# SUL MOTO D'UN LIQUIDO INDEFINITO CON UN FILETTO VORTICOSO DI FORMA QUALUNQUE.

Memoria di **Luigi Sante Da Rios** (Padova).

Adunanza del 27 maggio 1906.

## § 1. — Introduzione.

Si abbia un liquido perfetto ed incomprimibile, esteso indefinitamente da tutte le parti. Durante il movimento, che prenderemo a considerare, in esso non agiscano che forze derivanti da un potenziale; d'altro canto supponiamo che vi esista già una certa distribuzione di vortici, formatasi per l'azione di forze non conservative.

Indicando con:

$t$, il tempo;

$x$, $y$, $z$, le coordinate d'un generico punto $P$ nel liquido;

$u$, $v$, $w$, le componenti della velocità $W$ in $P$;

e con $p$, $q$, $r$ le componenti d'un generico vortice per le quali sappiamo essere:

$$\left\{\begin{aligned} 2p &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2q &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 2r &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

le equazioni del moto si possono presentare sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2(rv - qw) &= \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2(pw - ru) &= \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 2(qu - pv) &= \frac{\partial f}{\partial z}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove abbiamo designato con $f$, la funzione:

$$U - \Pi - \tfrac{1}{2} W^2,$$

essendo: $U$ il potenziale (unitario) delle forze attive, $\Pi$ la pressione divisa per il valore costante della densità del liquido.

Varrà poi l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{3}$$

Supponiamo di porci nelle solite condizioni, in cui si tratta di determinare il movimento, essendo assegnato lo stato di moto iniziale e il campo di forza. Dacchè per ipotesi la massa liquida è indefinitamente estesa, non è da tener conto di alcuna condizione ai limiti. È lecito perciò riguardare la $\Pi$ e con essa la $f$, come un elemento ausiliario a priori affatto indeterminato (e che si potrà poi valutare in base ai dati del problema). Si è così naturalmente condotti ad eliminare l'ausiliaria $f$ tra le (2), ciò che dà luogo alle equazioni:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}u+\frac{\partial p}{\partial y}v+\frac{\partial p}{\partial z}w &= \frac{\partial u}{\partial x}p+\frac{\partial u}{\partial y}q+\frac{\partial u}{\partial z}r,\\
\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}v+\frac{\partial q}{\partial y}w+\frac{\partial q}{\partial z}u &= \frac{\partial v}{\partial x}q+\frac{\partial v}{\partial y}r+\frac{\partial v}{\partial z}p,\\
\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial r}{\partial x}w+\frac{\partial r}{\partial y}u+\frac{\partial r}{\partial z}v &= \frac{\partial w}{\partial x}r+\frac{\partial w}{\partial y}p+\frac{\partial w}{\partial z}q;
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

perfettamente sostituibili alle (2), in quanto il loro sussistere è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'una funzione $f$, che verifichi le (2) stesse.

Ricordiamo ancora che, nell'ipotesi assunta d'un liquido incomprimibile, indefinitamente esteso, animato da movimento ovunque regolare, la distribuzione dei vortici ad un dato istante determina univocamente quella delle velocità, relative al medesimo istante *). Lo stato di moto del fluido può dunque ritenersi caratterizzato dal campo vettoriale $(p, q, r)$. D'altra parte, noto questo campo in un dato istante $t_0$ [con che per l'osservazione fatta sono da ritenersi conosciute tutte le sei funzioni $p(x, y, z, t_0), \ldots,$ $u(x, y, z, t_0), \ldots$], le (4), fattovi $t=t_0$, definiscono, in ogni punto $x, y, z$ le derivate $\frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t}$, e quindi il campo dei vortici: $\left(p+\frac{\partial p}{\partial t}dt, q+\frac{\partial q}{\partial t}dt, r+\frac{\partial r}{\partial t}dt\right)$ nell'istante $t_0+dt$, immediatamente consecutivo a $t_0$. A partire da quello, si ripetono analoghe considerazioni; e così, intuitivamente, si è tratti a concludere che la distribuzione iniziale dei vortici determina univocamente, in virtù dell'equazioni idrodinamiche, lo stato del campo $(p, q, r)$ e quindi quello del moto del fluido, per qualsiasi $t$. Va notato in particolare che, se le $\frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial t}$ calcolate in base alle (4) si annullano, il moto risulta permanente e reciprocamente.

Ciò premesso, imaginiamo, nel liquido indefinito, la presenza d'un solo tubo vorticoso di sezione trasversale così piccola da poterlo assimilare ad una linea $L$, che sarà chiusa od estesa indefinitamente. Il teorema di HELMHOLTZ ci apprende che le particelle materiali, di cui $L$ è costituita nell'istante iniziale, formano una linea vorticosa in ogni altro istante, persistendo nella parte rimanente del liquido il movimento irrotazionale.

---

*) Veggasi per es. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, pag. 413 e segg.

Tutto è dunque ricondotto a ricercare la legge con cui si sposta e si deforma la linea vorticosa. Tale sarà appunto l'oggetto del nostro studio.

Troveremo che la velocità limite d'un generico elemento ruotante $Q$ è normale al piano osculatore della linea vorticosa in $Q$ e proporzionale alla curvatura. Passeremo quindi a stabilire le equazioni generali che presiedono alla variazione nella forma intrinseca della linea stessa, risolvendo così virtualmente il problema del movimento cui va soggetto il vortice lineare. In base a quelle, determineremo poi alcuni tipi di vortici che si spostano rigidamente attraverso la massa fluida.

## § 2. — **Espressioni delle componenti** $u$, $v$, $w$.

In un liquido indefinito, si abbia, come dicemmo, una sola linea vorticosa $L$, tale che il vortice sia, in tutti i punti della stessa, sempre d'uguale grandezza $\omega$ *). Fissiamo un punto generico $O$ di $L$ ed assumiamo come sistema di riferimento la terna $x$, $y$, $z$ costituita dalla tangente, normale principale e binormale in $O$ alla curva. Le direzioni positive degli assi $x$, $y$, $z$ sieno rispettivamente: quella del vortice $\omega$, quella rivolta verso la concavità di $L$, quella che, associata alle due precedenti, rende la terna destrorsa. Indichiamo con $\xi$, $\eta$, $\zeta$ le coordinate dei punti $Q$ di $L$, e con $x$, $y$, $z$ quelle d'un punto generico $P$ non situato su $L$, così da avere:

$$r = \overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Le $\xi$, $\eta$, $\zeta$ saranno a ritenersi funzioni dell'arco $s$ di $L$, che supporremo contato, a partire da $O$, positivamente nel senso delle $x$ crescenti.

Le componenti della velocità in un generico punto $P(x, y, z)$ saranno **):

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\omega}{2\pi}\int_L \frac{(\eta - y)\frac{d\zeta}{ds} - (\zeta - z)\frac{d\eta}{ds}}{r^3}\,ds,\\ v &= \frac{\omega}{2\pi}\int_L \frac{(\zeta - z)\frac{d\xi}{ds} - (\xi - x)\frac{d\zeta}{ds}}{r^3}\,ds,\\ w &= \frac{\omega}{2\pi}\int_L \frac{(\xi - x)\frac{d\eta}{ds} - (\eta - y)\frac{d\xi}{ds}}{r^3}\,ds. \end{aligned}\right.$$

I coseni direttori della tangente in un punto generico della curva $L$, essendo rispettivamente:

$$\frac{d\xi}{ds},\qquad \frac{d\eta}{ds},\qquad \frac{d\zeta}{ds},$$

---

*) Più precisamente, se si riguarda la linea $L$ come limite di un tubetto vorticoso infinitamente sottile, $\omega$ non è altro che la *semi*-intensità del tubo, cioè il limite del prodotto della sezione retta per la intensità del vortice molecolare.

**) APPELL, l. c., pag. 63 e 421.

e quelli della normale principale:

$$\frac{1}{c}\frac{d^2\xi}{ds^2}, \qquad \frac{1}{c}\frac{d^2\eta}{ds^2}, \qquad \frac{1}{c}\frac{d^2\zeta}{ds^2},$$

dove $c$ indica la curvatura in quel punto, avremo per l'origine $O$ evidentemente:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{ds} = 1, & \dfrac{d\eta}{ds} = 0, & \dfrac{d\zeta}{ds} = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{d^2\xi}{ds^2} = 0, & \dfrac{1}{c}\dfrac{d^2\eta}{ds^2} = 1, & \dfrac{1}{c}\dfrac{d^2\zeta}{ds^2} = 0. \end{cases}$$

Allora, applicando alle funzioni $\xi(s)$, $\eta(s)$, $\zeta(s)$ lo sviluppo del TAYLOR arrestato al terzo termine e tenendo conto delle (6), potremo scrivere:

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi(s) = s + s^3\varphi, \\ \eta(s) = c\dfrac{s^2}{2} + s^3\psi, \\ \zeta(s) = s^3\chi; \end{cases}$$

dove $\varphi$, $\psi$, $\chi$ designano funzioni di $s$, che dipendono dalla natura della linea $L$, ma di cui a noi basta ritenere che sono finite e continue nell'intorno di $s = 0$.

## § 3. — Deduzione di alcune disuguaglianze.

Abbiamo:

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + x^2 + y^2 + z^2.$$

Detto $\varepsilon$ il raggio vettore del punto $P(x, y, z)$ ed $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i coseni direttori di $\varepsilon$, sarà:

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \varepsilon\alpha, \\ y = \varepsilon\beta, \\ z = \varepsilon\gamma; \end{cases}$$

cosicchè, sostituendo nella precedente espressione questi valori di $x$, $y$, $z$ e i valori (7) di $\xi$, $\eta$, $\zeta$, otterremo:

$$r^2 = s^2 + s^4\left[2\varphi + \varphi^2 s^2 + \frac{c^2}{4} + cs\psi + s^2\psi^2 + s^2\chi^2\right] - 2\varepsilon\alpha s - \varepsilon\beta c s^2 - 2\varepsilon s^3(\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi) + \varepsilon^2.$$

Posto:

$$(9)\qquad \mathfrak{P} = s\left(2\varphi + \varphi^2 s^2 + \frac{c^2}{4} + cs\psi + s^2\psi^2 + s^2\chi^2\right) - 2\varepsilon(\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi),$$

$$(10)\qquad \Delta^2 = s^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\alpha s - c\varepsilon\beta s^2 = (1 - c\varepsilon\beta)s^2 - 2\varepsilon\alpha s + \varepsilon^2;$$

avremo ancora:

$$r^2 = \Delta^2 + s^3\mathfrak{P}.$$

Studiamo ora il comportamento delle tre quantità: $\dfrac{1}{\Delta}$, $\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}$ al decrescere di $s$ ed $\varepsilon$.

Rappresentiamo in un piano le due variabili (indipendenti) $|s|$ ed $\varepsilon$. Trattandosi di valori essenzialmente positivi, il campo di variabilità da considerare si riduce al primo quadrante. Introduciamo anche le coordinate polari $\rho$ e $\vartheta$ ed avremo:

$$\text{(11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} |s| &= \rho \cos \vartheta, \\ \varepsilon &= \rho \operatorname{sen} \vartheta; \end{aligned} \right.$$

i quali valori, sostituiti nell'espressione (10) di $\Delta^2$, porgono:

$$\text{(10')} \qquad \Delta^2 = \rho^2 [1 \mp \alpha \operatorname{sen} 2\vartheta - \varepsilon c \beta \cos^2 \vartheta],$$

dovendosi in $\mp \alpha \operatorname{sen} 2\vartheta$ adottare il segno superiore o l'inferiore, secondochè $s$ è positivo o negativo.

Ciò premesso, conveniamo di far variare $P$ in modo che esso, pur avvicinandosi ad $O$, rimanga costantemente esterno ad una superficie conica $K$ avente per asse la tangente in $O$ e un'apertura comunque piccola, ma finita. Sono allora giustificate le considerazioni seguenti:

*a*) Quando il raggio vettore $\varepsilon = \overline{OP}$ si prenda inferiore ad un limite determinato, il coefficiente di $\rho^2$ in (10') sarà evidentemente positivo e tale da potersi determinare una costante $h$ in modo che esso sia sempre maggiore di $\frac{1}{h^2}$. Allora, sotto la restrizione suddetta, comunque varîno $|s|$ ed $\varepsilon$, avremo:

$$\frac{1}{\Delta} < \frac{h}{\rho}.$$

*b*) Essendo:

$$\begin{aligned} r^2 &= \Delta^2 + s^3 \mathfrak{P} \\ &= \rho^2 [1 \mp \alpha \operatorname{sen} 2\vartheta - \varepsilon c \cos^2 \vartheta + \rho \cos^3 \vartheta \, \mathfrak{P}] \\ &= \rho^2 [1 \mp \alpha \operatorname{sen} 2\vartheta + \cos^2 \vartheta (- c \beta \varepsilon + \mathfrak{P} s)]; \end{aligned}$$

il coefficiente di $\rho^2$, in quest'ultima espressione di $r^2$, sarà positivo, e si avrà chiaramente:

$$\text{(12)} \qquad 1 \mp \alpha \operatorname{sen} 2\vartheta + \cos^2 \vartheta (- c \beta \varepsilon + \mathfrak{P} s) > (1 - \alpha) - (|\mathfrak{P}|\, |s| + c \varepsilon).$$

Consideriamo nel piano $|s|$, $\varepsilon$, la retta $g$ definita dall'equazione:

$$\text{(13)} \qquad |\mathfrak{P}|\, |s| + c \varepsilon = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Questa retta divide il quadrante rappresentativo in due parti: l'una (triangolare) contenente l'origine, l'altra indefinita. Per i punti di quest'ultima parte (inclusivi anche i punti situati su $g$), $\rho$ non può scendere al disotto di un certo limite $\rho_0$, dove $\rho_0$ rappresenta la distanza di $g$ dall'origine. Si noti ora che, ferma la restrizione, di cui sub *a*), e quella preliminare che $P$ sia esterno al cono $K$ (mentre, nelle vicinanze di $O$, la linea $L$, che si suppone naturalmente senza nodi, rimane interna) il detto punto $P$ può avvicinarsi indefinitamente alla linea $L$, solo tendendo verso $O$. D'altra parte, finchè $\rho$ è $\geqq \rho_0$, uno almeno dei due punti $P(x, y, z)$ e $Q(\xi, \eta, \zeta)$ resta a distanza finita da $O$. Ne viene che il limite inferiore di $r = \overline{PQ}$ deve essere una quantità $r_0 > 0$. Sarà quindi:

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r_0},$$

cioè:

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho}{r_0}.$$

Convenendo di limitarsi a valori di $\varepsilon$ e di $|s|$ non superiori ad una lunghezza fissa (e del resto qualunque) $l$, avremo:

$$\rho = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2} < \sqrt{2\, l^2},$$

e per conseguenza:

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{2\, l^2}}{r_0}.$$

Esisterà quindi una costante $k_1$, per cui

$$\frac{1}{r} < \frac{k_1}{\rho}.$$

Se prendiamo un punto nell'altra regione, essendo allora:

$$|\mathfrak{P}|\,|s| + c\varepsilon < \frac{1 - \alpha}{2},$$

avremo per la (12):

$$r^2 > \rho^2 \frac{1 - \alpha}{2},$$

da cui:

$$\frac{1}{r} < \sqrt{\frac{2}{1 - \alpha}}\, \frac{1}{\rho}.$$

In definitiva chiamando $k$ la maggiore delle tre costanti $h$, $k_1$, e $\sqrt{\frac{2}{1 - \alpha}}$, si avrà per qualunque $|s|$ ed $\varepsilon$:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} &< \frac{k}{\rho}, \\ \frac{1}{\Delta} &< \frac{k}{\rho}. \end{aligned} \right.$$

*c*) Si ha identicamente:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\right) = \frac{r^2 - \Delta^2}{r\Delta(r + \Delta)}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\right].$$

Ma essendo:

$$-(r^2 - \Delta^2) = -s^3\, \mathfrak{P},$$

$$|s| = \rho \cos \vartheta,$$

e potendosi, in seguito alla (11), porre la (9) sotto la forma:

$$\mathfrak{P} = \rho\, \mathfrak{Q},$$

dove $\mathfrak{Q}$ resta finito al convergere di $\rho$ a zero, avremo ancora:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3} = -\frac{\rho^4 \cos^3 \vartheta\, \mathfrak{Q}}{r\Delta(r + \Delta)}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\right].$$

Di qua, tenendo conto della (14) e della

$$\frac{1}{r+\Delta} < \frac{k}{2\rho},$$

che ne è conseguenza immediata, si ricava la disuguaglianza:

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right| \leqq \rho^4 |\Phi| \cdot \frac{k}{\rho} \cdot \frac{k}{\rho} \cdot \frac{k}{2\rho} \cdot \frac{3k^2}{\rho^2},$$

ossia:

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right| \leqq \frac{\Gamma}{\rho}, \tag{15}$$

avendo indicato con $\Gamma$ una nuova costante (il prodotto di $\frac{3k^5}{2}$ per il limite superiore dei valori di $|\Phi|$, che, come abbiamo osservato, è una quantità finita).

## § 4. — Considerazioni sul calcolo di $u$, $v$, $w$ per un punto vicinissimo alla linea vorticosa.

Scegliamo sopra la linea $L$ due punti $Q_1$, $Q_2$ da bande opposte rispetto ad $O$, e tali che le lunghezze degli archi siano entrambe uguali ad $l$ (con che $l$ è da ritenersi una costante positiva). Sia poi $\Lambda$ ciò che rimane della linea $L$, quando le si tolga il tratto $Q_1 O Q_2$.

Le espressioni (5) di $u$, $v$, $w$ si possono anzitutto scindere in due parti:

$$\tag{5'} \begin{cases} u = u_1 + u_2, \\ v = v_1 + v_2, \\ w = w_1 + w_2, \end{cases}$$

rappresentando i primi addendi il contributo proveniente dall'arco $Q_1 O Q_2$, i secondi quello proveniente da $\Lambda$, contributo che resta finito, anche quando si faccia avvicinare indefinitamente $P$ ad $O$.

Ricordiamo adesso che dalle (7) ed (8) si ha:

$$\begin{aligned} \xi - x &= s - \varepsilon\alpha + s^3\varphi, \\ \eta - y &= -\varepsilon\beta + c\frac{s^2}{2} + s^3\psi, \\ \zeta - z &= -\varepsilon\gamma + s^3\chi; \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = 1 + s^2\left(3\varphi + s\frac{d\varphi}{ds}\right),$$

$$\frac{d\eta}{ds} = cs + s^2\left(3\varphi + s\frac{d\psi}{ds}\right),$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = s^2\left(3\chi + s\frac{d\chi}{ds}\right),$$

talchè, in base alle (11), è lecito scrivere:

$$(\eta - y)\frac{d\zeta}{ds} - (\zeta - z)\frac{d\eta}{ds} = \varepsilon\gamma c s + \rho^3\Phi_1,$$

$$(\zeta - z)\frac{d\xi}{ds} - (\xi - x)\frac{d\zeta}{ds} = -\varepsilon\gamma + \rho^3\Phi_2,$$

$$(\xi - x)\frac{d\eta}{ds} - (\eta - y)\frac{d\xi}{ds} = c\frac{s^2}{2} - \varepsilon\alpha c s + \varepsilon\beta + \rho^3\Phi_3;$$

dove $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ restano finite anche al convergere di $\varepsilon$ a zero.

In $u_1$, $v_1$, $w_1$ le funzioni sotto il segno sono, a norma delle (5):

$$\frac{(\eta - y)\frac{d\zeta}{ds} - (\zeta - z)\frac{d\eta}{ds}}{r^3},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

Usufruendo la prima delle disuguaglianze (14), $\frac{1}{r} < \frac{k}{\rho}$, e la (15), $\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right| < \frac{\Gamma}{\rho}$, si riconosce immediatamente che le dette funzioni sotto il segno differiscono da:

$$\frac{\varepsilon\gamma c s}{\Delta^3},$$

$$-\frac{\varepsilon\gamma}{\Delta^3},$$

$$\frac{c\frac{s^2}{2} - \varepsilon\alpha c s + \varepsilon\beta}{\Delta^3}$$

per quantità, che restano finite anche quando $P$ (conservandosi beninteso esterno al cono $K$) si avvicina indefinitamente ad $O$.

Se dunque si pone:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \int_{-l}^{l} \frac{c\varepsilon\gamma s}{\Delta^3} ds, \\ B &= -\varepsilon\gamma \int_{-l}^{l} \frac{1}{\Delta^3} ds, \\ C &= \int_{-l}^{l} \frac{\frac{1}{2} c s^2 - \varepsilon\alpha c s + \varepsilon\beta}{\Delta^3} ds, \end{aligned}\right.$$

si potrà pur asserire che si mantengono finite le differenze $u_1 - \frac{\omega}{2\pi}A$, $v_1 - \frac{\omega}{2\pi}B$, $w_1 - \frac{\omega}{2\pi}C$; lo stesso avvenendo, come è stato osservato, per $u_2$, $v_2$, $w_2$, si potrà infine attribuire alle (5') la forma:

$$u = \frac{\omega}{2\pi} A + U,$$

$$v = \frac{\omega}{2\pi} B + V,$$

$$w = \frac{\omega}{2\pi} C + W,$$

con $U$, $V$, $W$ finite anche al convergere di $P$ verso $O$.

In $A$, $B$, $C$ figurano invece, come vedremo, dei termini, il cui valore tende a crescere indefinitamente. Per $P$ abbastanza vicino ad $O$, questi termini assintotici preponderano sugli altri, e bastano da soli a mettere in rilievo i caratteri sensibili del moto: in questo senso è lecito trascurare $U$, $V$, $W$ e tutto ciò che, nelle espressioni di $A$, $B$, $C$, resta finito al convergere di $\varepsilon$ a zero.

## § 5. — **Calcolo della componente $u$.**

Nella prima delle (16) mettiamo in evidenza il punto critico $s = 0$, scrivendo:

$$A = \int_0^l \frac{c\varepsilon\gamma s}{\Delta^3} ds + \int_{-l}^0 \frac{c\varepsilon\gamma s}{\Delta^3} ds.$$

Se si cambia $s$ in $-s$ nel secondo integrale, e si designa con:

$$\Delta'^2 = s^2(1 - c\varepsilon\beta) + 2\varepsilon\alpha s + \varepsilon^2,$$

ciò che diviene $\Delta^2$ quando si cambi $s$ in $-s$, o ciò ch'è lo stesso $\alpha$ in $-\alpha$, l'espressione di $A$ diviene:

$$A = \gamma c \int_0^l \varepsilon s \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta'^3} \right) ds.$$

Osserviamo anzitutto che il trinomio di secondo grado in $s$:

$$\Delta^2 = s^2(1 - c\varepsilon\beta) - 2\varepsilon\alpha s + \varepsilon^2$$

ha per discriminante $\varepsilon^2 D$, designandosi per brevità con $D$ la quantità (essenzialmente positiva per $\varepsilon$ abbastanza piccolo e $P$ esterno al cono $K$, di cui al n° 3):

$$1 - \alpha^2 - c\varepsilon\beta.$$

Le radici $a$, $b$ del trinomio $\Delta^2$ sono dunque a ritenersi complesse coniugate.

Occupiamoci del primo addendo della funzione sotto il segno integrale nell'espressione di $A$, ed imaginiamolo sotto la forma:

$$\frac{\dfrac{\varepsilon\gamma c s}{\Delta^2}}{\Delta}.$$

Decomponendo la frazione $\dfrac{\varepsilon\gamma c s}{\Delta^2}$ in frazioni semplici, saremo condotti a calcolare gl'integrali:

$$\int_0^l \frac{ds}{(s-a)\Delta}, \qquad \int_0^l \frac{ds}{(s-b)\Delta}.$$

Applicando le note formole d'integrazione, il primo di questi, ad esempio, presenta, dopo facili semplificazioni, l'espressione:

$$\left[\frac{\varepsilon M \Delta}{i\varepsilon \sqrt{D}(s-a)}\right]_0^l,$$

dove $M$ è una costante complessa, espressione cui compete valore finito anche per $\varepsilon = 0$.

Ad analogo risultato (di valore complesso coniugato, e quindi finito) noi arriveremo calcolando l'integrale:

$$\int_0^l \frac{ds}{(s-b)\Delta}.$$

Nello stesso modo si comporta l'altro addendo $\frac{\varepsilon\gamma c s}{\Delta'^3}$.

Ad $A$ spetta dunque un valore finito, e nel senso convenuto, sarà a porsi:

$$u = 0.$$

## § 6. — **Calcolo della componente** $v$.

Procedendo come precedentemente, avremo:

$$B = -\varepsilon\gamma \int_{-l}^{l} \frac{ds}{\Delta^3} = -\varepsilon\gamma \int_0^l \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta'^3}\right) ds.$$

Tenendo presente che $\varepsilon^2 D$ rappresenta il discriminante così di $\Delta^2$ come di $\Delta'^2$, si ricava da note formole di calcolo integrale:

$$B = -\frac{\gamma}{\varepsilon D}\left[\frac{-\varepsilon\alpha + (1 - c\varepsilon\beta)s}{\Delta} + \frac{\varepsilon\alpha + (1 - c\varepsilon\beta)s}{\Delta'}\right]_0^l.$$

Ora per $s = 0$,

$$\Delta = \varepsilon = \Delta',$$

per cui la parte, relativa al limite inferiore si annulla. Resta quella relativa ad $s = l$. Per questo valore di $s$, nè $\Delta$, nè $\Delta'$ s'annullano, riducendosi entrambe ad $l$ per $\varepsilon = 0$. Ne viene che, entro parentesi, ciò che non si annulla con $\varepsilon$ (anzi, più propriamente, ciò che non contiene $\varepsilon$ a fattore) si riduce a 2. Rimane dunque, a meno di quantità che restano finite al convergere di $\varepsilon$ a zero,

$$B = -\frac{2\gamma}{\varepsilon D}.$$

Ma è ancora lecito sostituire a $D$ il suo valore per $\varepsilon = 0$, cioè: $1 - \alpha^2$ (perchè la differenza $\frac{1}{D} - \frac{1}{1-\alpha^2}$ contiene $\varepsilon$ a fattore e non reca quindi all'espressione di $B$ che un contributo finito).

Il valore assintotico di $B$ assume così la forma semplicissima:

$$-\frac{2\gamma}{\varepsilon(1-\alpha^2)},$$

cui corrisponde, in base alla (5'):

$$v = -\frac{\omega\gamma}{\varepsilon\pi(1-\alpha^2)}.$$

## § 7. — Calcolo della componente $w$.

Per valutare l'integrale:

$$C = \int_{-l}^{l} \frac{\frac{1}{2} c s^2 - \varepsilon \alpha c s + \varepsilon \beta}{\Delta^3} d s,$$

decomponiamo anzitutto il rapporto:

$$\frac{\frac{1}{2} c s^2 - \varepsilon \alpha c s + \varepsilon \beta}{\Delta^2}$$

in frazioni semplici.

Allora, la funzione integranda si presenta come somma di tre addendi:

$$\frac{\frac{c}{2(1 - c\varepsilon\beta)}}{\Delta}, \qquad \frac{\left[\frac{c\alpha}{1 - c\varepsilon\beta} - \alpha c\right]\varepsilon s}{\Delta^3}, \qquad \frac{\left[\beta - \frac{c\varepsilon}{2(1 - c\varepsilon\beta)}\right]\varepsilon}{\Delta^3}.$$

L'integrale corrispondente al secondo addendo si comporta come l'$A$, di cui al n° 5, ed ha quindi valore assintotico nullo.

Il terzo addendo dà luogo ad un integrale, che differisce da $B$ solo per il fatto, che vi compare come fattore: $\beta - \frac{c\varepsilon}{2(1 - c\varepsilon\beta)}$ al posto di $\gamma$. Facendo questa sostituzione nell'espressione assintotica trovata per $B$, e omettendo la parte finita $\frac{c}{(1-\alpha^2)(1-c\varepsilon\beta)}$, abbiamo per $C$ un primo termine assintotico:

$$\frac{2\beta}{2(1 - \alpha^2)}.$$

Un secondo proviene dall'integrale:

$$\frac{c}{2(1 - c\varepsilon\beta)} \int_{-l}^{l} \frac{d s}{\Delta} = \frac{c}{2(1 - c\varepsilon\beta)} \int_{0}^{l} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta'}\right) d s,$$

ed è:

$$- c \lg \varepsilon,$$

come si verifica immediatamente eseguendo l'integrazione indicata.

Risulta dunque:

$$C = \frac{2\beta}{\varepsilon(1 - \alpha^2)} - c \lg \varepsilon,$$

e per conseguenza:

$$w = \frac{\omega\beta}{\varepsilon\pi(1 - \alpha^3)} - \frac{\omega c}{2\pi} \lg \varepsilon.$$

## § 8. — Discussione sui risultati precedenti. Immediate conseguenze.

Nei liquidi reali non si può naturalmente parlare di vortici lineari in senso geometrico; ma di tubetti vorticosi di piccola sezione; per esempio di superficie canali $\sigma$, di piccolo raggio, aventi per direttrice una linea $L$ (chiusa o indefinita). Così supporremo, per fissar le idee, che nell'istante iniziale il tubetto sia effettivamente una superficie-canale.

È chiaro tuttavia che, per i punti della massa fluida, la cui distanza da $\sigma$ sia assai grande rispetto al raggio della sezione, le cose vanno come se il tubetto $\sigma$ fosse sostituito dalla linea geometrica $L$, sede di un filamento vorticoso d'intensità uguale a quella di $\sigma$.

Designiamo con $\varepsilon^2$ il raggio del tubo canale $\sigma$, e supponiamo $\varepsilon^2$ molto piccolo, così piccolo in particolare che possa ritenersi:

1° Esso $\varepsilon^2$ trascurabile di fronte ad $\varepsilon$, e quindi, per punti a distanza $\varepsilon$ da $L$, assimilabile il tubo $\sigma$ all'unica linea vorticosa $L$.

2° $\varepsilon$ trascurabile a sua volta di fronte alle dimensioni longitudinali del tubetto (lunghezza di $L$, raggio di curvatura, ecc.), tale insomma da potere con sufficiente approssimazione limitare le espressioni (5) di $u$, $v$, $w$ alla parte assintotica.

Ciò posto, consideriamo un secondo tubo-canale $\Sigma$, avente ancora $L$ come direttrice, e raggio $\varepsilon$ (mentre quello del tubo vorticoso $\sigma$ è $\varepsilon^2$). Per punti, la cui distanza da $L$ è grande rispetto ad $\varepsilon$, anche questo nuovo tubo $\Sigma$ è assimilabile ad una linea, che si confonde sempre con $L$.

Supponiamo adesso di passare dall'istante $t$ ad un altro istante $t'$. Le particelle materiali, che, nell'istante $t$, costituiscono rispettivamente $\sigma$, $\Sigma$, costituiranno nell'istante $t'$ due nuovi tubi $\sigma'$, $\Sigma'$, e sempre (almeno se $t'$ è abbastanza prossimo a $t$), per un osservatore a distanza grande rapporto ad $\varepsilon$, $\Sigma'$ e à fortiori $\sigma'$ saranno sostituibili con un'unica linea.

In quest'ordine di approssimazione, il divario dalla primitiva $L$, si può valutare come segue.

Dicasi $(s_x, s_y, s_z)$ il vettore, che rappresenta lo spostamento subito nell'intervallo $(t, t')$ da un generico punto $P$ di $\Sigma$. Sia $\Omega$ la circonferenza, sezione retta di $\Sigma$, passante per $P$.

Le particelle, che nell'istante $t$ formano la circonferenza $\Omega$, nell'istante $t'$ formeranno una linea $\Omega'$ di $\Sigma'$. Il baricentro $O'$ di questa linea si troverà spostato dal baricentro $O$ di $\Omega$ (che è poi il suo centro) d'un vettore, le cui componenti, per la definizione stessa di baricentro, sono:

$$\frac{\int_\Omega s_x\,d\Omega}{2\pi\varepsilon}, \qquad \frac{\int_\Omega s_y\,d\Omega}{2\pi\varepsilon}, \qquad \frac{\int_\Omega s_z\,d\Omega}{2\pi\varepsilon}.$$

Come unica linea sostituibile a $\Sigma'$ si può per es. assumere il luogo dei baricentri $O'$, e così si vede come, coll'approssimazione convenuta, sia lecito risguardare i precedenti rapporti come espressioni dello spostamento, che subisce nell'intervallo $(t, t')$ un punto generico della linea geometrica $L$.

Basta adesso supporre $t'$ infinitamente vicino a $t$, e quindi $s_x = u\,dt$, $s_y = v\,dt$, $s_z = w\,dt$, e usufruire dei valori assintotici trovati nei n[i] precedenti, per concludere che, per un osservatore a distanza conveniente da un generico tubetto vorticoso, questo può essere assimilato ad una linea geometrica $L$, i cui punti siano dotati di velocità:

$$(17)\qquad \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = -\dfrac{\omega c}{2\pi}\lg\varepsilon, \end{cases}$$

le tre componenti riferendosi alla direzione della tangente, della normale principale e della binormale. Come si vede, la velocità è proporzionale alla curvatura e può annullarsi solo per $c = 0$. Per $\varepsilon$ piccolissimo, $w$ riesce sempre positiva. Questa circostanza (ricordando che le nostre formule si riferiscono ad una terna $x$, $y$, $z$ destrorsa) permette di precisare il senso, secondo cui la linea $L$ tende a spostarsi. Lo spostamento avviene in quel senso, rispetto a cui il verso di circolazione, stabilito sopra $L$ dal vortice, appare destrorso (cioè conforme a quello delle sfere dell'orologio).

Le (17) suggeriscono inoltre le osservazioni seguenti:

1° Non esiste nessun'altra linea vorticosa all'infuori della linea retta, la quale possa rimanere immobile; perciò solo in questo caso avremo moto permanente.

2° Dato un filetto vorticoso circolare, esso si sposterà in un piano parallelo a sè stesso e senza deformarsi o variare di raggio.

Il secondo di questi risultati e la parte positiva del primo erano già noti, e del resto evidenti per ragione di simmetria. Di nuovo, abbiamo riconosciuta l'impossibilità di movimenti permanenti dovuti alla presenza di vortici non rettilinei.

## § 9. — **Equazioni intrinsiche generali del movimento della linea vorticosa.**

Consideriamo ancora la configurazione di $L$ in un generico istante $t$, e notiamo che ad ogni posizione di $O$ su $L$ corrisponde univocamente un triedro principale $x$, $y$, $z$. Consideriamo in pari tempo una terna di riferimento fissa $\xi$, $\eta$, $\zeta$, e siano, come dalla solita tabella:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $\eta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $\zeta$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |

$\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\gamma_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) i coseni direttori d'una terna rispetto l'altra. Essi saranno a ritenersi funzioni di quel parametro, che fissa la posizione di $O$ su $L$, per es. dell'arco $s$, contato a partire da un origine arbitraria. Designando con $p\,ds$, $q\,ds$, $r\,ds$ le componenti, secondo gli spigoli del triedro mobile $x$, $y$, $z$, della rotazione elementare subìta dal triedro stesso, quando $O$ si sposta su $L$ di $ds$, avremo come è ben noto:

$$(18)\qquad p = -\tau, \qquad q = 0, \qquad r = c,$$

dove $c$ e $\tau$ rappresentano rispettivamente la curvatura e la torsione della curva $L$ in $O$.

Più generalmente, se la posizione di $O$ è individuata da un parametro generico $\lambda$, e sia:

$$ds = \psi(\lambda) d\lambda$$

la relazione che lo lega all'arco di curva, ad uno spostamento di $O$ corrisponderà una rotazione elementare $(p\, d\lambda,\ q\, d\lambda,\ r\, d\lambda)$, e sarà, come si verifica subito:

$$p = -\psi\tau, \qquad q = 0, \qquad r = \psi c. \tag{18'}$$

I coseni direttori $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\gamma_\nu$, in quanto si considerano funzioni di $\lambda$, avranno poi le derivate definite, in funzione delle $p$, $q$, $r$ e dei coseni stessi, dalle classiche formole di Poisson:

$$\alpha'_1 = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \qquad \alpha'_2 = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \quad \text{ecc.};$$

avendo per brevità designato con apici le derivazioni rispetto a $\lambda$.

Imaginiamo adesso che varî $t$; varierà pure $L$, e tutte le precedenti quantità: $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\gamma_\nu$; $p$, $q$, $r$, ovvero $\tau$, $c$, $\psi$, si dovranno considerare come funzioni delle due variabili indipendenti $\lambda$ e $t$.

Giova anzitutto osservare che la legge di variabilità di $L$, quale risulta dalle (17) del n° precedente, implica:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Osserviamo perciò che, intendendo per $\xi$, $\eta$, $\zeta$ le coordinate di un punto generico $O$ di $L$ rapporto agli assi fissi $\left(\text{con che } \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right.$ sono le componenti della velocità di $O$, rispetto a questi assi$\Big)$, le (17) equivalgono alle:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu c \alpha_3, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu c \beta_3, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \mu c \gamma_3, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

avendo posto $\mu$ in luogo di $-\dfrac{\omega \log \varepsilon}{2\pi}$.

D'altra parte si ha (l'apice indicando sempre derivazione rispetto a $\lambda$):

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= \frac{d\xi}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = \alpha_1 \psi, \\ \eta' &= \frac{d\eta}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = \beta_1 \psi, \\ \zeta' &= \frac{d\zeta}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = \gamma_1 \psi. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Derivando i secondi membri delle (19) e delle (20) rispettivamente rapporto a $\lambda$ e rapporto a $t$, ed uguagliando, avremo:

$$\frac{\psi\, d\alpha_1}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\alpha_1 = \mu(c'\alpha_3 + \tau\psi\alpha_2),$$

$$\frac{\psi\, d\beta_1}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\beta_1 = \mu(c'\beta_3 + \tau\psi\beta_2),$$

$$\frac{\psi\, d\gamma_1}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\gamma_1 = \mu(c'\gamma_3 + \tau\psi\gamma_2);$$

dove ad $\alpha'_3$, $\beta'_3$, $\gamma'_3$ si sono sostituiti i loro valori forniti dalle formole di Poisson.

Moltiplicando ordinatamente per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, e sommando, si ha la relazione annunciata:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0;$$

quindi se si prende inizialmente $\lambda = s$, cioè $\psi = 1$, ciò seguiterà a sussistere sempre. La nostra linea vorticosa si comporterà dunque, nel suo movimento come un filo flessibile ed inestendibile *).

Riteniamo oramai che il parametro $\lambda$ coincida con $s$, ed occupiamoci di formare le equazioni differenziali intrinseche, cui debbono soddisfare le curvature $c$ e $\tau$ di $L$, considerate come funzioni delle due variabili $s$ e $t$. Osserviamo intanto che, rimanendo definita in base alle (17) la configurazione di $L$ nell'istante $t + dt$ in funzione della configurazione attuale (vogliam dire di elementi intrinseci spettanti alla configurazione di $L$ nell'istante generico $t$), devono potersi calcolare le $\frac{dc}{dt}$, $\frac{d\tau}{dt}$, in funzione di $c$, $\tau$ e loro derivate rapporto ad $s$.

Per fare questo calcolo, giova ricorrere alla cosidetta teoria del triedro mobile, prendendo le mosse dal fatto che i coseni direttori $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\gamma_\nu$ sono anch'essi, come accennammo, funzioni dei due parametri $s$ e $t$.

Poniamo anzitutto le (19) sotto la forma:

$$(19')\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = c\alpha_3, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = c\beta_3, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = c\gamma_3; \end{cases}$$

prendendo uguale ad uno la quantità $\mu$ come è sempre lecito, bastando all'uopo scegliere opportunamente l'unità di tempo.

Derivando le (19') rapporto ad $s$, tenendo conto delle formole di Poisson e delle (18), avremo:

---

*) Appoggiandosi sopra un recente lavoro del sig. Sannia, *Deformazioni infinitesime delle curve inestendibili*, etc. [questi Rendiconti, t. XXI (1906), pp. 229-256], l'inestendibilità si sarebbe potuta desumere senz'altro dal fatto che, a norma delle (17), si annullano le due componenti $u$ e $v$ (secondo la tangente e la normale principale).

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= c'\alpha_3 + c\tau\alpha_2, \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= c'\beta_3 + c\tau\beta_2, \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= c'\gamma_3 + c\tau\gamma_2; \end{aligned}\right.$$

e da queste, derivando ancora:

$$\frac{d(c\alpha_2)}{dt} = c\frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{dc}{dt}\alpha_2 = c''\alpha_3 + \alpha_2(c\tau' + 2c'\tau) - c\tau^2\alpha_3 - c^2\tau\alpha_1,$$

$$\frac{d(c\beta_2)}{dt} = c\frac{d\beta_2}{dt} + \frac{dc}{dt}\beta_2 = c''\beta_3 + \beta_2(c\tau' + 2c'\tau) - c\tau^2\beta_3 - c^2\tau\beta_1,$$

$$\frac{d(c\gamma_2)}{dt} = c\frac{d\gamma_2}{dt} + \frac{dc}{dt}\gamma_2 = c''\gamma_3 + \gamma_2(c\tau' + 2c'\tau) - c\tau^2\gamma_3 - c^2\tau\gamma_1.$$

Introduciamo adesso, accanto alle $p\,ds$, $q\,ds$, $r\,ds$, anche le rotazioni elementari $p_1 dt$, $q_1 dt$, $r_1 dt$, che vengono subite dal nostro triedro $x$, $y$, $z$, quando, lasciando fisso $s$, si fa variare $t$ di $dt$. Le $p_1$, $q_1$, $r_1$ avendo le note espressioni:

$$p_1 = \sum \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt},$$

$$q_1 = \sum \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt} = -\sum \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt},$$

$$r_1 = \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt}$$

(il simbolo $\Sigma$ designa somma di termini, che si ottengono da quello scritto, cambiando $\alpha$ in $\beta$ ed in $\gamma$), troviamo subito mercè le formole precedenti:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{c''}{c} - \tau^2, \\ q_1 &= -c', \\ r_1 &= c\tau. \end{aligned}\right.$$

Ma, fra le componenti $p$, $q$, $r$; $p_1$, $q_1$, $r_1$ delle rotazioni, relative separatamente a due parametri $t$ ed $s$, noi sappiamo che valgono le relazioni *):

$$\frac{dp}{dt} - p_1' = qr_1 - rq_1,$$

$$\frac{dq}{dt} - q_1' = rp_1 - pr_1,$$

$$\frac{dr}{dt} - r_1' = pq_1 - qp_1;$$

*) Cfr. ad es. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, pag. 49.

che, per le (18) e (21), diventano:

$$-\frac{d\tau}{dt} - \left(\frac{c''}{c} - \tau^2\right)' = cc',$$

$$c'' = c'' - c\tau^2 + c\tau^2,$$

$$\frac{dc}{dt} = c\tau' + 2c'\tau.$$

Abbiamo quindi finalmente le equazioni cercate:

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= c\tau' + 2c'\tau, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -cc' + \left(\tau^2 - \frac{c''}{c}\right)'. \end{aligned} \right.$$

Il teorema di esistenza, applicato a questo sistema di equazioni a derivate parziali, permette di asserire con tutto rigore che le funzioni $c(s, t)$, $\tau(s, t)$ sono (sotto le solite condizioni di regolarità) univocamente definite dai valori iniziali $c(s, o)$, $\tau(s, o)$. In altri termini, la configurazione intrinseca della linea vorticosa ad un istante generico rimane determinata dalla configurazione intrinseca iniziale pel tramite delle equazioni differenziali (22). Non intendiamo qui discutere il problema generale della loro integrazione, ma ci limiteremo al caso semplice, in cui le (22) si riconducono ad equazioni differenziali ordinarie. Tale è il caso di vortici, che si spostano rigidamente: la configurazione, essendo allora invariabile, $c$ e $\tau$ risultano indipendenti da $t$, e, come funzioni di $s$, devono quindi soddisfare le equazioni:

$$c\tau' + 2c'\tau' = 0,$$

$$-cc' + \left(\tau^2 - \frac{c''}{c}\right) = 0.$$

Con una prima integrazione, possiamo attribuir loro la forma:

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} c^2\tau &= h_1, \\ \frac{1}{2}c^2 + \frac{c''}{c} - \tau^2 &= 6h; \end{aligned} \right.$$

$h_1$ ed $h$ designando due costanti arbitrarie.

## § 10. — **Ricerca di vortici piani che si spostano rigidamente.**

Per $\tau = 0$, la prima delle (23) è senz'altro soddisfatta (bastando attribuire il valore zero alla costante $h_1$); la seconda può essere scritta:

$$c'' = 6hc - \tfrac{1}{2}c^3;$$

quindi moltiplicando per $c'$ ed integrando:

$$(24) \qquad \tfrac{1}{2}c'^2 = \tfrac{1}{2}6hc^2 - \tfrac{1}{8}c^4 + \tfrac{1}{2}k$$

($k$ costante arbitraria).

Questa equazione mostra che $c$ è funzione ellittica di $s$. Eseguendo la nota sostituzione *):

$$c = \alpha + \frac{\frac{1}{4}P'(\alpha)}{C - \frac{1}{24}P''(\alpha)}, \tag{25}$$

dove $C$ designa la nuova variabile, $P$ il polinomio di 4° grado $-\frac{1}{4}c^4 + 6hc^2 + k$ ed $\alpha$ una sua radice, avremo per $C$ l'espressione esplicita in funzione di $s$:

$$C = p(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{g_2}{20}s^2 + \frac{g_3}{28}s^4 + \cdots,$$

dove $p$ indica la funzione di WEIERSTRASS, e $g_2$, $g_3$ sono legati ad $h$ e $k$ dalle formole:

$$g_2 = -\frac{1}{4}k + 3h^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & h \\ 0 & h & 0 \\ h & 0 & k \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}hk - h^3.$$

Nota l'espressione di $C$, la (25) ci porgerà poi quella di $c$.

Merita speciale menzione il caso di $k = 0$, in cui l'integrazione della (24) si fa mediante trascendenti elementari. Se poniamo in essa $6h = \frac{1}{a^2}$, ci si presenta l'equazione (escludendo il caso ovvio di $c$ costante, cioè di vortici circolari):

$$ds = \frac{dc}{\sqrt{-\frac{1}{4}c^4 + \frac{c^2}{a^2}}} = \frac{a\frac{dc}{c^2}}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{a^2}{4}}}.$$

Introducendo il raggio di curvatura $r = \frac{1}{c}$ ed integrando, avremo:

$$s = -a \lg\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) + \text{cost.}$$

Se la costante si sceglie in modo che $s$ si annulli per $r = a$ (il che non costituisce restrizione, bastando scegliere opportunamente l'origine degli archi), si ottiene come espressione definitiva del raggio di curvatura:

$$r = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right].$$

È questa l'equazione intrinseca della catenaria d'uguale resistenza **).

---

*) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, pp. 331-332.

**) Cfr. CESÀRO, *Lezioni di Geometria intrinseca*, pag. 8.

## § 11. — Ricerca di vortici gobbi che si spostano rigidamente.

L'equazioni fondamentali (23) sono soddisfatte per $c$ e $\tau$ costanti; ciò che possiamo interpretare dicendo che una linea vorticosa elicoidale si sposta senza deformarsi.

In generale, ricavando $\tau$ dalla prima delle (23) e sostituendo nella seconda, si vede che la ricerca delle linee vorticose, le quali si spostano rigidamente dipende dall'integrazione dell'equazione:

$$\frac{1}{2}c^2+\frac{c''}{c}-\frac{h_1^2}{c^4}=h.$$

Moltiplicando per $cc'$, integrando e designando come sopra con $\frac{1}{2}k$ la costante d'integrazione, si ottiene:

$$\frac{1}{2}c'^2=\frac{1}{2}hc^2-\frac{1}{8}c^4-\frac{h_1^2}{2c^2}+\frac{1}{2}k.$$

Moltiplicando ancora per $8c^2$ ed assumendo come funzione incognita $c^2=x$, risulta:

$$x'^2=-x^3+4hx^2+4kx-4h_1^2.$$

Dalla forma di quest'ultima equazione si desume senz'altro che $x$, e, per conseguenza, le due curvature $c$ e $\tau$, si possono esprimere come funzioni ellittiche dell'arco $s$.

Padova, 14 maggio 1906.

LUIGI SANTE DA RIOS.