Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten.

Von

M. NOETHER in Erlangen.

In dem vorliegenden Aufsätze soll die Darstellung des *Additionstheorems der Thetafunctionen* und der *Thetarelationen*, welche von Weber für die Functionen von 3 Argumenten*) und von mir (Math. Ann. XIV, pag. 248) für die von 4 Argumenten durchgeführt worden ist, auf die Thetafunctionen von beliebig vielen, p , Argumenten ausgedehnt werden. Zu diesem Zwecke sind nicht eigentlich weitere neue Hilfsmittel in die Theorie einzuführen; vielmehr handelt es sich wesentlich nur darum, einzelne in dem letztgenannten Aufsatz nur vorübergehend zu Grunde gelegte Gesichtspunkte in ihrer vollen Bedeutung hervortreten zu lassen und die entsprechenden Hilfsmittel weiter auszubilden.

Zunächst ist die Untersuchung der *Gruppierungsverhältnisse der Thetacharakteristiken* (Abschnitt I.) die Grundlage der ganzen Entwicklung; und hierzu dient der auch schon früher benutzte und als allgemein bezeichnete (Ann. XIV. p. 250) Ausgangspunkt: durch Betrachtung der zwei „Gruppen“ gewisser Art gemeinsamen Charakteristiken die Theorie der p -reihigen (auf ϑ -Functionen von p Argumenten bezüglichen) Charakteristiken auf die der $(p-1)$ -reihigen zurückzuführen. Dabei wird insbesondere von den *Substitutionen*, welche die Charakteristikenbeziehungen unverändert lassen (§. 1.) — und welche zuerst von C. Jordan angegeben worden sind**) —, in ausgedehnterem Masse Gebrauch gemacht. Auf diesem Wege tritt sogleich die Unterscheidung zwischen den 2^{2p} *eigentlichen* und den $2^{2p}-1$ *Gruppen*-Charakteristiken klar hervor; und indem bei den letzteren der Charakter der Geraden oder Ungeraden gar nicht in Betracht kommt, zeigt sich die Nothwendigkeit, die denselben zugeordneten *Systeme* aus geraden

*) H. Weber, Theorie der Abel'schen Funct. vom Geschlecht 3. Berlin 1876.

**) C. Jordan, Traité des substitutions, p. 229.

Charakteristiken ganz ebenso zu behandeln, wie früher diejenigen aus ungeraden. Durch dieses gleichmässigeres Verfahren werden jetzt die Beweise zu gleicher Zeit viel einfacher und durchsichtiger, und es gelingt jetzt, durch wenige Betrachtungen die Systeme von Gruppen (§ 2. — § 5.) und sämtliche Systeme von eigentlichen Charakteristiken (§ 6. — § 10.) herzustellen. — Es würde sich hieraus auch ohne Weiteres eine Gruppentheorie der zugehörigen Substitutionen bilden lassen; indessen ist hier nur vorübergehend (§ 5., 3.; § 11., 2., 6.) auf diesen Punkt hingewiesen worden.

Eine *allgemeine* Theorie der Charakteristiken, wie sie im ersten Abschnitte gegeben ist, — nämlich eine solche, welche nur Eigenschaften benutzt, die bei den Charakteristikenbeziehungen eigenen Substitutionen invariant sind — wird nothwendig, sobald man einen Ueberblick über solche Beziehungen gewinnen will. Die bisher nach Weierstrass oder Riemann angewandten Methoden zur Aufstellung von Systemen für $p > 3$ genügen dieser Forderung nicht, wie man schon daran erkennen kann, dass der wesentliche Unterschied zwischen eigentlichen und Gruppencharakteristiken, von denen die ersteren in zwei getrennte Classen zerfallen, die anderen ein einziges System bilden, dabei nicht zum Ausdruck gekommen ist. Ausserdem hat die Methode von Weierstrass*) und Riemann**) eine weitere Theorie zur Grundlage: die Normirung der Wege für die hyperelliptischen Integrale und die Sätze über das Verschwinden der zugehörigen Thetafunctionen, und liefert zunächst nur ein bei Beiden identisches *specielles* System. Zwar ist neuerdings von Schottky***) eine davon unabhängige Entwicklung eines solchen speciellen Systems gegeben worden, aber wiederum ohne Darstellung der charakteristischen Eigenschaften, welche den Uebergang zu den allgemeinen Systemen bewirken würden. Auch die von Prym†) gegebene Ausdehnung des Riemann'schen Satzes auf alle Zerschneidungen der 2-blättrigen Ebene in eine einfach zusammenhängende giebt zunächst nur die Existenz der Systeme, aber noch keine Uebersicht über deren Gestalt und Zusammenhang. — Einige allgemeine Sätze über Gruppencharakteristiken hat neuerdings

*) Königsberger, Ueber die Transform. der Abel'schen Funct., Borch. J. 64.

**) Prym, Zur Theorie der Funct. in einer 2-blättrigen Ebene. Zürich 1866.

***) Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Funct. von 3 Var., I. Theil. Breslau 1878.

†) Prym, a. c. O., § 12. Unser Ausdruck „Gruppencharakteristik“ ist nicht mit dem bei Prym vorkommenden zu verwechseln. Der letztere wäre identisch mit „einer Gruppencharakteristik zugeordneten halben Periode“, Perioden, die wie jene Charakteristiken nur *eine* Classe bilden; der erstere Begriff tritt bei Prym nicht explicite auf. Den *eigentlichen* Charakteristiken sind die zwei Classen von Thetafunctionen zugeordnet.

Jordan (Compt. Rendus) mitgetheilt, wie es scheint mit ähnlichem Ausgangspunkt, wie der hier benutzte.

Um eine Anwendung der vorgetragenen *allgemeinen* Theorie zu geben, behandle ich im § 11. die Methoden zur Auflösung derjenigen Gleichungen, deren Wurzeln den Charakteristiken oder Systemen von solchen zugeordnet werden können; insbesondere also die Gleichungen, welche zur Zweitheilung der Perioden der Abel'schen Functionen dienen. Man kann diese Gleichungen lösen z. B. durch die successive Aufsuchung je einer Wurzel von Gleichungen der Grade

$$2^2p - 1, \quad 2^{2(p-1)} - 1, \quad \dots, \quad 2^6 - 1,$$

hierauf die vollständige Auflösung einer allgemeinen Gleichung vom 6^{ten} Grade und dann von $p^2 - 4$ quadratischen Gleichungen.

Aus jedem „ausgezeichneten“ (§ 8.) Charakteristikensystem kann man leicht Systeme von 2^p eigentlichen und von 2^p zugehörigen Gruppencharakteristiken bilden (§ 13.), deren Benutzung unmittelbar zu einem Ausdruck für das *Additionstheorem der allgemeinen ϑ -Functionen* führt (§ 14.)*. Aber die Coefficienten dieses Ausdrucks werden selbst wieder Summen von je 2^{p-3} Producten; und die Specialisirung der Variablen in diesem Ausdruck liefert, sobald $p > 4$ ist, nicht mehr die einfachsten Thetarelationen, welche überhaupt existiren.

Eine genauere Untersuchung, insbesondere der bemerkenswerthen, in lineare Factoren zerfallenden, *Determinante* der Gleichungen, aus welchen das Additionstheorem abgeleitet worden ist (§ 15.), ergibt nun, dass eine fundamentalere Formel als die genannte existirt, eine Formel, in welcher alle Coefficienten eingliedrig werden, während freilich die linke Seite selbst eine Summe von 2^{p-3} Ausdrücken mit zusammengesetzten Argumenten wird (§ 16.). Diese *Fundamentalformel* der Theorie, welche auch für $p = 4$ noch nicht in meinem oben genannten Aufsatz (Ann. XIV.) enthalten ist, liefert sogleich die *Thetarelationen* (§ 17.) in Formen, die ebenso einfach sind, als für $p = 3$ (Weber) und für $p = 4$; und die Theorie der Charakteristiken erlaubt ferner, auch die wichtige Frage nach den Beziehungen zwischen diesen Relationen wenigstens anzugreifen und eine Reihe solcher fest-

*) Die Resultate bis § 14. incl. (excl. § 11.) finden sich kurz in meiner Note „Ueber die Thetacharakteristiken“, Sitz-ber. der Erl. Soc. v. 23. Juli 1879 (H. 11., p. 198) angegeben und waren schon längere Zeit vorher in meinem Besitze. Das Additionstheorem in der obigen Form, aus dem früher genannten speciellen System abgeleitet, ist seitdem auch von H. Stahl (Borch. J. 88., H. 2., ausgeg. den 14. Oct. d. J.) mitgetheilt worden, ohne Uebersicht über die Thetarelationen. — Eine eben (zur Zeit des Druckes dieses Aufsatzes) erschienene weitere Note von Stahl (Borch. J.) giebt eine unabhängige Definition des Riemann'schen Systems von Gruppencharakteristiken, aber ohne den Existenzbeweis und ohne Untersuchung der Bildungsweise und Zusammenhänge (Dez. 30.).

zustellen (§ 18.)*). — Zum Schlusse (§ 19.) gebe ich eine Anwendung auf die Functionen für $p = 5$, wobei ich insbesondere die Bedingungen discutire, unter welchen die ϑ -Functionen zu hyperelliptischen werden.

I. Abschnitt.

Die Thetacharakteristiken.

§ 1.

Definitionen und Operationen.

1. In diesem ersten Abschnitte handelt es sich um eine Theorie der 2^{2p} p -reihigen Zahlencomplexe, welche aus

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & \dots & n_p^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & \dots & m_p^\alpha \end{pmatrix},$$

entstehen, indem man allen Zahlen n_a^α und m_a^α unabhängig von einander die Werthe 0 oder 1 beilegt. Dieselben werden als *eigentliche p -reihige Charakteristiken*, oder kürzer, wo keine Verwechslung entstehen kann, als „Charakteristiken“ bezeichnet.

Insbesondere sei $n_a^0 = m_a^0 = 0$, also

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Charakteristik (α) wird *gerade* oder *ungerade* genannt, je nachdem

$$\sum_{a=1}^{a=p} n_a^\alpha m_a^\alpha$$

gerade oder ungerade ist. Dieser Ausdruck wird im Folgenden kürzer mit

$$\sum n^\alpha m^\alpha$$

bezeichnet; allgemeiner

$$\sum_{a=1}^{a=p} n_a^\alpha m_a^\beta$$

mit

$$\sum n^\alpha m^\beta.$$

I. Es giebt $R_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ *ungerade*, $S_p = 2^{p-1}(2^p + 1)$ *gerade Charakteristiken*.

*) Diese weiteren Resultate habe ich in einer Note in den Erl. Ber. vom 10. Nov. „Ueber die allgem. Thetafunctionen“ kurz mitgetheilt. Der Inhalt von § 15. und § 16. ist von mir auch in der Sitz. der math. Section der Naturforscherversammlung in Baden (Sept. d. J.) gelegentlich erwähnt worden.

Denn sei hier, wie im Folgenden durchaus, gesetzt:

$$R_\mu = 2^{\mu-1}(2^\mu - 1), \quad S_\mu = 2^{\mu-1}(2^\mu + 1).$$

Wir nehmen den Satz I., der für $p = 1$ richtig ist, für die $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken als richtig an; ergänzt man sodann die R_{p-1} ungeraden $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken durch eine der drei Reihen

$$\begin{matrix} 0 & \text{oder} & 0 & \text{oder} & 1 \\ 0 & & 1 & & 0, \end{matrix}$$

die S_{p-1} geraden $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken durch die Reihe

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

zu p -reihigen, so erhält man *alle* ungeraden Charakteristiken dieser Art, nämlich

$$3R_{p-1} + S_{p-1} = R_p;$$

und ebenso, durch Vertauschung dieser Ergänzungen, die

$$3S_{p-1} + R_{p-1} = S_p$$

geraden Charakteristiken.

Als *Summe* $(\alpha\beta)$ zweier Charakteristiken

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} n_1^\alpha \cdots n_p^\alpha \\ m_1^\alpha \cdots m_p^\alpha \end{pmatrix}, \quad (\beta) = \begin{pmatrix} n_1^\beta \cdots n_p^\beta \\ m_1^\beta \cdots m_p^\beta \end{pmatrix}$$

sei der Ausdruck bezeichnet:

$$(\alpha) + (\beta) = (\alpha\beta) = \begin{pmatrix} n_1^{\alpha\beta} \cdots n_p^{\alpha\beta} \\ m_1^{\alpha\beta} \cdots m_p^{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

wo

$$\left. \begin{aligned} n_a^{\alpha\beta} &\equiv n_a^\alpha + n_a^\beta \\ m_a^{\alpha\beta} &\equiv m_a^\alpha + m_a^\beta \end{aligned} \right\} \pmod{2}.$$

2. Wir ordnen nun alle diejenigen Paare von einander verschiedener ungerader Charakteristiken, sowie diejenigen Paare von einander verschiedener gerader Charakteristiken, welche dieselbe Summe (r) geben, zu einer *Gruppe* zusammen, und geben auch dieser Gruppe eine entsprechende Charakteristik

$$[r],$$

die wir *Gruppencharakteristik* nennen. Sei

$$(r) = (\alpha) + (\beta) = (\alpha') + (\beta') = \cdots,$$

wo (α) und (β) entweder beide gerade oder beide ungerade sind, ebenso (α') , (β') , etc., so sagen wir, dass (α) , (β) , (α') , $\cdots$ in der Gruppe $[r]$ *enthalten*, und zwar (α) , (β) *gepaart enthalten* sind.

II. Es giebt $2^{2p} - 1$ Gruppencharakteristiken.

Denn alle Zahlencomplexe

$$[r] = \begin{bmatrix} n_1^r \cdots n_p^r \\ m_1^r \cdots m_p^r \end{bmatrix}$$

treten als solche auf, ausgenommen $[0]$.

3. Zu den beiden in 1. und 2. angegebenen Bedeutungen der Zahlencomplexe, (α) und $[r]$, fügen wir noch eine dritte, die einer *Substitution*. Seien nämlich wieder, wie in 2., die Zerlegungen der Gruppe $[r]$:

$$(r) = (\alpha) + (\beta) = (\alpha') + (\beta') = \cdots;$$

so bezeichnen wir mit

$$\{r\}$$

diejenige Substitution, welche die in der Gruppe $[r]$ enthaltenen Charakteristiken in die mit ihnen darin gepaart auftretenden überführt, d. h. (α) mit (β) , (α') mit (β') etc. vertauscht, die nicht in $[r]$ enthaltenen Charakteristiken aber unverändert lässt.

Um die weiteren Eigenschaften einer solchen Substitution $\{r\}$ zu ermitteln, betrachte man eine *gerade* Anzahl von Charakteristiken, in deren Summe alle Elemente zu $0 \pmod{2}$ werden, eine Summe, die wir deshalb $= 0$ setzen:

$$(1) \quad (\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_{2\mu}) = 0.$$

Von diesen Charakteristiken $(\alpha_1), \dots, (\alpha_{2\mu})$ seien ν , nämlich

$$(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_\nu),$$

gerade, die übrigen $2\mu - \nu$ ungerade; also:

$$\left. \begin{aligned} \sum n^{\alpha_1} m^{\alpha_1} &\equiv \sum n^{\alpha_2} m^{\alpha_2} \equiv \cdots \equiv \sum n^{\alpha_\nu} m^{\alpha_\nu} \equiv 0, \\ \sum n^{\alpha_{\nu+1}} m^{\alpha_{\nu+1}} &\equiv \sum n^{\alpha_{\nu+2}} m^{\alpha_{\nu+2}} \equiv \cdots \equiv \sum n^{\alpha_{2\mu}} m^{\alpha_{2\mu}} \equiv 1, \end{aligned} \right\} \pmod{2}.$$

Ferner sei:

$$\left. \begin{aligned} \sum n^{r\alpha_1} m^{r\alpha_1} &\equiv \varepsilon_1, \quad \dots, \quad \sum n^{r\alpha_\nu} m^{r\alpha_\nu} \equiv \varepsilon_\nu, \\ \sum n^{r\alpha_{\nu+1}} m^{r\alpha_{\nu+1}} &\equiv \varepsilon_{\nu+1} + 1, \quad \dots, \quad \sum n^{r\alpha_{2\mu}} m^{r\alpha_{2\mu}} \equiv \varepsilon_{2\mu} + 1, \end{aligned} \right\} \pmod{2}.$$

So oft nun eine Zahl $\varepsilon_\rho = 0$ ist, wird die entsprechende Charakteristik (α_ρ) durch die Substitution $\{r\}$ bez. in $(r\alpha_\rho)$ übergeführt, im andern Falle nicht. Addirt man aber die letzteren Congruenzen und benutzt die ersteren, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& 2\mu \sum n^r m^r + \sum n^r m^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2\mu}} + \sum n^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2\mu}} m^r + \\
& + \sum n^{\alpha_1} m^{\alpha_1} + \dots + \sum n^{\alpha_{2\mu}} m^{\alpha_{2\mu}} \equiv 2\mu - \nu \equiv \\
& \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2\mu} + 2\mu - \nu;
\end{aligned}$$

also:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2\mu} \equiv 0 \pmod{2};$$

d. h. in der Summe

$$(1) \quad (\alpha_1) + (\alpha_2) + \dots + (\alpha_{2\mu}) = 0$$

wird nur eine *gerade* Anzahl der (α_q) durch die Substitution $\{r\}$ je um (r) vermehrt, so dass die ganze Summe nach der Substitution unverändert $= 0$ bleibt.

Dasselbe findet natürlich auch statt, wenn man verschiedene Substitutionen der Form $\{r\}$ nach einander ausführt. Man erhält dadurch neue Substitutionen, welche unter den ursprünglichen der Form $\{r\}$ im Allgemeinen nicht enthalten sein werden.

Auf die Form (1) lässt sich jede Relation zwischen den Charakteristiken bringen; denn hätte man eine *ungerade* Anzahl

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + \dots + (\alpha_{2\mu-1})$$

von Charakteristiken, in deren Summe alle Elemente congruent 0 werden, so setze man:

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + \dots + (\alpha_{2\mu-1}) + (0) = 0.$$

4. Aus 3. folgt, indem man eine oder zwei Charakteristiken (α_q) in der Beziehung (1) auf die rechte Seite bringt: *dass man jedem System, das aus einer ungeraden Anzahl von Charakteristiken besteht, als Zeichen eine der 2^{2^p} eigentlichen Charakteristiken zuordnen mag, nämlich dasjenige der Summe der Charakteristiken des Systems; und dass man jedem System, das aus einer geraden Anzahl von Charakteristiken besteht, als Zeichen eine der $2^{2^p} - 1$ Gruppencharakteristiken zuordnen mag, ebenfalls das der Summe, wenn nämlich diese Summe nicht selbst schon $= 0$ ist, was wir im Folgenden ausschliessen können.*

Eine Substitution $\{r\}$ ändert dann im Allgemeinen sowohl System, als Zeichen des Systems, aber liefert immer wieder eine der Definition entsprechende Zuordnung.

Wir bezeichnen ein solches System und sein Zeichen im ersten Falle auf die Art:

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2), (\alpha_3), \dots (\alpha_{2\mu}),$$

im zweiten Falle auf die Art:

$$[\alpha_1 \alpha_2] \equiv (\alpha_3), (\alpha_4), \dots, (\alpha_{2\mu}),$$

wenn beide Male

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + \dots + (\alpha_{2\mu}) = 0$$

sein sollte. Zum zweiten Falle gehören zum Beispiel die Zerlegungen von Nr. 2. dieses §, die hier so zu schreiben sind:

$$[r] \equiv (\alpha), (\beta) \equiv (\alpha'), (\beta') \equiv \dots$$

Die wesentliche Verschiedenheit in dem Verhalten der beiden betrachteten Arten von Systemen zeigt sich nun durch folgenden Satz:

III. *Die aus einer ungeraden Anzahl von Charakteristiken bestehenden Systeme zerfallen in zwei völlig getrennte Classen, nämlich je nachdem ihr Zeichen eine der S_p geraden oder aber eine der R_p ungeraden eigentlichen Charakteristiken ist. Die erste Classe besteht aus S_p Unterclassen, die einander in jeder Beziehung vertreten können; die zweite Classe aus R_p Unterclassen, die ebenfalls unter sich völlig gleichwerthig sind.*

Die aus einer geraden Anzahl von Charakteristiken bestehenden Systeme zerfallen in $2^{2p} - 1$ Classen, von denen jede aus gleichviel Systemen, in gleicher Weise geordnet, besteht; den $2^{2p} - 1$ Gruppencharakteristiken entsprechend.

In der That ist es durch die Substitutionen nicht möglich, eine gerade eigentliche Charakteristik in eine ungerade überzuführen. Dagegen kann man irgend eine gerade Charakteristik (α) in die beliebige gerade Charakteristik (β) durch die Substitution $\{\alpha\beta\}$ überführen; und ebenso, wenn (α) und (β) ungerade sind. Alsdann gehen auch alle Systeme von (α) in ebenso geordnete von (β) über. Die gerade Charakteristik (0) ist dabei vor den übrigen in nichts ausgezeichnet. Der letzte Theil des Satzes III. wird sich aus folgendem Satze ergeben:

IV. *Eine Gruppencharakteristik $[r]$ wird durch eine Substitution $\{s\}$ in $[rs]$ übergeführt oder bleibt unverändert, je nachdem $K_{r,s} \equiv 1$ oder $\equiv 0 \pmod{2}$, wo*

$$K_{r,s} = \sum (n^r m^s + n^s m^r)$$

gesetzt ist.

Denn man zerlege $[r]$ etwa in die Summe zweier geraden Charakteristiken:

$$(r) = (\alpha) + (\beta),$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \sum n^\alpha m^\alpha &\equiv \sum n^\beta m^\beta \equiv 0, \\ \sum n^{s\alpha} m^{s\alpha} &\equiv \varepsilon, \quad \sum n^{s\beta} m^{s\beta} \equiv \varepsilon', \end{aligned} \right\} \pmod{2},$$

also:

$$\sum (n^r m^s + n^s m^r) \equiv K_{r,s} \equiv \varepsilon + \varepsilon' \pmod{2},$$

so dass durch $\{s\}$ für $K_{r,s} \equiv 1$ eine der Grössen (α) , (β) , also (r) ,

um (s) vermehrt wird, für $K_{r,s} \equiv 0$ keine oder beide Grössen (α) , (β) , was der Satz IV. ist.

Es muss nun immer Substitutionen geben, welche irgend zwei Gruppencharakteristiken, $[r]$ und $[r']$, in einander überführen. Denn entweder hat man

$$K_{r,r'} \equiv 1 \pmod{2};$$

dann leistet dieses nach IV. die Substitution $\{rr'\}$, da

$$K_{r,rr'} \equiv K_{r,r} + K_{r,r'} \equiv K_{r,r'} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Oder es ist

$$K_{r,r'} \equiv 0 \pmod{2};$$

dann bestimme man einen Zahlencomplex (t) von der Art, dass die Relationen

$$\left. \begin{aligned} K_{r,r'} &= \sum (n^r m^{r'} + n^{r'} m^r) \equiv 0 \\ K_{r,t} &= \sum (n^r m^t + n^t m^r) \equiv 1 \\ K_{r',t} &= \sum (n^{r'} m^t + n^t m^{r'}) \equiv 1 \end{aligned} \right\} \pmod{2}$$

zugleich erfüllt sind, was immer und auf mehrfache Art (s. unten § 2.) möglich ist; dann erreicht man die Ueberführung durch die beiden auf $[r]$ nach einander ausgeführten Substitutionen $\{rt\}$, $\{r't\}$, da durch die erstere Substitution $[r]$ in $[t]$ übergeht, wegen $K_{r,t} \equiv 1$, durch die zweite $[t]$ in $[r']$, wegen $K_{t,r'} \equiv K_{r',t} \equiv 1$. Diese Ueberführung ist dann unmöglich, wenn eine der beiden Gruppencharakteristiken, $[r]$ oder $[r']$, $\equiv 0$ wäre, und dieses bleibt daher ausgeschlossen. Die übrigen $2^{2p} - 1$ Gruppencharakteristiken, mit ihren Systemen, sind aber alle gleichwerthig, wie es der Satz III. aussagt.

§ 2.

Gruppenbeziehungen.

Ueber die *Gruppen* und ihre Beziehungen existirt eine Reihe von Sätzen, die hier abgeleitet werden sollen.

V. Jede Gruppe $[r]$ besteht aus R_{p-1} Paaren von je zwei ungeraden und aus S_{p-1} Paaren von je zwei geraden Charakteristiken.

Denn da sich die R_p ungeraden Charakteristiken auf $\frac{1}{2} R_p (R_p - 1)$ Weisen in Paare combiniren lassen und da jede der $2^{2p} - 1$ Gruppen nach Satz III. gleichviele dieser Paare enthält, so besteht eine Gruppe $[r]$ aus

$$\frac{\frac{1}{2} R_p (R_p - 1)}{2^{2p} - 1} = R_{p-1}$$

solcher Paare. Ebenso folgt der zweite Theil des Satzes.

VI. Zwei Gruppen $[r]$, $[s]$, welche in der Beziehung $K_{r,s} \equiv 1$ stehen, enthalten R_{p-1} ungerade und S_{p-1} gerade Charakteristiken ge-

meinsam. Diese treten zugleich in keiner der beiden Gruppen gepaart auf; d. h. jedes Paar der Gruppe $[r]$ enthält eine Charakteristik, welche zugleich in $[s]$ vorkommt. Drei Gruppen $[r]$, $[s]$, $[rs]$, für welche $K_{r,s} \equiv 1$, enthalten keine Charakteristik gemeinsam.

Der erste Theil dieses Satzes ist nur eine andere Formulirung des ersten Theiles von IV. Der letzte Theil folgt unmittelbar daraus, indem man die Gruppe $[rs]$ durch Verbindung entsprechender Paare von $[r]$ und $[s]$ bildet, auf die Weise:

$$\begin{aligned} [r] &\equiv (\alpha), (\beta) \equiv (\alpha'), (\beta') \equiv \dots, \\ [s] &\equiv (\alpha), (\gamma) \equiv (\alpha'), (\gamma') \equiv \dots, \\ [rs] &\equiv (\beta), (\gamma) \equiv (\beta'), (\gamma') \equiv \dots \end{aligned}$$

VII. Zwei von einander verschiedene Gruppen $[r]$, $[r']$, welche in der Beziehung $K_{r,r'} \equiv 0$ stehen, enthalten, für $p > 1$, $4R_{p-2}$ ungerade und $4S_{p-2}$ gerade Charakteristiken gemeinsam. Dieselben treten in jeder der beiden Gruppen gepaart auf und je 4 der ungeraden ordnen sich zusammen, ebenso je 4 der geraden. In drei Gruppen $[r]$, $[r']$, $[rr']$, für welche $K_{r,r'} \equiv 0$, kommt jede Charakteristik einmal oder dreimal vor, also die zweien gemeinsamen auch in der dritten.

Denn sei (α) irgend eine Charakteristik; so wird die Summe:

$$\begin{aligned} &\sum (n^r m^{\alpha} + n^{r'} m^{\alpha} + n^{rr'} m^{\alpha}) \equiv \\ &\equiv \sum \{n^r m^r + n^{r'} m^{r'} + (n^r m^r + n^{r'} m^{r'}) + (n^r m^{r'} + n^{r'} m^r)\} \\ &+ \sum \{(n^{rr'} m^{\alpha} + n^{\alpha} m^{rr'}) + (n^{r'} m^{\alpha} + n^{\alpha} m^{r'}) + 3n^{\alpha} m^{\alpha}\} \equiv \\ &\equiv \sum n^{\alpha} m^{\alpha} \pmod{2}, \end{aligned}$$

d. h. es sind entweder eine oder drei der Charakteristiken $(r\alpha)$, $(r'\alpha)$, $(rr'\alpha)$ mit (α) zugleich gerade, bezüglich ungerade, was der letzte Theil von VII. ist. Ferner sind die zweien der Gruppen gemeinsamen Charakteristiken in jeder der Gruppen nur gepaart enthalten, nach Satz IV.; man hat also die folgende Bildungsweise, wenn (α) , (β) , (α') , (β') alle gerade oder alle ungerade sind:

$$\begin{aligned} [r] &\equiv (\alpha), (\beta) \equiv (\alpha'), (\beta') \equiv \dots, \\ [r'] &\equiv (\alpha), (\alpha') \equiv (\beta), (\beta') \equiv \dots, \\ [rr'] &\equiv (\beta), (\alpha') \equiv (\alpha), (\beta') \equiv \dots, \end{aligned}$$

wo sich denn (α) , (β) , (α') , (β') zusammenordnen.

Sei endlich μ die Anzahl ungerader, ν die Anzahl gerader Charakteristiken, welche zugleich in $[r]$ und $[r']$, also auch in $[rr']$, enthalten sind, so folgt daraus, dass jede Charakteristik in $[r]$, $[r']$, $[rr']$ einmal oder dreimal auftritt:

$$\mu + 6 \left(R_{p-1} - \frac{\mu}{2} \right) = R_p,$$

$$\nu + 6 \left(S_{p-1} - \frac{\nu}{2} \right) = S_p,$$

woraus

$$\mu = 4 R_{p-2}, \quad \nu = 4 S_{p-2},$$

womit VII. vollständig bewiesen ist.

VIII. Zu einer gegebenen Gruppe $[r]$ giebt es noch 2^{2p-1} Gruppen $[s]$, für welche $K_{r,s} \equiv 1$, und $2^{2p-1} - 2$ Gruppen $[r']$ (wenn man $[r]$ selbst ausschliesst), für welche $K_{r,r'} \equiv 0$. Es giebt $\frac{1}{8} R_{2p}$ Tripel von Gruppen der Art $[r]$, $[s]$, $[r']$, wo $K_{r,s} \equiv 1$.

Denn sei (α) , (β) ein Paar in $[r]$ enthaltener gerader Charakteristiken; eine Gruppe $[s]$ enthält entweder (α) oder (β) , und alle $[s]$ werden gebildet, indem man (α) sowohl als (β) mit allen 2^{2p-2} nicht in $[r]$ enthaltenen geraden Charakteristiken, (γ) , (γ') , $\dots$, zusammensetzt zu

$$[\alpha\gamma], [\beta\gamma], [\alpha\gamma'], [\beta\gamma'], \dots,$$

was $2 \cdot 2^{2p-2}$ Gruppen $[s]$ liefert. Die übrigen Gruppen, ausser $[r]$ selbst, sind Gruppen $[r']$.

IX. Drei Gruppen $[r]$, $[s]$, $[t]$, für welche

$$K_{r,s} \equiv 1, \quad K_{r,t} \equiv 1, \quad K_{s,t} \equiv 1,$$

ohne dass $[t] = [rs]$ ist, haben 2^{2p-1} gerade und 2^{2p-1} ungerade Charakteristiken gemein.

Sei

$$[r] \equiv (\alpha_1), (\beta_1) \equiv \dots \equiv (\alpha_{s_{p-1}}), (\beta_{s_{p-1}}),$$

$$[s] \equiv (\alpha_1), (\gamma_1) \equiv \dots \equiv (\alpha_{s_{p-1}}), (\gamma_{s_{p-1}}),$$

wo die (α) , (β) , (γ) alle gerade sind; so folgt:

$$[rs] \equiv (\beta_1), (\gamma_1) \equiv \dots \equiv (\beta_{s_{p-1}}), (\gamma_{s_{p-1}}).$$

Aber es ist $K_{t,rs} \equiv 0$. Also enthält, nach VII., $[t]$ $2S_{p-2}$ der Grössen (β) und $2S_{p-2}$ der Grössen (γ) , welche in $[rs]$ enthalten sind, und zwar in $2S_{p-2}$ Paaren. Die übrigen 2^{2p-4} Paare müssen aber je eine der $[r]$ und $[s]$ gemeinsamen Charakteristiken (α) enthalten. Ebenso folgt der Satz für die ungeraden Charakteristiken.

X. Zu zwei Gruppen $[r]$, $[r']$, für welche $K_{r,r'} \equiv 0$, giebt es noch 2^{2p-2} Gruppen $[t]$, für welche

$$K_{r,t} \equiv K_{r',t} \equiv 1.$$

Seien nämlich (α) , (β) zwei gerade Charakteristiken, welche ein Paar der Gruppe $[r]$ bilden und zugleich in $[r']$ enthalten sind. Eine Gruppe $[t]$ muss dann entweder (α) oder (β) enthalten, und alle $[t]$ werden gebildet, wenn man einmal (α) , sodann (β) , mit allen geraden Charakteristiken zusammensetzt, welche weder in $[r]$, noch in $[r']$

enthalten sind. Von diesen letzteren Charakteristiken (γ) giebt es, wie aus VII. folgt, 2^{2p-3} ; also sind die Gruppen

$$[\alpha\gamma], [\beta\gamma]$$

d. h. die $[t]$ an Zahl 2^{2p-2} .

Diese Sätze lassen sich nach mehreren Seiten hin vervollständigen. Ich verfolge indessen nur *eine* Richtung weiter, welche zum Hauptsatze meiner Theorie führt.

§ 3.

Zurückführung der Theorie der p -reihigen Charakteristiken auf die der $(p-1)$ -reihigen.

XI. *Es giebt Substitutionen, welche irgend zwei Gruppen $[r]$, $[s]$, für welche $K_{r,s} \equiv 1$, überführen in irgend zwei andere Gruppen $[r']$, $[s']$, für welche $K_{r',s'} \equiv 1$.*

Zunächst ist klar, dass durch eine Substitution die Beziehung $K_{r,s}$ zwischen zwei Gruppen $[r]$, $[s]$ nicht verändert wird, nach der in VI. und VII. gegebenen Bedeutung der Zahl $K_{r,s}$ für $[r]$ und $[s]$. Man mache also zuerst, nach dem am Schlusse von § 1. Entwickelten, eine Substitution, durch welche die Gruppe $[s']$ in $[s]$ übergeführt wird; führt dieselbe Substitution $[r']$ in $[r_1]$ über, so hat man auch $K_{r_1,s} \equiv 1$. Es bleibt dann die Aufgabe, die Gruppen

$$[r_1], [s], \text{ wo } K_{r_1,s} \equiv 1,$$

überzuführen in

$$[r], [s], \text{ wo } K_{r,s} \equiv 1.$$

Entweder ist nun $K_{r,r_1} \equiv 1$. Dann wird die Ueberführung unmittelbar durch die Substitution $\{rr_1\}$ geleistet; denn wegen $K_{r,r_1,s} \equiv 0$ bleibt dabei $[s]$ unverändert.

Oder es ist $K_{r,r_1} \equiv 0$. Dann bestimme man zunächst einen Zahlencomplex $[t]$, für welchen

$$K_{r,t} \equiv K_{r_1,t} \equiv K_{s,t} \equiv 1,$$

was nach dem folgenden Satze immer geschehen kann. Macht man aber die Substitutionen $\{r,t\}$, $\{rt\}$ hintereinander, so erhält man aus $[r_1]$ zuerst $[t]$, sodann $[r]$, während $[s]$ beide Male unverändert bleibt. — Der hierbei benutzte Satz lautet so:

XII. *Zu gegebenen Gruppen*

$$[r], [r_1], [s],$$

für welche:

$$K_{r,r_1} \equiv 0, \quad K_{r,s} \equiv K_{r_1,s} \equiv 1,$$

giebt es 2^{2p-3} Gruppen $[t]$, für welche:

$$K_{r,t} \equiv K_{r_1,t} \equiv K_{s,t} \equiv 1.$$

Denn seien, genau wie bei X., (α) , (β) zwei gerade Charakteristiken, welche ein Paar der Gruppe $[r]$ bilden und zugleich in $[r_1]$ enthalten sind. Die Gruppe $[s]$ wird dann etwa von der Form

$$[s] = [\alpha\gamma_1]$$

sein, wo (γ_1) eine derjenigen geraden Charakteristiken (γ) ist, welche weder in $[r]$, noch in $[r_1]$ enthalten sind. Die Gruppen $[t]$ sind dann, nach X. und VI., in den Formen enthalten:

$$[\beta\delta], [\alpha\delta'],$$

wo (δ) irgend eine solche der oben mit (γ) bezeichneten Charakteristiken ist, die zugleich in $[s]$ enthalten ist, (δ') irgend eine solche der Charakteristiken (γ) , die *nicht* in $[s]$ enthalten ist. Nun giebt es 2^{2p-3} Charakteristiken (γ) , d. h. ebensoviele (δ) und (δ') zusammengenommen; also ebenso viele Gruppen $[\beta\delta]$, $[\alpha\delta']$ oder $[t]$, was der Satz XII. ist. — Man kann noch bemerken, dass es $2S_{p-2}$ Charakteristiken (δ) giebt. —

Der Satz XI. lässt eine sehr wichtige Anwendung zu. Sei

$$[r'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [s'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so sind alle Charakteristiken von der Form:

$$\begin{pmatrix} n_1^\alpha n_2^\alpha \cdots n_{p-1}^\alpha 0 \\ m_1^\alpha m_2^\alpha \cdots m_{p-1}^\alpha 0 \end{pmatrix}$$

sowohl in $[r']$ als in $[s']$ enthalten und stellen überhaupt alle R_{p-1} ungeraden und S_{p-1} geraden Charakteristiken vor, welche $[r']$ und $[s']$, für die $K_{r,s} \equiv 1$, gemeinsam sind. Die Relationen, welche diese Charakteristiken untereinander eingehen, sind genau dieselben, wie diejenigen, welche zwischen den R_{p-1} ungeraden und S_{p-1} geraden $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} n_1^\alpha n_2^\alpha \cdots n_{p-1}^\alpha \\ m_1^\alpha m_2^\alpha \cdots m_{p-1}^\alpha \end{pmatrix}$$

überhaupt existiren, da bei jeder beliebigen Summirung jener Charakteristiken immer wieder eine derselben Art erhalten wird. Aber unsere Substitutionen lassen diese Relationen bestehen, und erlauben nach XI. die Gruppen $[r']$, $[s']$ in irgend zwei Gruppen $[r]$, $[s]$ überzuführen, für welche $K_{r,s} \equiv 1$. Dieses liefert sogleich den Hauptsatz unserer Theorie:

XIII. Die R_{p-1} ungeraden und S_{p-1} geraden p -reihigen Charakteristiken, welche in irgend zwei Gruppen $[r]$, $[s]$, für die $K_{r,s} \equiv 1$, gemeinsam enthalten sind, stehen unter einander genau in denselben Be-

ziehungen, wie die überhaupt existirenden R_{p-1} ungeraden und S_{p-1} geraden $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken.

Dieser Satz kann nun zu einer Eintheilung aller Gruppen benutzt werden, mit Hülfe der in dem folgenden Satze ausgesprochenen Erläuterung:

XIV. Bei dem in XIII. gegebenen Entsprechen treten an Stelle der bei den $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken vorhandenen $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen $[r_1']$ diejenigen $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen $[r_1]$, für welche

$$K_{r,r_1} \equiv K_{s,r_1} \equiv 0.$$

Ebenso wie der Charakter des Geraden oder Ungeraden der eigentlichen Charakteristiken geht dabei auch die Beziehung $K_{r_1',s_1'}$ zwischen zwei Gruppen $[r_1']$, $[s_1']$ aus den $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken in dieselbe Beziehung K_{r_1,s_1} zwischen den unter den p -reihigen Charakteristiken entsprechenden Gruppen $[r_1]$, $[s_1]$ über.

Denn seien die Zerlegungen von $[r]$ und $[s]$ in Paare gerader Charakteristiken:

$$[r] \equiv (\alpha_1), (\beta_1) \equiv \dots \equiv (\alpha_{S_{p-1}}), (\beta_{S_{p-1}}),$$

$$[s] \equiv (\alpha_1), (\gamma_1) \equiv \dots \equiv (\alpha_{S_{p-1}}), (\gamma_{S_{p-1}}).$$

Eine Gruppe $[r_1]$ nun, für welche

$$K_{r,r_1} \equiv K_{s,r_1} \equiv 0,$$

enthält, nach VII., $2S_{p-2}$ der Grössen (α) , und die (β) und (γ) mit gleichem Index. Aber dabei muss nothwendig in $[r_1]$ ein (α_θ) immer mit einem (α_σ) gepaart sein; denn andernfalls wäre $[r_1] \equiv [\alpha_\theta \beta]$ und (β_σ) müsste dann, wegen $K_{s,r} \equiv 0$, auch in $[s]$ enthalten sein; was nicht stattfindet. Man erhält daher alle Gruppen $[r_1]$, indem man irgend zwei der S_{p-1} geraden Charakteristiken (α_θ) , welche $[r]$ und $[s]$ gemeinsam sind, mit einander combinirt. Dies giebt, indem man nach Satz XIII. den für die $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken auszudrückenden Satz II. anwendet, im Ganzen $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen $[r_1]$. In der That liefern je S_{p-2} Combinationen der S_{p-1} Grössen (α) dieselbe Gruppe $[r_1]$, nach VII., und man hat also

$$\frac{S_{p-1}(S_{p-1}-1)}{2 \cdot S_{p-2}} = 2^{2(p-1)} - 1$$

Gruppen $[r_1]$. Der letzte Theil des Satzes XIV. ist eine unmittelbare Folge der Bedeutung der Zahl $K_{r,s}$ für zwei Gruppen $[r_1]$, $[s_1]$, wie sie in VI. und VII. angeführt ist, nämlich, dass von irgend einem Paar $(\alpha_1), (\alpha_2)$ von $[r_1]$ für $K_{r,s} \equiv 1$ nur eine Charakteristik in $[s_1]$ enthalten ist, für $K_{r,s} \equiv 0$ aber beide oder keine.

Man kann hiernach alle Sätze des § 2. unmittelbar so verallgemeinern:

XV. Die S_{p-1} zweien Gruppen $[r], [s]$, für die $K_{r,s} = 1$, gemeinsamen geraden Charakteristiken seien hier mit (a), die R_{p-1} gemeinsamen ungeraden mit (b) bezeichnet. Jede der $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen $[r_1]$, für die

$$K_{r,r_1} \equiv K_{s,r_1} \equiv 0,$$

enthält dann S_{p-2} Paare der (a) und R_{p-2} Paare der (b).

Zwei Gruppen $[r_1], [s_1]$, für welche

$$K_{r,r_1} \equiv K_{s,r_1} \equiv 0, \quad K_{r,s_1} \equiv K_{s,s_1} \equiv 0,$$

und zugleich

$$K_{r_1,s_1} \equiv 1,$$

enthalten S_{p-2} der (a) und R_{p-2} der (b) gemeinsam, und zwar ungepaart in $[r_1]$ und in $[s_1]$. Drei solche Gruppen $[r_1], [s_1], [r_1 s_1]$ enthalten keine Charakteristik (a) oder (b) gemeinsam.

Zwei Gruppen $[r_1], [r_1']$, für welche

$$K_{r,r_1} \equiv K_{s,r_1} \equiv 0, \quad K_{r,r_1'} \equiv K_{s,r_1'} \equiv 0,$$

$$K_{r_1,r_1'} \equiv 0,$$

enthalten, für $p > 2$, $4S_{p-3}$ der (a) und $4R_{p-3}$ der (b) gemeinsam, die in jeder der beiden Gruppen gepaart auftreten.

Zu einer gegebenen Gruppe $[r_1]$ giebt es noch $2^{2(p-1)-1}$ Gruppen der obigen Art $[s_1]$ und $2^{2(p-1)-1} - 2$ Gruppen der Art $[r_1']$. Etc. etc.

§ 4.

Zurückführung auf $(p-\mu)$ -reihige Charakteristiken.

Wendet man die Schlüsse des § 3. auf die Charakteristiken von weniger als p -Reihen an, so ergiebt XIII. und XIV. unmittelbar die Zurückführung der Theorie der p -reihigen Charakteristiken auf die der $(p-\mu)$ -reihigen durch folgenden Satz:

XVI. 2μ Gruppen

$$\begin{array}{ll} [r_1], & [s_1]; \\ [r_2], & [s_2]; \\ \vdots & \vdots \\ [r_\mu], & [s_\mu], \end{array}$$

für welche

$$K_{r_i,s_i} \equiv 1,$$

dagegen

$$K_{r_i,r_k} \equiv K_{s_i,s_k} \equiv K_{r_i,s_k} \equiv 0, \quad (k \geq i),$$

enthalten $S_{p-\mu}$ gerade und $R_{p-\mu}$ ungerade p -reihige Charakteristiken gemeinsam, welche in keiner der Gruppen gepaart auftreten. Die ersteren seien in diesem Paragraphen als (a), die letzteren als (b) bezeichnet. Für diese gemeinsamen Charakteristiken existiren genau dieselben Re-

lationen, wie für die überhaupt vorhandenen $S_{p-\mu}$ geraden und $R_{p-\mu}$ ungeraden $(p-\mu)$ -reihigen Charakteristiken. Insbesondere treten an Stelle der bei diesen existirenden $2^{2(p-\mu)} - 1$ Gruppen die durch Zusammensetzung je zweier der (a) oder je zweier der (b) gebildeten $2^{2(p-\mu)} - 1$ Gruppen, d. h. alle Gruppen $[r_{\mu+1}]$, für welche

$$K_{r_i, r_{\mu+1}} \equiv K_{s_i, r_{\mu+1}} \equiv 0,$$

wo i alle Werthe von 1 bis μ anzunehmen hat.

Man hat hiernach aus der Theorie der $(p-\mu)$ -reihigen Charakteristiken sogleich die weiteren Sätze:

XVII. Jede der in XVI. definirten Gruppen $[r_{\mu+1}]$ enthält $S_{p-\mu-1}$ Paare aus den (a) und $R_{p-\mu-1}$ Paare aus den (b). — Zwei solche Gruppen, $[r_{\mu+1}]$ und $[s_{\mu+1}]$, für die zugleich $K_{r_{\mu+1}, s_{\mu+1}} \equiv 1$, enthalten $S_{p-\mu-1}$ der (a) und $R_{p-\mu-1}$ der (b) gemeinsam, ungepaart in $[r_{\mu+1}]$ und in $[s_{\mu+1}]$; und zu einer gegebenen Gruppe $[r_{\mu+1}]$ giebt es noch $2^{2(p-\mu)-1}$ solcher Gruppen $[s_{\mu+1}]$. — Zwei solche Gruppen, $[r_{\mu+1}]$ und $[r'_{\mu+1}]$, für die $K_{r_{\mu+1}, r'_{\mu+1}} \equiv 0$, enthalten, für $p > \mu + 1$, $4S_{p-\mu-2}$ der (a) und $4R_{p-\mu-2}$ der (b) gemeinsam, die in jeder der beiden Gruppen gepaart auftreten; und jede der (a), (b) tritt entweder in einer der drei Gruppen $[r_{\mu+1}]$, $[r'_{\mu+1}]$, $[r_{\mu+1} r'_{\mu+1}]$ oder in allen dreien zugleich auf.

XVIII. Setzt man die in XVI. definirten Charakteristiken (a) und (b) in irgend einer Weise zu Gruppen zusammen:

$$[a_q a_\sigma], [b_q b_\sigma], [a_q b_\sigma], [a_q b_\sigma], [a_q a_\sigma b_\tau], \dots,$$

so erhält man nur solche Gruppen, welche zu den in XVI. definirten $[r_{\mu+1}]$ gehören. Und setzt man die (a) und (b) in ungerader Anzahl zu neuen Charakteristiken zusammen, so erhält man immer nur wieder solche aus der Reihe der (a), (b). Jede dieser Charakteristiken (a_q) lässt sich auf mehrfache Art in die Form $(b_\sigma b_\tau b_\zeta)$ setzen; und umgekehrt jede (b_q) auf mehrfache Art in die Form $(a_\sigma a_\tau a_\zeta)$. Für $\mu = p - 2$ ist $(b_\sigma b_\tau b_\zeta)$, wenn σ, τ, ζ von einander verschieden sind, immer gerade. Die Summe der Charakteristiken (a) ist 0, ebenso die der (b), ausgenommen für $\mu = p - 1$.

Der letzte Theil des Satzes beweist sich so: Seien $[r_{\mu+1}]$, $[r'_{\mu+1}]$, wo $K_{r_{\mu+1}, r'_{\mu+1}} \equiv 0$, zwei der Gruppen $[r_{\mu+1}]$ des Satzes XVI.; da nach XVII. jede der Grössen (a) in $[r_{\mu+1}]$, $[r'_{\mu+1}]$, $[r_{\mu+1} r'_{\mu+1}]$ einmal oder dreimal auftritt, so folgt durch Summirung der $S_{p-\mu-1}$ Paare von $[r_{\mu+1}]$, welche die Grössen (a) enthalten, zu den analogen Paaren von $[r'_{\mu+1}]$ und $[r_{\mu+1} r'_{\mu+1}]$:

$$\Sigma (a) = (r_{\mu+1}) + (r'_{\mu+1}) + (r_{\mu+1} r'_{\mu+1}) = 0;$$

und ebenso für die Summe aller (b). Nur für $\mu = p - 1$ lassen sich aus den $S_1 = 3$ geraden und $R_1 = 1$ ungeraden Charakteristik nicht

zwei Gruppen $[r_p]$, $[r'_p]$ bilden, für welche $K_{r_p, r'_p} \equiv 0$; und alsdann wird $\Sigma(a) + (b) = 0$.

Für $\mu = p - 2$ hat man $S_3 = 10$ gerade und $R_3 = 6$ ungerade Charakteristiken, (a) bez. (b) , wo $\Sigma(a) = 0$, $\Sigma(b) = 0$. Sei nun (a_σ) irgend ein (a) , (b_σ) irgend ein (b) . Die Gruppe $[a_\sigma b_\sigma]$ enthält dann nach XVII. ein Paar ungerader Charakteristiken (b) : $(b_\tau) + (b_\zeta)$, so dass für jede der 10 Charakteristiken (a_σ) :

$$(a_\sigma) = (b_\sigma b_\tau b_\zeta) = (b_\sigma b_\tau b_\zeta'),$$

wenn

$$(b_\sigma) + (b_\tau) + (b_\zeta) + (b_\sigma') + (b_\tau') + (b_\zeta') = 0.$$

Da umgekehrt aus den sechs Grössen (b) nur 10 von einander verschiedene Combinationen zu 3 möglich sind, so folgt, dass jede solche Combination ein (a) liefert.

Neben diese Sätze über die Charakteristiken (a) , (b) , welche den 2μ Gruppen von XVI. gemeinsam sind, stellt sich nun eine andere Reihe von Sätzen über diejenigen Gruppen, welche diese (a) und (b) ebenfalls sämtlich enthalten oder welche keine von ihnen enthalten. Um diese zu bilden, setzen wir die 2μ Gruppen von XVI. in allen möglichen Combinationen durch Addition zu neuen Gruppen zusammen. Wir unterscheiden dann, ob in dieser Zusammensetzung einer solchen neuen Gruppe die beiden zusammengehörigen Gruppen $[r_i]$, $[s_i]$ zugleich vorkommen, oder nur eine derselben. Jedes Paar $r_i s_i$, das in der Zusammensetzung auftritt, sei ersetzt durch

$$r_i s_i = t_i, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu).$$

Wir haben dann den Satz:

XIX. *Diejenigen aus den 2μ Gruppen von XVI. zusammengesetzten Gruppen, in deren Ausdruck eine gerade Anzahl der $r_i s_i = t_i$ vorkommt, seien mit $[u]$, die übrigen, bei welchen diese Anzahl ungerade ist, mit $[v]$ bezeichnet. Die Charakteristiken (a) und (b) des Satzes XVI. sind dann zugleich alle in sämtlichen Gruppen $[u]$, und zwar ungepaart, enthalten, und in keiner anderen Gruppe. Die Gruppen $[v]$, und nur diese, enthalten keine der Charakteristiken (a) (b) . Von den Gruppen $[u]$ giebt es $S_\mu - 1$, von den Gruppen $[v]$ giebt es R_μ .*

Denn die Charakteristiken (a) (b) kommen, da sie in $[r_i]$ und $[r_k]$ enthalten sind, wegen $K_{r_i, r_k} \equiv 0$ nach VII. auch in $[r_i r_k]$ vor; ebenso, da sie in $[r_i r_k]$ und $[r_l]$ enthalten sind, auch in $[r_i r_k r_l]$, etc.; allgemein in allen Gruppen

$$[r_i r_k r_l r_m \dots] \text{ und } [s_i s_k s_l s_m \dots].$$

Eine Gruppe $[u]$ oder $[v]$ ist nun von der Form:

$$[t_i t_k \dots r_i r_k \dots s_i s_k \dots],$$

entsteht also durch Summierung der beiden Gruppen

$$[r'] = [r_i r_k \dots r_i' r_k' \dots], \quad [s'] = [s_i s_k \dots s_i'' s_k'' \dots],$$

wo die $i, k, \dots, i', k', \dots, i'', k'', \dots$ alle von einander verschieden sind. Für eine Gruppe $[u]$ stehen diese beiden Gruppen $[r'], [s']$ in der Beziehung

$$K_{r', s'} \equiv K_{r_i, s_i} + K_{r_k, s_k} + \dots \equiv 0,$$

daher enthält $[u]$ alle $[r']$ und $[s']$ gemeinsamen Charakteristiken, also auch alle $(a), (b)$. Für eine Gruppe $[v]$ stehen aber $[r'], [s']$ in der Beziehung

$$K_{r', s'} \equiv K_{r_i, s_i} + K_{r_k, s_k} + \dots \equiv 1,$$

und nach VI. kann keine der in $[r'], [s']$ zugleich enthaltenen Charakteristiken, also keine der $(a), (b)$, in $[v]$ enthalten sein. In den Gruppen $[u]$ sind die Grössen $(a), (b)$ nur ungepaart enthalten, da Verbindungen dieser Grössen nach XVIII. nur zu Gruppen $[r_{\mu+1}]$ führen.

Die Gruppen $[u]$ sind alle von einander verschieden, ebenso die $[v]$. Denn wären zwei solche Gruppen einander gleich, so wäre der Ausdruck, der durch deren Summirung entsteht, $= 0$:

$$[t_i t_k \dots r_i' r_k' \dots s_i'' s_k'' \dots] = 0.$$

Aber dieser Ausdruck kann nicht 0 sein, da er immer in die Summe zweier solcher Ausdrücke $[r'], [s']$ zerlegt werden kann, für die $K_{r', s'} \equiv 1$; etwa in

$$[r_i] + [s_i t_k \dots r_i' r_k' \dots s_i'' s_k'' \dots].$$

Um alle Gruppen $[u]$ und $[v]$ zu erhalten, bilde man zunächst diejenigen derselben, $[u'], [v']$, welche durch Zusammensetzung der Gruppenpaare

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2], \dots; [r_{\mu-1}], [s_{\mu-1}]$$

entstehen. Angenommen, dieselben seien an Anzahl $S_{\mu-1} - 1$, bez. $R_{\mu-1}$, was für $\mu = 2$ jedenfalls richtig ist. Man erhält dann alle $[u]$ in den Formen:

$$[u'], [u' r_\mu], [u' s_\mu], [r_\mu], [s_\mu], [v' r_\mu s_\mu],$$

also im Ganzen

$$3(S_{\mu-1} - 1) + 2 + R_{\mu-1} = S_\mu - 1$$

Gruppen $[u]$; und alle Gruppen $[v]$ in den Formen:

$$[v'], [v' r_\mu], [v' s_\mu], [r_\mu s_\mu], [u' r_\mu s_\mu],$$

das sind

$$3 R_{\mu-1} + 1 + (S_{\mu-1} - 1) = R_\mu$$

Gruppen $[v]$.

Dass *nur* die Gruppen $[u]$ und $[v]$ die Eigenschaft haben, alle oder keine der (a) und (b) zu enthalten, wird aus dem Satze XX. gefolgert werden:

XX. Die Charakteristiken $(a), (b)$ und Gruppen $[r_{\mu+1}]$ seien wieder

durch XVI., die Gruppen $[u]$, $[v]$ durch XIX. defnirt. Dann sind die Charakteristiken

$$(a), (ua), (vb)$$

alle von einander verschieden und stellen alle S_p geraden Charakteristiken vor; ebenso sind die

$$(b), (ub), (va)$$

alle von einander verschieden und stellen alle R_p ungeraden Charakteristiken vor. Die Gruppen

$$[u], [v], [r_{\mu+1}], [ur_{\mu+1}], [vr_{\mu+1}]$$

sind ebenfalls alle von einander verschieden und stellen alle $2^{2p} - 1$ Gruppen vor.

Zunächst nämlich sind die in XX. angegebenen Charakteristiken von einander verschieden; denn wäre etwa

$$(ua_\sigma) = (vb_\sigma),$$

so folgte:

$$[uv] = [a_\sigma b_\sigma] = [r_{\mu+1}]$$

nach XVIII. Aber diese Gleichheit ist unmöglich, weil $[uv]$ zu den $[u]$ oder $[v]$ gehört, $[r_{\mu+1}]$ aber nach XVII. nicht. Ebenso folgt die Verschiedenheit der Gruppen; denn etwa aus

$$[ur'_{\mu+1}] = [vr''_{\mu+1}]$$

ergäbe sich

$$[uv] = [r'_{\mu+1} r''_{\mu+1}] = [r_{\mu+1}],$$

was nicht der Fall ist. — Dass man in den in XX. hingeschriebenen Formen sodann *alle* existirenden Charakteristiken und Gruppen vor sich hat, ergibt eine einfache Abzählung, mit Benutzung der Relationen:

$$S_{p-\mu} S_\mu + R_{p-\mu} R_\mu = S_p,$$

$$R_{p-\mu} S_\mu + S_{p-\mu} R_\mu = R_p.$$

Dass, wie XIX. verlangt, die sämtlichen Gruppen, ausser den $[u]$ und $[v]$, immer einen *Theil* der (a) und (b) enthalten, folgt so: Von den Gruppen $[r_{\mu+1}]$ sagt dies Satz XVII. aus; eine Gruppe $[ur_{\mu+1}]$ aber kann nicht alle (a) und (b) enthalten, da dasselbe dann auch, nach VII., wegen $K_{u, r_{\mu+1}} \equiv 0$, wie in $[u]$, auch in $[r_{\mu+1}]$ stattfinden müsste. Ebenso enthält eine Gruppe $[vr_{\mu+1}]$ denjenigen Theil der (a) und (b) , welchen $[r_{\mu+1}]$ enthält, $[v]$ aber nicht enthält, wegen $K_{v, r_{\mu+1}} \equiv 0$ nach VII. ebenfalls nicht. Andere Gruppen, ausser den $[u]$ und $[v]$ selbst, giebt es aber nach XX. nicht.

§ 5.

Beispiel. Anzahl der Gruppensysteme. Substitutionsgruppen.

1. Sei zur Abkürzung*) in diesem § der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & \dots & n_p^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & \dots & m_p^\alpha \end{pmatrix},$$

wenn darin alle Elemente congruent 0 (mod. 2) sind, mit Ausnahme von n_i^α , mit (ϱ_i) , wenn aber alle Elemente mit Ausnahme von m_i^α congruent 0 sind, mit (σ_i) bezeichnet. Die Summe mehrerer solcher Charakteristiken $(\varrho_i), (\varrho_k) \dots (\sigma_i) \dots$ wird wie früher mit $(\varrho_i, \varrho_k, \sigma_i, \dots)$ bezeichnet; und insbesondere soll hierbei überall, wo ein Paar (ϱ_i, σ_i) vereinigt auftritt, dasselbe ersetzt werden durch

$$\varrho_i \sigma_i = \tau_i.$$

Wir nehmen dann, wie beim Beweise des Satzes XIII., § 3., an:

$$[r_1] = [\varrho_p], \quad [s_1] = [\sigma_p];$$

und fügen für die übrigen Gruppen des Satzes XVI. folgende hinzu:

$$[r_2] = [\varrho_{p-1}], \quad [s_2] = [\sigma_{p-1}];$$

$$[r_3] = [\varrho_{p-2}], \quad [s_3] = [\sigma_{p-2}];$$

$$\vdots$$

$$[r_\mu] = [\varrho_{p-\mu+1}], \quad [s_\mu] = [\sigma_{p-\mu+1}].$$

Die in diesen 2μ Gruppen enthaltenen $S_{p-\mu}$ geraden und $R_{p-\mu}$ ungeraden Charakteristiken (a) , bez. (b) , sind diejenigen, welche sich aus

$$(\varrho_1), (\varrho_2), \dots, (\varrho_{p-\mu}),$$

$$(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_{p-\mu})$$

durch Addition zusammensetzen lassen, wenn man noch (0) hinzunimmt. Gerade, (a) , sind dabei diejenigen Charakteristiken, in deren Ausdruck eine gerade Zahl der $\varrho_i \sigma_i = \tau_i$ vorkommt, ungerade, (b) , die übrigen. Die Gruppen $[u]$ und $[v]$, welche alle (a) und (b) oder keine derselben enthalten, setzen sich aus den

$$[\varrho_p], [\varrho_{p-1}], \dots, [\varrho_{p-\mu+1}],$$

$$[\sigma_p], [\sigma_{p-1}], \dots, [\sigma_{p-\mu+1}]$$

durch Addition zusammen, wobei die $[u]$ diejenigen $S_\mu - 1$ sind, in deren Ausdruck eine gerade Anzahl der τ enthalten ist, die $[v]$ die R_μ übrigen Gruppen.

Insbesondere bestehen, für $\mu = p$, die in den $2p$ Gruppen enthaltenen Charakteristiken (a) , (b) aus der einzigen geraden Charak-

*) Vgl. Schottky in der oben citirten Arbeit, pag. 13.

teristik (0); und die *sämmtlichen* Gruppen zerfallen in zwei Classen $[u]$ und $[v]$ von $S_p - 1$ und R_p Gruppen. —

2. Wir leiten jetzt aus den Sätzen des § 4. einige Abzählungen her in Bezug auf die Anzahlen solcher Systeme, wie sie in § 4. betrachtet wurden, und in Bezug auf die zugehörigen Substitutionsgruppen.

XXI. *Von Systemen von μ Gruppenpaaren der Art XVI., § 4., gibt es*

$$M_\mu = \frac{R_{2p} \cdot R_{2(p-1)} \cdots R_{2(p-\mu+1)}}{2^\mu \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu}.$$

Die Anzahl derjenigen Systeme dieser Art, welche zugleich alle dieselben $S_{p-\mu}$ Charakteristiken (a) und $R_{p-\mu}$ Charakteristiken (b) enthalten, beträgt:

$$\begin{aligned} N_\mu &= \frac{(S_\mu - 1) \cdot (S_{\mu-1} - 1) \cdots (S_1 - 1) \cdot 2^{\mu(\mu-2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu} \\ &= \frac{R_\mu R_{2(\mu-1)} \cdot R_{2(\mu-2)} \cdots R_4 \cdot R_2}{2^{\mu-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu}. \end{aligned}$$

Die Anzahl solcher Complexe von $S_{p-\mu}$ geraden und $R_{p-\mu}$ ungeraden Charakteristiken (a), (b), welche überhaupt in irgend einem der Systeme der Art XVI., § 4. enthalten sind, beträgt:

$$\frac{M_\mu}{N_\mu} = \frac{R_{2p} \cdot R_{2(p-1)} \cdots R_{2(p-\mu+1)}}{2 R_\mu \cdot R_{2(\mu-1)} \cdot R_{2(\mu-2)} \cdots R_4 \cdot R_2}$$

(und 1 für $\mu = 0$).

In der That kann man, um ein System der Art XVI., § 4., zu bilden, $[r_1]$ zunächst ganz willkürlich, also auf $2^{2p} - 1$ verschiedene Weisen, $[s_1]$ sodann [s. VIII.] auf 2^{2p-1} Weisen wählen; das Paar $[r_1], [s_1]$ also, da man noch $[r_1]$ mit $[s_1]$ vertauschen kann, auf

$$\frac{(2^{2p} - 1) 2^{2p-1}}{2} = \frac{1}{2} R_{2p}$$

Weisen. Ist $[r_1], [s_1]$ gewählt, so kann dann das Paar $[r_2], [s_2]$ nach XVI. ebenso auf

$$\frac{(2^{2(p-1)} - 1) 2^{2(p-1)-1}}{2} = \frac{1}{2} R_{2(p-1)}$$

Weisen bestimmt werden; alsdann $[r_3], [s_3]$ auf $\frac{1}{2} R_{2(p-2)}$ Weisen, etc. Endlich kann man noch die μ Paare willkürlich permutiren, ohne die gegenseitigen Beziehungen der Paare des Systems, sowie die in den Gruppen des Systems enthaltenen Charakteristiken (a) und (b) zu ändern. Dies giebt die Zahl M_μ .

Die Zahl N_μ folgt aus XIX. Sind nämlich die (a) und (b) gegeben und identisch mit den in XVI. so bezeichneten, so kann man

für die erste Gruppe $[r_1]$ irgend eine der $S_\mu - 1$ Gruppen $[u]$ nehmen; z. B. $[r_1]$ selbst; für die zweite Gruppe $[s_2]$ alsdann irgend eine der Gruppen $[u]$, welche mit der gewählten $[r_1]$ die Beziehung $K_{r_1, u} \equiv 1$ haben, also eine der folgenden

$$[s_1], [s_1 u_1], [r_1 s_1 v_1],$$

wenn man unter $[u_1]$ und $[v_1]$ die aus den $\mu - 1$ Paaren

$$[r_2], [s_2]; \dots [r_\mu], [s_\mu]$$

von XVI. zusammengesetzten Gruppen $[u]$, bez. $[v]$, versteht. D. h. $[s_1]$ kann noch auf $1 + (S_{\mu-1} - 1) + R_{\mu-1} = 2^{2(\mu-1)}$ Weisen gewählt werden. Man kann dann wieder weiter die beiden Gruppen des ersten Paares mit einander vertauschen, also das erste Paar auf $(S_\mu - 1) \cdot 2^{2\mu-3} = R_\mu S_{\mu-1}$ Weisen wählen, das zweite Paar analog dem ersten auf

$$(S_{\mu-1} - 1) 2^{2(\mu-2)-1} = R_{\mu-1} S_{\mu-2}$$

Weisen, dieses mit dem ersten Paar vertauschen, etc.; was, mit Hilfe der Relation $2 R_\mu S_\mu = R_{2\mu}$, N_μ liefert.

Der letzte Theil des Satzes ist evident.

3. Die Eintheilung der Gruppen in Systeme nach XVI. liefert auch sogleich eine *Gruppierung der Substitutionen*, welche die Charakteristikenbeziehungen unverändert lassen.

Seien die sämtlichen Substitutionen mit

$$A, B, C, \dots$$

bezeichnet, und ihre Anzahl sei Z . Diejenigen derselben, welche die beiden Gruppen des Paares $[r_1], [s_1]$ in sich überführen, seien mit

$$A_1, B_1, C_1, \dots,$$

und deren Anzahl mit Z_1 bezeichnet. Nach XI., § 3., kann man das Paar $[r_1], [s_1]$ in jedes andere Paar $[r'_1], [s'_1]$, für das $K_{r'_1, s'_1} \equiv 1$, durch eine Substitution überführen, und zwar $[r_1]$ beliebig in $[r'_1]$ oder in $[s'_1] \cdot [r'_1]$, $[s_1]$ sind dabei (s. 2. § 5.) auf R_{2p} verschiedene Weisen wählbar, und jeder einzelnen entsprechend sei eine bestimmte, im Uebrigen beliebige, Substitution ausgewählt, welche $[r_1]$ in $[r'_1]$, $[s_1]$ in $[s'_1]$ überführt. Diese R_{2p} bestimmten Substitutionen seien mit

$$A, B, \Gamma, \dots$$

bezeichnet. Die Substitutionen $A, B, C, \dots$ sind dann das Product der Substitutionen $A_1, B_1, C_1, \dots$ und $A, B, \Gamma, \dots$, also:

XXII. Die sämtlichen Substitutionen $A, B, C, \dots$ sind in der Form darstellbar:

$$A_1 A, B_1 A, C_1 A, \dots,$$

$$A_1 B, B_1 B, C_1 B, \dots,$$

$$A_1 \Gamma, B_1 \Gamma, C_1 \Gamma, \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

und ihre Anzahl beträgt

$$Z = R_{2p} \cdot Z_1.$$

Auf dieselbe Weise kann man weiter die

$$A_1, B_1, C_1, \dots$$

darstellen als das Product derjenigen Z_2 Substitutionen

$$A_2, B_2, C_2, \dots,$$

welche die Gruppen eines zweiten Paares von XVI., § 4., $[r_2], [s_2]$, in sich überführen, mit solchen $R_{2(p-1)}$ Substitutionen,

$$A_1, B_1, C_1, \dots,$$

durch welche $[r_2], [s_2]$ in jedes Paar $[r_2'], [s_2']$ übergehen, für welches:

$$K_{r_2, s_2'} \equiv 1, \quad K_{r_2', r_1} \equiv K_{r_2', s_1} \equiv K_{s_2', r_1} \equiv K_{s_2', s_1} \equiv 0.$$

Und indem man so fortfährt, kann man endlich die Z_{p-2} Substitutionen, welche die Gruppen der Art XVI.:

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \dots [r_{p-2}], [s_{p-2}]$$

unverändert lassen, darstellen als das Product derjenigen Z_{p-1} Substitutionen, welche unter jenen enthalten sind und zugleich ein weiteres Paar

$$[r_{p-1}], [s_{p-1}]$$

in sich überführen, mit den R_4 Substitutionen, welche dieses Paar in jedes seiner in XVI. gegebenen Definition entsprechende Paar überführen. Aber die Z_{p-1} Substitutionen sind aus denjenigen 3 geraden Charakteristiken $(a_1), (a_2), (a_3)$ zusammensetzen, welche in den Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_{p-1}], [s_{p-1}]$$

enthalten sind, und welche diese 3 Grössen beliebig in einander überführen, was

$$Z_{p-1} = 6 = R_2$$

liefert. Daher hat man als Ergänzung von XXII.:

XXII'. Die Anzahl aller Substitutionen $A, B, C, \dots$ beträgt:

$$Z = R_{2p} \cdot R_{2(p-1)} \dots R_4 \cdot R_2.$$

§ 6.

Charakteristikensysteme.

1. Nach den in § 1. gegebenen Erläuterungen werden Charakteristikensysteme mit besonderen Eigenschaften solche sein, für welche die Summe irgend einer ungeraden Zahl ihrer Charakteristiken einen gegebenen Charakter (des Geraden oder Ungeraden) hat. Zwischen diesen Summen existiren aber Beziehungen.

Sei nämlich erstens ein System von N *geraden* Charakteristiken:

$$(a_1), (a_2), \dots, (a_N)$$

gegeben, für welches, für alle von einander verschiedenen ι, κ, λ

$$(a_\iota a_\kappa a_\lambda)$$

ungerade ist. Zunächst folgt hieraus, dass alle

$$(a_\iota a_\kappa a_\lambda a_\mu a_\nu) \quad (\text{wo } \iota \geq \kappa \geq \lambda \geq \mu \geq \nu)$$

gerade sind. Denn die beiden Gruppen

$$[a_\iota a_\kappa], [a_\lambda a_\mu]$$

stehen in der Beziehung

$$K_{a_\iota a_\kappa, a_\lambda a_\mu} \equiv 0,$$

da von den beiden in $[a_\iota a_\kappa]$ enthaltenen gepaarten Charakteristiken $(a_\iota), (a_\kappa)$, wegen $(a_\lambda a_\mu a_\iota)$ und $(a_\lambda a_\mu a_\kappa)$ *ungerade*, keine in $[a_\lambda a_\mu]$ vorkommt; eine Charakteristik (a_ν) also, die in $[a_\iota a_\kappa]$ und in $[a_\lambda a_\mu]$ nicht enthalten ist, muss nach VII., § 2., in der durch Summierung dieser beiden Gruppen entstehenden Gruppe $[a_\iota a_\kappa a_\lambda a_\mu]$ enthalten sein; d. h. $(a_\iota a_\kappa a_\lambda a_\mu a_\nu)$ wird *gerade*.

Hieraus folgt dann weiter, dass alle aus 7 verschiedenen (a_i) zusammengesetzten Charakteristiken *ungerade* sind. Denn zwei Gruppen

$$[a_\iota a_\kappa], [a_\lambda a_\mu a_\nu a_\rho]$$

haben ebenfalls die Beziehung $K \equiv 0$, da $(a_i), (a_k)$ in beiden Gruppen, und in der ersten gepaart, vorkommen; von dem Paar der zweiten Gruppe

$$(a_\sigma), (a_\lambda a_\mu a_\nu a_\rho a_\sigma)$$

ist daher, wie (a_σ) nicht, so auch $(a_\lambda a_\mu a_\nu a_\rho a_\sigma)$ nicht in der Gruppe $[a_\iota a_\kappa]$ enthalten; d. h. $(a_\iota a_\kappa a_\lambda a_\mu a_\nu a_\rho a_\sigma)$ wird *ungerade*, wenn $\iota, \kappa, \lambda, \dots$ von einander verschieden sind.

Diese Schlüsse lassen sich auf Summen von 9, 11, $\dots$ Charakteristiken (a_i) analog fortsetzen; und es wird die Summe von $4n + 1$ verschiedenen Charakteristiken (a_i) immer *gerade*, die von $4n + 3$ *ungerade*.

Sei zweitens gegeben ein System von N *geraden* Charakteristiken:

$$(c_1), (c_2), \dots, (c_N),$$

und eine *gerade* Charakteristik (c) , für welche

$$(cc_\iota c_\kappa)$$

ungerade ist, für alle $\iota \leq \kappa$. Hieraus folgt, dass alle

$$(c_\iota c_\kappa c_\lambda)$$

ungerade, und dass alle

$$(cc_\iota c_\kappa c_\lambda c_\mu)$$

gerade sind. Denn die beiden Gruppen

$$[cc_i], [c_x c_2]$$

stehen in der Beziehung $K \equiv 0$, weil die in $[c_x c_2]$ gepaarten (c_x) , (c_2) beide nicht in $[cc_i]$ enthalten sind. Die Charakteristik (c) , die in $[cc_i]$ enthalten, in $[c_x c_2]$ nicht enthalten ist, kann daher auch in der Summe der beiden Gruppen $[cc_i c_x c_2]$ nach VII. nicht enthalten sein, d. h. $(c_i c_x c_2)$ ist ungerade. Ferner ist (c_μ) weder in $[cc_i]$, noch in $[c_x c_2]$ enthalten, ist daher in $[cc_i c_x c_2]$ enthalten; d. h. $(cc_i c_x c_2 c_\mu)$ ist gerade. Man schliesst hieraus weiter, dass $(cc_i c_x c_2 c_\mu c_\nu c_\rho)$ ungerade wird, etc.

Wäre hier (c) ungerade und alle $(cc_i c_x)$ gerade, so folgte ganz ebenso, dass alle $(cc_i c_x c_2 c_\mu)$ ungerade, die $(cc_i c_x c_2 c_\mu c_\nu c_\rho)$ gerade etc. würden, und alle $(c_i c_x c_2)$ ungerade.

Insbesondere kann, wenn N ungerade ist, für (c) die Summe

$$(c_1 c_2 \cdots c_N)$$

gegeben sein, und zwar (c) gerade, wenn N von der Form $4n+1$, ungerade, wenn N von der Form $4n+3$.

Genau dieselben Schlüsse, mit Vertauschung von Gerade und Ungerade, finden statt, wenn alle a_i oder c_i ungerade sind. Man hat also den Satz:

XXIII. *Damit in einem System von N geraden [ungeraden] Charakteristiken die Summe von irgend $4n+1$ derselben gerade [ungerade], die Summe von irgend $4n+3$ derselben ungerade [gerade] werde, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung die, dass die Summe je dreier der Charakteristiken ungerade [gerade] werde. Statt dessen genügt auch, dass eine Charakteristik (c) existire, welche mit je zweien der gegebenen Charakteristiken verbunden, immer eine ungerade Summe, wenn (c) gerade ist, oder eine gerade Summe, wenn (c) ungerade ist, liefert. In diesem Falle giebt dann auch (c) , mit irgend $4n$ der Charakteristiken verbunden, eine Summe von demselben Charakter des Geraden oder Ungeraden, wie (c) ; mit $4n+2$ der Charakteristiken verbunden, eine Summe von entgegengesetztem Charakter. Wenn N ungerade, so muss die Summe der N Charakteristiken eine solche Charakteristik (c) sein.*

2. XXIV. *In einem System von $2\pi+1$ geraden [ungeraden] Charakteristiken (c_i) , für welches die Summe je dreier ungerade [gerade] ist, sind die Combinationen derselben zu $1, 3, 5, \dots, 2\pi+1$, ebenso die von $2, 4, \dots, 2\pi$, alle von einander verschieden. Die Combinationen zu $1, 5, 9, \dots$ liefern S_π Charakteristiken, wenn π von der Form $4n$ oder $4n+1$, aber R_π , wenn π von der Form $4n+2$ oder $4n+3$; die Combinationen zu $3, 7, 11, \dots$ liefern in diesen Fällen R_π bez. S_π Charakteristiken. Die Combinationen zu $2, 6, 10, \dots$ liefern R_π Gruppen, wenn π von der Form $4n$ oder $4n+3$, aber S_π , wenn π*

von der Form $4n + 1$ oder $4n + 2$; die Combinationen zu 4, 8, 12, ... liefern in diesen Fällen $S_\pi - 1$, bez. $R_\pi - 1$ Gruppen. Diese $2^{2\pi} - 1$ Gruppen setzen sich schon aus den $2\pi + 1$ Gruppen $[cc_i]$, deren Summe verschwindet, zusammen, wo (c) die Summe der (c_i) vorstellt; die Charakteristiken nur aus den $2\pi + 1$ Grössen (c_i) mit nicht verschwindender Summe.

Denn wären zwei solche Combinationen einander gleich, so würde deren Summe, ein aus einer geraden Anzahl der Charakteristiken zusammengesetzter Ausdruck, zu 0:

$$[c_1 c_2 \cdots c_{2\mu-1} c_{2\mu}] = 0.$$

Wenn aber μ von der Form 2ν , kann diese Gleichung nicht bestehen, weil $(c_{2\mu})$ und $(c_1 c_2 \cdots c_{2\mu-1})$ von entgegengesetztem Charakter sind; und wenn μ von der Form $2\nu + 1$, ebenfalls nicht, weil, unter $(c_{2\mu+1})$ eine weitere von $(c_1), \cdots (c_{2\mu})$ verschiedene Charakteristik des Systems verstanden, $(c_{2\mu+1})$ und $(c_1 c_2 \cdots c_{2\mu} c_{2\mu+1})$ von entgegengesetztem Charakter sind. — Die in dem Satze gegebenen Anzahlen bestimmen sich hiernach durch einfache Abzählung (am einfachsten durch den Schluss von $\pi - 1$ auf π).

3. Nach dem in 2. gegebenen Satz XXIV. wird man, um alle $S_{p-\mu}$ geraden und $R_{p-\mu}$ ungeraden Charakteristiken, (a) bez. (b), zu erhalten, welche in den 2μ Gruppen

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \cdots; [r_\mu], [s_\mu]$$

des Satzes XVI., § 4., enthalten sind, ein System von $2(p - \mu) + 1$ dieser Charakteristiken (a) bilden, für welches die Summe je dreier ungerade; oder ein System von $2(p - \mu) + 1$ der (b), für welches die Summe je dreier gerade ist; und zwar aus den (a) im Falle $p - \mu$ von der Form $4n$ oder $4n + 1$, aus den (b) im Falle $p - \mu$ von der Form $4n + 2$ oder $4n + 3$. Die Combinationen aus den $2(p - \mu) + 1$ Grössen eines Systems liefern dann nämlich nach XVIII., § 4., nur wieder Charakteristiken (a), (b) und Gruppen $[r_{\mu+1}]$; und zwar nach XXIV. jede dieser Charakteristiken und Gruppen, und jede nur einmal.

Dabei ist zu bemerken, dass sich die $2^{2(p-\mu)} - 1$ Gruppen schon aus den Combinationen von $2(p - \mu)$ solchen zusammensetzen, nämlich aus den $[cc_i]$, deren Summe = 0 ist, wenn das System mit

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \cdots (c_{2p-2\mu+1})$$

bezeichnet wird; dass aber die *eigentlichen* Charakteristiken erst aus den $2(p - \mu) + 1$ Grössen (c_i) combinirt werden können, deren Summe nicht verschwindet.

Der Satz XX., § 4., ergibt endlich eine Darstellung für sämtliche 2^{2p} Charakteristiken und $2^{2p} - 1$ Gruppen.

§ 7.

Die Systeme von $2\pi + 1$ Charakteristiken.

Wir beweisen in diesem Paragraphen die Existenz der in 3., § 6. bezeichneten Systeme von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken, für $\mu = p, p-1, \dots, 0$, zugleich mit dem Gesetz ihrer Bildung.

1. Die $2p$ Gruppen (wobei $r_i s_i = t_i$ gesetzt werde):

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \dots; [r_p], [s_p],$$

welche in den Beziehungen

$$K_{r_i, s_i} \equiv 1, \quad K_{r_i, r_k} \equiv K_{r_i, s_k} \equiv K_{s_i, s_k} \equiv 0$$

stehen, haben, nach XVI., eine gerade Charakteristik gemein, die mit (g) bezeichnet sei. (g) repräsentirt für sich eines der gesuchten Systeme, für $\mu = p$.

Hieraus kann man ein System herstellen:

$$(g_1) = (gt_p) \equiv (g), \quad (gr_p), (gs_p),$$

oder abgekürzt:

$$(g_1) \equiv (g_{11}), (g_{12}), (g_{13})$$

bestehend aus 3 geraden Charakteristiken

$$(g_{11}) = (g), \quad (g_{12}) = (gr_p), \quad (g_{13}) = (gs_p),$$

welche, nach XIX., alle in den $2(p-1)$ Gruppen

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \dots; [r_{p-1}], [s_{p-1}]$$

enthalten sind, und deren Summe $(gt_p) = (g_1)$ ungerade ist. Dieses ist also eines der gesuchten Systeme, und zwar für $\mu = p-1$. Die sämtlichen, in den $2(p-1)$ Gruppen enthaltenen Charakteristiken sind in der That:

$$(g), (gr_p), (gs_p), (gt_p).$$

Um aus dem System (g_1) weiter ein System von 5 ungeraden Charakteristiken, für $\mu = p-2$, herzustellen, setzen wir jede der Charakteristiken von (g_1) mit t_{p-1} zusammen, und fügen $(g_1 r_{p-1})$, $(g_1 s_{p-1})$ hinzu. Dies ergibt das System:

$$(g_2) = (g_1) \equiv (g_{11} t_{p-1}), (g_{12} t_{p-1}), (g_{13} t_{p-1}), (g_1 r_{p-1}), (g_1 s_{p-1}),$$

oder abgekürzt:

$$(g_2) \equiv (g_{21}), (g_{22}), (g_{23}), (g_{24}), (g_{25}),$$

bestehend aus 5 ungeraden Charakteristiken (g_2) , welche alle in den $2(p-2)$ Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_{p-2}], [s_{p-2}]$$

enthalten sind, und deren Combinationen zu 3 gerade, zu 5 ungerade sind.

Aus dem System (g_2) ergibt sich weiter ein System für $\mu = p - 3$, wenn man die Charakteristiken von (g_2) unverändert lässt und nur $(g_2 r_{p-2}), (g_2 s_{p-2})$ hinzufügt:

$$(g_2 t_{p-2}) \equiv (g_{21}), (g_{22}), \dots, (g_{25}), (g_2 r_{p-2}), (g_2 s_{p-2})$$

oder abgekürzt:

$$(g_3) \equiv (g_{31}), (g_{32}), \dots, (g_{37}),$$

bestehend aus 7 ungeraden Charakteristiken $(g_{3\alpha})$, welche alle in den $2(p-3)$ Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_{p-3}], [s_{p-3}]$$

enthalten sind, und deren Combinationen zu 3 und 7 gerade, zu 5 ungerade sind.

Aus dem System (g_3) folgt ein System (g_4) , für $\mu = p - 4$:

$$(g_4) = (g_3) \equiv (g_{31} t_{p-3}), (g_{32} t_{p-3}), \dots, (g_{37} t_{p-3}), (g_3 r_{p-3}), (g_3 s_{p-3}),$$

von den in § 6., 3. angezeigten Eigenschaften.

Analog ergeben sich sodann die Systeme für $\mu = p - 4n - 1$, $p - 4n - 2$, $p - 4n - 3$, $p - 4n - 4$ aus einem System für $\mu = p - 4n$. Sei in der That

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu-1)+1})$$

irgend ein System von $2(p-\mu)-1$ Charakteristiken, gebildet aus den in den $2(\mu+1)$ Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]; [r_{\mu+1}], [s_{\mu+1}]$$

(von den in XVI. angegebenen Beziehungen) enthaltenen Charakteristiken; wobei für $p - \mu - 1 = 4n$ oder $4n + 1$ die (c_i) gerade, $(c_i c_x c_2)$ ungerade, für $p - \mu - 1 = 4n + 2$ oder $4n + 3$ aber die (c_i) ungerade, $(c_i c_x c_2)$ gerade sein sollen.

Sei nun erstens $p - \mu - 1$ gerade: dann hat man in

$$(c t_{\mu+1}) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu-1)+1}), (c r_{\mu+1}), (c s_{\mu+1})$$

ein System von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken der gesuchten Art. Dieses sind nämlich, für $p - \mu - 1 = 4n [4n + 2]$, $2(p-\mu) + 1$ gerade [ungerade] Charakteristiken, für welche die Summe je dreier ungerade [gerade] ist, da nach XXIII. die $(c c_i c_x)$ ungerade [gerade] sind, also auch nach XIX., die

$$(c r_{\mu+1} c_i c_x), (c s_{\mu+1} c_i c_x), (t_{\mu+1} c_i),$$

und welche in den Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]$$

enthalten sind.

Sei zweitens $p - \mu - 1$ ungerade: dann wird

$$(c) \equiv (c_1 t_{\mu+1}), (c_2 t_{\mu+1}), \dots, (c_{2(p-\mu-1)+1} t_{\mu+1}), (c r_{\mu+1}), (c s_{\mu+1})$$

ein System der gesuchten Art. Denn man hat hier, für $p - \mu - 1 = 4n + 1$ $[4n + 3] 2(p - \mu) + 1$ ungerade [gerade] Charakteristiken, welche in den Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]$$

enthalten sind, und für welche die Summe je dreier gerade [ungerade] ist, da nach XXIII. und XIX. die

$$(c_i c_x c_{\lambda} t_{\mu+1}), (c c_i c_x),$$

also auch die

$$(c c_i c_x r_{\mu+1}), (c c_i c_x s_{\mu+1})$$

gerade [ungerade] werden.

2. Wir können jetzt zeigen, dass auch umgekehrt jedes System der Art 3. § 6., gebildet aus $2(p - \mu) + 1$ Charakteristiken, die in den μ Gruppenpaaren der Art XVI., $[r_i], [s_i]$, enthalten sind, auf die in Nr. 1. dieses Paragraphen gegebene Weise aus einem solchen System von $2(p - \mu) - 1$ Charakteristiken, die in $\mu + 1$ Gruppenpaaren der Art XVI. enthalten sind, abgeleitet werden kann.

Seien die μ Gruppenpaare

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu],$$

und das System, gebildet aus in diesen Gruppen enthaltenen Charakteristiken:

$$(d) \equiv (d_1), (d_2), \dots, (d_{2(p-\mu)+1}).$$

Die beiden Gruppen

$$[d d_{2(p-\mu)}] \equiv [r_{\mu+1}], [d d_{2(p-\mu)+1}] \equiv [s_{\mu+1}]$$

gehören zunächst zu den in XVI. definierten Gruppen $[r_{\mu+1}]$, welche zu den obigen 2μ Gruppen die Beziehung $K \equiv 0$ haben (nach XVIII.). Ferner ist $K_{r_{\mu+1}, s_{\mu+1}} \equiv 1$, da (d) und $(d d_{2(p-\mu)} d_{2(p-\mu)+1})$ von ungleichem Charakter sind, also von der Zerlegung der Gruppe

$$[r_{\mu+1} s_{\mu+1}] = [t_{\mu+1}],$$

$$[t_{\mu+1}] \equiv (d_{2(p-\mu)}), (d_{2(p-\mu)+1})$$

nur eine der beiden Charakteristiken in $[r_{\mu+1}]$ enthalten ist. Man hat daher $\mu + 1$ Gruppenpaare der Art XVI.:

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]; [r_{\mu+1}], [s_{\mu+1}].$$

Ist nun erstens $p - \mu$ ungerade, so sind

$$(d t_{\mu+1}) \equiv (d_1), (d_2), \dots, (d_{2(p-\mu-1)+1})$$

alle in $[r_{\mu+1}]$ und in $[s_{\mu+1}]$ enthalten, da dann $(d d_i d_x)$ mit (d_i) zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. Diese $2(p - \mu) - 1$ Charakteristiken bilden das gesuchte System, enthalten in den obigen $\mu + 1$ Gruppenpaaren.

Ist zweitens $p - \mu$ gerade, so sind

$$(d) \equiv (d_1 t_{\mu+1}), (d_2 t_{\mu+1}), \dots, (d_{2(p-\mu)+1} t_{\mu+1})$$

alle in $[r_{\mu+1}]$ und in $[s_{\mu+1}]$ enthalten, da dann $(dd_1 d_x)$ und $(d_1 d_x d_2)$ zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. Diese $2(p-\mu) - 1$ Charakteristiken bilden alsdann das verlangte System, welches in den obigen $\mu + 1$ Gruppenpaaren enthalten ist.

3. Man kann endlich zeigen, dass jedes System von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken, welche für $p - \mu = 4n$ oder $4n + 1$ gerade, für $p - \mu = 4n + 2$ oder $4n + 3$ ungerade sind, und für welche die Summe je dreier ungerade, bez. gerade ist, zugleich eines der in diesem Paragraphen betrachteten ist; d. h. dass jedes solche System aus Charakteristiken besteht, welche in μ Gruppenpaaren der Art XVI. enthalten sind.

Für $\mu = p$ ist dieses der Fall. Wir nehmen daher an, dass die Behauptung für die Systeme von $2(p-\mu) - 1$ Charakteristiken richtig ist, um sie hieraus für die von $2(p-\mu) + 1$ zu beweisen.

Sei das System von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken:

$$(d) \equiv (d_1), (d_2), \dots, (d_{2(p-\mu)+1});$$

so folgt zunächst, wie in 2. dieses Paragraphen, dass die beiden Gruppen

$$[dd_{2(p-\mu)}] = [r_{\mu+1}], \quad [dd_{2(p-\mu)+1}] = [s_{\mu+1}]$$

in der Beziehung $K_{r_{\mu+1}, s_{\mu+1}} \equiv 1$ stehen.

Ist sodann wieder erstens $p - \mu$ ungerade, so sind die Charakteristiken des Systems

$$(dt_{\mu}) \equiv (d_1), (d_2), \dots, (d_{2(p-\mu)-1}),$$

sowie deren Combinationen zu 3, 5, ... alle in $[r_{\mu+1}]$ und in $[s_{\mu+1}]$ enthalten. Für dieses System gilt aber die obige Annahme; es existiren also $\mu + 1$ Gruppenpaare, von der Art XVI., welche alle $S_{p-\mu-1}$ geraden und $R_{p-\mu-1}$ ungeraden Charakteristiken, die durch diese Combinationen entstehen, enthalten. Und für eines dieser Paare kann (vgl. die Bestimmung der Zahl N_{μ} in Satz XXI.) $[r_{\mu}]$, $[s_{\mu}]$ genommen werden. Die übrigen Gruppenpaare sein:

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \dots; [r_{\mu}], [s_{\mu}],$$

wo

$$K_{r_{\mu+1}, r_1} \equiv K_{s_{\mu+1}, r_1} \equiv K_{r_{\mu+1}, r_2} \equiv \dots \equiv K_{s_{\mu+1}, s_{\mu}} \equiv 0.$$

Es bleibt dann nur noch übrig zu zeigen, dass, ebenso wie

$$(d_1), (d_2), \dots, (d_{2(p-\mu)-1}),$$

so auch $(d_{2(p-\mu)})$ und $(d_{2(p-\mu)+1})$ in jeder dieser 2μ Gruppen enthalten sind.

Nun stehen aber die beiden Gruppen $[r_1]$ und

$$[s_{\mu+1}] \equiv (d_{2(p-\mu)}), (dt_{\mu+1})$$

in der Beziehung $K_{r_1, s_{\mu+1}} \equiv 0$; und da $[r_1]$ die Charakteristik $(dt_{\mu+1})$, die Summe der obigen $2(p-\mu) - 1$ Charakteristiken, enthält, so muss auch die in $[s_{\mu+1}]$ damit gepaarte Charakteristik $(d_{2(p-\mu)})$ in $[r_1]$ vorkommen; ebenso in $[s_1]$, etc. Dasselbe gilt für $(d_{2(p-\mu)+1})$.

Ist zweitens $p - \mu$ gerade, so ist der analoge Schluss auf das System

$$(d) \equiv (d_1 t_{\mu+1}), (d_2 t_{\mu+1}), \dots, (d_{2(p-\mu)-1} t_{\mu+1})$$

anzuwenden. Da nämlich, wenn $[r_1]$ wie oben bestimmt ist, $(d_1 t_{\mu+1})$ in $[r_1]$ enthalten ist, so hat man:

$$\begin{aligned} \sum (n^{d_1 r_1} m^{d_1 r_1} + n^{d_1} m^{d_1}) &\equiv \sum (n^{d_1 r_1 t_{\mu+1}} m^{d_1 r_1 t_{\mu+1}} + n^{d_1 t_{\mu+1}} m^{d_1 t_{\mu+1}}) \\ &+ \sum (n^{r_1} m^{t_{\mu+1}} + n^{t_{\mu+1}} m^{r_1}) \equiv 0, \end{aligned}$$

d. h. (d_1) ist ebenfalls in $[r_1]$ enthalten. Für $(d_{2(p-\mu)})$ folgt dasselbe ähnlich wie oben.

4. Die Resultate dieses Paragraphen lassen sich so aussprechen:

XXV. In jedem System von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken, deren Combinationen

$$\begin{aligned} \text{für } p - \mu = 4n \text{ oder } 4n + 1 &\quad \begin{cases} \text{zu } 1, 5, 9, \dots \text{ gerade Summen,} \\ \text{zu } 3, 7, 11, \dots \text{ ungerade Summen,} \end{cases} \\ \text{für } p - \mu = 4n + 2 \text{ oder } 4n + 3 &\quad \begin{cases} \text{zu } 1, 5, 9, \dots \text{ ungerade Summen,} \\ \text{zu } 3, 7, 11, \dots \text{ gerade Summen} \end{cases} \end{aligned}$$

liefern (wo $\mu = 0, 1, \dots$, oder p sein kann), wozu die hinreichenden Bedingungen in XXIII., § 6. angegeben sind, geben diese sämtlichen Combinationen solche $S_{p-\mu}$ gerade Charakteristiken (a) und $R_{p-\mu}$ ungerade Charakteristiken (b), und zwar jede nur einmal, welche in einem System von μ Gruppenpaaren der Art XVI.:

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \dots; [r_\mu], [s_\mu],$$

wo

$$K_{r_i, s_i} \equiv 1; \quad K_{r_i, r_k} \equiv K_{r_i, s_k} \equiv K_{s_i, s_k} \equiv 0; \quad [r_i s_i] = [t_i],$$

enthalten sind. Daher erhalten sämtliche 2^{2p} Charakteristiken und $2^{2p} - 1$ Gruppen die Darstellung XX., § 4. Man stellt ein solches System von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken her, indem man von einem System von $\mu + 1$ Gruppenpaaren der Art XVI.:

$$[r_1], [\mu_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]; [r_{\mu+1}], [s_{\mu+1}]$$

ausgeht, aus den darin enthaltenen Charakteristiken ein der obigen Definition entsprechendes System von $2(p-\mu) - 1$ Charakteristiken

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)-1})$$

herausnimmt und hieraus das System bildet:

1) wenn $p - \mu$ ungerade:

$$(ct_{\mu+1}) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)-1}), (cr_{\mu+1}), (cs_{\mu+1});$$

2) wenn $p - \mu$ gerade:

$$(c) \equiv (c_1 t_{\mu+1}), (c_2 t_{\mu+1}), \dots, (c_{2(p-\mu)-1} t_{\mu+1}), (cr_{\mu+1}), (cs_{\mu+1}).$$

Auf diesem Wege ergeben sich auch alle Systeme. In dem Falle 2), wenn $p - \mu$ gerade ist, kann man auch die $2(p - \mu + 1)$ Charakteristiken:

$$(c), (c_1 t_{\mu+1}), (c_2 t_{\mu+1}), \dots, (c_{2(p-\mu)-1} t_{\mu+1}), (cr_{\mu+1}), (cs_{\mu+1}) \equiv 0$$

zu einem System von der Summe 0 zusammenfassen.

§ 8.

Die „ausgezeichneten“ Systeme von $2p + 1$ Charakteristiken.

1. Unter den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Systemen von $2(p - \mu) + 1$ Charakteristiken sind diejenigen für $\mu = 0$, also von $2p + 1$ Charakteristiken, ausgezeichnet, insofern nämlich die Combinationen der $2p + 1$ Charakteristiken eines solchen Systems *alle* überhaupt existirenden Charakteristiken und Gruppen, und *jede nur einmal*, liefern. Solche $2p + 1$ Charakteristiken eignen sich also, da weiter aus der Zusammensetzung ihrer Combinationen unmittelbar deren Eigenschaft als *Gruppen* — oder als *eigentliche*, und zwar als *gerade* oder als *ungerade eigentliche Charakteristik* zu erkennen ist, am besten zur Darstellung aller Beziehungen zwischen den Charakteristiken; und ihre Systeme mögen daher als „ausgezeichnete“ bezeichnet werden. — Es ist dabei zu betonen, dass sämtliche $2^{2p} - 1$ *Gruppencharakteristiken* sich schon aus $2p$ solchen darstellen, nämlich aus den Combinationen von $2p + 1$ Gruppen $[cc_i]$, deren Summe $\equiv 0$ ist, wenn das ausgezeichnete System mit

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2p+1})$$

bezeichnet wird; dass aber, was ebenso wesentlich ist, die *eigentlichen* Charakteristiken aus nicht weniger als $2p + 1$ solchen dargestellt werden können.

XXVI. Definiert man ein System von (für $p = 4n$ oder $4n + 1$) geraden [(für $p = 4n + 2$ oder $4n + 3$) ungeraden] Charakteristiken:

$$(c_1), (c_2), \dots, (c_{2p+1})$$

durch die Bedingung, dass eine Charakteristik (c) existire, für welche alle

$$(cc, c_x)$$

von entgegengesetztem Charakter (des Geraden oder Ungeraden) sind, wie (c) , so hat man dieses System als ausgezeichnetes und zugleich als „vollständiges“ zu bezeichnen; nämlich von der Art, dass keine $2(p + 1)$ “

gerade [ungerade] Charakteristik $c_{2(p+1)}$ hinzugefunden werden kann, für welche alle

$$(cc_1c_{2(p+1)})$$

von entgegengesetztem Charakter wie (c) sind. Zugleich wird (c) gleich der Summe der Charakteristiken.

Denn nach XXIII., § 6., folgt aus dieser Definition, dass alle

$$(c_1c_2c_3)$$

ungerade [gerade] sind; dass also das System eines unserer „ausgezeichneten“ ist. Hiernach lassen sich alle Charakteristiken aus den $2p + 1$ Grössen des Systems zusammensetzen, woraus sogleich hervorgeht, dass keine andere Zusammensetzung, als die Summe der $2p + 1$ Charakteristiken, die von (c) geforderte Eigenschaft hat. Eine weitere $2(p + 1)^{\text{te}}$ Charakteristik kann dann nach dieser Definition nicht zu dem System von $2p + 1$ Grössen hinzutreten. Denn diese wäre entweder die Summe (c) selbst: dann aber müssten (c) und (c_1) von gleichem Charakter, aber auch, wegen (c) und $(ccc_1) = (c_1)$, von entgegengesetztem Charakter sein; oder die hinzutretende Charakteristik wäre von (c) verschieden: dann würden die Combinationen der $2(p + 1)$ Charakteristiken, genau wie in 2. § 6. folgt, alle von einander verschieden sein und mehr als S_p gerade und R_p ungerade Charakteristiken liefern, was nicht existirt.

XXVI. Definirt man dagegen das ausgezeichnete System

$$(c_1), (c_2), \dots, (c_{2p+1})$$

durch die Bedingungen, dass alle

$$(c_1) \text{ gerade [ungerade],} \\ (c_1c_2c_3) \text{ ungerade [gerade]}$$

sein sollen, so kann dasselbe nur für ungerade p als „vollständig“ bezeichnet werden. Für gerade p dagegen tritt noch eine $2(p + 1)^{\text{te}}$ Charakteristik hinzu, welche den gegebenen Bedingungen genügt: die Summe (c) der $2p + 1$ Charakteristiken; so dass für gerade p die „vollständigen“ Systeme aus $2p + 2$ Charakteristiken von der Summe 0 bestehen:

$$0 \equiv (c), (c_1), (c_2), \dots, (c_{2p+1}),$$

wo die

(c_1) für $p = 4n$ gerade, für $p = 4n + 2$ ungerade,
 $(c_1c_2c_3)$ „ „ ungerade, „ „ gerade
 sind, wenn ι, κ, λ alle von einander verschiedenen Werthe

$$0, 1, \dots, 2p + 1$$

annehmen.

Denn (c) selbst ist nur für gerade p mit den c_i zugleich gerade oder ungerade; eine von (c) verschiedene Charakteristik kann aber, wie beim Beweise von XXVI. bemerkt ist, nicht hinzutreten.

2. Wir geben noch ein *Beispiel* zu diesen ausgezeichneten Systemen, indem wir das Beispiel § 5., 1. mit der dortigen Bezeichnung weiter entwickeln.

In den $2p$ Gruppenpaaren:

$$[\varrho_p], [\sigma_p]; [\varrho_{p-1}], [\sigma_{p-1}]; \dots; [\varrho_1], [\sigma_1]$$

ist allein die gerade Charakteristik (0) enthalten. Hieraus ergeben sich nach § 7. der Reihe nach folgende Systeme von $3, 5, 7, \dots, 2p+1$ Charakteristiken:

$$\begin{aligned} (\tau_1) &\equiv (0), (\varrho_1), (\sigma_1); \\ (\tau_1) &\equiv (\tau_2), (\varrho_1 \tau_2), (\sigma_1 \tau_2), (\tau_1 \varrho_2), (\tau_1 \sigma_2); \\ (\tau_1 \tau_3) &\equiv (\tau_2), (\varrho_1 \tau_2), (\sigma_1 \tau_2), (\tau_1 \varrho_2), (\tau_1 \sigma_2), (\tau_1 \varrho_3), (\tau_1 \sigma_3); \\ (\tau_1 \tau_3) &\equiv (\tau_2 \tau_4), (\varrho_1 \tau_2 \tau_4), (\sigma_1 \tau_2 \tau_4), (\tau_1 \varrho_2 \tau_4), (\tau_1 \sigma_2 \tau_4), (\tau_1 \varrho_3 \tau_4), \\ &\quad (\tau_1 \sigma_3 \tau_4), (\tau_1 \tau_3 \varrho_4), (\tau_1 \tau_3 \sigma_4); \\ (\tau_1 \tau_3 \tau_5) &\equiv (\tau_2 \tau_4), (\varrho_1 \tau_2 \tau_4), (\sigma_1 \tau_2 \tau_4), (\tau_1 \varrho_2 \tau_4), (\tau_1 \sigma_2 \tau_4), (\tau_1 \varrho_3 \tau_4), \\ &\quad (\tau_1 \sigma_3 \tau_4), (\tau_1 \tau_3 \varrho_4), (\tau_1 \tau_3 \sigma_4), (\tau_1 \tau_3 \varrho_5), (\tau_1 \tau_3 \sigma_5); \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz dieser Systeme wird klarer, wenn man die Summe eines solchen zu seinen sämtlichen Charakteristiken hinzuaddirt. So erhält man aus dem System von 11 Charakteristiken mit Summe $(\tau_1 \tau_3 \tau_5)$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5], [\varrho_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5], [\varrho_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5], [\varrho_3 \tau_4 \tau_5], [\varrho_4 \tau_5], [\varrho_5], \\ &\quad [\sigma_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5], [\sigma_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5], [\sigma_3 \tau_4 \tau_5], [\sigma_4 \tau_5], [\sigma_5], \end{aligned}$$

Gruppen, welche alle zu zwei die Beziehung $K \equiv 1$ zu einander haben. Man bilde ebenso allgemein die $2p+1$ Gruppen von der Beziehung $K \equiv 1$:

$$\begin{aligned} [\tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots \tau_p], [\varrho_1 \tau_2 \tau_3 \dots \tau_p], [\varrho_2 \tau_3 \tau_4 \dots \tau_p], \dots, [\varrho_{p-1} \tau_p], [\varrho_p], \\ [\sigma_1 \tau_2 \tau_3 \dots \tau_p], [\sigma_2 \tau_3 \tau_4 \dots \tau_p], \dots, [\sigma_{p-1} \tau_p], [\sigma_p], \end{aligned}$$

und addire zu jeder Gruppe die Charakteristik

$$\begin{aligned} (\tau_1 \tau_3 \tau_5 \dots \tau_{p-1}), &\text{ wenn } p \text{ gerade,} \\ (\tau_1 \tau_3 \tau_5 \dots \tau_p), &\text{ „ „ ungerade,} \end{aligned}$$

so erhält man ein ausgezeichnetes System von $2p+1$ Charakteristiken mit Summe $(\tau_1 \tau_3 \dots \tau_{p-1})$, bez. $(\tau_1 \tau_3 \dots \tau_p)$.*)

Um hieraus sämtliche existirende ausgezeichnete Systeme zu erhalten, kann man auf das vorliegende System die in § 5. 3. entwickelten Substitutionen ausführen, und erhält dann, wenn (g) die in einem System von p Gruppenpaaren der Art XVI.

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_p], [s_p],$$

*) Solcher Art ist das von Weierstrass, Königsberger, Prym und Schottky, an den citirten Orten, benutzte System.

enthaltene *eine* gerade Charakteristik vorstellt, das allgemeinste System in der Form:

$$[t_p t_{p-1} t_{p-2} \cdots t_1], [r_p t_{p-1} t_{p-2} \cdots t_1], [r_{p-1} t_{p-2} t_{p-3} \cdots t_1], \dots, [r_2 t_1], [r_1], \\ [s_p t_{p-1} t_{p-2} \cdots t_1], [s_{p-1} t_{p-2} t_{p-3} \cdots t_1], \dots, [s_2 t_1], [s_1],$$

wo noch zu jeder dieser $2p + 1$ Gruppen die Charakteristik

$$(gt_2 t_4 \cdots t_p), \text{ wenn } p \text{ gerade,}$$

$$(gt_1 t_3 \cdots t_p), \text{ wenn } p \text{ ungerade,}$$

zu addiren ist.

§ 9.

Weitere Charakteristikensysteme.

Ausser den in § 7. gegebenen Systemen von $2\pi + 1$ Charakteristiken existiren noch weitere: 1) solche von ebensovielen Charakteristiken, aber von entgegengesetztem Charakter des Geraden oder Ungeraden, wie die dortigen; für $\pi = 0, 1, \dots, p - 1$; 2) solche, die aus einer geraden Anzahl von Charakteristiken bestehen.

1) Sei

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)+1})$$

eines unserer früheren Systeme von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken, gebildet aus den in den 2μ Gruppen

$$[r_1], [\hat{s}_1]; \dots; [r_{\mu-1}], [s_{\mu-1}]; [r_\mu], [s_\mu]$$

enthaltenen Charakteristiken. Man hat dann in

$$(ct_\mu) \equiv (c_1 t_\mu), (c_2 t_\mu), \dots, (c_{2(p-\mu)+1} t_\mu)$$

ein System von $2(p-\mu) + 1$ Charakteristiken der gesuchten Art, wo μ die Werthe $p - 1, \dots, 2, 1$ annehmen kann.

Dass auf diese Weise alle solche Systeme erhalten werden, ergiebt sich durch den Uebergang von $\mu + 1$ auf μ , genau wie in § 7., 2. und 3.

Im Falle hier $p - \mu$ gerade ist, ist die Summe (ct_μ) mit den $(c_1 t_\mu)$ zugleich gerade oder zugleich ungerade; man hat also in

$$0 \equiv (ct_\mu), (c_1 t_\mu), (c_2 t_\mu), \dots, (c_{2(p-\mu)+1} t_\mu)$$

ein System von $2(p-\mu+1)$ Charakteristiken, die von entgegengesetztem Charakter sind, wie die der entsprechenden Systeme des § 7., 4., und die Summe 0 geben.

2) Ausser den schon in § 7., 4. und in diesem § 1) enthaltenen Systemen, die aus einer *geraden* Anzahl von Charakteristiken bestehen — nämlich solchen, die aus $4n + 2$ Charakteristiken bestehen, deren Summe $= 0$ ist —, lassen sich noch weitere bilden.

Seien die

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)+1}),$$

und die Gruppen

$$\{r_1\}, \{s_1\}; \dots; \{r_\mu\}, \{s_\mu\},$$

wie oben in 1) definiert.

Ist nun *erstens* $p - \mu$ ungerade, so hat man in

$$[t_\mu] \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)+1}), (ct_\mu)$$

ein System von $2(p-\mu+1)$ Charakteristiken (gerade für $p-\mu=4n+1$, ungerade für $p-\mu=4n+3$), die alle in den Gruppen

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_{\mu-1}], [s_{\mu-1}]$$

enthalten sind, deren Summe nicht verschwindet, und die, zu 3 combinirt, Summen von entgegengesetztem Charakter liefern, als die (c_i) . Dies gilt für $\mu = p-1, p-3, \dots, 2$ bez. 1. Ferner hat man in

$$[t_\mu] \equiv (c_1 t_\mu), (c_2 t_\mu), \dots, (c_{2(p-\mu)+1} t_\mu), (c)$$

ein analoges System von $2(p-\mu+1)$ Charakteristiken, die für $p-\mu=4n+1$ ungerade, für $p-\mu=4n+3$ gerade sind.

Ist *zweitens* $p - \mu$ gerade, so erhält man durch analoges Verfahren nur wieder die schon oben betrachteten Systeme mit Summe 0, oder die folgenden:

$$[r_\mu] \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)+1}), (cr_\mu), \quad \text{wo } \mu \geq 1,$$

$$[t_{\mu-1} t_\mu] \equiv (c_1 t_\mu), (c_2 t_\mu), \dots, (c_{2(p-\mu)+1} t_\mu), (ct_{\mu-1}), \quad \text{wo } \mu \geq 2.$$

Ist insbesondere p gerade, und setzt man $\mu = 1$, so ergibt sich aus dem ersten Falle ein System

$$[d] \equiv (d_1), (d_2), \dots, (d_{2p})$$

von $2p$ Charakteristiken, die für $p=4n$ ungerade, für $p=4n+2$ gerade sind. Dies System ist zugleich ein *vollständiges*, insofern keine weitere ungerade [gerade] Charakteristik (d_{2p+1}) hinzugefunden werden kann, für welche alle

$$(d, d_{2p+1})$$

gerade [ungerade] sind; denn andernfalls würden die Combinationen des Systems nach XXIV. mehr Charakteristiken liefern, als überhaupt existiren.

Fasst man alles zusammen, so ergibt sich, dass überhaupt folgende Systeme existiren, in denen immer die Summen je dreier Charakteristiken von entgegengesetztem Charakter sind, als die Charakteristiken selbst:

XXVII. *Es giebt, für jedes p , Systeme von $2\pi+1$ geraden und Systeme von $2\pi+1$ ungeraden Charakteristiken, für $\pi=0, 1, \dots, p-1$; und ebensolche Systeme von 2π Charakteristiken, deren Summe nicht $=0$ ist. Ferner existiren für jedes p Systeme von $4\pi+2$ geraden und von $4\pi+2$ ungeraden Charakteristiken, deren Summe $=0$ ist, für $\pi=1, 2, \dots, \frac{p-2}{2}$, bez. $\frac{p-1}{2}$. Dazu kommen noch:*

1) für $p = 4n [4n + 2]$ die ausgezeichneten Systeme von $2p + 1$ geraden [ungeraden] Charakteristiken, die vollständigen Systeme von $2p + 2$ geraden [ungeraden] Charakteristiken, deren Summe $= 0$ ist, und die vollständigen Systeme von $2p$ ungeraden [geraden] Charakteristiken, deren Summe nicht $= 0$ ist;

2) für $p = 4n + 1 [4n + 3]$: die ausgezeichneten und zugleich vollständigen Systeme von $2p + 1$ geraden [ungeraden] Charakteristiken.

§ 10.

Anzahl der Charakteristikensysteme.

Wir bestimmen hier die Anzahl der verschiedenen, in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Charakteristikensysteme. Hierzu führt die dort ausgeführte Bildungsweise dieser Systeme.

1. Die Anzahl der in § 7. behandelten Systeme von $2(p - \mu) + 1$ Charakteristiken, die für $p - \mu = 4n, 4n + 1$ gerade, für $p - \mu = 4n + 2, 4n + 3$ ungerade sind, sei L_μ . Sei ein solches System von $2(p - \mu) - 1$ Charakteristiken:

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)-1}),$$

enthalten in den $\mu + 1$ Gruppenpaaren:

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]; [r_{\mu+1}], [s_{\mu+1}].$$

Diese $2(p - \mu) - 1$ Charakteristiken sind dann zugleich, wie beim Beweise der Zahl N_μ des Satzes XXI., § 5. gezeigt ist, in

$$(S_{\mu+1} - 1) 2^{2\mu-1} = R_{\mu+1} S_\mu$$

Gruppenpaaren dieser Art enthalten, und jedes solches Paar liefert nach § 7., 1. ein System

$$(d) \equiv (d_1), (d_2), \dots, (d_{2(p-\mu)+1})$$

von $2(p - \mu) + 1$ Charakteristiken. Umgekehrt wird jedes System (d) auf diese Art, nach § 7., 2. erhalten, und zwar auf

$$\frac{[2(p - \mu) + 1] 2^{2(p - \mu)}}{1 \cdot 2}$$

Arten, da man dabei irgend zwei der (d_i) auszeichnen kann. Indem man also von allen $L_{\mu+1}$ Systemen von $2(p - \mu) - 1$ Charakteristiken ausgeht, findet man

$$L_\mu = \frac{(S_{\mu+1} - 1) 2^{2\mu}}{[2(p - \mu) + 1] 2^{2(p - \mu)}} \cdot L_{\mu+1} = \frac{2 R_{\mu+1} S_\mu}{[2(p - \mu) + 1] 2^{2(p - \mu)}} L_{\mu+1}.$$

Aber L_p ist gleich der Anzahl der geraden Charakteristiken, $= S_p$, daher:

$$\begin{aligned} L_\mu &= \frac{(S_{\mu+1} - 1)(S_{\mu+2} - 1) \dots (S_{p-1} - 1) \cdot S_p \cdot 2^{(p+\mu-1)(p-\mu)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2p - 2\mu + 1)} \\ &= \frac{S_\mu \cdot R_{2(\mu+1)} R_{2(\mu+2)} \dots R_{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p - 2\mu + 1)}. \end{aligned}$$

Hieraus, und aus den Zahlen M_μ , N_μ des Satzes XXI., § 5., folgt weiter, dass die Anzahl derjenigen dieser Systeme, welche aus $2(p-\mu)+1$ Charakteristiken gebildet sind, die in gegebenen μ Gruppenpaaren

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_\mu], [s_\mu]$$

enthalten sind, beträgt:

$$L_\mu \cdot \frac{N_\mu}{M_\mu} = \frac{R_{2(p-\mu)} \cdot R_{2(p-\mu-1)} \cdots R_4 \cdot R_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2p-2\mu+1)}.$$

Insbesondere wird die Anzahl L_0 der *ausgezeichneten* Systeme von $2p+1$ Charakteristiken:

$$L_0 = \frac{R_2 \cdot R_4 \cdots R_{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2p+1)}.$$

2. Die Anzahl L'_μ der Systeme von $2(p-\mu)+1$ Charakteristiken, die für $p-\mu=4n$, $4n+1$ ungerade, für $p-\mu=4n+2$, $4n+3$ gerade sind, ergibt sich aus L_μ , nach § 9., 1.

Hiernach führt jedes System der vorigen Art 1.

$$(c) \equiv (c_1), (c_2), \dots, (c_{2(p-\mu)+1})$$

zu einem System dieser Art 2., indem man irgend eine der R_μ Gruppencharakteristiken $[v]$, welche, nach § 4., XIX. und XX., die c_i und ihre Combinationen zu 3, 5, $\dots$ nicht enthalten, zu den c_i addirt. Umgekehrt ergibt die Darstellung der Gruppen in XX., dass jedes solche System 2., wie

$$(c_1 t_1), (c_2 t_1), \dots, (c_{2(p-\mu)+1} t_1)$$

durch Addition irgend einer der S_μ Gruppencharakteristiken, welche die $(c_i t_1)$ nicht enthalten, auf ein System der Art 1. zurückgeführt werden kann. Daher folgt:

$$L'_\mu = \frac{R_\mu}{S_\mu} \cdot L_\mu = \frac{R_\mu \cdot R_{2(\mu+1)} \cdot R_{2(\mu+2)} \cdots R_{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2p-2\mu+1)}.$$

3. Die Anzahl der Systeme von $4\pi+2$ Charakteristiken, deren Summe $=0$ ist, ergibt sich aus der unter 1., bez. unter 2., bestimmten Anzahl $L_{p-2\pi}$, bez. $L'_{p-2\pi}$, der Systeme von $4\pi+1$ Charakteristiken, indem man diese Zahl nur durch $4\pi+2$ dividirt. Denn man erhält aus jedem dieser Systeme *eines* von $4\pi+2$, durch Zuzufügung der Summe der $4\pi+1$ Charakteristiken; aus jedem System von $4\pi+2$ aber $4\pi+2$ Systeme von je $4\pi+1$, durch Weglassung irgend einer der $4\pi+2$ Charakteristiken.

4. Die Anzahl der Systeme von $2(p-\mu+1)$ Charakteristiken, deren Summe nicht $=0$ ist, folgt aus § 9., 2.

Ist erstens $p-\mu$ *ungerade*, so ergeben sich dort aus jedem der L_μ Systeme 1. von $2(p-\mu)+1$ Charakteristiken R_μ Systeme von $2(p-\mu+1)$; und aus jedem dieser, durch Weglassung irgend einer

seiner Charakteristiken, $2(p - \mu + 1)$ solcher von $2(p - \mu) + 1$. Man erhält also

$$\frac{L_\mu \cdot R_\mu}{2(p - \mu + 1)} = \frac{1}{2} \frac{R_{2\mu} R_{2(\mu+1)} \cdots R_{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2p - 2\mu + 2)}$$

Systeme von $2(p - \mu + 1)$ Charakteristiken von demselben Charakter wie 1. Ebenso ergeben sich aus 2.

$$\frac{L'_\mu \cdot S_\mu}{2(p - \mu + 1)} = \frac{L_\mu \cdot R_\mu}{2(p - \mu + 1)}$$

Systeme von $2(p - \mu + 1)$ Charakteristiken von entgegengesetztem Charakter wie 1.; insbesondere, für $\mu = 1$ und *gerade* p , als Anzahl der vollständigen Systeme von $2p$ Charakteristiken:

$$\frac{L_1}{2p} = \frac{2p + 1}{2} \cdot L_0.$$

Ist zweitens $p - \mu$ *gerade*, so folgen analog:

$$\frac{L_\mu (S_\mu - 1)}{2(p - \mu + 1)}$$

Systeme von $2(p - \mu + 1)$ Charakteristiken vom Charakter wie 1., und

$$L_\mu \cdot \frac{R_\mu \cdot (2^{2\mu-2} - 1)}{S_\mu (2p - 2\mu + 2)} = \frac{L'_\mu \cdot (2^{2\mu-2} - 1)}{2(p - \mu + 1)}$$

Systeme von $2(p - \mu + 1)$ Charakteristiken von entgegengesetztem Charakter wie 1.

5. Aus dem Vorhergehenden folgt allgemein, wie oft man ein System von M Charakteristiken zu einem System von N ($N > M$) Charakteristiken, welche mit den ersteren zugleich gerade oder zugleich ungerade sind, ergänzen kann. Wenn es nämlich von den ersteren Systemen überhaupt Q_M , von den letzteren Systemen Q_N giebt, wo die Zahlen Q_M und Q_N nach 1., . . . , 4. dieses Paragraphen bestimmt werden müssen, so kommt, da jedes System von N Charakteristiken durch Weglassung von irgend $N - M$ derselben auf ein System von M führt, jedes solches System von M Charakteristiken in

$$\frac{N(N-1)(N-2) \cdots (M+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (N-M)} \cdot \frac{Q_N}{Q_M}$$

Systemen von N Charakteristiken vor.

§ 11.

Zweiteilungsgleichungen.

Für diejenigen Gleichungen, deren Wurzeln man eindeutig den R_p ungeraden oder den S_p geraden eigentlichen Charakteristiken, oder den $2^{2p} - 1$ Gruppencharakteristiken, etc., zuordnen kann,

haben wir in § 5. 3. die ihnen zugehörige Substitutionsgruppe von der Ordnung

$$Z = R_{2p} \cdot R_{2(p-1)} \cdots R_4 R_2$$

entwickelt.

Zunächst ist dabei zu bemerken, dass diese Substitutionen für $p > 2$ alle aus einer *geraden* Zahl von Transpositionen der eigentlichen Charakteristiken bestehen. Nur für $p = 2$ und $p = 1$ werden die Substitutionen aus solchen zusammengesetzt, welche bezügl. aus $S_1 = 3$ und $S_0 = 1$ Transpositionen der geraden Charakteristiken bestehen; und in diesen beiden Fällen kann man daher, indem man zuerst die Quadratwurzel aus der Discriminante der betreffenden Gleichung nimmt, die Gruppe sogleich auf die Ordnung $\frac{R_1 R_2}{2} = 3 \cdot 120$, bez. $\frac{R_2}{2} = 3$, erniedrigen. Für $p = 2$ hat man eine allgemeine Gleichung 6^{ten}, für $p = 1$ eine solche 3^{ten} Grades. Sei weiterhin $p > 2$.

Die in §§ 4, 7., 8., 9. entwickelten Systeme bieten sämtlich Mittel, um *Resolventen* der vorgegebenen Gleichungen zu definiren. Aus der Bildungsweise der Systeme von μ Gruppenpaaren des § 4.:

$$[r_1], [s_1]; \cdots; [r_\mu], [s_\mu]$$

geht hervor, dass unsere Substitutionen erlauben, alle solche Systeme in einander überzuführen und ferner die verschiedenen Paare eines Systems mit einander, sowie die Gruppen eines jeden Paares unter sich zu vertauschen. Hieraus folgt, nach § 7. ff., weiter, dass vermöge unserer Substitutionen auch jedes der Systeme von N Charakteristiken der §§ 7.—9., in jedes andere derselben Art übergeführt werden kann, nämlich in ein solches von N Charakteristiken, die mit den ersteren zugleich gerade oder ungerade sind, und deren Summe mit der des ersteren Systems zugleich verschwindet oder nicht; und dass weiter auch noch die Charakteristiken eines Systems beliebig mit einander vertauscht werden können.

Kennt man nun diejenigen $2p$ Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, welche man den $2p$ Gruppen eines Systems des § 4.:

$$[r_1], [s_1]; [r_2], [s_2]; \cdots; [r_p], [s_p]$$

zuordnen kann, so ergeben sich hieraus *alle* Charakteristiken und Gruppen, also alle Wurzeln der Gleichung, eindeutig. Kennt man ebenso diejenigen $2p + 1$ Wurzeln oder Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung, welche man den $2p + 1$ Charakteristiken eines ausgezeichneten Systems zuordnen kann, so ergeben sich wiederum durch deren Combinationen *alle* Charakteristiken und Gruppen, d. h. alle Wurzeln, eindeutig. Hiernach kann man zur Auflösung der gegebenen Gleichung so verfahren:

1. Man bestimmt durch Aufsuchung *einer* Wurzel einer Gleichung vom Grade R_{2p} zuerst die beiden Gruppen eines Paares, $[r_1], [s_1]$; wonach die Substitutionsgruppe auf eine solche von der Ordnung

$$Z_1 = R_{2(p-1)} R_{2(p-2)} \cdots R_2$$

zurückkommt, die isomorph ist mit derjenigen, die zu den $(p-1)$ -reihigen Charakteristiken gehört. Aehnlich bestimmt man dann weiter durch Aufsuchung je *einer* Wurzel von Gleichungen der Grade $R_{2(p-1)}, R_{2(p-2)}, \dots, R_2$ der Reihe nach die übrigen Gruppen $[r_2], [s_2]; \dots; [r_p], [s_p]$.

Dieses Verfahren kann mannigfach modificirt werden:

a) Um *ein* Paar $[r_1], [s_1]$ zu bestimmen, kann man zunächst von derjenigen Gleichung vom Grade $2^{2p} - 1$, welche die sämtlichen Gruppen bestimmt, *eine* Wurzel $[r_1]$ aufsuchen; sodann von der Gleichung des Grades 2^{2p-1} , welche die Gruppen $[s_1]$ liefert, die mit $[r_1]$ die Beziehung $K_{r_1, s_1} \equiv 1$ haben, *eine* Wurzel. Ebenso in Bezug auf die übrigen Paare $[r_2], [s_2]$; etc., so dass man also im Ganzen der Reihe nach je *eine* Wurzel von Gleichungen der Grade

$$2^{2p} - 1, 2^{2p-1}, 2^{2(p-1)} - 1, 2^{2(p-1)-1}, \dots, 2^2 - 1, 2^1$$

zu suchen hat. — Dabei ist ferner zu beachten, dass man in dieser Art nur bis zur Aufsuchung von $[r_{p-2}], [s_{p-2}]$ zu gehen braucht; zur Aufsuchung von $[r_{p-1}], [s_{p-1}]; [r_p], [s_p]$ aber die oben bei $p = 2$ und $p = 1$ angegebenen Vereinfachungen, durch vorheriges Ausziehen von Quadratwurzeln, eintreten lassen kann.

b) Anstatt zu $[r_1]$ direct eine Gruppe $[s_1]$ zu suchen, für welche $K_{r_1, s_1} \equiv 1$, kann man auch indirect verfahren und dadurch die Zurückführung der Gruppe von Z Substitutionen auf die von nur Z_1 noch einfacher gestalten.

Sei, um die Begriffe zu fixiren, p zunächst von der Form $4n$ oder $4n - 1$. Von der Gleichung, welche die $2^{2p} - 1$ Gruppen bestimmt, sei wieder *eine* Wurzel, $[r_1]$, gesucht. Wir behaupten nun: Hat man weiter diejenige Gleichung des Grades R_{p-1} *vollständig* aufgelöst, welche die R_{p-1} Zerlegungen

$$[r_1] \equiv (\alpha_1), (\beta_1) \equiv (\alpha_2), (\beta_2) \equiv \cdots \equiv (\alpha_{R_{p-1}}), (\beta_{R_{p-1}})$$

von $[r_1]$ in Paare $(\alpha_i), (\beta_i)$ ungerader Charakteristiken liefert, und endlich durch Auflösen von $2p - 1$ *quadratischen* Gleichungen gewisse $2p - 1$ dieser Paare in ihre beiden Elemente (α_i) und (β_i) getrennt, so ist die vollständige Lösung der vorgegebenen Gleichung bewirkt.

Denn eine hinzugefügte Gruppe $[s_1]$, wo $K_{r_1, s_1} \equiv 1$, würde nur die Trennung der R_{p-1} Charakteristiken (α_i) von den (β_i) leisten. Aber bildet man aus solchen R_{p-1} Grössen (α_i) eines unserer Systeme (§ 7.)

von $2p - 1$ Charakteristiken, für welches die Summe je dreier gerade wird:

$$(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{2p-1}),$$

so geht dieses System in ein ganz gleich definirtes über, wenn man irgend welche der (α_i) durch die zugehörigen $(\beta_i) = (r_1 \alpha_i)$ ersetzt, da nach XVIII.

$$(\alpha_i \alpha_x \alpha_i) \text{ und } (r_1 \alpha_i \alpha \alpha_i)$$

zugleich gerade und ungerade sind. Man hat also nur aus den R_{p-1} Paaren von $[r_1]$ $2p - 1$ solche Paare,

$$(\alpha_1), (\beta_1); (\alpha_2), (\beta_2); \dots; (\alpha_{2p-1}), (\beta_{2p-1}),$$

auszuwählen, für welche die Summe von je 3 Charakteristiken, aus dreien der Paare genommen, immer gerade ist. Irgend $2p - 1$ dieser Charakteristiken, genommen aus allen $2p - 1$ Paaren, bilden dann ein System, wie es in § 7. betrachtet ist: nämlich es existirt *eine* weitere zugehörige Gruppe $[s_1]$, welche diese $2p - 1$ Charakteristiken enthält, und aus den Zusammensetzungen von $[r_1]$, $[s_1]$ und den $2p - 1$ Charakteristiken folgen, nach XXV. und XX., *alle* Gruppen und Charakteristiken eindeutig. Um ein solches System von $2p - 1$ Charakteristiken aber selbst eindeutig darzustellen, hat man, nachdem die $2p - 1$ Paare

$$(\alpha_1), (\beta_1); \dots; (\alpha_{2p-1}), (\beta_{2p-1})$$

durch die Auflösung der Gleichung vom Grade R_{p-1} , welche alle R_{p-1} Paare von $[r_1]$ liefert, *bekannt* geworden sind, nur noch diese $2p - 1$ Paare durch ebenso viele quadratische Gleichungen in ihre beiden Bestandtheile zu zerlegen.

Die hier vollständig aufzulösende Gleichung vom Grade R_{p-1} ist nun eine solche mit Z_1 Substitutionen, und kann selbst nach der für die ursprüngliche Gleichung mit Z Substitutionen gegebenen Methode weiter behandelt werden. In der That kann man nach dem Früheren die R_{p-1} Paare von $[r_1]$ eindeutig den R_{p-1} ungeraden $(p - 1)$ reihigen Charakteristiken zuordnen; nämlich so, dass irgend drei solchen $(p - 1)$ -reihigen Charakteristiken $(\alpha'_i); (\alpha'_x); (\alpha'_i)$, für welche $(\alpha'_i \alpha'_x \alpha'_i)$ gerade ist, drei solche Zerlegungen von $[r_1]$

$$(\alpha_i), (\beta_i); (\alpha_x), (\beta_x); (\alpha_i), (\beta_i)$$

entsprechen, für welche

$$(\alpha_i \alpha_x \alpha_i), (\alpha_i \alpha_x \beta_i), \text{ etc.}$$

gerade wird. — Die Gleichung vom Grade R_{p-1} wird also dadurch aufgelöst, dass man zunächst *eine* Wurzel der Gleichung vom Grade $2^{2(p-1)} - 1$ sucht, welche die $2^{2(p-1)} - 1$ Gruppen bestimmt, die aus je R_{p-2} Paaren der (α'_i) , d. h. aus je R_{p-2} Paaren von Zerlegungen der Art

$$(\alpha_i), (\beta_i); (\alpha_x), (\beta_x),$$

bestehen; dass man sodann die Gleichung vom Grade R_{p-2} mit Z_2 Substitutionen vollständig und endlich $2p - 3$ quadratische Gleichungen löst.

Dasselbe, mit Vertauschung von Gerade und Ungerade und von R_u mit S_u , gilt für $p = 4n - 2$ und $p = 4n - 3$. Indem man also dieses Verfahren fortsetzt, ergeben sich überhaupt zur Lösung der vorgelegten Gleichung folgende Operationen: *Man hat der Reihe nach zu suchen je eine Wurzel von Gleichungen der Grade*

$$2^{2p} - 1, \quad 2^{2(p-1)} - 1, \quad \dots, \quad 2^6 - 1,$$

— Gleichungen, die bez. bei den p -, $p - 1$ -, $\dots$, 3-reihigen Charakteristiken auftreten —, sodann eine (bei den 2-reihigen Charakteristiken auftretende) allgemeine Gleichung 6^{ten} Grades vollständig, und endlich

$$5 + 7 + 9 + \dots + (2p - 1) = p^2 - 4$$

quadratische Gleichungen zu lösen.

c) Auch dieses Verfahren b) kann noch modificirt werden. Man kann nämlich auch die erste Gruppe $[r_1]$ indirect bestimmen, indem man zunächst eine Wurzel der Gleichung vom Grade R_p sucht, welche die Zuordnung der R_p ungeraden Charakteristiken liefert. Von der übrigbleibenden Gleichung vom Grade $R_p - 1$ bestimmt man dann wiederum eine Wurzel, was mit der ersten Wurzel verbunden ein Paar von $[r_1]$ liefert; um die übrigen Charakteristiken sämmtlich eindeutig zu finden, hat man dann noch eine Gleichung vom Grade $R_{p-1} - 1$, welche die übrigen Paare von $[r_1]$ liefert, vollständig, und $2p - 2$ quadratische Gleichungen zu lösen. — Die Gleichung vom Grade $R_{p-1} - 1$, die zu den Gleichungen der $(p - 1)$ -reihigen Charakteristiken dieselbe Beziehung hat, wie die obige vom Grade $R_p - 1$ zu denen der p -reihigen Charakteristiken, wird nun nach derselben Methode weiter behandelt; man hat also zur Lösung der vorgelegten Gleichung die Operationen auszuführen: *Es ist der Reihe nach zu suchen je eine Wurzel von Gleichungen der Grade*

$$R_p, R_p - 1, R_{p-1} - 1, R_{p-2} - 1, \dots, R_3 - 1,$$

— Gleichungen, von denen die ersten beiden bei den p -reihigen, die übrigen bez. bei den $p - 1$ -, $p - 2$ -, $\dots$, 3-reihigen Charakteristiken auftreten —; sodann eine allgemeine Gleichung des 5^{ten} Grades vollständig, und endlich

$$4 + 6 + 8 + \dots + (2p - 2) = (p + 1)(p - 2)$$

quadratische Gleichungen zu lösen.

Stellt man dieselbe Betrachtung für die geraden Charakteristiken an, so zeigt sich, dass die Lösung auch so geschehen kann: *Es ist der Reihe nach zu suchen je eine Wurzel von Gleichungen der Grade*

$$S_p, S_p - 1, S_{p-1} - 1, S_{p-2} - 1, \dots, S_3 - 1, S_2 - 1,$$

— von denen die ersten beiden bei den p -reihigen, die übrigen bez. bei den $p-1$ -, $p-2$ -, $\dots$, 3 -, 2 -reihigen Charakteristiken auftreten —; sodann sind noch

$$1 + 2 + 4 + 6 + \dots + (2p-2) = p(p-1) + 1$$

quadratische Gleichungen zu lösen.

2. a) Ein zweites Verfahren zur Lösung der vorgelegten Gleichungen besteht darin, dass man dieselben auf diejenige Gleichung des Grades $2p+1$ zurückführt, welche den $2p+1$ Charakteristiken eines „ausgezeichneten“ Systems zugeordnet ist. Diese Gleichung hat noch zur Gruppe die allgemeinste, welche bei einer Gleichung $(2p+1)^{\text{ten}}$ Grades überhaupt existirt; denn unsere Substitutionen erlauben, sämtliche $2p+1$ Charakteristiken eines ausgezeichneten Systems beliebig zu permutiren. Die Ordnung dieser Substitutionsgruppe beträgt also wenigstens

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p+1);$$

und auch nicht mehr, da sie (§ 5., 3. und § 10., 1.)

$$= \frac{Z}{L_0} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p+1)$$

werden muss.

Zu dieser Zurückführung ist also nur nöthig, eine Wurzel einer Gleichung vom Grade

$$L_0 = \frac{R_{2p} R_{2(p-1)} \dots R_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p+1)}$$

zu suchen, welche die L_0 ausgezeichneten Systeme bestimmt. Diese Systeme zerfallen aber für $p = 4n$ oder $4n-1$ in S_p Classen, den S_p verschiedenen geraden Summen entsprechend; und für $p = 4n+1$ oder $4n+2$ in R_p Classen, den R_p verschiedenen ungeraden Summen entsprechend. Also werden die zur Lösung nöthigen Operationen: Man sucht α) für $p = 4n$, $4n-1$: eine Wurzel einer Gleichung vom Grade S_p , sodann eine Wurzel einer Gleichung vom Grade $\frac{L_0}{S_p}$; β) für $p = 4n+1$, $4n+2$: eine Wurzel einer Gleichung vom Grade R_p , sodann eine Wurzel einer Gleichung vom Grade $\frac{L_0}{R_p}$; endlich hat man in beiden Fällen eine allgemeine Gleichung des Grades $2p+1$ vollständig zu lösen.

b) Durch eine Modification dieses Verfahrens führt man die vorgelegte Gleichung auf eine allgemeine Gleichung $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades zurück.

Für gerades p sucht man eine Wurzel*) der Gleichung vom Grade

*) Die Adjunction dieser einen Wurzel charakterisirt den Fall, der bei der Zweitheilung der Perioden der hyperelliptischen Functionen eintritt.

$\frac{L_0}{2p+2}$, welche die $\frac{L_0}{2p+2}$ „vollständigen“ Systeme mit Summe 0 bestimmt. Man kommt dann auf die Gleichung vom Grade $2p+2$, welche den $2p+2$ Charakteristiken eines solchen Systems zugeordnet ist.

Für *ungerade* p ist es möglich, die ausgezeichneten Systeme von $2p+1$ Charakteristiken mit gleicher Summe (α) zu je $2p+2$ zu gruppieren. Sei ein solches System

$$(\alpha) \equiv (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{2p+1}),$$

so kann man durch die Substitutionen $\{\alpha\alpha_i\}$ daraus die weiteren $2p+1$ Systeme ableiten:

$$\begin{aligned} (\alpha) &\equiv (\alpha_1), (\alpha\alpha_1\alpha_2), (\alpha\alpha_1\alpha_3), \dots, (\alpha\alpha_1\alpha_{2p+1}), \\ &\equiv \dots, \\ &\equiv (\alpha\alpha_{2p+1}\alpha_1), (\alpha\alpha_{2p+1}\alpha_2), \dots, (\alpha\alpha_{2p+1}\alpha_{2p}), (\alpha_{2p+1}). \end{aligned}$$

Macht man die analogen Substitutionen auf eines dieser Systeme, also die Substitutionen $\{\alpha, \alpha_x\}$, $\{\alpha\alpha_i\}$, so erhält man nur immer wieder dieselben $2p+2$ Systeme. Die aus diesen Substitutionen abgeleitete Gruppe besteht aus der Gruppe von der Ordnung $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+1)$, welche aus den Transpositionen $\{\alpha, \alpha_x\}$ abgeleitet ist, verbunden mit den $2p+2$ Substitutionen $1, \{\alpha\alpha_i\}$, und wird von der Ordnung $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+2)$. Die Gleichung, welche solchen $2p+2$ Systemen zugeordnet ist, ist daher eine allgemeine vom $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grade. Um die vorgelegte Gleichung auf dieselbe zurückzuführen, hat man eine Wurzel*) der Gleichung vom Grade $\frac{L_0}{2p+2}$ zu suchen, welche die $\frac{L_0}{2p+2}$ Gruppen von je $2p+2$ solchen Systemen bestimmt. Statt dessen kann man wieder für $p = 4n+1$ $[4n-1]$ zuerst eine Wurzel einer Gleichung vom Grade $R_p [S_p]$, sodann eine Wurzel einer Gleichung vom Grade $\frac{L_0}{(2p+2)R_p} \left[\frac{L_0}{(2p+2)S_p} \right]$ aufsuchen.

3. Die beiden Methoden 1. und 2. lassen sich mit einander combinieren. So gelangt man bei dem Verfahren 1. b), indem man je eine Wurzel von Gleichungen der Grade

$$2^{2p} - 1, 2^{2(p-1)} - 1, \dots, 2^{2(p-\mu)} - 1$$

sucht, auf eine Gleichung vom Grade $R_{p-\mu-1}$, welche den $R_{p-\mu-1}$ ungeraden $(p-\mu-1)$ -reihigen Charakteristiken entspricht, und hat nach deren vollständiger Lösung noch

$$\begin{aligned} (2p-2\mu-1) + (2p-2\mu+1) + \dots + (2p-1) \\ = (\mu+1)(2p-\mu-1) \end{aligned}$$

quadratische Gleichungen zu lösen. Die Lösung der Gleichung vom Grade $R_{p-\mu-1}$ kann aber nach dem Verfahren 2. bewerkstelligt werden.

*) Für die Adjunction dieser Wurzel gilt die Anmerkung der vorhergehenden Seite.

II. Abschnitt.

Das Additionstheorem der Thetafunctionen.

§ 12.

Die Thetafunctionen.

Wir stellen in diesem Paragraphen diejenigen Bezeichnungen und bekannten Beziehungen, von welchen im Folgenden Gebrauch gemacht wird, zusammen (s. d. Ann. XIV, p. 280).

Die *Thetafunction*, von der wir ausgehen, wird definirt durch

$$\vartheta_0(u) = \vartheta_0(u_1, u_2, \dots, u_p) = \sum_{a,b} e^{\sum_a v_a v_b a_{a,b} + \sum_a v_a u_a},$$

wo die Summationen im Exponenten von e auf die Werthe $1, 2, \dots, p$ der Indices a, b , die Summation $\sum$ auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe der p Grössen $v_1, v_2, \dots, v_p$ zu erstrecken ist. Die Moduln $a_{a,b}$ der Function haben die Bedingung

$$a_{a,b} = a_{b,a}$$

zu erfüllen, ferner die Bedingung der Convergenz der ϑ -Reihe — dass nämlich der reelle Theil von $\sum_{a,b} v_a v_b a_{a,b}$ eine wesentlich negative quadratische Form sein muss —; im Uebrigen aber seien diese $\frac{1}{2} p(p+1)$ Grössen ganz beliebig gelassen.

Den $2^{2p} - 1$ Gruppencharakteristiken $[\alpha]$:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} n_1^\alpha & n_2^\alpha & \dots & n_p^\alpha \\ m_1^\alpha & m_2^\alpha & \dots & m_p^\alpha \end{bmatrix}$$

werden bez. *Systeme halber Perioden* zugeordnet:

$$\frac{1}{2} \varpi_a^\alpha = \frac{1}{2} m_a^\alpha \pi i + \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{b=p} n_b^\alpha a_{a,b}, \quad (a = 1, 2, \dots, p)$$

die kurz mit $\frac{1}{2} \varpi^\alpha$ bezeichnet werden. Und den eigentlichen Charakteristiken (0) und $(\alpha 0) = (\alpha)$ entsprechend, mögen die *allgemeinen Thetafunctionen* definirt sein durch den obigen Ausdruck $\vartheta_0(u)$ und durch $\vartheta_{0\alpha}(u) = \vartheta_\alpha(u)$, wo:

$$\vartheta_\alpha(u) = e^{\frac{1}{4} \sum_{a,b} n_a^\alpha n_b^\alpha a_{a,b} + \frac{1}{2} \pi i \sum_a n_a^\alpha m_a^\alpha + \sum_a n_a^\alpha u_a} \cdot \vartheta_0\left(u + \frac{1}{2} \varpi^\alpha\right).$$

Bei dieser Zuordnung der halben Perioden $\frac{1}{2} \varpi^\alpha$ zur Gruppencharakteristik $[\alpha]$ und von $\vartheta_\alpha(u)$ zur eigentlichen Charakteristik (α) denken wir uns die Elemente n_a^α und m_a^α von $[\alpha]$ und (α) nicht auf ihre Werthe 0 oder 1 (mod. 2) reducirt. Vielmehr ist:

$$\vartheta_{\alpha\beta}(u) = (-1)^{\sum_a n_a^\alpha m_a^\beta} \cdot \vartheta_\alpha(u),$$

und wir verstehen daher in diesem Abschnitt, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, unter $(\alpha\beta)$ immer eine Charakteristik, deren Elemente die *algebraischen* Summen entsprechender Elemente von (α) und (β) sind. Insbesondere ist unter $\vartheta_0(u)$ verstanden, dass die Elemente von (0) gleich 0 sind. Die ϑ -Functionen zerfallen in *zwei* Classen: in gerade und ungerade, je nachdem (α) gerade oder ungerade ist; die halben Perioden $\frac{1}{2} \varpi^\alpha$ bilden nur *eine* zusammenhängende Classe.

Man hat:

$$\vartheta_\alpha(-u_1, -u_2, \dots, -u_p) = (-1)^{\sum n^\alpha m^\alpha} \cdot \vartheta_\alpha(u_1, u_2, \dots, u_p),$$

$$\vartheta_\alpha(u + \varpi^\gamma) = (-1)^{\sum (n^\alpha m^\beta + n^\beta m^\alpha)} \cdot e^{-\sum_{a,b} n_a^\alpha n_b^\beta a_{a,b} - 2 \sum_a n_a^\beta u_a} \cdot \vartheta_\alpha(u),$$

$$\vartheta_\alpha(u + \frac{1}{2} \varpi^\gamma) = i^{-\sum n^\beta m^{\alpha\gamma}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \sum_{a,b} n_a^\beta n_b^\beta a_{a,b} - \sum_a n_a^\beta u_a} \cdot \vartheta_{\alpha\beta}(u),$$

wo wieder

$$\sum n^\gamma m^\delta \text{ für } \sum_a n_a^\gamma m_a^\delta$$

gesetzt ist.

Ferner ist

$$\vartheta_\alpha\left(\frac{1}{2} \varpi^\beta\right) = 0,$$

wenn $(\alpha\beta)$ eine ungerade Charakteristik ist.

Endlich benutzen wir das Theorem: dass zwischen je $2^p + 1$ Producten der Form

$$\vartheta_\varepsilon(u + v') \cdot \vartheta_\varepsilon(u + v''),$$

mit verschiedenen Indices ε , aber gleichen Argumenten u_a und gleichen Summen $v_a' + v_a''$, eine homogene lineare Relation stattfindet, deren Coefficienten von den u_a unabhängig sind.

§ 13.

Systeme von 2^p Indices für $p \geq 3$.

Nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen kann man das Product

$$\vartheta_0(u + v + w) \vartheta_0(u - v)$$

linear und homogen durch 2^p Producte der Form

$$\vartheta_\varepsilon(u + w) \vartheta_\varepsilon(u)$$

darstellen, wenn man hier 2^p verschiedene Indices ε derart wählt, dass zwischen den 2^p Producten selbst keine identische lineare Relation besteht. Wir wollen nun für $p \geq 3$ zeigen, wie ein solches System von 2^p Indices zu wählen ist, damit die Bestimmung der von den u_α unabhängigen Coefficienten des gesuchten Ausdrucks möglichst einfach wird.

Sei

$$(\alpha_0) \equiv (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{2^{p-1}})$$

irgend eines der in § 8. behandelten „ausgezeichneten“ Systeme von $2^{p-1} + 1$ Charakteristiken; für welches also die $(\alpha_i, \alpha_x, \alpha_\lambda)$ von entgegengesetztem Charakter sind, wie die (α_i) , für $i \geq x \geq \lambda$, von $1, 2, \dots, 2^{p-1} + 1$.

Man nehme aus diesem System, für $p \geq 3$, die Charakteristiken

$$(\alpha_0), (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_7)$$

heraus und verbinde die übrigen $2^p - 6$ beliebig zu $p - 3$ Paaren:

$$[\alpha_8 \alpha_9] = [l_1], [\alpha_{10} \alpha_{11}] = [l_2], \dots, [\alpha_{2^{p-2}} \alpha_{2^{p-1}}] = [l_{p-3}].$$

Seien dann weiter mit

$$[\lambda_1], [\lambda_2], [\lambda_3], \dots, [\lambda_{2^{p-3}}]$$

alle 2^{p-3} Combinationen dieser $p - 3$ Grössen $[l_1], [l_2], \dots, [l_{p-3}]$ zu $0, 1, 2, \dots, p - 3$ bezeichnet, so hat man in

$$(A) \quad \begin{cases} (\lambda_j \alpha_0), (\lambda_j \alpha_1), \dots, (\lambda_j \alpha_7), \\ (j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}) \end{cases}$$

ein System von 2^p Charakteristiken, dem man ein zweites analoges System zuordnen kann, das mit dem ersteren in besonderer Beziehung steht.

Sei nämlich eine neue Charakteristik (l) eingeführt durch:

$$(l) = (\alpha_8 \alpha_{10} \dots \alpha_{2^p}), \quad \text{für gerade } p,$$

$$(l) = (\alpha_0 \alpha_8 \alpha_{10} \dots \alpha_{2^p}), \quad \text{für ungerade } p.$$

Dann sind, nach den Eigenschaften der ausgezeichneten Systeme, für jedes p :

$$\text{alle } (l\lambda) \text{ gerade,} \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \dots, 2^{p-3},$$

$$\text{alle } (l\lambda, \alpha_i, \alpha_x) \text{ ungerade,} \quad \text{für } i \geq x, \text{ von } 0, 1, \dots, 7.$$

Bildet man daher ein zweites System von 2^p Charakteristiken:

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} [i\lambda_j \alpha_0], [i\lambda_j \alpha_1], \dots, [i\lambda_j \alpha_7], \\ (j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}), \end{array} \right.$$

so hat dieses zum ersten die Beziehung: *Addirt man irgend eine Charakteristik des einen Systems zu allen 2^p Charakteristiken des andern Systems, so sind immer von den 2^p Summen nur 2^{p-3} gerade, die übrigen $7 \cdot 2^{p-3}$ ungerade. Und zwar hat man 2^{p-3} verschiedene Grössen des einen Systems mit denselben 2^{p-3} Grössen des andern Systems zu verbinden, um gerade Summen zu erhalten.*

Man hat nämlich irgend eine der 2^{p-3} Grössen $(i\lambda_j \alpha_i)$, für $j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}$, zu verbinden mit den 2^{p-3} Grössen $(\lambda_j \alpha_i)$, für $j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}$, um gerade Summen zu erhalten; dagegen mit $(\lambda_j \alpha_\kappa)$, wo $\kappa \geq i$, um ungerade Summen zu erhalten.

Die Beziehung zwischen beiden Systemen würde offenbar bestehen bleiben, wenn man zu jeder Charakteristik jedes der beiden Systeme irgend eine, aber immer *dieselbe* Charakteristik hinzuaddirte. Addirt man (α_0) und beachtet die Darstellung eines ausgezeichneten Systems, wie sie am Ende des § 8. gegeben ist, so kann man zwei einander zugehörige Systeme von je 2^p Charakteristiken, welche in der obigen Beziehung stehen, auch so darstellen (indem man an Stelle der $[i]$ die dortigen $[t_i]$ setzt).

Seien mit $[t'_j]$ alle Combinationen der $p - 3$ Grössen $[t_{p-3}], [t_{p-4}], \dots, [t_1]$, zu $0, 1, \dots, p - 3$ genommen, bezeichnet, so ist das erste System

$$\begin{aligned} [t'_j], [t'_j t_p t_{p-1} \dots t_1], [t'_j r_p t_{p-1} t_{p-2} \dots t_1], [t'_j r_{p-1} t_{p-2} t_{p-3} \dots t_1], \\ [t'_j r_{p-2} t_{p-3} \dots t_1], \\ [t'_j s_p t_{p-1} t_{p-2} \dots t_1], [t'_j s_{p-1} t_{p-2} t_{p-3} \dots t_1], \\ [t'_j s_{p-2} t_{p-3} \dots t_1]; \end{aligned}$$

$$(j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}).$$

und das zweite entsteht aus diesem, indem man zu jeder seiner Charakteristiken

$$(l) = (gr_1 r_2 \dots r_{p-3} t_{p-2} t_p)$$

addirt.

Endlich kann man zwei Systeme dieser Art auch so darstellen: Sei

$$(\beta_0) \equiv (\beta_1), (\beta_2), \dots, (\beta_7)$$

ein 7-System ungerader Charakteristiken, mit gerader Summe (β_0) , enthalten in den $p - 3$ Gruppenpaaren:

$$[r_1], [s_1]; \dots; [r_{p-3}], [s_{p-3}];$$

und $[t'_j]$ wieder alle Combinationen der Grössen $[t_i] = [r_i s_i]$. Das erste System ist dann

$$(t'_j \beta_0), (t'_j \beta_1), \dots, (t'_j \beta_7); \quad (j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}),$$

das zweite entsteht aus diesem durch Addition von

$$(\beta_0 r_1 r_2 \dots r_{p-3})$$

zu allen seinen Charakteristiken.

Die bezeichnete Beziehung zwischen zwei solchen einander zugehörigen Systemen macht die Einführung eines derselben an Stelle der 2^p Indices ε der am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Relation vortheilhaft. Wir benutzen zu diesem Zwecke die zuerst gegebene Form (A), (A') der beiden Systeme.

§ 14.

Das Additionstheorem für $p \geq 3$.

Nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen nehmen wir die Relation an:

$$(1) \quad \vartheta_0(u+v+w) \vartheta_0(u-v) = \sum_{\varrho} \sum_j c_{\varrho}^{(j)} \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(u) \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(u+w),$$

$$\left(\begin{array}{l} \varrho = 0, 1, \dots, 7, \\ j = 1, 2, \dots, 2^{p-3} \end{array} \right),$$

worin die noch zu bestimmenden Grössen $c_{\varrho}^{(j)}$ nur von den v_a und w_a abhängen. Setzt man für die u_a halbe Perioden ein, entsprechend den Charakteristiken (A') des § 13.:

$$u_a = \frac{1}{2} \overline{\omega}_a^{i \lambda_j \alpha_{\varrho}},$$

so ergibt sich zur Bestimmung der $c_{\varrho}^{(j)}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \vartheta_0\left(\frac{1}{2} \overline{\omega}^{i \lambda_j \alpha_{\varrho}} + v + w\right) \cdot \vartheta_0\left(\frac{1}{2} \overline{\omega}^{i \lambda_j \alpha_{\varrho}} - v\right) = \\ = \sum_j c_{\varrho}^{(j)} \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}\left(\frac{1}{2} \overline{\omega}^{i \lambda_j \alpha_{\varrho}}\right) \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}\left(\frac{1}{2} \overline{\omega}^{i \lambda_j \alpha_{\varrho}} + w\right), \end{aligned}$$

oder, nach Reduction mit Hülfe der Formeln des § 12.:

$$(2) \quad \begin{aligned} & (-1)^{\sum n''_{\varrho} m^{i \lambda_j}} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho}}(v) \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho}}(v+w) \\ & = \sum_j c_{\varrho}^{(j)} \cdot (-1)^{\sum n^{i \lambda_j \alpha_{\varrho}} m^{i \lambda_j}} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho}}(w) \\ & \quad (j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}). \end{aligned}$$

Man hat in (2) 2^{p-3} Gleichungen, welche solche 2^{p-3} Grössen $c_{\varrho}^{(j)}$, die *gleiches* ϱ , aber *verschiedenes* j , für $j = 1, 2, \dots, 2^{p-3}$, haben, gesondert von den übrigen Grössen bestimmen. Um aber diese Gleichungen

chungen, insbesondere ihre Determinante, in übersichtlicher Weise weiter behandeln zu können, wird es nöthig, zuerst die Indices λ_j in besonderer Weise zu *ordnen* und dann statt der $c_q^{(j)}$ andere Grössen einzuführen.

Die λ_j sollen so geordnet werden:

Zunächst werde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = l_1$ gesetzt; diese beiden werden dann mit l_2 zusammengesetzt; sodann die so gebildeten 2^2 mit l_3 ; sodann die so gebildeten 2^3 mit l_4 zusammengesetzt; etc.; also:

$$\lambda_1 = 0;$$

$$\lambda_2 = l_1;$$

$$\lambda_3 = l_2, \lambda_4 = l_1 l_2;$$

$$\lambda_5 = l_3, \lambda_6 = l_1 l_3, \lambda_7 = l_2 l_3, \lambda_8 = l_1 l_2 l_3;$$

$$\lambda_9 = l_4, \lambda_{10} = l_1 l_4, \lambda_{11} = l_2 l_4, \lambda_{12} = l_1 l_2 l_4, \lambda_{13} = l_3 l_4, \lambda_{14} = l_1 l_3 l_4, \\ \lambda_{15} = l_2 l_3 l_4, \lambda_{16} = l_1 l_2 l_3 l_4;$$

etc.

Allgemein ist:

$$(3) \quad \lambda_{h+2^k-1} = \lambda_h \lambda_{2^{k-1}+1},$$

für

$$h = j \cdot 2^k + 1, \quad j \cdot 2^k + 2, \dots, \quad j \cdot 2^k + 2^{k-1},$$

wo $j = 0, 1, 2, \dots$ zu setzen ist und k jeden Werth $1, 2, 3 \dots$ annehmen darf, wenn man noch

$$\lambda_{h'} = \lambda_h, \quad \text{für } h' \equiv h \pmod{2^{p-3}}$$

festsetzt.

Hiernach ist zunächst:

$$(4) \quad \partial_{l_2 \lambda_{h+2^k-1} \lambda_{h'+2^k-1}} \cdot \partial_{l_2 \lambda_{h+2^k-1} \lambda_{h'+2^k-1}}(w) = \partial_{l_2 \lambda_h \lambda_{h'}} \cdot \partial_{l_2 \lambda_h \lambda_{h'}}(w),$$

wenn h und h' wie h in (3) gehen.

Ferner sei gesetzt

$$(5) \quad (-1)^{\sum \frac{1}{2} n^{i_k} m^{i_k}} = i_{i_k},$$

für

$$k = 1, 2, \dots, p-3,$$

und weiter definiert:

$$(5') \quad i_{i_k i_{k'}} = i_{i_k} \cdot i_{i_{k'}} \cdot (-1)^{\sum n^{i_k} m^{i_{k'}}}.$$

Aus der obigen Darstellung der λ_j durch die l_k folgt dann sogleich die Definition der Grössen i_{λ_j} . Beachtet man, dass

$$\sum (n^{i_k} m^{i_{k'}} + n^{i_{k'}} m^{i_k}) = K_{i_k i_{k'}} \equiv 0 \pmod{2},$$

(weil z. B. die beiden in $[l_1] = [\alpha_s \alpha_9]$ gepaart enthaltenen Charakteristiken (α_8) , (α_9) in $[l_2]$ nicht vorkommen), also auch

$$\sum (n^{2j} m^{2j'} + n^{2j'} m^{2j}) \equiv 0 \pmod{2},$$

so folgt aus (5'):

$$(5'') \quad \begin{cases} i_{\lambda_j \lambda_{j'}} = i_{\lambda_j} \cdot i_{\lambda_{j'}} \cdot (-1)^{\sum n^{\lambda_j} m^{\lambda_{j'}}} = i_{\lambda_j} \cdot i_{\lambda_{j'}} \cdot (-1)^{\sum n^{\lambda_{j'}} m^{\lambda_j}}, \\ i_{\lambda_j \lambda_j} = +1, \end{cases}$$

für beliebige j und j' .

Daher wird nach (3) und (5''):

$$\begin{aligned} i_{\lambda_{h+2k-1} \lambda_{h'+2k-1}} &= i_{\lambda_h \lambda_{h'}} \cdot i_{\lambda_{2k-1}+1 \lambda_{2k-1}+1} \\ &= i_{\lambda_h \lambda_{h'}} \cdot i_{\lambda_{2k-1}+1 \lambda_{2k-1}+1} \cdot (-1)^{\sum n^{\lambda_h \lambda_{h'}} m^{2\lambda_{2k-1}+1}} \end{aligned}$$

d. h.

$$(6) \quad i_{\lambda_{h+2k-1} \lambda_{h'+2k-1}} = i_{\lambda_h \lambda_{h'}},$$

wenn h und h' wie in (3) gehen.

Wegen dieser Beziehungen (4) und (6) ist es angezeigt, die Gleichung (6) mit

$$i_{\lambda_{j'}}$$

auf beiden Seiten zu multipliciren, und sodann statt der Grössen $c_q^{(j)}$ die folgenden einzuführen:

$$c_q^{(j)} = (-1)^{\sum n^{\lambda_{\alpha q}} m^{\lambda_j}} \cdot i_{\lambda_j} \cdot C_q^{(j)}.$$

Das Additionstheorem nimmt dann an Stelle von (1), (2) vermöge (5'') die Form an:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \vartheta_0(u+v+w) \vartheta_0(u-v) \\ &= \sum_q \sum_j C_q^{(j)} \cdot (-1)^{\sum n^{\lambda_{\alpha q}} m^{\lambda_j}} \cdot i_{\lambda_j} \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_q}(u) \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_q}(u+w), \\ & \quad \left(\begin{array}{l} q = 0, 1, \dots, 7, \\ j = 1, 2, 3, \dots, 2^{p-3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

wo die $C_q^{(j)}$ bestimmt sind durch

$$\begin{aligned} (II) \quad & (-1)^{\sum n^{\lambda_{\alpha q}} m^{\lambda_{j'}}} \cdot i_{\lambda_{j'}} \cdot \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_q}(v) \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_q}(v+w) \\ &= \sum_j C_q^{(j)} i_{\lambda_j \lambda_{j'}} \vartheta_{\lambda_j \lambda_{j'}} \cdot \vartheta_{\lambda_j \lambda_{j'}}(w), \\ & (j' = 1, 2, 3, \dots, 2^{p-3}), \quad = \sum_j \delta_{j,j'} C_q^{(j)} \end{aligned}$$

wenn man hier noch

$$(7) \quad i_{\lambda, \lambda'} \cdot \vartheta_{1\lambda, \lambda'} \cdot \vartheta_{1\lambda, \lambda'}(w) = \delta_{\lambda, \lambda'} = \delta_{\lambda', \lambda},$$

setzt, wobei

$$(7') \quad \delta_{h+2^k-1, h'+2^k-1} = \delta_{h, h'}$$

und die h, h' , wie in (3) genommen werden.

§ 15.

Eine besondere Classe von Determinanten.

Die Determinante der Coefficienten der 2^μ Gleichungen (II), § 14. (für festes q und $\mu = p - 3$) ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,2^\mu} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,2^\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \delta_{2^\mu,1} & \delta_{2^\mu,2} & \cdots & \delta_{2^\mu,2^\mu} \end{vmatrix}$$

wo

$$\delta_{h+2^k-1, h'+2^k-1} = \delta_{h, h'} = \delta_{h', h},$$

für

$$h, h' = j \cdot 2^k + 1, j \cdot 2^k + 2, \dots, j \cdot 2^k + 2^{k-1},$$

wo $j = 0, 1, 2, \dots$ zu setzen ist und k beliebig $= 1, 2, 3 \dots$ ist, wenn man für die Indices die mod. 2^μ congruenten nimmt. Man kann diese Eigenschaft*) der Elemente von Δ so aussprechen:

Theilt man Δ in 4 Quadrate von je $2^{\mu-1}$ Reihen, so sind je die beiden quer gegenüberstehenden Theile gleich zusammengesetzt. Jeder dieser 4 Theile hat, bei Theilung in 4 weitere Quadrate, dieselbe Eigenschaft; und so fort bei fortgesetzter Theilung in je 4 Quadrate von gleich viel Reihen.

Setzt man also

$$\delta_{1,j} = \delta_j, \quad (j = 1, 2, \dots, 2^\mu),$$

So kann man Δ so schreiben:

*) Der Fall $\mu = 2$ findet sich an mehreren Orten, der allgemeine Fall in einer (mir erst zur Zeit der Correctur bekannt gewordenen) Note von Puchta im XXXVIII. Bd. der Denkschriften d. Wiener Akademie (1878), p. 315. Uebrigens ist auch dieser Fall in einer Determinante von viel allgemeinerer Form, aber analogen Eigenschaften enthalten, wie ich in einer demnächst erscheinenden Notiz zeigen werde.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 \\ \delta_2 & \delta_1 & \delta_4 & \delta_3 & \delta_6 & \delta_5 & \delta_8 & \delta_7 \\ \delta_3 & \delta_4 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_5 & \delta_6 \\ \delta_4 & \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 & \delta_5 & \delta_7 & \delta_6 & \delta_8 \\ \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_6 & \delta_5 & \delta_8 & \delta_7 & \delta_2 & \delta_1 & \delta_4 & \delta_3 \\ \delta_7 & \delta_8 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_8 & \delta_7 & \delta_6 & \delta_5 & \delta_4 & \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 \end{vmatrix}$$

Vermöge dieser Eigenschaft lässt sich Δ darstellen als das Product von 2^μ Factoren, die alle linear sind in den Elementen von Δ .

Um dies zu zeigen, multiplicire man die 2^{te} , 4^{te} , 6^{te} , 8^{te} , ... Horizontalreihe, ebenso dieselben Verticalreihen je mit ε_1 ; sodann die 3^{te} und 4^{te} , 7^{te} und 8^{te} , 11^{te} und 12^{te} , ... Horizontal- und Verticalreihe je mit ε_2 ; etc., allgemein also multiplicire man die $(h + 2^{k-1})^{\text{te}}$ Horizontal- und Verticalreihe, wo h die Werthe

$$j \cdot 2^k + 1, j \cdot 2^k + 2, \dots, j \cdot 2^k + 2^{k-1}$$

$$(\text{für } j = 0, 1, 2, \dots, 2^{\mu-k} - 1)$$

anzunehmen hat, je mit ε_k , von $k = 1, 2, \dots, \mu$. Dabei sei

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \dots = \varepsilon_\mu^2 = 1.$$

Hierdurch wird zunächst der Werth der Determinante Δ nicht geändert.

Weiter bleiben zwei Elemente von Δ , die vorher einander gleich waren, auch nach der Multiplication mit den Grössen ε_k einander gleich. Denkt man sich nämlich Δ in 4 Theile I, II, III, IV von je $2^{\mu-1}$ Reihen getheilt, wo $I = IV$, $II = III$, so bewirkt die Multiplication mit ε_μ , dass alle Elemente von I unverändert bleiben, die von IV mit $\varepsilon_\mu^2 = 1$, die von II und III je mit ε_μ multiplicirt werden. Die Multiplication mit $\varepsilon_{\mu-1}$ bewirkt, dass von den 4 entsprechenden Theilen I', II', III', IV' von I die Elemente der gegenüberstehenden Theile I', IV' mit 1, bez. $\varepsilon_{\mu-1}^2 = 1$, die Elemente von II' und III' je mit $\varepsilon_{\mu-1}$ multiplicirt werden; und analog die 4 Theile von II, von III und von IV. Ebenso sieht man, indem man jeden dieser Theile I', II' etc. wieder in je 4 Theile zerlegt, dass die Multiplication mit $\varepsilon_{\mu-2}$ vorher gleiche Elemente auch gleich lässt; etc.

Die Determinante Δ wird also nach der Multiplication mit den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\mu-1}$ genau von derselben Art, wie sie ursprünglich definirt war. Addirt man nun sämmtliche Verticalreihen, von der

zweiten an, zur ersten Verticalreihe, so werden sämmtliche Elemente dieser Reihe einander gleich, und zwar gleich:

$$(\delta_1 + \varepsilon_1 \delta_2) + \varepsilon_2 (\delta_3 + \varepsilon_1 \delta_4) + \varepsilon_3 [(\delta_5 + \varepsilon_1 \delta_6) + \varepsilon_2 (\delta_7 + \varepsilon_1 \delta_8)] + \dots \\ = \delta_1 + \varepsilon_1 \delta_2 + \varepsilon_2 \delta_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_4 + \varepsilon_3 \delta_5 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_6 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_7 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_8 + \varepsilon_4 \delta_9 + \dots,$$

wo die Combinationen der ε_k genau so geordnet sind, wie die Grössen λ_j in § 14. Dieser Ausdruck geht also als Factor aus Δ heraus. Und da die ε_k hier beliebig die Werthe $+1$ oder -1 annehmen konnten, so hat man für die Determinante Δ die Darstellung:

$$\Delta = \Pi_{\varepsilon} \left\{ \delta_1 + \varepsilon_1 \delta_2 + \varepsilon_2 \delta_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_4 + \varepsilon_3 \delta_5 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_6 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_7 \right. \\ \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_8 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\mu} \delta_{2^{\mu}} \right\} \\ \text{für } \varepsilon_k^2 = 1, \quad (k = 1, 2, \dots, \mu)$$

wo das Product Π_{ε} auf alle 2^{μ} Werthsysteme, welche die Grössen ε_k annehmen können, auszudehnen ist.

Die ersten Unterdeterminanten von Δ , nach irgend zwei einander gleichen Elementen genommen, sind ebenfalls einander gleich.

Denn zunächst sind wieder, bei Zerlegung von Δ in die vier Theile I, II, III, IV, die Unterdeterminanten nach den Elementen von I gleich denen nach den entsprechenden Elementen von IV, die nach den Elementen von II gleich denen nach den entsprechenden Elementen von III, da durch Vertauschung der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots (2^{\mu-1})^{\text{ten}}$ Horizontal- und Verticalreihe bez. mit der $(2^{\mu-1} + 1)^{\text{ten}}, (2^{\mu-1} + 2)^{\text{ten}}, \dots, (2^{\mu})^{\text{te}}$ Reihe nur I in IV, II in III übergeht, also die Elemente von Δ unverändert bleiben. Ebenso sind, bei Zerlegung von I in die vier Theile I', II', III', IV' die Unterdeterminanten nach den Elementen von I' gleich denen nach den entsprechenden Elementen von IV', etc.

Diese Unterdeterminanten bilden also ein System von derselben Art, wie die Elemente $\delta_{i,j}$ von Δ selbst. Bezeichnet man insbesondere die Unterdeterminanten, genommen nach den Elementen

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2^{\mu}}$$

von Δ , entsprechend mit

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2^{\mu}},$$

so wird die Determinante, gebildet aus diesen ersten Unterdeterminanten:

$$= \Delta^{2^{\mu-1}} = \Pi_{\varepsilon} \left\{ \Delta_1 + \varepsilon_1 \Delta_2 + \varepsilon_2 \Delta_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_4 + \varepsilon_3 \Delta_5 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\mu} \Delta_{2^{\mu}} \right\};$$

und ferner folgt, indem man die zweite, dritte, vierte, $\dots$ Verticalreihe von Δ der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \dots$ multiplicirt, dieselben zur ersten Verticalreihe addirt und dann nach den Elementen dieser Reihe ordnet:

$$\Delta = \left\{ \delta_1 + \varepsilon_1 \delta_2 + \varepsilon_2 \delta_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_4 + \varepsilon_3 \delta_5 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\mu} \cdot \delta_{2^{\mu}} \right\} \\ \cdot \left\{ \Delta_1 + \varepsilon_1 \Delta_2 + \varepsilon_2 \Delta_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_4 + \varepsilon_3 \Delta_5 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\mu} \cdot \Delta_{2^{\mu}} \right\},$$

wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ beliebig die Werthe $+1$ oder -1 annehmen können.

§ 16.

Das Additionstheorem in expliciter Gestalt. Fundamentalformel.

Um § 15. auf die Formel (I), (II) des § 14. anzuwenden, hat man dort $\mu = p - 3$ zu setzen und

$$\delta_j = \delta_{1,j} = i_{\lambda_j} \vartheta_{i_{\lambda_j}} \cdot \vartheta_{i_{\lambda_j}}(w).$$

Dann wird die Determinante der Gleichungen II, § 14.:

$$\begin{aligned} (8) \quad \Delta &= \Pi_\varepsilon \{ \delta_1 + \varepsilon_1 \delta_2 + \varepsilon_2 \delta_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_4 + \varepsilon_3 \delta_5 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p-3} \cdot \delta_{2^{p-3}} \} \\ &= \Pi_i \{ \vartheta_i \vartheta_i(w) + i_{i_1} \vartheta_{i_{i_1}} \vartheta_{i_{i_1}}(w) + i_{i_2} \vartheta_{i_{i_2}} \vartheta_{i_{i_2}}(w) + i_{i_1 i_2} \vartheta_{i_{i_1 i_2}} \vartheta_{i_{i_1 i_2}}(w) \\ &\quad + i_{i_3} \vartheta_{i_{i_3}} \vartheta_{i_{i_3}}(w) + \dots + i_{i_1 i_2 \dots i_{p-3}} \vartheta_{i_{i_1 i_2 \dots i_{p-3}}} \vartheta_{i_{i_1 i_2 \dots i_{p-3}}}(w) \} \\ &= \Pi_i \left[\sum_j i_{\lambda_j} \vartheta_{i_{\lambda_j}} \cdot \vartheta_{i_{\lambda_j}}(w) \right] \end{aligned}$$

wo das erste Product Π_ε , bei fest angenommenen Grössen i_{λ_j} , auszudehnen ist über alle 2^{p-3} Werthsysteme, welche die Grössen ε_k annehmen können, wenn

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \dots = \varepsilon_{p-3}^2 = 1;$$

und wo das zweite Product Π_i auszudehnen ist über alle 2^{p-3} Werthsysteme, welche die Grössen i_{λ_j} nach (5), (5') des § 14. annehmen können, wenn die

$$(i_k)^2 = (-1)^{\sum n^k m^k}$$

gegeben sind.

Bei allgemein gelassenen Moduln der Thetafunctionen kann diese Determinante Δ nicht verschwinden. Denn dann existirte eine für alle w identische lineare Relation zwischen den 2^{p-3} Grössen

$$\vartheta_i(w), \vartheta_{i_{i_1}}(w), \dots, \vartheta_{i_{i_1 i_2 \dots i_{p-3}}}(w),$$

was nach der Definition der ϑ -Functionen allgemein nicht der Fall ist.

Bezeichnet man weiter die Unterdeterminanten von Δ , genommen nach dem Element $\delta_{j,j'}$, mit $\Delta_{j,j'}$, wo also:

$$\Delta_{h,k} = \Delta_{j,j'},$$

wenn

$$\delta_{h,k} = \delta_{j,j'},$$

so ergibt die Auflösung von (I), (II), § 14., das *Additionstheorem* in der Form:

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad & \Delta \cdot \vartheta_0(u+v+w) \cdot \vartheta_0(u-v) \\
 = & \sum_{\varrho} \sum_j \sum_{j'} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j \alpha_{\varrho}} m^{\lambda_j} + n^{\alpha_{\varrho}} m^{\lambda_{j'}})} \cdot i_{\lambda_j \lambda_{j'}} \cdot \Delta_{j, j'} \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(v) \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_{\varrho}}(v+w) \\
 & \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_{\varrho}}(u+w) \cdot \\
 & \left(\begin{array}{l} \varrho = 0, 1, \dots, 7 \\ j, j' = 1, 2, 3, \dots, 2^{p-3} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

In dieser Form des Additionstheorems besteht jeder Coefficient eines Gliedes

$$\vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_{\varrho}}(u+w)$$

noch aus einer Summe von 2^{p-3} Gliedern der Form

$$\Delta_{j, j'} \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(v) \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_{\varrho}}(v+w).$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass unter Benutzung der Eigenschaften von Δ eine neue Formel herzustellen ist, bei welcher die Coefficienten der rechten Seite alle *eingliedrig* werden, und welche als *Fundamentalförmel* der Theorie zu betrachten ist.

Zunächst setzen wir in (III):

$$u = v' + \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, 2^{p-3}),$$

wodurch (III) übergeht in:

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad & \Delta \cdot \vartheta_{\lambda_h}(v+v'+w) \cdot \vartheta_{\lambda_h}(v'-v) \\
 = & \sum_{\varrho} \sum_j \sum_{j'} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j \alpha_{\varrho}} m^{\lambda_j} + n^{\alpha_{\varrho}} m^{\lambda_{j'}} + n^{\lambda_h} m^{\lambda_{j'} \alpha_{\varrho}})} \cdot i_{\lambda_j \lambda_{j'}} \cdot \Delta_{j, j'} \\
 & \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_{\varrho}}(v) \vartheta_{\lambda_{j'} \alpha_{\varrho}}(v+w) \cdot \vartheta_{\lambda_h \lambda_{j'} \alpha_{\varrho}}(v') \vartheta_{\lambda_h \lambda_j \alpha_{\varrho}}(v'+w).
 \end{aligned}$$

Man multiplicire nun diese Gleichung auf beiden Seiten mit

$$(-1)^{\Sigma n^{\lambda_h \alpha_0} m^{\lambda_h \alpha_0}} \cdot \vartheta_{\lambda_h} \vartheta_{\lambda_h}(w) = (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_h \alpha_0} m^{\lambda_h \alpha_0} + n^{\lambda_h} m^{\lambda_h})} \cdot i_{\lambda_h} \cdot \delta_h,$$

und addire alsdann über alle Werthe von $h = 1, 2, \dots, 2^{p-3}$. Die alsdann auf der rechten Seite vorzunehmenden Summationen sollen so ausgeführt werden: zunächst lasse man ϱ und j' fest, nehme denjenigen Werth von j , für welchen

$$\lambda_j \lambda_h = \lambda_{h'} L^2,$$

wo L ein Product der l_k , also auch (5''), § 14.):

$$i_{\lambda_j \lambda_{j'}} \cdot i_{\lambda_h} = i_{\lambda_h \lambda_{h'} \lambda_{j'}} \cdot i_{\lambda_h} = i_{\lambda_h \lambda_{j'}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}},$$

und ferner:

$$\Delta_{j, j'} = \Delta_{\lambda_h \lambda_{h'} \lambda_{j'}} = \Delta_{\lambda_h \lambda_{h'} \lambda_{j'}} = \Delta_{h, h' j'},$$

und summire über alle Werthe von h . Das hiervon herrührende Glied, unter den Summenzeichen $\sum_q \sum_{j'} \sum_{k'}$, wird

$$\begin{aligned} & \sum_h (-1)^{\Sigma(n^{i_{j'} \alpha_q} m^{\lambda_h \lambda_{h'}} + n^{\alpha_q} m^{i_{j'} \lambda_{h'}} + n^{i_{j'} \lambda_h} m^{\lambda_h \lambda_{h'} \alpha_q} + n^{\lambda_h \alpha_q} m^{\lambda_h \alpha_q} + n^{\lambda_h} m^{\lambda_h \lambda_{j'}})} \\ & \quad \cdot i_{\lambda_h \lambda_{j'}} \cdot \delta_h \Delta_{h, h'} \cdot \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v) \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v+w) \cdot \vartheta_{i_{\lambda_h} \alpha_q}(v') \vartheta_{i_{\lambda_h} \alpha_q}(v'+w) \\ & = (-1)^{\Sigma(n^{i_{j'} \lambda_{j'}} m^{\lambda_{h'}} + n^{\alpha_q} m^{i_{\lambda_h} \lambda_{j'}} + n^{i_{\lambda_h} \lambda_{j'}} m^{\lambda_{h'} \alpha_q} + n^{\alpha_q} m^{\alpha_q})} \cdot i_{\lambda_h \lambda_{j'}} \\ & \quad \cdot \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v) \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v+w) \cdot \vartheta_{i_{\lambda_h} \alpha_q}(v') \vartheta_{i_{\lambda_h} \alpha_q}(v'+w) \\ & \cdot \sum_h (-1)^{\Sigma(n^{i_{j'} \alpha_q} m^{\lambda_h} + n^{\lambda_h} m^{i_{j'} \alpha_q} + n^{\lambda_h \alpha_q} m^{\lambda_h \alpha_q} + n^{\alpha_q} m^{\alpha_q})} \cdot \delta_h \Delta_{h, h'}. \end{aligned}$$

Der Exponent von -1 im letzten Factor $\sum_h$ wird aber =

$$\begin{aligned} & = \sum (n^{i_{j'} \lambda_h} m^{\lambda_h} + n^{\lambda_h} m^{i_{j'} \alpha_q}) + \sum n^{i_{\lambda_h} \alpha_q} m^{i_{\lambda_h} \alpha_q} + \sum n^{i_{\alpha_q} \alpha_q} m^{i_{\alpha_q} \alpha_q} \\ & \equiv 0 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}; \end{aligned}$$

also wird der ganze Factor $\sum_h$ zu

$$\sum_h \delta_h \Delta_{h, h'} = \Delta \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $h' = j'$ oder $h' \neq j'$.

Daher bleiben auf der rechten Seite nur diejenigen Glieder übrig, für welche $h' = j'$, d. h.

$$\lambda_j \lambda_h = \lambda_j L^2,$$

Glieder, die alle Δ zum Factor haben. Indem man diesen auf beiden Seiten weghebt (und noch j' mit j vertauscht), folgt:

$$\begin{aligned} \text{(V)} \quad & \sum_{h=1}^{h=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(n^{i_h} m^{\lambda_h} + n^{\lambda_h} m^{\alpha_q} + n^{\alpha_q} m^{\lambda_h})} \cdot \vartheta_{i_{\lambda_h}} \vartheta_{i_{\lambda_h}}(w) \\ & \quad \cdot \vartheta_{i_{\lambda_h}}(v+v'+w) \vartheta_{i_{\lambda_h}}(v'-v) \\ & = \sum_{q=0}^{q=1} \sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(n^{i_j \alpha_q} m^i + n^i m^{i_j \alpha_q})} \cdot \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v) \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v+w) \\ & \quad \cdot \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v') \vartheta_{i_{\lambda_j} \alpha_q}(v'+w). \end{aligned}$$

Dieses ist die *Fundamentalformel* der ganzen Theorie, für $p \geq 3$. Bei ihr ist die linke Seite eine Summe von 2^{p-3} Grössen mit zusammengesetzten Argumenten, die rechte Seite eine Summe von 2^p Grössen,

deren Coefficienten *eingliedrig* geworden sind. Setzt man $v' + \frac{1}{2} \varpi^{2j}$ an Stelle von v' , und giebt j' alle Werthe von $1, 2, \dots, 2^{p-3}$, so erhält man 2^{p-3} Gleichungen, aus welchen durch Auflösung wieder (III) oder (IV) hervorgeht.

§ 17.

Speciellere Formeln.

Die bisher gegebenen allgemeinen Theoreme sind in einer Form mitgetheilt, in welcher sie für alle $p \geq 3$ gelten. Wir geben jetzt, durch besondere Annahmen für die Grössen w, v, u , eine Reihe speciellerer Relationen, von denen die ersten noch für alle $p \geq 3$, die nächsten nur für $p \geq 4$, die dritten für $p \geq 5$ und die letzten nur für $p \geq 6$ Geltung haben.

1) $p \geq 3$.

Nach § 13. liefern die Ausdrücke (λ_j) , verbunden mit 2 oder 6 der Grössen

$$(\alpha_0), (\alpha_1), \dots, (\alpha_7),$$

ungerade, mit keiner oder 4 derselben verbunden gerade Charakteristiken. Daher verschwindet nach § 12. die Grösse

$$\vartheta_{\lambda_j \alpha_0}(v),$$

wenn $v = \frac{1}{2} \varpi^\beta$, und $(\beta) = (\alpha_\sigma)$, wo $\sigma \geq 0$, oder (β) aus dreien der (α_i) , von denen eines $= (\alpha_0)$ ist, zusammengesetzt ist. Man setze also*):

$$v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}, \quad v' = u + \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7},$$

so geht (V) nach einigen aus § 12. folgenden Reductionen über in:

$$\begin{aligned} \text{(VI)} \quad 0 &= \sum_{h=1}^{2^{p-3}} (-1)^{\sum n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}} \cdot \vartheta_{\lambda_h} \vartheta_{\lambda_h}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_h}(u) \vartheta_{\lambda_h}(u+w) \\ &- (-1)^{\sum (n^{\lambda} m^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7} + n^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7} m^{\lambda})} \sum_{q=0}^{q=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\sum n^{\lambda_j} q m^{\lambda} + n^{\lambda} m^{\lambda_j} q} \\ &\cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_0 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7} \vartheta_{\lambda_j \alpha_0 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_0 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}(u) \vartheta_{\lambda_j \alpha_0 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}(u+w), \end{aligned}$$

was eine *Beziehung zwischen $6 \cdot 2^{p-3}$ Producten der Form $\vartheta_s(u) \vartheta_s(u+w)$ mit Coefficienten der Form $\vartheta_s \vartheta_s(w)$* vorstellt.

*) Nach den Definitionen des § 12. wäre eigentlich zu schreiben $\vartheta_{0 \lambda_j \alpha_0}(v)$ an Stelle von $\vartheta_{\lambda_j \alpha_0}(v)$, und $\frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}$ statt $\frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}$, da in $\frac{1}{2} \varpi^\beta$ das β eine Gruppencharakteristik vorstellt. Indessen ist hier und im Folgenden die einfachere Schreibart gewählt.

Setzt man ferner in (V):

$$w = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_k \alpha_0 \alpha_1},$$

so verschwindet die ganze linke Seite, und es bleibt:

$$(VII) \quad 0 = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=1} \sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(\lambda_j^{\alpha_\varrho} m^i + n^{\lambda_k \alpha_0 \alpha_1} m^{\lambda_j \alpha_\varrho})} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_\varrho}(v) \vartheta_{i \lambda_j \alpha_\varrho}(v') \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_\varrho \alpha_0 \alpha_1}(v) \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_\varrho \alpha_0 \alpha_1}(v'),$$

ein aus 2^p Producten bestehender Ausdruck.

Ferner sei zu gleicher Zeit gesetzt:

$$v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}, \quad w = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_k \alpha_0 \alpha_1}, \quad v' = u + \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2},$$

wo k beliebig einen der Werthe $1, 2, \dots, 2^{p-3}$ annehmen kann, so folgt:

$$(VIII) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(\lambda_j^{\alpha_\varrho} m^i + n^{\lambda_k \alpha_0 \alpha_1} m^{\lambda_j \alpha_\varrho})} \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}(u) \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}(u),$$

also eine Beziehung zwischen 2^{p-1} Producten der Form $\vartheta_s(u) \vartheta_{s'}(u)$.

Um eine Formel zu erhalten, welche nur die Quadrate $\vartheta_s^2(u)$ enthält, setze man in (VI) $w = 0$; und hat dann eine Beziehung zwischen $6 \cdot 2^{p-3}$ solchen Quadraten. Setzt man hierin weiter $u = 0$, so folgt eine Beziehung zwischen $6 \cdot 2^{p-3}$ vierten Potenzen von ϑ -Functionen für die 0-Werthe der Argumente:

$$(IX) \quad 0 = \sum_{h=1}^{h=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}} \cdot \vartheta_{i \lambda_h}^4 - (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_h} m^{\lambda_h} \alpha_0 \alpha_1 + n^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} m^{\lambda_h})} \\ \cdot \sum_{\varrho=0}^{\varrho=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j} m^{\lambda_j \alpha_\varrho} + n^{\lambda_j \alpha_\varrho} m^{\lambda_j})} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}^4.$$

Endlich ergibt sich eine weitere Beziehung für die 0-Werthe der Argumente, welche aus nur $3 \cdot 2^{p-3}$ Producten besteht, indem man in (VIII) setzt:

$$u = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_h \alpha_0 \alpha_1}.$$

$$(X) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} \sum_{j=1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(\lambda_j^{\alpha_\varrho} m^i + n^{\lambda_k \lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} m^{\lambda_j \alpha_\varrho})} \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \vartheta_{i \lambda_j \lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2},$$

wo die Indices k und h beliebig die Werthe $1, 2, \dots, 2^{p-3}$ annehmen dürfen.

Von den Specialisirungen der Formel (III), § 16. ist hier nur diejenige zu bemerken, welche für

$$v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7}$$

eintritt. Dann verschwinden einfach auf der rechten Seite alle Glieder für $\varrho = 5, 6$ und 7 , und man erhält eine auch aus den Gleichungen (VI) folgende Formel.

2) $p \geq 4$.

Die in § 14. gegebene Zusammensetzung der λ_k aus den l_k , und die Bedeutung dieser Grössen l_k und l nach § 13., zeigen, dass für $p > 4$ die Grössen

$$(l\lambda_h),$$

ausgedrückt durch die Combinationen der Charakteristiken

$$(\alpha_0), (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{2p}), (\alpha_{2p+1}),$$

in diesen Ausdrücken explicite (α_{2p}) , aber nicht (α_{2p+1}) enthalten, wenn $h = 1, 2, \dots, 2^{p-4}$; dagegen (α_{2p+1}) und nicht (α_{2p}) , wenn $h = 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-3}$. Daher wird z. B. $(l\lambda_h \alpha_7 \alpha_{2p})$ im ersteren Falle gerade, im zweiten Falle ungerade.

Man setze also in Formel (V):

$$w = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_1, \alpha_{2p}},$$

und erhält dann aus (V) einen Ausdruck, in welchem die linke Seite nur über die Werthe $h = 1, 2, \dots, 2^{p-4}$ zu summiren ist, also einen Ausdruck von $17 \cdot 2^{p-4}$ Gliedern.

Setzt man ferner zu gleicher Zeit:

$$w = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_1, \alpha_{2p}}, \quad v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7}, \quad v' = u + \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7},$$

so verschwinden auf der linken Seite von (V) alle Glieder für $h = 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-3}$; auf der rechten Seite alle Glieder für $\varrho = 5, 6, 7$, und ferner diejenigen für $\varrho = 0, 1, \dots, 4$, wenn zugleich $j = 1, 2, \dots, 2^{p-4}$. Daher geht (V) über in:

$$\begin{aligned} \text{(XI)} \quad 0 &= \sum_{h=1}^{h=2^{p-4}} (-1)^{\sum n^{2h\alpha_5\alpha_{2p}} m^{2h}} \cdot \vartheta_{1\lambda_h} \vartheta_{1\lambda_h \alpha_1 \alpha_{2p}} \cdot \vartheta_{1\lambda_h}(u) \cdot \vartheta_{1\lambda_h \alpha_1 \alpha_{2p}}(u) \\ &- (-1)^{\sum (n^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_{2p}} m^l + n^{l \alpha_1 \alpha_{2p}} m^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7})} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=4} \sum_{j=2^{p-4}+1}^{j=2^{p-3}} (-1)^{\sum (n^{2j\alpha_5\alpha_6} m^l + n^{l \alpha_5 \alpha_6 \alpha_{2p}} m^{2j\alpha_7})} \\ &\quad \cdot \vartheta_{1\lambda_j \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7} \vartheta_{1\lambda_j \alpha_5 \alpha_6 \alpha_{2p}} \cdot \vartheta_{1\lambda_j \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7}(u) \vartheta_{1\lambda_j \alpha_5 \alpha_6 \alpha_{2p}}(u), \end{aligned}$$

eine Relation zwischen $6 \cdot 2^{p-4}$ Producten der Form $\vartheta_*(u) \vartheta_*(u)$. Dieselbe Art von Relation, in etwas geschlossenerer Gestalt, erhält man, wenn man in (V) setzt:

$$w = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p \alpha_2 p+1}, \quad v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_2 p},$$

nämlich:

$$(XI') \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j \alpha_{\varrho}} m^{i \alpha_2 p} + n^{i \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p+1} m^{\lambda_j \alpha_{\varrho}})} \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_2 p \alpha_{\varrho}} \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p+1 \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p \alpha_2 p+1 \alpha_{\varrho}}(u).$$

Insbesondere folgt, indem man in (XI')

$$u = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}, \quad (\text{wo } h = 1, 2, \dots, \text{ oder } 2^{p-4})$$

setzt, eine Relation zwischen 2^{p-2} Producten, für die 0. Werthe der Argumente:

$$(XII) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j \alpha_{\varrho}} m^{i \alpha_0 \alpha_2 p} + n^{i \lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p+1} m^{\lambda_j \alpha_{\varrho}})} \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_2 p \alpha_{\varrho}} \vartheta_{i \lambda_j \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p+1 \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_{\varrho}} \vartheta_{i \lambda_j \lambda_h \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 p \alpha_2 p+1 \alpha_{\varrho}}, \\ (\text{wo } h = 1, 2, \dots, 2^{p-4} \text{ sein darf}),$$

und eine Relation derselben Art, wenn man in (XI)

$$u = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_h \alpha_0 \alpha_2 p+1} \quad (h = 1, 2, \dots, 2^{p-4})$$

einsetzt.

Setzt man ferner in (V):

$$v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_2 p}, \quad v' = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_2 p} + u,$$

so folgt:

$$(XIII) \quad 0 = (-1)^{\Sigma(n^i m^{\alpha_2 p} + n^{\alpha_2 p} m^i)} \\ \cdot \sum_{h=1}^{h=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_h} m^{\lambda_h} + n^{i \lambda_h \alpha_1 \alpha_2 p} m^{i \lambda_h \alpha_0 \alpha_2 p})} \cdot \vartheta_{i \lambda_h} \vartheta_{i \lambda_h}(w) \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_h}(u) \vartheta_{i \lambda_h}(u+w) \\ - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=7} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j \alpha_{\varrho}} m^i + n^i m^{\lambda_j \alpha_{\varrho}})} \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho} \alpha_2 p} \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho} \alpha_2 p}(w) \\ \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho} \alpha_2 p}(u) \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{\varrho} \alpha_2 p}(u+w)$$

eine Beziehung zwischen $10 \cdot 2^{p-4}$ Producten der Form $\vartheta_*(u) \cdot \vartheta_*(u+w)$. Für $w = 0$ erhält man hieraus eine Beziehung zwischen $10 \cdot 2^{p-4}$

Quadraten $\vartheta_*^2(u)$, und für $w = 0$, $u = 0$ eine Beziehung zwischen $10 \cdot 2^{p-4}$ vierten Potenzen ϑ_*^4 von ϑ -Functionen für die 0-Werthe der Argumente.

Von den Specialisirungen der Formel (III) ist hier diejenige zu bemerken, welche für

$$w = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_7 \alpha_{2p}}$$

eintritt. Die Determinante Δ wird alsdann das Quadrat der Determinante Δ' , welche sich, analog wie Δ aus den Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-3}$, so nur aus den Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2p-4}$ zusammensetzt. An Stelle von $\Delta_{j,j'}$, tritt $\Delta' \cdot \Delta'_{j,j'}$. Auf der rechten Seite von (III) sind die Summen nur über die Werthe $1, 2, 3, \dots, 2^{p-4}$ von j' auszudehnen, wenn j die Werthe $1, 2, \dots, 2^{p-4}$ hat; und über $j' = 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-3}$, wenn auch j einen dieser Werthe hat. Jedes Glied

$$\vartheta_{\lambda_j \alpha_q}(u) \vartheta_{\lambda_j \alpha_7 \alpha_{2p} \alpha_q}(u)$$

hat also dann einen Coefficienten, der aus einer Summe von nur 2^{p-4} Gliedern besteht. — Setzt man ausserdem noch

$$v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7},$$

so bleiben auf der rechten Seite nur noch die Summationen für $q = 0, 1, \dots, 4$; $j = 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-3}$; $j' = 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-3}$ auszuführen.

3) $p \geq 5$.

Die Grössen $(l\lambda_h)$, ausgedrückt durch die Combinationen der Charakteristiken

$$(\alpha_0), (\alpha_1), \dots, (\alpha_{2p+1}),$$

sind bez. von den Formen

$$(L \alpha_{2p-2} \alpha_{2p}); (L \alpha_{2p-1} \alpha_{2p}); (L \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}); (L \alpha_{2p-1} \alpha_{2p+1}),$$

je nachdem h bez. von den Formen:

$$1, 2, \dots, 2^{p-5}; 2^{p-5} + 1, \dots, 2^{p-4}; 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-4} + 2^{p-5}; \\ 2^{p-4} + 2^{p-5} + 1, \dots, 2^{p-3};$$

wobei L aus den $\alpha_5, \alpha_6, \dots, \alpha_{2p-3}$ und (für ungerades p) aus α_0 zusammengesetzt ist. Daher ist $(l\lambda_h \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1})$ im ersten und vierten Falle gerade, im zweiten und dritten Falle ungerade.

Setzt man also in (V):

$$w = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}}, v = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_{2p}}, v' = \frac{1}{2} \varpi^{2p} + u,$$

so verschwinden auf der linken Seite alle Glieder für

$$h = 2^{p-5} + 1, \dots, 2^{p-4} + 2^{p-5};$$

auf der rechten Seite alle Glieder für

$$j = 2^{p-5} + 1, \dots, 2^{p-3},$$

und man erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{(XIV)} \quad 0 = & \sum_{k=1}^{h=2^{p-5}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_k} m^{\lambda_k}} \vartheta_{i\lambda_k} \vartheta_{i\lambda_k, \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} \\
 & \cdot \vartheta_{i\lambda_h}(u) \vartheta_{i\lambda_h, \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}}(u) \\
 & - \sum_{h=3 \cdot 2^{p-5}+1}^{h=2^{p-3}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}} \vartheta_{i\lambda_h} \vartheta_{i\lambda_h, \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} \cdot \vartheta_{i\lambda_h}(u) \\
 & \cdot \vartheta_{i\lambda_h, \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}}(u) \\
 & - (-1)^{\Sigma (n^{\alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} m^{\alpha_{2p}} + n^{\alpha_{2p}} m^i)} \\
 & \cdot \sum_{q=0}^{q=7} \sum_{j=1}^{j=2^{p-5}} \left\{ (-1)^{\Sigma (n^{\lambda_j} m^i + n^{\alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} m^{\lambda_j} u^q)} \right. \\
 & \cdot \vartheta_{i\lambda_j, \alpha_{2p}} \vartheta_{i\lambda_j, \alpha_{2p} \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} \\
 & \cdot \vartheta_{i\lambda_j, \alpha_{2p}}(u) \vartheta_{i\lambda_j, \alpha_{2p} \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}}(u) \left. \right\},
 \end{aligned}$$

also eine Beziehung zwischen $10 \cdot 2^{p-5}$ Producten der Form $\vartheta_i(u) \vartheta_{i'}(u)$.

Insbesondere wird aus (XIV), für

$$u = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_k \alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2p} \alpha_{2p-1}}, \quad (k = 1, 2, \dots, 2^{p-5}):$$

$$\begin{aligned}
 \text{(XV)} \quad 0 = & \sum_{q=1}^{q=6} \sum_{j=1}^{j=2^{p-5}} \left\{ (-1)^{\Sigma (n^{\lambda_j} m^i + n^{\lambda_k \alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2p-2} \alpha_{2p-1} \alpha_{2p} \alpha_{2p+1}} m^{\lambda_j} u^q)} \right. \\
 & \cdot \vartheta_{i\lambda_j, \alpha_{2p}} \vartheta_{i\lambda_j, \alpha_{2p} \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_q} \vartheta_{i\lambda_j, \lambda_k \alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2p-1} \alpha_q} \\
 & \cdot \vartheta_{i\lambda_j, \lambda_k \alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2p-1} \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_q} \left. \right\} \\
 & \text{(wo } k = 1, 2, \dots, 2^{p-5} \text{ sein darf)}
 \end{aligned}$$

eine Beziehung zwischen $6 \cdot 2^{p-5}$ Producten, für die 0-Werthe der Argumente.

4) $p \geq 6$.

Setzt man in (XIV):

$$u = \frac{1}{2} \varpi^{\lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}}, \quad (k = 1, 2, \dots, 2^{p-6}),$$

so verschwinden auf der linken Seite die Glieder für $k = 1, 2, \dots, 2^{p-6}$ und für $h = 7 \cdot 2^{p-6} + 1, \dots, 2^{p-3}$; auf der rechten Seite alle Glieder für $j = 2^{p-6} + 1, \dots, 2^{p-5}$, und man erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{(XVI)} \quad 0 = & \sum_{h=2^{p-6}+1}^{h=2^{p-5}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_h \lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} m^{\lambda_h}} \vartheta_{i \lambda_h} \vartheta_{i \lambda_h \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} \vartheta_{i \lambda_h \lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} \\
 & \cdot \vartheta_{i \lambda_h \lambda_k \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} \\
 & - \sum_{h=6 \cdot 2^{p-6}+1}^{h=7 \cdot 2^{p-6}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_h \lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} m^{\lambda_h}} \vartheta_{i \lambda_h} \vartheta_{i \lambda_h \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1}} \vartheta_{i \lambda_h \lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} \\
 & \cdot \vartheta_{i \lambda_h \lambda_k \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} \\
 & - (-1)^{\Sigma (n^{\lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} m^{\alpha_{2p}} + n^{\alpha_{2p}} m^{\lambda_k})} \\
 & \cdot \sum_{q=0}^q \sum_{j=1}^{j=2^{p-6}} \left\{ (-1)^{\Sigma (n^{\lambda_j \alpha_q} m^{\lambda_k} + n^{\lambda_k \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_{2p-4} \alpha_{2p}} m^{\lambda_j \alpha_q})} \right. \\
 & \cdot \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{2p} \alpha_q} \vartheta_{i \lambda_j \alpha_{2p} \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_q} \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_{2p-4} \alpha_q} \vartheta_{i \lambda_j \lambda_k \alpha_{2p-2} \alpha_{2p+1} \alpha_{2p-4} \alpha_q} \left. \right\};
 \end{aligned}$$

für $k = 1, 2, \dots, 2^{p-6}$; eine Beziehung zwischen $10 \cdot 2^{p-6}$ Producten, für die Nullwerthe der Argumente.

§ 18.

Die Thetarelationen.

Nach 1), 2), 3), 4), § 17., existiren im Ganzen folgende lineare homogene Relationen:

a) Relationen zwischen Producten der Form $\vartheta_{\varepsilon}(u) \cdot \vartheta_{\varepsilon}(u+w)$, mit Coefficienten der Form $\vartheta_{\varepsilon} \vartheta_{\varepsilon}(w)$:

1. für $p \geq 3$ zwischen $6 \cdot 2^{p-3}$ solchen Producten (Formel (VI)),
2. „ $p \geq 4$ „ $10 \cdot 2^{p-4}$ „ „ („ (XIII)).

b) Relationen zwischen Producten der Form $\vartheta_{\varepsilon}(u) \vartheta_{\varepsilon'}(u)$, wo ε' von ε verschieden ist, mit Coefficienten der Form $\vartheta_{\varepsilon} \vartheta_{\varepsilon'}$:

1. für $p \geq 3$ zwischen $4 \cdot 2^{p-3}$ solchen Producten (Formel (VIII)),
2. „ $p \geq 4$ „ $6 \cdot 2^{p-4}$ „ „ („ (XI) oder (XI')),
3. „ $p \geq 5$ „ $10 \cdot 2^{p-5}$ „ „ („ (XIV)).

c) Relationen zwischen Producten der Form $\vartheta_{\varepsilon} \vartheta_{\varepsilon'} \vartheta_{\varepsilon''} \vartheta_{\varepsilon'''}$, wo die vier Indices von einander verschieden sind, für die Nullwerthe der Argumente, mit Zahlencoefficienten:

1. für $p \geq 3$ zwischen $3 \cdot 2^{p-3}$ solchen Producten (Formel (X)),
2. „ $p \geq 4$ „ $4 \cdot 2^{p-4}$ „ „ („ (XII)),
3. „ $p \geq 5$ „ $6 \cdot 2^{p-5}$ „ „ („ (XV)),
4. „ $p \geq 6$ „ $10 \cdot 2^{p-6}$ „ „ („ (XVI)).

Zwischen diesen Relationen existirt eine grosse Anzahl von Beziehungen. Wir wollen hier nachweisen, dass *sämmtliche Relationen der Arten 1. aus denen der Arten 2. folgen, wenn $p \geq 4$; die 2. aus 3. für $p \geq 5$ und die 3. aus 4. für $p \geq 6$.*

Um dies zunächst für die Relationen a) zu zeigen, machen wir auf Formel (XIII), § 17., eine Substitution: $\{\alpha_{2p+1}, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$. Hierdurch geht über: (l) in $(l\alpha_{2p+1}\alpha_5\alpha_6\alpha_7)$; $(l\lambda_h)$ in $(l\lambda_h\alpha_{2p+1}\alpha_5\alpha_6\alpha_7)$ für $h = 1, 2, \dots, 2^{p-4}$, aber in $(l\lambda_h)$ für $h = 2^{p-4} + 1, \dots, 2^{p-3}$; also $[\lambda_h]$ im ersten Falle in $[\lambda_h]$, im zweiten in $[\lambda_h\alpha_{2p+1}\alpha_5\alpha_6\alpha_7]$; ebenso (α_{2p}) in $(\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}\alpha_5\alpha_6\alpha_7)$; (α_ϱ) in $(\alpha_\varrho\alpha_{2p+1}\alpha_5\alpha_6\alpha_7)$, wenn $\varrho = 0, 1, \dots, 4$, dagegen in (α_ϱ) für $\varrho = 5, 6, 7$. Daher wird (XIII), nach einfachen Reductionen, wenn man noch $(l\alpha_{2p+1}\alpha_5\alpha_6\alpha_7) = (\beta)$ setzt:

$$\begin{aligned} 0 = & (-1)^{\Sigma(n^l m^{\beta\alpha_{2p}} + n^{\beta\alpha_{2p}} m^l)} \\ & \cdot \sum_{h=1}^{h=2^{p-4}} \{(-1)^{\Sigma n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}} \vartheta_{\lambda_h \beta}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_h \beta}(u) \vartheta_{\lambda_h \beta}(u+w)\} \\ & + (-1)^{\Sigma(n^l m^{\alpha_{2p}} + n^{\alpha_{2p}} m^l)} \\ & \cdot \sum_{h=2^{p-4}+1}^{h=2^{p-3}} \{(-1)^{\Sigma n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}} \vartheta_{\lambda_h}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_h}(u) \vartheta_{\lambda_h}(u+w)\} \\ - & (-1)^{\Sigma n^l m^l} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} \{(-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j} \alpha_\varrho m^l + n^l m^{\lambda_j} \alpha_\varrho)} \\ & \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho} \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(u) \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(u+w)\} \\ + & \sum_{\varrho=5}^{\varrho=7} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} \{(-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j} \alpha_\varrho m^l + n^l m^{\lambda_j} \alpha_\varrho)} \\ & \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho} \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(u) \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(u+w)\}. \end{aligned}$$

In dieser Formel stimmen aber 4 Summen mit 4 Summen, die in (XIII) vorkommen, genau überein, und es folgt daher aus deren Verbindung:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\Sigma n^l m^l} \cdot \sum_{\varrho=0}^{\varrho=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma(n^{\lambda_j} \alpha_\varrho m^l + n^l m^{\lambda_j} \alpha_\varrho)} \\ & \cdot \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho} \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(w) \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(u) \vartheta_{\lambda_j \alpha_\varrho}(u+w) \\ - & (-1)^{\Sigma(n^l m^{\beta\alpha_{2p}} + n^{\beta\alpha_{2p}} m^l)} \sum_{h=1}^{h=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma n^{\lambda_h} m^{\lambda_h}} \\ & \cdot \vartheta_{\lambda_h \beta} \vartheta_{\lambda_h \beta}(w) \cdot \vartheta_{\lambda_h \beta}(u) \vartheta_{\lambda_h \beta}(u+w) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\varrho=0}^{\varrho=4} \sum_{j=1}^{j=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma(n^{2^j \alpha_{\varrho}} m^l + n^l m^{2^j \alpha_{\varrho}})} \\
&\quad \cdot \vartheta_{l 2^j \alpha_{\varrho} 2^p} \vartheta_{l 2^j \alpha_{\varrho} 2^p}(w) \cdot \vartheta_{l 2^j \alpha_{\varrho} 2^p}(u) \vartheta_{l 2^j \alpha_{\varrho} 2^p}(u+w) \\
&+ (-1)^{\Sigma(n^{l \alpha_{2^p}} m^{l \alpha_{2^p}} + n^{2^p} m^{2^p})} \sum_{h=1}^{h=2^{p-4}} (-1)^{\Sigma n^{2^h} m^{2^h}} \\
&\quad \cdot \vartheta_{l 2^h} \vartheta_{l 2^h}(w) \cdot \vartheta_{l 2^h}(u) \vartheta_{l 2^h}(u+w),
\end{aligned}$$

wo $(\beta) = (l \alpha_{2^p+1} \alpha_3 \alpha_6 \alpha_7)$.

Dies ist eine Formel der Art a), 1., abgeleitet aus a), 2. Die Formel würde in der That mit (VI) genau übereinstimmen, wenn man noch auf sie die Substitution $\{\alpha_{2^p} \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7\}$ ausübte, wie eine einfache Rechnung zeigt.

Ganz analog ergeben sich die übrigen genannten Zusammenhänge. So bleibt, wenn man auf Formel (XI) eine Substitution $\{\alpha_0 \alpha_{2^p+1}\}$ anwendet, die erste Summe $\sum_h$ unverändert, ebenso die Summe für $\varrho=0$;

die übrigen 4 Summen, für $\varrho=1, \dots, 4$, ändern sich aber, und es folgt daher, indem man die so erhaltene Gleichung von (XI) subtrahirt, eine Beziehung zwischen $8 \cdot 2^{p-4}$ Producten der Form $\vartheta_{\varepsilon}(u) \vartheta_{\varepsilon'}(u)$, die von der Art b), 1. wird und aus b), 2. abgeleitet ist. Die resultirende Formel geht vermöge der Substitution $\{\alpha_0 \alpha_{2^p}\}$ genau in (VIII) über.

Um b) 2. aus b) 3. abzuleiten, mache man auf (XIV) eine Substitution $\{\alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2^p-2} \alpha_{2^p+1}\}$; dann ändern sich die beiden Summen $\sum_h$ nicht; die beiden Summen für $\varrho=0$ und $\varrho=7$ vertauschen sich

nur untereinander, die 6 Summen $\sum_{j=1}^{j=2^{p-5}}$, von $\varrho=1, \dots, 6$, ändern sich aber, und die so resultirende Gleichung, mit (XIV) verbunden, liefert eine Relation zwischen $12 \cdot 2^{p-5}$ Producten der Form $\vartheta_{\varepsilon}(u) \vartheta_{\varepsilon'}(u)$, von der Art b), 2. Dieselbe würde vermöge der Substitution $\{\alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2^p-2} \alpha_{2^p}\}$ in (XI') übergehen.

Um c), 1. aus c), 2. abzuleiten, mache man auf (XII) eine Substitution $\{\alpha_0 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_{2^p+1}\}$; um c), 2. aus c), 3. zu erhalten, auf (XV) eine Substitution $\{\alpha_3 \alpha_6 \alpha_{2^p-1} \alpha_{2^p+1}\}$; endlich um c), 3. aus c), 4. zu erhalten, auf (XVI) eine Substitution $\{\alpha_0 \alpha_7 \alpha_{2^p-3} \alpha_{2^p-1}\}$; und verbinde die resultirende Gleichung immer mit der ursprünglichen Gleichung.

§ 19.

Die Thetarelationen für $p = 5$.

Die in § 8. definirten „ausgezeichneten“ Systeme von $2p + 1$ Charakteristiken bestehen für $p = 5$ aus Systemen von 11 geraden Charakteristiken mit ungerader Summe, von der Art:

$$(\alpha_0) = (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{11}),$$

wo die

$$\begin{array}{ll} (\alpha_i), (\alpha_i \alpha_x \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu), (\alpha_0 \alpha_i \alpha_x) & \text{gerade, } \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \leq x \leq \lambda \dots, \\ (\alpha_i \alpha_x \alpha_\lambda), (\alpha_0 \alpha_i \alpha_x \alpha_\lambda \alpha_\mu), (\alpha_0) & \text{ungerade. } \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \text{ von } 1, 2, \dots, 11. \end{array}$$

Es ist sehr leicht, alle existirenden ausgezeichneten Systeme aus einem solchen abzuleiten und etwa alle von der Summe (α_0) der Form nach anzuschreiben, von den übrigen Summen je einen Repräsentanten. Indessen möge es hier genügen, diejenigen Systeme anzuschreiben, welche wir zu den folgenden Beweisen allein gebrauchen; nämlich alle, welche die 5 Charakteristiken

$$(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4), (\alpha_5)$$

enthalten. Dieselben kommen nach § 10., 1., 2., und 5. in

$$\frac{11 \cdot 10 \dots 7}{1 \cdot 2 \dots 5} \cdot \frac{R_2 R_4 \dots R_{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 11} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{R_2 \cdot R_8 \cdot R_{10}} = 72$$

ausgezeichneten Systemen vor, und zwar nur in den Systemen:

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha_0) = (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_5); (\alpha_6), \dots, (\alpha_{11}). & \\ \equiv & \text{,,} \quad ; (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_5 \alpha_6), \dots, \\ & (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_5 \alpha_{11}). \\ (\alpha_3 \alpha_{10} \alpha_{11}) = & \text{,,} \quad ; (\alpha_6), (\alpha_7), (\alpha_8), (\alpha_0 \alpha_9 \alpha_{10}), \\ & (\alpha_0 \alpha_0 \alpha_{11}), (\alpha_0 \alpha_{10} \alpha_{11}). \\ \equiv & \text{,,} \quad ; (\alpha_0 \alpha_6 \alpha_7), (\alpha_0 \alpha_6 \alpha_8), (\alpha_0 \alpha_7 \alpha_8), \\ & (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_5 \alpha_9), (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_5 \alpha_{10}), \\ & (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_5 \alpha_{11}). \\ (\alpha_0 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}) = & \text{,,} \quad ; (\alpha_6), (\alpha_0 \alpha_7 \alpha_8), (\alpha_0 \alpha_7 \alpha_9), \\ & (\alpha_0 \alpha_7 \alpha_{10}), (\alpha_0 \alpha_7 \alpha_{11}), \\ & (\alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}). \\ \equiv & \text{,,} \quad ; (\alpha_7), (\alpha_0 \alpha_6 \alpha_8), \dots, (\alpha_0 \alpha_6 \alpha_{11}), \\ & (\alpha_8 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}), \end{array} \right.$$

wo man noch die Indices 6, 7, ..., 11 auf alle Weisen zu vertauschen hat.

Um die Formeln der §§ 16. und 17. anzuwenden, hat man dort zu setzen:

$$l = \alpha_0 \alpha_8 \alpha_{10}, \quad l_1 = \alpha_8 \alpha_9, \quad l_2 = \alpha_{10} \alpha_{11}, \\ \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \alpha_8 \alpha_9, \quad \lambda_3 = \alpha_{10} \alpha_{11}, \quad \lambda_4 = \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}.$$

Dann liefert zunächst Formel (XI'), § 17., nach einer auf die Indices ausgeübten Substitution $\{\alpha_0 \alpha_8\}$ eine Formel von der Gestalt:

$$(2) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} \left\{ \varepsilon_{\varrho} \vartheta_{\alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}} \vartheta_{\alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}}(u) \right. \\ \left. + \varepsilon_{\varrho}' \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}}(u) \right\},$$

insbesondere für $u = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}}$ eine Relation der Form:

$$(3) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=4} \left\{ \varepsilon_{\varrho}'' \vartheta_{\alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \right. \\ \left. + \varepsilon_{\varrho}''' \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \right\};$$

wo überall die $\varepsilon_{\varrho}, \varepsilon_{\varrho}', \dots$ nur die Werthe ± 1 haben.

Die Formel (XIV), § 17., liefert ebenso eine Beziehung, wobei die Zahlencoefficienten am einfachsten durch Einsetzen von $u = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_8 \alpha_9}$ bestimmt werden:

$$(4) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=10} (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_{\varrho}} m^{\alpha_0} + n^{\alpha_{11}} m^{\alpha_{\varrho}})} \cdot \vartheta_{\alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}}(u),$$

woraus, für $u = \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}}$:

$$(5) \quad 0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=6} (-1)^{\Sigma(n^{\alpha_{\varrho}} m^{\alpha_0} + n^{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}} m^{\alpha_{\varrho}})} \\ \cdot \vartheta_{\alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}}.$$

Die Relation (2) ist eine Folge der Relationen der Art (4); (3) solcher von der Art (5).

Wir stellen uns nun die Aufgabe, *solche Systeme von geraden Thetafunctionen anzugeben, welche für die Nullwerthe der Argumente verschwinden können.*

1. Sei zunächst:

$$\vartheta_{\alpha_1} = \vartheta_{\alpha_2} = \vartheta_{\alpha_3} = \vartheta_{\alpha_4} = 0, \\ \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_1} = \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_2} = \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_3} = \vartheta_{\alpha_0 \alpha_{11} \alpha_4} = 0.$$

In Formel (3) kommen diese 8 Functionen auf die 8 Glieder dieses Ausdrucks vertheilt vor, und dieselbe ist erfüllt. Ferner ist jede Formel der Art (3), welche in ihren ersten 7 Gliedern irgend 7 der genannten Grössen enthält, erfüllt, weil in dem 8^{ten} Gliede immer die ϑ -Function vorkommt, deren Index gleich der Summe der Indices der ersten

7 Functionen ist. Das Verschwinden eines Systems solcher 8 ϑ -Functionen, für die 0-Werthe der Argumente, stellt also nur 7 Bedingungen für die Moduln dar.

2. Sei

$$\vartheta_{a_1} = \vartheta_{a_2} = \vartheta_{a_3} = \vartheta_{a_4} = \vartheta_{a_5} = \vartheta_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 0.$$

Alsdann ist Formel (5) erfüllt. Und jede Formel dieser Art (5), welche in ihren ersten 5 Gliedern irgend 5 der angegebenen 6 Grössen enthält, ist erfüllt, weil in dem 6. Gliede immer die ϑ -Function vorkommt, deren Index gleich der Summe der Indices der ersten 5 Functionen ist. Das Verschwinden eines solchen Systems von 6 ϑ -Functionen, für die 0-Werthe der Argumente, stellt daher nur 5 Bedingungen für die Thetamoduln dar. Von solchen Systemen giebt es (§ 10., 2., 5.) an Zahl:

$$\begin{array}{cccccc} R_3 & R_2 & R_{10} & & & \\ | & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

3. Sei

$$\vartheta_{a_1} = \vartheta_{a_2} = \vartheta_{a_3} = \vartheta_{a_4} = \vartheta_{a_5} = 0,$$

ohne dass

$$\vartheta_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 0$$

ist. Macht man auf Formel (5) alle Substitutionen, durch welche $(\alpha_1), \dots, (\alpha_5)$ erhalten bleiben, also wie die Systeme (1) zeigen, die Substitutionen:

$$(6) \quad \{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5\}, \quad \{\alpha_0 \alpha_3 \alpha_{10} \alpha_{11}\}, \quad \{\alpha_0 \alpha_7 \alpha_{10} \alpha_{11}\} \cdot \{\alpha_0 \alpha_7 \alpha_5 \alpha_9\},$$

sowie die erste mit den beiden andern verbunden, und macht man dann noch alle Vertauschungen der Indices 6, 7, $\dots$, 11, so erhält man alle Formeln der Art (5), in deren 5 ersten Gliedern $\vartheta_{a_1}, \vartheta_{a_2}, \dots, \vartheta_{a_5}$ vertheilt auftreten. Daher müssen, wenn diese Grössen verschwinden, ohne dass $\vartheta_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 0$ sein soll, noch alle Producte verschwinden:

$$\vartheta_{a_0} \vartheta_{a_0 a_0 a_0} \vartheta_{a_0 a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 0,$$

$$\vartheta_{a_0 a_0 a_0} \vartheta_{a_0 a_0' a_0''} \vartheta_{a_0 a_0' a_0''} = 0,$$

wo die Zahlen ρ, σ, ρ' etc. alle von einander verschieden sind und die Werthe 6, 7, $\dots$, 11 annehmen sollen. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass ein System von folgender Art ebenfalls verschwindet:

$$(7) \quad \begin{cases} \vartheta_{a_6} = \vartheta_{a_7} = \vartheta_{a_8} = \vartheta_{a_9} = \vartheta_{a_{10}} = 0 \\ \vartheta_{a_0 a_{11} a_6} = \vartheta_{a_0 a_{11} a_7} = \vartheta_{a_0 a_{11} a_8} = \vartheta_{a_0 a_{11} a_9} = \vartheta_{a_0 a_{11} a_{10}} = 0. \end{cases}$$

Vertauscht man alsdann, da auch $\vartheta_{a_6} = 0$ ist, τ mit 6, (wo $\tau = 1, 2, \dots, 5$) und nimmt an, dass nicht ein System der Art

$$\vartheta_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_\tau} = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots, 6),$$

d. h. ein System der Art 2. existirt, so sieht man, dass im Ganzen ein System der Art verschwinden muss:

$$(8) \quad \begin{cases} \vartheta_{a_1} = \vartheta_{a_2} = \dots = \vartheta_{a_{10}} = 0, \\ \vartheta_{a_0 a_{11} a_1} = \vartheta_{a_0 a_{11} a_2} = \dots = \vartheta_{a_0 a_{11} a_{10}} = 0. \end{cases}$$

Das Verschwinden solcher 20 Thetafunctionen zieht auch nicht das von weiteren nach sich. Denn wenn die $\vartheta_{a_1}, \dots, \vartheta_{a_{10}}$ in den ersten 5 Gliedern von (5) vertheilt vorkommen, tritt eine der Grössen (7) im letzten Gliede auf. Nimmt man nun statt der ersten 5 ϑ_{a_q} irgend 5 andere aus (8), von denselben Beziehungen, also statt

$$(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3), (\alpha_4), (\alpha_5)$$

Systeme derselben Form, in welcher nur einige der (α_q) durch $(\alpha_0 a_{11} \alpha_q)$ ersetzt sind, d. h. macht man Substitutionen der Art:

$$(6') \quad \{\alpha_q \alpha_\sigma\}, \{\alpha_0 a_{11}\}, \{\alpha_0 a_{11} \alpha_q \alpha_\sigma\}, \quad (q \geq \sigma, \text{ von } 1, 2, \dots, 10)$$

so gehen die Grössen (8) nur in einander über. Ebenso sind, wie in 1. gezeigt, die Relationen (3) durch (8) befriedigt.

Die 20 Indices des Systems (8) sind in zwei Reihen von je 10 geschrieben:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1), \quad (\alpha_2), \quad \dots, (\alpha_{10}); \\ &(\alpha_0 a_{11} \alpha_1), (\alpha_0 a_{11} \alpha_2), \dots, (\alpha_0 a_{11} \alpha_{10}), \end{aligned}$$

und diese beiden Reihen sind *einer* ungeraden Charakteristik, (α_0) , zugeordnet, indem nämlich jede Reihe aus 10 der 11 Charakteristiken eines „ausgezeichneten“ Systems mit der Summe (α_0) besteht. Indessen ist die Gesamtheit der 20 Charakteristiken nicht (α_0) allein zugeordnet; sondern bei veränderter Vertheilung der 20 in $2 \cdot 10$ im Ganzen 256 verschiedenen ungeraden Charakteristiken, nämlich:

$$(9) \quad (\alpha_0), (\alpha_{11} \alpha_q \alpha_\sigma), (\alpha_0 \alpha_q \alpha_\sigma \alpha_\tau \alpha_\zeta), \quad (q \geq \sigma \geq \tau \geq \zeta, \text{ von } 1, 2, \dots, 10)$$

die aus (α_0) durch die Substitutionen (6') hervorgehen.

Hieraus und aus der Anzahl der ausgezeichneten Systeme folgt auch, dass es auf

$$\frac{1}{2^9} \cdot \frac{R_2 R_4 R_6 R_8 R_{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10}$$

verschiedene Arten möglich ist, Systeme von 20 Charakteristiken der Art (8) zu bestimmen. Sind von einem solchen System 5 Charakteristiken der Form $(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_5)$ gegeben, so sind die 15 übrigen, wie wieder (1) lehrt, auf 27 verschiedene Weisen wählbar.

Das System (8) ist wieder 5 Bedingungen äquivalent.

4. Sei endlich das System (8) gegeben und *ausserdem*

$$\vartheta_{a_{11}} = 0.$$

Dann müssen nach (5) und (6') noch alle Producte der Form

$$(10) \quad \vartheta_{a_1 a_6 a_9 a_{10} a_{11}} \vartheta_{a_0 a_1 a_2} \vartheta_{a_0 a_3 a_4} \vartheta_{a_0 a_5 a_6}$$

mit allen Vertauschungen aller Zahlen 1, 2, ..., 11 verschwinden. Entweder hat man also

$$(11) \quad \vartheta_{a_{11}} = 0, \quad \vartheta_{a_0 a_1 a_2} = 0,$$

oder

$$(12) \quad \vartheta_{a_{11}} = 0, \quad \vartheta_{a_1 a_0 a_2 a_3 a_{10} a_{11}} = 0.$$

Dies Letztere führt aber zu einem System von derselben Art, als wenn man

$$(13) \quad \vartheta_{a_0 a_1 a_2} = 0, \quad \vartheta_{a_0 a_1 a_2} = 0$$

setzt; denn die Substitution $\{\alpha_0 \alpha_3 \alpha_{10} \alpha_{11}\}$, welche (8) unverändert lässt, führt beide in einander über. Daher kann man (13) statt (12) annehmen. Neben (11) kann man dann weiter annehmen, dass $\vartheta_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_{11}}$ nicht = 0, da die Substitution $\{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_{11}\}$ statt dessen liefert:

$$(14) \quad \vartheta_{a_0 a_1 a_2} = 0, \quad \vartheta_{a_{11}} = 0, \quad \vartheta_{a_0 a_3 a_4} = 0;$$

und hierdurch ist auch schon der Fall (13), wenn man darin 7, 8, 9, 10 mit 1, 2, 3, 4 vertauscht, weiter behandelt. Ferner zeigt (10), dass auch noch ein Ausdruck der Form

$$\vartheta_{a_0 a_1 a_2} = 0$$

werden muss; etc. Indem man so fortfährt, erkennt man, dass man zu einem System der folgenden Art kommt:

$$(15) \quad \vartheta_{\alpha_\sigma} = 0, \quad \vartheta_{\alpha_0 \alpha_\sigma \alpha_\sigma} = 0, \quad (\sigma \geq \sigma \text{ von } 1, 2, \dots, 11).$$

Umgekehrt kann man wieder zeigen, dass das Verschwinden dieser 66 Thetafunctionen auch nicht das von weiteren geraden Thetafunctionen nach sich zieht. Zu dem Zwecke bilde man aus den 66 auf alle mögliche Weisen solche 5, welche in den 5 ersten Gliedern einer Formel (5) vertheilt vorkommen können, d. h. alle Systeme von 5 Charakteristiken aus den (α_σ) , $(\alpha_0 \alpha_\sigma \alpha_\sigma)$, die an Stelle von (α_1) , ..., (α_5) treten können. Dies sind einmal die schon in 3) untersuchten, und es ist dort gezeigt, dass in dem letzten Gliede der Formel (5) dann immer eine Grösse aus (15) vorkommt. Sodann diejenigen, welche aus diesen durch die Substitutionen

$$\{\alpha_\sigma \alpha_\sigma\}, \quad \{\alpha_0 \alpha_\sigma\},$$

hervorgehen; durch diese Substitutionen geht aber das System (15) nur in sich über. Endlich die Systeme der Art:

$$(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2), (\alpha_0 \alpha_3 \alpha_4), (\alpha_0 \alpha_3 \alpha_5),$$

mit den durch die obigen Substitutionen daraus folgenden; aber in diesem Falle ist die *Summe* der 5 Charakteristiken von der Form

$(\alpha_0 \alpha_\rho \alpha_\sigma)$ oder (α_ρ) , und das entsprechende ϑ tritt im 6^{ten} Gliede der Formel (5) auf und ist zugleich in (10) enthalten.

• Die 66 zum System (10) gehörigen Charakteristiken

$$(15') \quad (\alpha_\rho); (\alpha_0 \alpha_\rho \alpha_\sigma), \quad (\rho \geq \sigma, \text{ von } 1, 2, \dots, 11)$$

sind einer ungeraden Charakteristik, (α_0) , zugeordnet. In der That sind die aus je zweien der 66 Charakteristiken zu bildenden Gruppen alle von den Formen:

$$[\alpha_0 \alpha_\rho], [\alpha_\rho \alpha_\sigma], [\alpha_0 \alpha_\rho \alpha_\sigma \alpha_\tau], [\alpha_\rho \alpha_\sigma \alpha_\tau \alpha_\epsilon],$$

und (α_0) ist in 495 dieser 561 Gruppen enthalten, in 66 derselben nicht; dagegen die übrigen ungeraden Charakteristiken sind je in 271 derselben enthalten, in 290 nicht. — Die Zuordnung zu (α_0) kann auch mittelst der „ausgezeichneten“ Systeme von je 11 Charakteristiken geschehen; denn aus den Charakteristiken (15') lassen sich 12 solche Systeme bilden, welche alle (α_0) zur Summe haben:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_0) \equiv (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{11}), \\ \equiv (\alpha_1), (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2), \dots, (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_{11}), \\ \equiv (\alpha_2), (\alpha_0 \alpha_2 \alpha_1), \dots, (\alpha_0 \alpha_2 \alpha_{11}), \\ \equiv \dots, \end{array} \right.$$

und jedes einzelne dieser Systeme führt auf gleiche Weise zu den 66 Charakteristiken (15') (vgl. § 11., 2) 6)). Dagegen lassen sich aus (15') nur je 4 ausgezeichnete Systeme bilden, welche eine von (α_0) verschiedene ungerade Charakteristik zur Summe haben; und solche 4 Systeme (wie etwa

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \equiv (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2), (\alpha_0 \alpha_2 \alpha_3), (\alpha_0 \alpha_3 \alpha_1), (\alpha_4), (\alpha_5), \dots, (\alpha_{11}),$$

und die 3 durch die Substitutionen $\{\alpha_0 \alpha_1\}$, $\{\alpha_0 \alpha_2\}$, $\{\alpha_0 \alpha_3\}$ hieraus hervorgehenden) führen auf ein System der Art (15'), das aber von diesem verschieden ist.

Aus dieser Zuordnung eines Systems (15') zu 12 ausgezeichneten Systemen (16) ergibt sich zugleich, dass es auf

$$\frac{L_0}{12} = \frac{R_2 R_4 R_6 R_{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 12}$$

verschiedene Weisen möglich ist, Systeme der Art (15') oder (15) zu bestimmen. Sind die Gleichungen (8) gegeben, so kann man nach (9) das System der übrigen verschwindenden ϑ noch auf 2⁸ verschiedene Weisen wählen. Ist ausser (8) noch $\vartheta_{u_{11}} = 0$ gegeben, so liefert dies neben System (15) noch 45 weitere nicht (α_0) zugeordnete Systeme derselben Art, von denen irgend eines an Stelle von (15) gesetzt werden kann.

Das System (15) ist 6 Bedingungen äquivalent.

5. Es sollen jetzt noch die Relationen untersucht werden, welche vermöge (15) für die Differentialquotienten der Thetafunctionen, für die 0-Werthe der Argumente, entstehen.

Wendet man auf Formel (14) dieses Paragraphen nach einander die Substitutionen an:

$$\{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{10} \alpha_{11}\}, \quad \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{11}\}, \quad \{\alpha_{10} \alpha_{11}\};$$

mit andern Worten: ersetzt man das System

$$(\alpha_0) \equiv (\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_{11})$$

durch:

$$(\alpha_0) \equiv (\alpha_1 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}), (\alpha_2 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}), (\alpha_3 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}), (\alpha_4 \alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}),$$

$$(\alpha_5), (\alpha_6), (\alpha_7),$$

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_8), (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_9), (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{10}), (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{11}),$$

so nimmt (4) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} & \sum_{\varrho=1}^{\varrho=4} \varepsilon_{\varrho} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}}(u) \\ & + \sum_{\varrho=5}^{\varrho=7} \varepsilon_{\varrho} \vartheta_{\alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}}(u) \\ & + \sum_{\varrho=8}^{\varrho=10} \varepsilon_{\varrho} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_5 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_5 \alpha_{11} \alpha_{\varrho}}(u) = 0, \end{aligned}$$

wo die ε_{ϱ} die Werthe ± 1 haben.

Vermöge der Beziehungen (8) oder (15) reducirt sich diese Gleichung auf eine 4-gliedrige. Setzt man ausserdem

$$u + \frac{1}{2} \varpi^{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}},$$

für u , so folgt dann nämlich:

$$\begin{aligned} 0 &= \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}} \cdot \vartheta_{\alpha_5}(u) \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11}}(u) \\ &+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=3} \varepsilon_{\varrho} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}} \cdot \vartheta_{\alpha_5 \alpha_{\varrho}}(u) \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{\varrho}}(u). \end{aligned}$$

Da nun, wenn (15) gilt, der Factor von $\vartheta_{\alpha_5}(u)$ auch für die Nullargumente nicht verschwindet, dagegen

$$\vartheta_{\alpha_5 \alpha_{\varrho}} = 0, \quad \vartheta_{\alpha_5 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{\varrho}} = 0, \quad \text{für } \varrho = 1, 2, 3,$$

so ergibt die Differentiation der letzten Gleichung nach irgend einem der Argumente, mit Hülfe von (15):

$$(17) \quad \left[\frac{\partial \vartheta_{a_0}(u)}{\partial u_a} \right]_0 = 0,$$

für die Nullargumente.

Wenn also die Gleichungen (15) existiren, so verschwinden ausserdem noch für die Nullwerthe der Argumente die ersten partiellen Differentialquotienten derjenigen ungeraden Function $\vartheta_{a_0}(u)$, deren Charakteristik (a_0) dem System der Charakteristiken der 66 Functionen von (15) zugeordnet ist. Das Bestehen eines Gleichungssystems der Art (15) und (17) tritt aber, wie bekannt,*) bei den *hyperelliptischen* Thetafunctionen für $p = 5$ auf.

*) Weierstrass (vgl. die oben c. Abh. von Königsberger). Für die Gleichungen (17) insbesondere Riemann (vgl. die c. Abh. von Prym, § 12.).

Erlangen, im November 1879.