Über Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodul.

Von Leopold Gegenbauer in Wien.

Sind

$$z_0, z_1, \dots, z_{r-1} \quad (r \leq p-1)$$

r nach dem Primzahlmodul p unter einander und zu Null incongruente ganze Zahlen, so lassen sich, wie immer die ganzen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ beschaffen sein mögen, stets r ganze Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$, so bestimmen, dass die Congruenzen

$$(1) \quad \alpha_k \equiv \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r-1} \alpha_\lambda z_\lambda^k \pmod{p} \quad (k=0, 1, \dots, r-1)$$

bestehen, weil die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_\lambda^k \\ (k, \lambda=0, 1, \dots, r-1) \end{vmatrix}$$

zu p theilerfremd ist.

Bilden die Zahlen α_k ($k=0, 1, \dots, p-2$) ein Lösungssystem des Systemes linearer homogener Congruenzen

$$\sum_{k=0}^{k=p-2} b_{k+\rho} y_k \equiv 0 \pmod{p} \quad (\rho=0, 1, \dots, p-2; b_{k+p-1} \equiv b_k \pmod{p}),$$

so ergeben sich unter Benützung der Relationen (1) und auf Grund des Fermat'schen Satzes folgende zwei Congruenzensysteme

$$\sum_{k, \lambda=0}^{k, \lambda=r-1} \alpha_\lambda b_{k+\rho} z_\lambda^k + \sum_{k=r}^{k=p-2} b_{k+\rho} \alpha_k \equiv 0 \pmod{p} \quad (\rho=0, 1, \dots, p-2)$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} \alpha_\lambda z_\lambda^{p-1-\rho} \left(\sum_{k=0}^{k=p-2} b_k z_k^\rho \right) \equiv 0 \pmod{p} \quad (\rho=0, 1, \dots, p-2),$$

in deren zweiten die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werte von λ zu nehmen sind, für welche α_λ nicht durch p theilbar ist.

Genügen die Zahlen

$$z_0, z_1, \dots, z_{r-1}$$

der Congruenz

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{k=p-2} b_k x^k \equiv 0 \pmod{p},$$

und demnach auch allen Congruenzen

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_{k+\varrho} x^k \equiv 0 \pmod{p} \quad (\varrho = 0, 1, \dots, p-2),$$

so kann man das erste System auch in folgender Gestalt schreiben

$$\sum_{k=r}^{p-2} b_{k+\varrho} \{ \alpha_k - \alpha_0 z_0^k - \alpha_1 z_1^k - \dots - \alpha_{r-1} z_{r-1}^k \} \equiv 0 \pmod{p} \quad (\varrho = 0, 1, \dots, p-2),$$

in welcher es unmittelbar zu folgendem Satze führt:

I. Das System linearer homogener Congruenzen

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_{k+\varrho} y_k \equiv 0 \pmod{p} \quad (\varrho = 0, 1, \dots, p-2)$$

besitzt nur Lösungssysteme von der Form

$$\sum_{\lambda=0}^{r-1} \alpha_{\lambda} z_{\lambda}^k \quad (k = 0, 1, \dots, p-2)$$

oder nicht, je nachdem es unter sämtlichen in der Matrix

$$\| b_{k+\varrho} \| \quad (k = r, r+1, \dots, p-2; \varrho = 0, 1, \dots, p-2)$$

enthaltenen Determinanten $(p-r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu p theilerfremde gibt, oder nicht.

Das zweite der oben angegebenen Congruenzensysteme zeigt, dass das System linearer homogener Congruenzen

$$\sum_{\lambda=r}^{p-2} \alpha_{\lambda} z_{\lambda}^{p-l-\varrho} u_{\lambda} \equiv 0 \pmod{p} \quad (\varrho = 0, 1, \dots, p-2)$$

ein Lösungssystem besitzt, dessen sämtliche Elemente zu p theilerfremd sind, falls die Zahlen $z_0, z_1, \dots, z_{r-1}$ alle unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln der Congruenz (2) sind. Daraus folgt aber sofort, dass alle in der Matrix

$$\| \alpha_{\lambda} z_{\lambda}^{p-1-\varrho} \| \quad (\lambda = r, r+1, \dots, p-2; \varrho = 0, 1, \dots, p-2)$$

enthaltenen Determinanten der Ordnung $p-r-1$ den Factor p besitzen. Nun ist aber schon die erste von ihnen ($\varrho = 0, 1, \dots, p-r-2$) das Product aus einer zu p theilerfremden Determinante und den in den eben benützten Congruenzen auftretenden Zahlen α_{λ} und daher muss jede Grösse α_{λ} , deren Index $r-1$ übersteigt, durch p theilbar sein. Man hat daher den Satz:

II. Besitzt die Congruenz

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_k x^k \equiv 0 \pmod{p}$$

genau r unter einander und von Null verschiedene Wurzeln $z_0, z_1, \dots, z_{r-1}$, so lässt sich jedes Lösungssystem des Systemes linearer homogener Congruenzen

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_{k+\rho} y_k \equiv 0 \pmod{p} \quad (\rho = 0, 1, \dots, p-2)$$

in der Form

$$y_k \equiv \sum_{\lambda=0}^{r-1} \alpha_\lambda z_\lambda^k \pmod{p} \quad (k = 0, 1, \dots, p-2)$$

darstellen.

Dass dieser Satz auch umgekehrt gilt, ist unmittelbar ersichtlich.

Die Verbindung der zwei abgeleiteten Sätze liefert das folgende bemerkenswerte Theorem des Herrn Kronecker:

Die Summe aus der Anzahl der Wurzeln der Congruenz

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_k x^k \equiv 0 \pmod{p}$$

und dem Range ihres Coefficientensystemes ist gleich $p-1$.

Der Satz II kann auch in der folgenden eleganten Fassung ausgesprochen werden:

Das System von linearen homogenen Congruenzen

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_{k+\rho} y_k \equiv 0 \pmod{p} \quad (\rho = 0, 1, \dots, p-2)$$

haben ebenso viele linear unabhängige Lösungssysteme, als die Congruenz

$$\sum_{k=0}^{p-2} b_k x^k \equiv 0 \pmod{p}$$

unter einander und von Null verschiedene Wurzeln besitzt.

In dieser von Herrn Kronecker auf andere Weise abgeleiteten Form erweist er sich als das zahlentheoretische Analogon des folgenden längst bekannten Theorems:

Bestehen zwischen n Größen r lineare homogene Relationen, welche bei allen cyklischen Permutationen der Coefficienten erhalten bleiben, so gibt es für dieselben auch r lineare homogene Relationen, deren Coefficienten Einheitswurzeln sind.