta \gamma + \binom{k-5}{1} \alpha^{k-6} \gamma^2 \\
& + \binom{k-5}{2} \alpha^{k-7} \beta^2 \gamma + 2 \binom{k-6}{2} \alpha^{k-8} \beta \gamma^2 + \binom{k-7}{2} \alpha^{k-9} \gamma^3 \\
& + \binom{k-6}{3} \alpha^{k-9} \beta^3 \gamma + 3 \binom{k-7}{3} \alpha^{k-10} \beta^2 \gamma^2 + 3 \binom{k-8}{3} \alpha^{k-11} \beta \gamma^3 + \binom{k-9}{3} \alpha^{k-12} \gamma^4 \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Der letzte dieser Ausdrücke ist, wie es sein muss, durch γ theilbar.

Verschwindet insbesondere α , so erhält man für $k = 2\lambda$ und $k = 2\lambda + 1$ die folgenden einfacheren Werte:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} A_{2\lambda} &= \binom{\lambda-1}{0} \beta^{\lambda-1} + \binom{\lambda-2}{2} \beta^{\lambda-4} \gamma^2 + \binom{\lambda-3}{4} \beta^{\lambda-7} \gamma^4 + \dots \\ B_{2\lambda} &= \gamma \left\{ \binom{\lambda-1}{1} \beta^{\lambda-2} + \binom{\lambda-2}{3} \beta^{\lambda-5} \gamma^2 + \binom{\lambda-3}{5} \beta^{\lambda-8} \gamma^4 + \dots \right\} \\ C_{2\lambda} &= \gamma^2 \left\{ \binom{\lambda-2}{1} \beta^{\lambda-3} + \binom{\lambda-3}{3} \beta^{\lambda-6} \gamma^2 + \binom{\lambda-4}{5} \beta^{\lambda-9} \gamma^4 + \dots \right\} \\ A_{2\lambda+1} &= \gamma \left\{ \binom{\lambda-1}{1} \beta^{\lambda-2} + \binom{\lambda-2}{3} \beta^{\lambda-5} \gamma^2 + \binom{\lambda-3}{5} \beta^{\lambda-8} \gamma^4 + \dots \right\} \\ B_{2\lambda+1} &= \binom{\lambda}{0} \beta^{\lambda} + \binom{\lambda-1}{2} \beta^{\lambda-3} \gamma^2 + \binom{\lambda-2}{4} \beta^{\lambda-6} \gamma^4 + \dots \\ C_{2\lambda+1} &= \gamma \left\{ \binom{\lambda-1}{0} \beta^{\lambda-1} + \binom{\lambda-2}{2} \beta^{\lambda-4} \gamma^2 + \binom{\lambda-3}{4} \beta^{\lambda-7} \gamma^4 + \dots \right\} \end{aligned} \right.$$

§ 4.

Ausführung der Zerlegung einer recurrierenden Reihe im Falle mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

Wir wollen nunmehr zusehen, was aus den Formeln des § 1 wird, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2) gruppenweise zusammenfallen. Wir werden uns hierbei, ohne die Allgemeinheit unserer Untersuchung zu beeinträchtigen, auf den Fall beschränken dürfen, in dem α Wurzeln der Gleichung (2), die Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_\alpha$, sich in einem Werte vereinigen, den wir durch μ bezeichnen wollen; der allgemeine Fall, in dem die charakteristische Gleichung mehrere von einander verschiedene vielfache Wurzeln besitzt, wird ganz in derselben Weise zu behandeln sein. Wir wollen ferner annehmen, dass die α -fache Wurzel μ von Null verschieden ist, da der Fall $\mu = 0$ leicht unmittelbar erledigt werden kann. Endlich wollen wir der Einfachheit halber in allen Formeln immer nur die Glieder wirklich einschreiben, die den Formeln des § 1 gegenüber eine wesentliche Abweichung zeigen, das Vorhandensein der übrigen aber wollen wir nur durch Sternchen * * * andeuten.

Wir können dann nach § 2 das allgemeine Glied a_k unserer recurrierenden Reihe falls $\varphi(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung der zugehörigen Recursionsformel niedrigsten Grades ist, auf eine und nur eine Weise in die folgende Form setzen:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} a_k = a_k + * * * \\ = \left\{ h_0 \mu^k + h_1 \binom{k}{1} \mu^{k-1} + \dots + h_{\alpha-1} \binom{k}{\alpha-1} \mu^{k-\alpha+1} \right\} + * * * \end{array} \right.$$

Zur Bestimmung der hier auftretenden Constanten $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ * * * haben wir eine genügende Zahl von linearen Gleichungen:

$$(22) \left\{ \begin{array}{llllll} a_0 = h_0 & . & . & \dots & . & + * * * \\ a_1 = h_0 \mu + h_1 & . & \dots & . & . & + * * * \\ a_2 = h_0 \mu^2 + 2 h_1 \mu + h_2 & \dots & . & . & . & + * * * \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} = h_0 \mu^{n-1} + \binom{n-1}{1} h_1 \mu^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{\alpha-1} h_{\alpha-1} \mu^{n-\alpha} + * * * \end{array} \right.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems unmittelbar in Angriff zu nehmen, erscheint nicht ganz leicht, wenn man sich nicht mit der im Grunde Nichts sagenden Determinantendarstellung begnügen will, und eine für alle Fälle brauchbare Lösung verlangt. Glücklicherweise aber lassen sich die Werte der Constanten $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ durch mehrere indirecte Methoden bestimmen. Zunächst dadurch, dass man den Fall $\lambda_1 = \dots = \lambda_\alpha = \mu$

durch einen Grenzübergang aus dem allgemeinen Falle herleitet. Die hierzu erforderlichen analytischen Hilfsmittel hat Jacobi in seiner Inaugural-Dissertation gegeben. Setzt man

$$(24) \quad \Pi_k(\mu) = \frac{\mu^k}{\psi(\mu)} = \frac{\mu^k}{(\mu - \lambda_{\alpha+1}) \dots (\mu - \lambda_n)},$$

so findet man nach dem daselbst in § 7 entwickelten Satze

$$(25) \quad a_k = \lim \{ c_1 \lambda_1^k + \dots + c_\alpha \lambda_\alpha^k \} = \frac{\varphi(s)}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{d\mu^{\alpha-1}} \left[\frac{\Pi_k(\mu)}{s - \mu s^0} \right],$$

worin zur Abkürzung $\varphi(s)$ geschrieben ist für $s^\alpha - \alpha_1 s^{\alpha-1} - \dots - \alpha_n s^0$.

Um den wahren Wert dieses symbolischen Ausdrucks zu bestimmen, hat man zunächst im Nenner alle Factoren $(s - \mu s^0)$ zu beseitigen, hierauf nach Potenzen von s zu ordnen, und endlich, wie im § 1 angegeben, $s^0, s^1, \dots, s^{\alpha-1}$ durch $a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1}$ zu ersetzen.

Führt man die erstere Rechnung aus, so ergibt sich

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} a_k &= (s - \lambda_{\alpha+1} s^0) \dots (s - \lambda_n s^0) \cdot \{ \Pi_k(\mu) + (s - \mu s^0) \Pi'_k(\mu) \\ &\quad + \frac{(s - \mu s^0)^2}{2!} \Pi''_k(\mu) + \dots + \frac{(s - \mu s^0)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \Pi_k^{(\alpha-1)}(\mu) \}. \end{aligned} \right.$$

Die Formel (26) leistet bereits die in § 2 besprochene Zerlegung des allgemeinen Gliedes a_k der recurrierenden Reihe in der Form

$$a_k = a_k + b_k + \dots$$

Um auch die Werte der Constanten $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ zu finden, müssen wir den gefundenen Ausdruck noch umgestalten. Man hat

$$\Pi_k^{(i)}(\mu) = \frac{d^i \psi^{-1}}{d\mu^i} \cdot \mu^k + \binom{i}{1} \frac{d^{i-1} \psi^{-1}}{d\mu^{i-1}} \cdot k \mu^{k-1} + \dots + \psi^{-1} \cdot k \cdot k-1 \dots k-i+1 \cdot \mu^{k-i}$$

Die Substitution dieser Werte in (26) ergibt

$$a_k = h_0 \mu^k + h_1 \binom{k}{1} \mu^{k-1} + \dots + h_{\alpha-1} \binom{k}{\alpha-1} \mu^{k-\alpha+1},$$

wobei h_i den Wert erhält:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} h_i &= \frac{\varphi(s)}{(\alpha-i-1)!} \cdot \frac{d^{\alpha-i-1}}{d\mu^{\alpha-i-1}} \left(\frac{\psi^{-1}}{s - \mu s^0} \right) \\ &= (s - \mu s^0)^i (s - \lambda_{\alpha+1} s^0) \dots (s - \lambda_n s^0) \cdot \left\{ \psi^{-1} + \frac{d\psi^{-1}}{d\mu} (s - \mu s^0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \psi^{-1}}{d\mu^2} (s - \mu s^0)^2 + \dots + \frac{1}{(\alpha-i-1)!} \frac{d^{\alpha-i-1} \psi^{-1}}{d\mu^{\alpha-i-1}} (s - \mu s^0)^{\alpha-i-1} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dieses sind also die (symbolischen) Ausdrücke der Constanten h_i , der Lösungen des Gleichungssystems (22), durch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung und durch die willkürlich anzunehmenden ersten Glieder $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ der recurrierenden Reihe.

Wir haben die Werte h_i hier so berechnet, dass wir zuerst die Werte der Größen a_k durch einen Grenzübergang bestimmten, und dann erst durch Zerlegung von a_k die Werte der Constanten h_i aufsuchten. Man kann aber auch leicht einen Grenzübergang angeben, durch den die Werte der Größen h_i unmittelbar aus den Größen $c_1 \dots c_\alpha$ hervorgehen.

Auf Grund der Formeln (21) und (22) hängen die Größen $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ mit den Größen $a_0 \dots a_{\alpha-1}$ durch die Relationen zusammen:

$$\begin{aligned} a_0 &= h_0 \\ a_1 &= h_0 \mu + h_1 \\ a_2 &= h_0 \mu^2 + 2 h_1 \mu + h_2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{\alpha-1} &= h_0 \mu^{\alpha-1} + \binom{\alpha-1}{1} h_1 \mu^{\alpha-2} + \dots + h_{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen erhält man durch eine geeignete Specialisierung der Formeln (27), indem man nämlich $\psi = 1$ nimmt, also $n = \alpha$ setzt, und an Stelle des Symbolen s ein Symbol σ einführt, dessen Potenzen $\sigma^0 \dots \sigma^{\alpha-1}$ durch die wirklichen Werte $a_0 \dots a_{\alpha-1}$ ersetzt werden müssen. So findet sich

$$h_i = (\sigma - \mu \sigma^0)^i = a_i - \binom{i}{1} a_{i-1} \mu + \dots + (-1)^i a_0 \mu^i$$

für die Werte $i = 0, 1, \dots \alpha - 1$; während sich für $i \geq \alpha$ ergibt:

$$0 = (\sigma - \mu \sigma^0)^i = a_i - \binom{i}{1} a_{i-1} \mu + \dots + (-1)^i a_0 \mu^i.$$

Setzt man hier für die Größen a_k die Ausdrücke

$\lim \{ c_1 \lambda_1^k + \dots + c_\alpha \lambda_\alpha^k \}$ (Formel (25)), so ergeben sich die beiden Formeln:

$$(28) \quad \begin{cases} \lim \{ c_1 (\lambda_1 - \mu)^i + \dots + c_\alpha (\lambda_\alpha - \mu)^i \} = h_i (i = 0, 1, \dots \alpha - 1) \\ \lim \{ c_1 (\lambda_1 - \mu)^i + \dots + c_\alpha (\lambda_\alpha - \mu)^i \} = 0 (i = \alpha, \alpha + 1, \dots), \end{cases}$$

deren erste den fraglichen Grenzübergang darstellt.

Uebrigens lässt sich dieses Ergebnis auch leicht durch unmittelbare Ausrechnung bestätigen: Als Grenzwert der linken

Seite von (28) ergibt sich nach dem bereits benutzten Satze Jacobi's der Ausdruck

$$\left\{ \frac{\varphi(s)}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{d\mu^{\alpha-1}} \left(\frac{(\mu-\nu)^i}{(s-\mu s^0)\psi} \right) \right\}_{r=\mu}.$$

Führt man hier die Differentiation aus, so erhält man, wenn $i \geq \alpha$ ist, augenscheinlich Null, für $i = 0, 1, \dots, \alpha-1$ aber den auf der rechten Seite von (27) angegebenen Wert.

§ 5.

Fortsetzung. Zweite Ableitung der Ergebnisse des § 4.

Die Beziehung der Constanten $h_0, h_1, \dots, h_{\alpha-1}$ zu der Differentialgleichung (3) ist eben so einfach, wie im allgemeinen Falle die der Constanten $c_1 \dots c_\alpha$: Man braucht nur die vollständige Lösung von (3) in der Form

$$(29) \quad y = \left\{ h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + h_{\alpha-1} \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right\} e^{\mu x} + * * *$$

zu schreiben, um die Größen h_i ohne Weiteres als die Integrationsconstanten auffassen zu können, die sich aus den Bedingungengleichungen

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} y \right]_{x=0} = a_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

ergeben. In der That, ordnet man den Ausdruck (29) nach Potenzen von x , so findet sich:

$$y = \sum_0^\infty \left\{ h_0 \mu^k + h_1 \binom{k}{1} \mu^{k-1} + \dots + h_{\alpha-1} \binom{k}{\alpha-1} \mu^{k-\alpha+1} + * * * \right\} \frac{x^k}{k!}.$$

Diese Gleichung aber führt bei Berücksichtigung von (21) auf die Gleichung (9) zurück.

Ferner sind die Constanten $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ auch jetzt wieder Partialbruchzähler der rationalen Function (4). In der That, setzen wir

$$(30) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\{ \frac{h_0}{x-\mu} + \frac{h_1}{(x-\mu)^2} + \dots + \frac{h_{\alpha-1}}{(x-\mu)^\alpha} \right\} + * * *,$$

und entwickeln wir die einzelnen Glieder der rechten Seite nach Potenzen von $\frac{1}{x}$, so wird nach § 1 der Coefficient von $\frac{1}{x^{k+1}}$ gleich a_k , wenn man die Coefficienten des Zählers $f(x)$ aus den

Gleichungen (11) bestimmt hat. Es wird also

$$a_k = \left\{ h_0 \mu^k + h_1 \binom{k}{k-1} \mu^{k-1} + \dots + h_{\alpha-1} \binom{k}{k-\alpha+1} \mu^{k-\alpha+1} \right\} + * * *.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (21) zeigt aber, dass die Constanten $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ der Formel (30) thatsächlich identisch sind mit den bisher ebenso bezeichneten Größen.

Aus der letzten Bemerkung ergibt sich uns ein neuer Weg zur Auflösung des Gleichungssystems (21); wir erhalten nunmehr die Größen h_i dargestellt durch die bekannten Ausdrücke für die Partialbruchzähler der rationalen Function (4). Es ergibt sich, wenn man

$$H(\mu) = \frac{f(\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{b_0 \mu^{n-1} + b_1 \mu^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{(\mu - \lambda_{\alpha+1}) \dots (\mu - \lambda_n)}$$

setzt, und die Coefficienten $b_0 \dots b_{n-1}$ nach den Formeln (11) des § 1 berechnet, der einfache Ausdruck:

$$(31) \quad h_i = \frac{1}{(\alpha-i-1)!} \frac{\delta^{\alpha-i-1} H(\mu)}{\delta \mu^{\alpha-i-1}}.$$

Hier ist durch den Gebrauch des Zeichens δ statt des gewöhnlichen Zeichens der Differentiation angedeutet, dass die thatsächlich von μ abhängigen Coefficienten $b_0 \dots b_{n-1}$ bei der Bildung des Differentialquotienten wie Constante behandelt werden müssen.

Es versteht sich, dass der Ausdruck (31) mit dem formal verschiedenen Ausdruck (27) identisch ist. Wir wollen dies aber auch noch durch Rechnung zeigen, indem wir beide Ausdrücke wirklich in einander überführen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\delta^m f(\mu)}{\delta \mu^m} = f^{(m)},$$

so wird nach (31):

$$h_i = \frac{1}{(\alpha-i-1)!} \left\{ f^{(\alpha-i-1)} \psi^{-1} + \binom{\alpha-i-1}{1} f^{(\alpha-i-2)} \frac{d\psi^{-1}}{d\mu} + \dots + f \cdot \frac{d^{\alpha-i-1} \psi^{-1}}{d\mu^{\alpha-i-1}} \right\}$$

Der Coefficient von $\frac{d^j \psi^{-1}}{d\mu^j}$ in dieser Formel hat den Wert:

$$\frac{1}{(\alpha-i-1)!} \binom{\alpha-i-1}{j} f^{(\alpha-i-j-1)}.$$

Andrerseits aber ist der entsprechende Coefficient in Formel (27):

$$\frac{1}{j!} (s - \mu s^0)^{i+j} (s - \lambda_{\alpha+1} s^0) \dots (s - \lambda_n s^0),$$

Beide Ausdrücke sind einander gleich; dass heisst, es besteht die auch an sich bemerkenswerte Identität:

$$(32) \quad \frac{1}{m!} f^{(m)}(\mu) = (s - \mu s^0)^{\alpha-m-1} (s - \lambda_{\alpha+1} s^0) \dots (s - \lambda_n s^0),$$

worin wir der Bequemlichkeit halber $i+j$ durch $\alpha-m-1$ ersetzt haben. Die Formel muss richtig sein für die Werte $m=0, 1, \dots, \alpha-1$.

Führen wir, um dies einzusehen, auf der linken Seite von (32) die angezeigte Differentiation aus, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{m} b_0 \mu^{n-m-1} + \binom{n-2}{m} b_1 \mu^{n-m-2} + \dots + b_{n-m-1} \\ &= (s - \mu s^0)^{\alpha-m-1} (s - \lambda_{\alpha+1} s^0) \dots (s - \lambda_n s^0). \end{aligned}$$

Diese muss sich in eine Identität verwandeln, wenn man für $b_0 \dots b_{n-m-1}$ ihre Werte (11) einführt, gleichzeitig die Coefficienten α durch die Wurzeln $\mu, \lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_n$ ausdrückt, und endlich auf der rechten Seite die Potenzen des Symbols s durch die wirklichen Werte α_k ersetzt. Nimmt man nun links nach Substitution der Werte (11) der Größen b_i den Coefficienten von $\alpha_{n-m-p-1}$ ($p=0, 1, \dots, n-m-1=n-\alpha$), so erhält man den Ausdruck

$$\binom{m+p}{p} \mu^p - \alpha_1 \binom{m+p-1}{p-1} \mu^{p-1} - \dots - \alpha_{p-1} \binom{m+1}{1} \mu - \alpha_p.$$

Setzt man hier für α_i seinen Wert

$$\alpha_i = (-1)^{i-1} \cdot \left\{ \binom{\alpha}{i} \mu^i + \binom{\alpha}{i-1} \mu^{i-1} \Gamma + \dots + \Gamma^i \right\},$$

worin allgemein Γ die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung von je r der Elemente $\lambda_{\alpha+1} \dots \lambda_n$ bedeutet, und nimmt man den Coefficienten von μ^k ($k < p+1$), so findet sich

$$(-1)^p \left\{ \binom{\alpha}{k} - \binom{m+1}{1} \binom{\alpha}{k-1} + \binom{m+2}{2} \binom{\alpha}{k-2} - \dots + (-1)^k \binom{m+k}{1} \right\} \Gamma^k.$$

Andrerseits ist der Coefficient von μ^k auf der rechten Seite unserer Gleichung

$$(-1)^k \binom{\alpha-m-1}{k} s^{\alpha-m-k-1} (s - \lambda_{\alpha+1} s^0) \dots (s - \lambda_n s^0),$$

und hierin wiederum der Coefficient von $a_{n-m-p-1}$:

$$(-1)^p \binom{a-m-1}{k} T^{p-k}.$$

Hiermit ist die Verification der Formel (32) geleistet; denn vergleicht man in den beiden letzten Ausdrücken die Coefficienten von $(-1)^p T^{p-k}$, und schreibt man etwa noch β für $-m-1$, so erhält man eine bekannte Identität zwischen Binomialcoefficienten.

Wir haben also jetzt die Identität der Lösungen (27) und (31) des Gleichungssystems (22) auch durch directe Rechnung dargethan.

Jacobi hat, nachdem bereits Lagrange einen ähnlichen, aber weniger einfachen Ausdruck aufgestellt hatte, mit dem allgemeinen Gliede der recurrierenden Reihe $a_0, a_1, \dots$ eine Umgestaltung vorgenommen, die dadurch merkwürdig ist, dass der Ausdruck von a_k formal unabhängig wird von der Vielfachheit der Wurzel μ der charakteristischen Gleichung (2). Die Jacobi'sche Formel soll der Vollständigkeit halber hier wieder gegeben werden.

Statt der Formel (30) kann man bei Zusammenfassung aller Partialbrüche, die von der Wurzel μ herrühren, nach Jacobi (a. a. O. § 7) kürzer diese schreiben:

$$(33) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{d\mu^{\alpha-1}} \left(\frac{\Pi(\mu)}{x-\mu} \right) + * * *.$$

Für den Ausdruck auf der rechten Seite aber ergibt sich (a. a. O. § 8), wenn man für $\Pi(\mu)$ seinen Wert einführt, und allgemein durch $[F(z)]_z^p$ den Entwicklungscoefficienten von z^p in der Entwicklung einer Function $F(z)$ nach aufsteigenden Potenzen von z bezeichnet:

$$\left[\frac{f(\mu+z)}{\varphi(\mu+z)(x-\mu-z)} \right]_{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^{k+1}} \left[\frac{(\mu+z)^k f(\mu+z)}{\varphi(\mu+z)} \right]_{z^{-1}},$$

es wird also

$$(34) \quad a_k = \left[\frac{(\mu+z)^k f(\mu+z)}{\varphi(\mu+z)} \right]_{z^{-1}},$$

ein Ausdruck, aus dem die Zahl α völlig verschwunden ist.

In demselben Sinne und auf demselben Wege lässt sich aber auch der von uns an erster Stelle gegebene Ausdruck (25)

umbilden. Schreibt man ihn in der Form

$$a_k = \left[\frac{(\mu + z)^k \varphi(s)}{\psi(\mu + z)(s - \mu s^0 - z s^0)} \right]_{z^{\alpha-1}},$$

und setzt man für $\psi(\mu + z)$ seinen Wert $\frac{\varphi(\mu + z)}{z^\alpha}$ ein, so erhält er die Gestalt

$$(35) \quad a_k = \left[\frac{(\mu + z)^k \varphi(s)}{\varphi(\mu + z)(s - \mu s^0 - z s^0)} \right]_{z^{-1}}.$$

Sucht man die Gleichheit der Ausdrücke (34) und (35) unmittelbar einzusehen, so kommt man wieder auf die Identitäten (32) zurück, deren Bestehen wir soeben nachgewiesen haben.

Ferner lassen sich auch die gefundenen Ausdrücke für die Größen h_i in einer entsprechenden Weise schreiben; man erhält aus den Formeln (31) und (27) sofort die folgenden Werte:

$$(36) \quad h_i = \left[\frac{f(\mu + z)}{\varphi(\mu + z)} \right]_{z^{-(1+i)}}$$

$$(37) \quad h_i = \left[\frac{\varphi(s)}{(s - \mu s^0 - z s^0) \varphi(\mu + z)} \right]_{z^{-(1+i)}}.$$

Diese Ausdrücke sind formal von α unabhängig. Sie werden von selbst Null, wenn i den Wert $\alpha - 1$ übersteigt.

Um die Übersicht zu erleichtern, wollen wir die hauptsächlichsten Formeln noch einmal vergleichend anführen.

Wir haben die Größen h_i die Auflösungen des Gleichungssystems (22), aus den Größen $c_1 \dots c_\alpha$ durch einen Grenzübergang hergeleitet in den Formeln (28); ihre Ausdrücke im Grenzfall sind gegeben durch die Formeln (37), (27) einerseits und durch die Formeln (36), (31) andererseits. Die Größen a_k , von denen in § 2 die Rede war, sind durch einen entsprechenden Grenzübergang dargestellt in der Formel (25); ihre Werte im Grenzfall durch die Ausdrücke (35), (26), sowie durch den Ausdruck (34). Die Übereinstimmung der beiden gefundenen Lösungen des Gleichungssystems (22) wurde nachgewiesen auf Grund des Bestehens der Identitäten (32).

§ 6.

Invariante Zerlegung einer bilinearen Form.

Es sei nun vorgelegt eine bilineare Form

$$T = (AX)(UP) = \sum a_{ik} X_i U_k$$

eines Gebietes N^{ter} Stufe ($i, k = 1 \dots N$), mit einander dua-

Ihre Coefficienten sind, in dem vom Verfasser festgestellten Sinne des Wortes *), rationale Invarianten der Form T ; ihre Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sind irrationale Invarianten von T . Mit ihrer Hilfe können wir die Formel (39) auch so schreiben:

$$(41) \quad (T - \lambda_1 T^0) (T - \lambda_2 T^0) \dots (T - \lambda_n T^0) = 0.$$

Nehmen wir jetzt zunächst an, dass die Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_n$ alle von einander verschieden sind, und identificieren wir die Reihe der Potenzen T^k der Form T mit der Reihe der in § 1 betrachteten Größen a_k , so werden wir alle in § 1 aufgestellten Formeln ohne Weiteres zur Anwendung bringen können: Wir haben nur überall T an Stelle von s zu schreiben.

Die Größen $c_1 \dots c_n$ werden jetzt natürlich bilineare Formen, wie $T^0 \dots T^{n-1}$ es sind; und zwar werden sie, wie man sofort sieht, algebraische Covarianten der Form T , die dem durch die Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_n$ bestimmten Rationalitätsbereich angehören. Schreiben wir für $c_1 \dots c_n$ nunmehr $T_1 \dots T_n$, so haben wir, unter Beibehaltung der übrigen in § 1 eingeführten Bezeichnungen, z. B. für T_1 den Ausdruck

$$(42) \quad T_1 = \frac{f(\lambda_1)}{\varphi'(\lambda_1)} = \frac{(T - \lambda_2 T^0) (T - \lambda_3 T^0) \dots (T - \lambda_n T^0)}{(\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_n)}.$$

Die Covarianten $T_1 \dots T_n$ von T besitzen nun eine bemerkenswerte Eigenschaft, durch die sie sich auch umgekehrt wieder definieren lassen. Sie genügen nämlich den (symbolischen) Gleichungen

$$(43) \quad T_i^2 = T_i, \quad T_i T_k = 0 \quad (i \neq k, \quad i, k = 1 \dots n).$$

Von dem Bestehen der Gleichungen $T_i T_k = 0$ überzeugt man sich unmittelbar, da das Product $T_i T_k$ die linke Seite der Identität (41) als Factor hat. Die Gleichung $T_i^2 = T_i$ aber lässt sich auch so schreiben: $T_i (T_1 - T^0) = 0$, oder, wenn wir für den Augenblick $(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) = \psi_1(x)$ setzen: $\psi_1(T) \cdot \{\psi_1(T) - \psi_1(\lambda_1)\} = 0$. Der zweite Factor in diesem Product ist durch $T - \lambda_1 T^0$ theilbar; man kommt also wieder auf die Identität (41) zurück. Die Formen $T_1 \dots T_n$ sind aber durch die Relationen (42) und durch die weiteren Bedingungen

$$(44) \quad \begin{cases} T^0 = T_1 + T_2 + \dots + T_n \\ T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_n T_n \end{cases}$$

vollständig bestimmt. Denn erhebt man die linke und die rechte

*) Methoden zur Theorie der ternären Formen. Leipzig. 1889. S. 20.

Seite der zweiten von diesen Gleichungen auf die k^{te} Potenz, so erhält man zufolge der Relationen (43):

$$(45) \quad T^k = \lambda_1^k T_1 + \lambda_2^k T_2 + \dots + \lambda_n^k T_n.$$

Setzt man hier der Reihe nach $k = 2, 3, \dots, n-1$, und fügt man die so erhaltenen Gleichungen den Gleichungen (44) hinzu, so entsteht ein System von linearen Gleichungen zur Bestimmung von $T_1 \dots T_n$, das sich von dem System (6) § 1 nur durch die Bezeichnung unterscheidet, und dessen Auflösung nach T_1 daher durch die Formel (42) dargestellt wird. Wir haben also den Satz:

Sind die Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_n$ der reducierten charakteristischen Gleichung alle von einander verschieden, so gehört zu der Form T ein System von irrationalen Covarianten $T_1 \dots T_n$, bilinearen Formen, die durch die Gleichungen (43) und (44) vollständig definiert sind. Der Ausdruck von T_1 z. B. ist gegeben durch die Formel (42).

Im nächsten Paragraphen wollen wir diesen Satz auf den Fall ausdehnen, wo die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gruppenweise zusammenfallen.

§ 7.

Fortsetzung. Der allgemeine Fall einer bilinearen Form.

Nehmen wir nunmehr an, dass α der Wurzeln der reducierten charakteristischen Gleichung, die Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_\alpha$, sich in demselben Werte μ vereinigen. Dann werden an Stelle der Formen $T_1 \dots T_\alpha$, die sämtlich unendlich werden, gewisse Formen $\Theta_0 \dots \Theta_{\alpha-1}$ treten, die wir aus den Größen $h_0 \dots h_{\alpha-1}$ des § 4 dadurch erhalten, dass wir an Stelle des Symbols s die bilineare Form T , an Stelle von a_k die Form T^k setzen.

Es entsteht die Frage, welches nunmehr die an Stelle der Formeln (43) tretenden Relationen sind, vermöge deren sich die Potenzen und Producte der Formen $\Theta_0 \dots \Theta_{\alpha-1}$ durch diese Formen selbst ausdrücken lassen. Diese Frage erledigt sich im Augenblicke mit Hilfe der Entwicklungen des § 4. Wir haben nach Formel (28):

$$\lim \left\{ T_1 (\lambda_1 - \mu)^i + \dots + T_\alpha (\lambda_\alpha - \mu)^i \right\} = \Theta_i \quad (i = 0, 1, \dots, \alpha - 1) \\ \left\{ \right\} = 0 \quad (i = \alpha, \alpha + 1, \dots).$$

Bezeichnen wir hier die linke Seite vor Ausführung des Grenzübergangs für einen Augenblick durch Θ'_i , so haben wir auf Grund der Formeln (43) die Relationen:

$$\Theta'_i \Theta'_j = \Theta'_{i+j}.$$

Gehen wir jetzt zur Grenze über, so ergibt sich

$$(46) \quad \Theta_i \Theta_j = \Theta_{i+j} \quad (i + j < \alpha) \quad \Theta_i \Theta_j = 0 \quad (i + j \geq \alpha),$$

und dies sind die gesuchten Relationen. Außerdem haben wir natürlich noch die weiteren Gleichungen:

$$(47) \quad \Theta_i T_{\alpha+1} = T_{\alpha+1} \Theta_i = 0, \dots \Theta_i T_n = T_n \Theta_i = 0.$$

Die Formen $\Theta_1 \dots \Theta_{\alpha-1}$ sind also sämtlich Potenzen einer und derselben Form $\Theta = \Theta_1$, deren α^{te} Potenz verschwindet, während die $(\alpha - 1)^{\text{te}}$ noch von Null verschieden ist.

Die gefundenen Relationen (46) und (47) sind zusammen mit den Gleichungen

$$(48) \quad \begin{cases} T^0 = \Theta_0 & . & + & * & * & * \\ T^1 = \mu \Theta_0 + \Theta_1 & + & * & * & * & , \end{cases}$$

die man aus den beiden ersten Gleichungen (22) auf dem bezeichneten Wege erhält, hinreichend zur Bestimmung der Formen $\Theta_0 \dots \Theta_{\alpha-1}$, * * *. In der That, bildet man mit Hilfe der Relationen (46) und (47) die Potenzen $T^2 \dots T^{n-1}$ von T , so erhält man ein System von n linearen Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $\Theta_0 \dots \Theta_{\alpha-1}$, * * *, das sich von dem System (22) nur durch die Bezeichnungen unterscheidet; die Gleichungen (22) aber haben, wie wir wissen, ein eindeutig bestimmtes System von Lösungen.

Hiermit ist ein Satz begründet, den wir mit Einführung etwas abgeänderter Bezeichnungen so formulieren wollen:

Sei

$$(49) \quad \varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_r) (\lambda - \lambda_a)^\alpha \dots (\lambda - \lambda_s)^\sigma = 0$$

die reducierte charakteristische Gleichung einer bilinearen Form T , so dass $\lambda_1 \dots \lambda_r$, $\lambda_a \dots \lambda_s$ die $r + s$ von einander verschiedenen Wurzeln bedeuten, und zwar $\lambda_1 \dots \lambda_r$ die einfachen, $\lambda_a \dots \lambda_s$ die mehrfach auftretenden Wurzeln.

Dann kann man immer und nur auf eine Weise ein System von $r + 2s$ bilinearen Formen $T_1 \dots T_r$, $T_a \dots T_s$, $\Theta_a \dots \Theta_s$ bestimmen, die den folgenden Bedingungen genügen:

„Es ist

$$(50) \quad \begin{cases} T^0 = T_1 + \dots + T_r + T_a + \dots + T_s \\ T = \lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_r T_r + (\lambda_a T_a + \Theta_a) + \dots + (\lambda_s T_s + \Theta_s); \end{cases}$$

das Product von je zwei Formen, die verschiedene Indices (1...r, a...s) tragen, ist Null; für die Multiplication von Formen mit gleichem Index aber gelten diese Regeln:

$$(51) \quad \begin{cases} T_1^2 = T_1, & \dots & T_r^2 = T_r, \\ T_a^2 = T_a, T_a \Theta_a = \Theta_a T_a = \Theta_a, & \Theta_a^\alpha = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ T_s^2 = T_s, T_s \Theta_s = \Theta_s T_s = \Theta_s, & \Theta_s^\sigma = 0. \end{cases}$$

Dieser durch seine völlige Ausnahmslosigkeit bemerkenswerthe Satz hat sich uns mit einem Schlage ergeben, als eine einfache Anwendung der Theorie der recurrierenden Reihen oder der davon nicht wesentlich verschiedenen Theorie der Partialbruchzerlegung einer rationalen Function. Wir erhalten dabei sogleich auch die entwickelten Ausdrücke der Formen T_i und Θ_i , und zwar in einer solchen Gestalt, dass die covariante Natur dieser Gebilde sofort aus den analytischen Ausdrücken selbst hervorleuchtet*): Wir sind bei der Herleitung dieser Ausdrücke nur durch invariante Operationen hindurchgegangen. Man erkennt sofort, dass die Formen T_i Covarianten vom Grade Null, sogenannte absolute Covarianten sind, und dass die Formen Θ_i , wie die Invarianten λ_i , den Grad Eins haben.

§ 8.

Combinanteneigenschaft der Covarianten T_i .

Die Formen T_i , zu denen wir im vorigen Paragraphen gelangt sind, besitzen noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft: Sie ändern sich nicht, wenn man die Grundform T durch irgend eine andere Form $\bar{T}$ der Schar $k_0 T^0 + k_1 T^1 + \dots + k_n T^{n-1}$ ersetzt, sofern diese Form $\bar{T}$ nur die eine Eigenschaft besitzt, dass ihre Potenzen $\bar{T}^0 = T^0, \bar{T}^1, \dots, \bar{T}^{n-1}$ ebenfalls linear-unabhängig sind.

Um dies einzusehen, mögen wir zunächst feststellen, dass die Formen $T_1 \dots T_r, T_a \dots T_s, \Theta_a, \Theta_a^2 \dots \Theta_a^{\alpha-1}, \dots, \Theta_s, \Theta_s^2 \dots \Theta_s^{\sigma-1}$

*) Zur Erleichterung der Übersicht mag wiederholt werden, dass nach Einführung der in der Formel (49) verwendeten Bezeichnung für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung die Ausdrücke von $T_a, \Theta_a, \Theta_a^2, \dots, \Theta_a^{\alpha-1}$ aus den unter (27) und (31) aufgestellten Werten der Größen $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{\alpha-1}$ hervorgehen, wenn man μ durch λ_a, a_k durch $T^k, s^0, s^1, \dots$ durch $T^0, T^1, \dots$ ersetzt.

sämmtlich linear-unabhängig sind. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass ihre Anzahl $r + \alpha + \dots + \sigma$ gleich n ist, und dass die nach Voraussetzung linear-unabhängigen Formen $T^0, T^1, \dots, T^{n-1}$ sich durch sie ausdrücken lassen. Zweitens mögen wir bemerken, dass in dem System der Formen $T_1 \dots T_r, T_{r+1} \dots T_n$

$$\begin{aligned}\Theta'_a &= \lambda_{a,1} \Theta_a + \lambda_{a,2} \Theta_a^2 + \dots + \lambda_{a,\alpha-1} \Theta_a^{\alpha-1}, \\ \Theta'_s &= \lambda_{s,1} \Theta_s + \lambda_{s,2} \Theta_s^2 + \dots + \lambda_{s,\sigma-1} \Theta_s^{\sigma-1}\end{aligned}$$

genau dieselben Multiplicationsregeln (5!) bestehen, wie in dem System der Formen $T_1 \dots T_r, T_a \dots T_s, \Theta_a \dots \Theta_s$ selbst, sofern nur die Größen $\lambda_{a,1} \dots \lambda_{s,r}$ alle von Null verschieden sind; und wir mögen bemerken, dass auch die Formen $T_1 \dots T_s, \Theta'_a \dots \Theta'^{a-1}_a, \dots \Theta'_s \dots \Theta'^{s-1}_s$ ein System von linear-unabhängigen Formen darstellen. Setzen wir nun, nachdem die Formen T_i, Θ_i nach der Anweisung des § 7 bestimmt sind,

$$(52) \quad \bar{T} = \lambda'_1 T_1 + \dots + \lambda'_r T_r + \lambda'_a T_a + \Theta'_a + \dots + \lambda'_s T_s + \Theta'_s,$$

so haben wir damit die allgemeinste Form $\bar{T}$ der linearen Schar hingeschrieben, die durch die linear-unabhängigen Potenzen von T bestimmt wird.

Wir behaupten nun, dass die Potenzen der Form $\bar{T}$ einer linearen Recursionsformel n^{ten} Grades genügen, deren charakteristische Gleichung ist

$$(53) \quad (\lambda - \lambda'_1) \dots (\lambda - \lambda'_r) (\lambda - \lambda'_{\alpha})^{\alpha} \dots (\lambda - \lambda'_s)^{\sigma} = 0,$$

und dass sie keiner Recursionsformel niedrigeren Grades genügen, so lange unter den Größen $\lambda'_1 \dots \lambda'_r$, $\lambda'_a \dots \lambda'_s$ keine zwei einander gleich sind, und so lange außerdem keine der Größen $\lambda_{a,1} \dots \lambda_{r,1}$ den Wert Null hat.

Es genügt nämlich die Reihe der Formen

$$T_1, \lambda'_1 T_1, \lambda'^2_1 T^2_1 = \lambda'^2_1 T_1, \lambda'^3_1 T^3_1 = \lambda'^3_1 T_1, \dots$$

einer linearen Recursionsformel, deren charakteristische Gleichung ist: $\lambda - \lambda_1 = 0$; ferner genügt die Reihe der Formen

$$T_a, \lambda'_a T_a + \Theta'_a, (\lambda'_a T_a + \Theta'_a)^2 = \lambda'^2_a T_a + 2\lambda'_a \Theta'_a + \Theta_a^2, \dots$$

einer Recursionsformel mit der charakteristischen Gleichung $(\lambda - \lambda_a)^a = 0$.

Es ist aber

$$T^0 = T_1 + \dots + T_r + T_a + \dots + T_s,$$

und für $k > 0$:

$$\bar{T}^k = (\lambda'_1 T_1)^k + \dots + (\lambda'_r T_r)^k + (\lambda'_a T_a + \Theta'_a)^k + \dots + (\lambda'_s T_s + \Theta'_s)^k.$$

Nimmt man Beides zusammen, so folgt aus einem in § 2 bewiesenen elementaren Satze, dass die Reihe der Größen $\bar{T}^0, \bar{T}^1, \dots$ in der That einer linearen Recursionsformel genügt, deren charakteristische Gleichung die angegebene Form hat.

Es ist aber unter den genannten Bedingungen die aufgestellte Recursionsformel auch die Recursionsformel niedrigsten Grades, der die Folge der Formen $\bar{T}^0, \bar{T}^1, \dots$ genügt. Wenn man nämlich $\bar{T}^0, \bar{T}^1, \dots, \bar{T}^{n-1}$ durch die Formen T_i, Θ'_i und ihre Potenzen und Producte ausdrückt, so treten auf der rechten Seite alle n linear-unabhängigen Formen $T_1 \dots T_r, T_a \dots T_s, \Theta'_a \dots \Theta'_s$, $\dots, \Theta'_s \dots \Theta'_s$ wirklich auf, weil nach Voraussetzung $\lambda_{s,1} \neq 0, \dots, \lambda_{s,1} \neq 0$ ist. Es kann also eine lineare Abhängigkeit zwischen $\bar{T}^0 \dots \bar{T}^{n-1}$ nur dadurch entstehen, dass die aus den Coefficienten jener n Formen gebildete Determinante verschwindet. Wegen der zwischen den Formen T_i, Θ'_i bestehenden Relationen ist aber diese Determinante keine andere als die Determinante des Gleichungssystems (22) (abgesehen von der Bezeichnung), und von dieser wissen wir, dass sie nicht verschwinden kann, solange die Größen $\lambda'_1 \dots \lambda'_r, \lambda'_a \dots \lambda'_s$ alle von einander verschieden sind.

Hiermit ist gezeigt, dass die Ungleichungen

$$(54) \quad \lambda_{a,1} \neq 0 \dots \lambda_{s,1} \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_r \neq \lambda_a \neq \dots \neq \lambda_s$$

die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür bilden, dass die Zahl der unabhängigen Potenzen der Formen T und $\bar{T}$ dieselbe ist, oder anders ausgedrückt, dass die beiden Scharen von bilinearen Formen zusammenfallen, die durch die Potenzen von T und durch die Potenzen von $\bar{T}$ bestimmt werden.

Haben wir nun die Form $\bar{T}$ den Bedingungen (54) gemäß gewählt, so können wir die Gleichung (49) durch (53), ferner die zweite Gleichung (50) durch (52), endlich in den Relationen (51) die Formen Θ durch die Formen Θ' ersetzen. Wir erhalten dann nach dem Satze des § 7 eindeutig bestimmte Ausdrücke für die Formen $T_1 \dots T_r, T_a \dots T_s, \Theta'_a \dots \Theta'_s$. Die so bestimmten Formen $T_1 \dots T_r, T_a \dots T_s$ sind aber genau dieselben, zu denen wir von

der Form T ausgehend gelangt sind; und dies ist der zu beweisende Satz. Zugleich ergibt sich, dass den Formen $\theta_a \dots \theta_s$, die im obigen Satze ausgesprochene Combinanteneigenschaft im Allgemeinen nicht zukommt, denn an ihrem Platze haben sich nach Ersetzung der Grundform T durch $\bar{T}$ neue Formen $\theta'_a \dots \theta'_s$ eingestellt; wohl aber hat jede einzelne der Formenscharen

[illegible]

die Combinanteneigenschaft, wie man sich leicht überzeugt. Die Form Θ_a ist also immer dann und nur dann eine Combinante der Formenschar $k_0 T^0 + k_1 T^1 + \dots + k_n T^{n-1}$, wenn die Zahl α den Wert 2 hat. —

Durch die hier mitgetheilten Entwicklungen ist der vollständige Beweis des Satzes erbracht, den der Verfasser in § 6 seiner Abhandlung über Systeme von complexen Zahlen aufgestellt hat. (Monatshefte für Mathematik, I. Jahrg. (1890), 8—10. Heft).

§ 9.

Der Fall $n = N$.

Das bis jetzt Vorgetragene gilt ganz allgemein, welches auch der Grad der reducierten charakteristischen Gleichung der Form T sein möge. Ausgezeichnet ist indessen der Fall, wo dieser Grad den Wert N , die Stufenzahl des Gebietes erreicht, dem die Form T angehört. Dann sind die in § 7 angegebenen Formen einer einfachen und alle möglichen Fälle zugleich umfassenden Deutung fähig. Wir kommen dann zu einem bekannten Satz:

Sind die Potenzen $T^0 \dots T^{N-1}$ einer bilinearen Form T eines Gebietes N^{ter} Stufel linear-unabhängig, so kann man die Veränderlichen X_i, U_i derart wählen, dass jedes Formenpaar T_i, Θ_i nur von gewissen, in den Ausdrücken der anderen Formen T_k, Θ_k fehlenden Paaren von Veränderlichen abhängt, deren Anzahl gleich ist der Multiplicität der zugehörigen Wurzel λ_i der charakteristischen Gleichung. Und zwar können die Veränderlichen insbesondere so bestimmt werden, dass die Formen T_i, Θ_i die Gestalt erhalten:

$$(56) \quad \begin{cases} T_1 = X^{(1)} U^{(1)}, & \dots & T_r = X^{(r)} U^{(r)} \\ T_a = X_0^{(a)} U_0^{(a)} + X_1^{(a)} U_1^{(a)} + \dots + X_{a-1}^{(a)} U_{a-1}^{(a)} \\ \Theta_a = & X_0^{(a)} U_1^{(a)} + \dots + X_{a-2}^{(a)} U_{a-1}^{(a)} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Eindeutig ist die hierin enthaltene Zerlegung nur, soweit sie sich auf die Formen $T_1 \dots T_r$ bezieht, nicht aber rück-sichtlich der Formen T_a, Θ_a ; überhaupt kann die Reduction der Form T auf eine sogenannte canonische Form, wie sie durch Formeln (50), (56) dargeboten wird, durch invariante Processe im Allgemeinen nicht geleistet werden. In unserem Falle sind also die canonischen Coordinaten (oder vielmehr die Producte $X^{(i)} U^{(i)}$ von je zwei zusammengehörigen) Covarianten nur bei der einfachsten Annahme, dann nämlich, wenn die charakteristische Gleichung lauter getrennte Wurzeln hat.

Die Ableitung des letzten Satzes aus dem allgemeinen Theorem des § 7 gestaltet sich folgendermaßen:

Die Gesamtheit der Formen, die aus den Potenzen $T^0, T^1, \dots, T^{N-1}$ der Form T linear ableitbar sind, stellt, gleich Null gesetzt, eine Gruppe von vertauschbaren linearen Transformationen des Gebietes N^{ter} Stufe dar, und zwar in unserem Falle eine einfach-transitive Gruppe. Eine solche Gruppe ist, wie ich früher gezeigt habe (Monatshefte für Mathematik und Physik, 1890, Heft 8—10, § 11) zu ihrer Parametergruppe durch eine projective Transformation ähnlich, wenn man als Parameter die Verhältnisse der Größen $k_0 \dots k_{N-1}$ in dem Ausdrücke

$$k_0 T^0 + k_1 T^1 + \dots + k_{N-1} T^{N-1}$$

ansieht. Um nun die Gleichungen dieser Parametergruppe in einfacher Form darzustellen, führe man zunächst statt der Potenzen $T^0 \dots T^{N-1}$ die Formen

$$T_1 \dots T_r, T_a, \Theta_a, \dots, \Theta_a^{\alpha-1}, \dots, T_s, \Theta_s, \dots, \Theta_s^{\sigma-1}$$

ein. Identificiert man sodann diese Formen mit den Haupteinheiten eines Systems complexer Zahlen (a. a. O. § 1, 9, 11, 12), so kann man die Gleichungen der Parametergruppe in einer sehr einfachen Gestalt hinschreiben. Man setze

$$X = X^{(1)} T_1 + \dots + X^{(r)} T_r + X_0^{(a)} T_a + X_1^{(a)} \Theta_a + \dots + X_{a-1}^{(a)} \Theta_a^{\alpha-1} \\ + \dots + X_0^{(s)} T_s + X_1^{(s)} \Theta_s + \dots + X_{\sigma-1}^{(s)} \Theta_s^{\sigma-1},$$

und analog:

$$A = A^{(1)} T_1 + \dots + A^{(r)} T_r + \dots + A_{\sigma-1}^{(s)} \Theta_s^{\sigma-1}.$$

Die Gleichungen der genannten Gruppe ergeben sich alsdann, wenn man das Product $X' = XA$ unter Zugrundelegung der zwischen den Potenzen und Producten von $T_1 \dots \Theta_s^{\sigma-1}$ bestehenden Relationen auswertet, und sodann beiderseits die Coefficienten von $T_1 \dots \Theta_s^{\sigma-1}$ vergleicht. Stellt man die Gesamtheit dieser Gleichungen durch eine bilineare Form mit den N homogenen Parametern $A^{(1)} \dots A_{\sigma-1}^{(\sigma)}$ dar, so lautet diese Form:

$$\begin{aligned} & A^{(1)} X^{(1)} U^{(1)} + \dots + A^{(r)} X^{(r)} U^{(r)} \\ & + A_0^{(a)} \cdot \{ X_0^{(a)} U_0^{(a)} + X_1^{(a)} U_1^{(a)} + \dots + X_{\alpha-1}^{(a)} U_{\alpha-1}^{(a)} \} \\ & + A_1^{(a)} \cdot \{ X_0^{(a)} U_1^{(a)} + X_1^{(a)} U_2^{(a)} + \dots + X_{\alpha-2}^{(a)} U_{\alpha-1}^{(a)} \} \\ & + \dots + A_{\alpha-1}^{(a)} X_0^{(a)} U_{\alpha-1}^{(a)} + \dots \end{aligned}$$

Die Coefficienten von $A^{(1)}, \dots, A^{(r)}, A_0^{(a)}, \dots$ in diesem Ausdruck können wiederum mit den Formen $T_1, \dots, T_r, T_a, \dots$ identificiert werden; und hieraus folgt dann obiger Satz.

Noch sei bemerkt, dass man aus der Formel (56) die geometrische Bedeutung der Formen T_i, Θ_k ohne Schwierigkeit ablesen kann. Es ergeben sich bei dieser Gelegenheit die sämtlichen linearen Mannigfaltigkeiten, die von der Transformation T in Ruhe gelassen werden.

T lässt stehen zunächst r Mannigfaltigkeiten erster Stufe:

$$U_1 = 0, U_2 = 0, \dots U_r = 0.$$

Ferner eine lineare Mannigfaltigkeit α^{ter} Stufe:

$$X^{(1)}=0 \dots X^{(r)}=0, X_i^{(\beta)}=0 \ (i=0 \dots \beta-1), \dots X_i^{(\sigma)}=0 \ (i=0 \dots \sigma-1),$$

oder $U_0^{(a)}=0 \dots U_{\alpha-1}^{(a)}=0$, eine Mannigfaltigkeit β^{ter} Stufe u. s. w.

In der Mannigfaltigkeit α^{ter} Stufe bleiben invariant eine Mannigfaltigkeit $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Stufe $X_0^{(a)}=0$, in dieser wiederum eine Mannigfaltigkeit $(\alpha-2)^{\text{ter}}$ Stufe $X_0^{(a)}=0, X_1^{(a)}=0$, u. s. f., endlich eine Gerade und auf dieser ein Punkt. Die aufgezählten Gebiete und die sie verbindenden linearen Mannigfaltigkeiten sind die einzigen, die von der Transformation $T=0$ in sich selbst übergeführt werden.

Viel entwickelter gestaltet sich die Sache, wenn $n < N$ ist. Wegen dieser Fälle müssen wir auf die Eingangs genannten wichtigen Untersuchungen verweisen.

Der Satz des § 7, der ein wichtiges System von irrationalen Covarianten einer bilinearen Form kennen lehrt, hat sich uns als eine unmittelbare Folge der Theorie der recurrierenden Reihen dargestellt. Dass sich diese elementaren Betrachtungen noch in einem bedeutend größeren Umfange verwerthen lassen, z. B. in der Theorie der binären Formen und in der Theorie des simultanen Systems zweier quadratischer Formen eines Gebietes beliebiger Stufe, beabsichtige ich bei einer späteren Gelegenheit zu zeigen.

Marburg, den 28. November 1889.