Sur la généralisation du problème de Dirichlet.

(Première partie.)

Par

SERGE BERNSTEIN à St. Pétersbourg.

On rencontre souvent en physique et en géométrie le problème suivant:

Déterminer une fonction continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur d'un contour C, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du type elliptique $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ et prenant sur le contour C une succession de valeurs déterminée.

Nous appellerons ce problème *problème de Dirichlet de première espèce,* ou bien si aucune confusion n'est possible, tout simplement *problème de Dirichlet.*

J'ai indiqué dans ma Thèse*) une méthode paramétrique qui ramène ce problème à celui du prolongement analytique. La question importante est de reconnaître dans quels cas ce prolongement est possible. Dans ce travail nous nous proposons de développer cette théorie qui est une combinaison des deux méthodes fondamentales de l'analyse: celle des approximations successives et du prolongement analytique. Notre idée première consiste, en effet, à reconnaître 1° que le problème de Dirichlet est possible dans un cas particulier simple, 2° que s'il est possible dans un cas il est, en général, possible dans des cas suffisamment approchés et 3° qu'on peut par des déformations continues passer ainsi de proche en proche du contour simple au contour donné.

Dans cette première partie je m'occupe exclusivement du cas où $F = 0$ est de la forme $r + t = f(xyzpq)$. Les principaux résultats ont été communiqués à l'Académie Française des Sciences le 24 octobre 1904 et le 29 mai 1905.

---

*) Mathematische Annalen t. 59.

I.

Généralités.

1. Soit $F(xy)$ une fonction de deux variables réelles. Faisons le changement de variables $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$. Nous supposons qu'on ait:

$$F(xy) = F(\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta) = \sum_0^\infty A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

le développement trigonométrique étant absolument et uniformément convergent. On sait que pour qu'il en soit ainsi *il suffit* que F admette des dérivées partielles du premier ordre finies. Nous adopterons dans la suite les notations suivantes. On posera $|F(xy)|'_\varrho = \sum_0^\infty |A_n(\varrho)| + |B_n(\varrho)|$; on posera également $|F(xy)|_R = \sum_0^\infty \max. |A_n| + \max. |B_n|$ à l'intérieur du cercle C de rayon R; on dira de plus que $|F(xy)|_R$ est le *module trigonométrique* de $F(xy)$ à l'intérieur du cercle C. J'attire l'attention sur la différence essentielle qu'il y a entre la notion que nous venons d'introduire et celle de la norme qui a joué un rôle important dans ma Thèse.

Ceci posé, nous commencerons par établir une proposition qui nous sera d'une certaine utilité dans la suite et qui d'ailleurs est assez intéressante en elle-même, puisqu'elle est une généralisation naturelle d'une propriété fondamentale des fonctions harmoniques.

2. Théorème. *Soit z une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

f étant analytique. Si z est finie ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur d'un contour analytique C; si de plus sur ce contour elle se réduit à une fonction analytique de l'arc, elle peut être prolongée analytiquement à l'extérieur du contour.

Il suffit manifestement de démontrer notre théorème en supposant le contour circulaire. D'autre part en remarquant que la fonction harmonique qui sur un contour circulaire C est analytique, peut être prolongée analytiquement à l'extérieur, on peut sans restreindre la généralité se borner au cas où z s'annulle sur C. Il est clair enfin que notre proposition sera établie, dès que nous aurons reconnu que la dérivée dans la direction de la normale $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ est une fonction analytique de l'angle θ tout le long de la circonférence C. A cet effet, considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = F(xy) = \sum_0^\infty A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

On sait, d'après M. Picard, que la solution z qui s'annulle sur C peut être développée en série trigonométrique:

$$z = \sum_0^\infty C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta,$$

où

$$C_0 = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho,$$

(2)
$$\begin{aligned} 2nC_n &= \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho, \\ 2nD_n &= \varrho^n \int_R^\varrho \frac{B_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho B_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R B_n \varrho^{n+1} d\varrho \end{aligned}$$

et en différentiant

$$2\frac{dC_n}{d\varrho} = \varrho^{n-1} \int_R^\varrho \frac{A_n d\varrho}{\varrho^{n-1}} + \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho.$$

On en déduit facilement:

(3)
$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}\right|_R &= \sum_1^\infty n \left\{ \left|\frac{C_n}{\varrho}\right|_R + \left|\frac{D_n}{\varrho}\right|_R \right\} < \lambda |F(xy)|_R, \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\varrho \partial \theta^2}\right|_R &= \sum_1^\infty n^2 \left\{ \left|\frac{C_n}{\varrho}\right|_R + \left|\frac{D_n}{\varrho}\right|_R \right\} < \lambda |F(xy)|_R, \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho \partial \theta}\right|_R &= \sum_0^\infty n \left\{ \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|_R + \left|\frac{dD_n}{d\varrho}\right|_R \right\} < \lambda |F(xy)|_R \end{aligned}$$

λ étant un nombre fini pour toute valeur finie de R. On voit qu'ici les choses se passent d'une façon beaucoup plus simple que dans ma thèse où le but poursuivi était tout différent. Les inégalités (3) étant établies, revenons à l'équation (1) en introduisant les coordonnées polaires. Il vient:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \varphi \left(\varrho \theta z \frac{\partial z}{\partial \varrho} \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} \right)$$

$$= \sum_0^\infty a_n \left(\varrho z \frac{\partial z}{\partial \varrho} \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} \right) \cos n\theta + b_n \left(\varrho z \frac{\partial z}{\partial \varrho} \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} \right) \sin n\theta.$$

Désignons $\dfrac{\partial^n z}{\partial \theta^n}$ par z_n. On a alors successivement:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial \theta^2}=\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}z_1+\frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial z}{\partial \varrho}}\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}+\frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}}\frac{\partial z_1}{\varrho \partial \theta}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial z_n}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z_n}{\partial \theta^2}=\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}.$$

D'où, en tenant compte des inégalités (3):

$$(4)\qquad \begin{aligned} |z_{n+1}|_R &< \lambda R \left|\frac{d^n\varphi}{d\theta^n}\right|_R < h\left|\frac{d^n\varphi}{d\theta^n}\right|_R,\\ \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\varrho\partial\theta}\right|_R &< \lambda\left|\frac{d^n\varphi}{d\theta^n}\right|_R < h\left|\frac{d^n\varphi}{d\theta^n}\right|_R,\\ \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial\varrho}\right|_R &< \lambda\left|\frac{d^n\varphi}{d\theta^n}\right|_R < h\left|\frac{d^n\varphi}{d\theta^n}\right|_R. \end{aligned}$$

Or nous pouvons construire une fonction $\psi\left(\theta, z+\frac{\partial z}{\partial \varrho}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right)$ telle que les dérivées partielles d'ordre quelconque de cette fonction pour $\theta = z+\frac{\partial z}{\partial\varrho}+\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}=0$ soient supérieures au module trigonométrique à l'intérieur du cercle C de la dérivée partielle correspondante de φ. Et par conséquent, en vertu des inégalités (4), la solution u de l'équation $\frac{du}{d\theta}=h\psi(\theta, u)$ qui s'annulle pour $\theta=0$ aura sa dérivée d'ordre n supérieure à $\left|\frac{\partial z_n}{\partial\varrho}\right|_R$. Le module trigonométrique d'une fonction ne pouvant être inférieur à la fonction, la série de puissances de θ qui représente u est une série majorante de $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ considérée comme fonction de θ. Le théorème est donc établi. On voit qu'au fond notre raisonnement est identique à celui que Cauchy a introduit dans la science sous le nom du calcul des limites. Nous aurons encore une fois à l'appliquer, mais d'abord il nous faut établir certaines inégalités importantes. Dans ce but nous démontrerons le lemme suivant.

3. Lemme. *Soit une équation linéaire*

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(xy)\frac{\partial z}{\partial x}+b(xy)\frac{\partial z}{\partial y}+c(xy)z=0 \quad (c\leqq 0)$$

où a, b, c sont des fonctions admettant des modules trigonométriques finis. Il est possible de fixer un cercle C de rayon R suffisamment petit, mais bien déterminé, tel que l'équation (5) admette une solution prenant une succession continue quelconque de valeurs sur la circonférence C. Cette solution s'obtiendra par la méthode des approximations successives et vérifiera les inégalités:

$$(6)\qquad |z|_\varrho < \frac{KM}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_\varrho < \frac{KM}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_\varrho < \frac{KM}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

où K est un nombre fixe et M le maximum de la valeur absolue de z sur C.

Examinons d'abord le cas où l'équation (5) se réduit à l'équation de Laplace. On aura alors

$$z = \sum_0^\infty [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n$$

où A_n et B_n sont les coefficients de Fourier qui satisfont à l'inégalité

$$\sum_0^\infty [A_n^2 + B_n^2] < 2M^2.$$

Deux cas peuvent se présenter: ou bien

$$(7)\qquad \sum_0^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} (|A_n| + |B_n|) < 2M$$

ou bien

$$|A_n| < \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}\, M.$$

D'où il résulte que

$$(7^{\text{bis}})\qquad |z|_\varrho < \sum_0^\infty \{|A_n| + |B_n|\} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n + \frac{2M}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où A_n et B_n vérifient l'inégalité (7), puisque

$$\sum_0^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} z^n = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, en désignant $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$ par c_n, il est aisé de vérifier les inégalités:

$$\frac{1}{2n+1} > c_n^2 > \frac{1}{4n} \quad \text{et} \quad 2nc_n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Et, par conséquent, des inégalités (7) et (7^{bis}) résulte immédiatement la première des inégalités (6). Un raisonnement*) identique nous conduirait aux deux autres.

---

*) On vérifiera d'ailleurs d'une façon générale la remarque suivante qui peut être utile dans bien des cas. Soient deux séries à termes positifs convergentes pour $\varrho < 1$

$$\Sigma(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + \cdots + a_n\varrho^n + \cdots,\quad S(\varrho) = b_0 + b_1\varrho + \cdots b_n\varrho^n + \cdots;$$

Les inégalités (6) étant ainsi établies pour les fonctions harmoniques, appliquons à l'équation (5) la méthode des approximations successives. Nous sommes donc conduits à examiner l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(xy)$$

où l'on a:

$$|f(xy)|_\varrho < \frac{A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous allons montrer que la solution qui s'annulle sur la circonférence C de rayon R satisfait aux inégalités

$$(8) \qquad |z|_\varrho < \frac{\lambda R A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_\varrho < \frac{\lambda R A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_\varrho < \frac{\lambda R A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

λ étant un nombre fixe.

En effet, reprenons les formules (2) où nous supposons

$$|A_n|_\varrho < \frac{a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

a_n étant un nombre positif tel que $\sum_0^\infty a_n = A$. Nous avons à examiner les deux intégrales:

$$I = \int_0^\varrho \frac{a_n \varrho^{n+1}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} d\varrho \quad \text{et} \quad I_1 = \int_\varrho^R \frac{a_n \varrho^{1-n}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right) d\varrho.$$

La première donne immédiatement:

$$|I|_\varrho < \frac{a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\varrho^{n+2}}{n+2}.$$

La seconde peut être transformée successivement de la façon suivante:

---

si $S(\varrho) > \lambda_n b_n \varrho^n$, on a: $\Sigma(\varrho) \cdot S(\varrho) > \lambda_0 a_0 b_0 + \lambda_1 a_1 b_1 \varrho^2 + \cdots + \lambda_n a_n b_n \varrho^{2n} + \cdots$.

Dans le cas, où $S(\varrho) = \frac{1}{(1-\varrho)^m}$, on peut prendre $\lambda_n = n$, quel que soit m.

$$I_1 = \int_{\varrho}^{R} \frac{a_n\left(1+\frac{\varrho}{R}+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}\right)d\varrho}{\varrho^{n-1}\left[1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} = a_n \frac{2R}{\varrho^{n-1}}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\varrho}{R}+\cdots\right)$$

$$+\, 2a_n R\int_{\varrho}^{R}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho^{n-1}}+\frac{1}{\varrho^{n-2}R}+\cdots+\frac{\varrho^{n}}{R^{2n-1}}\right)d\varrho.$$

D'où:

$$|I_1|_{\varrho} < \frac{4a_nR}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2na_nR\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{R^{n-1}}.$$

Et par conséquent, on a:

$$|2nC_n|_{\varrho} < \frac{a_n\varrho^2}{n+2}\cdot\frac{\left(1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4a_n\varrho R}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} + 2na_n\varrho R\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\varrho^{n-1}}{R^{n-1}}.$$

En remarquant enfin que:

$$n\frac{\varrho^n}{R^n} < \frac{1}{1-\frac{\varrho}{R}}$$

on a:

(9) $$|2nC_n|_{\varrho} < \frac{hR^2a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où h est une constante. Et pareillement:

(9^{bis}) $$\left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|_{\varrho} < \frac{2Ra_n}{(n+2)\left(1-\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6Ra_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} < \frac{hRa_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des inégalités (9) et (9^{bis}) on déduit facilement les inégalités (8).

En reprenant maintenant le raisonnement connu de M. Picard on arrive immédiatement à vérifier le lemme annoncé dans toute sa généralité.

On vérifiera de même l'exactitude des inégalités (8) et (6), si à la place d'un cercle on prend un anneau limité par deux circonférences concentriques de rayons R et R_1 suffisamment rapprochés*). Je ne referai pas un calcul tout semblable à celui qu'on vient de parcourir; je me

*) L'épaisseur de l'anneau ne dépend que des coefficients a, b, c de l'équation (5).

bornerai à indiquer les formules (2^{bis}) qui doivent remplacer les formules (2) dans cette discussion:

$$(2^{\text{bis}}) \qquad 2n[R_1^{2n} - R^{2n}]\,C_n = \left[\rho^{n+1} - \frac{R_1^{2n}}{\rho^{n-1}}\right]\int_R^\rho A_n\left[\frac{R^{2n}}{\rho^{n-1}} - \rho^{n+1}\right]d\rho$$
$$+\left[\rho^{n+1} - \frac{R^{2n}}{\rho^{n-1}}\right]\int_\rho^{R_1} A_n\left[\frac{R_1^{2n}}{\rho^{n}} - \rho^{n}\right]d\rho.$$

et une formule analogue pour D_n.

4. Cela étant, donnons à l'équation (5) un second membre

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\,\frac{\partial z}{\partial x} + b\,\frac{\partial z}{\partial y} + cz = d \qquad (c \leqq 0)$$

et soit N le module trigonométrique de d à l'intérieur d'un cercle C de rayon R (sur la grandeur duquel nous ne faisons aucune hypothèse). Je dis que *la solution z qui s'annulle sur C vérifie les inégalités*

$$(10) \qquad |z|_R < \lambda N, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_R < \lambda N, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_R < \lambda N,$$

λ étant un nombre indépendant de N, fini, lorsque R est fini.

Ces inégalités (10) sont très importantes, puisque c'est sur elles uniquement que va reposer la démonstration du lemme fondamental de cette théorie. Le moyen le plus simple pour les établir est d'appliquer le procédé alterné de M. Picard*). En effet, nous pouvons décomposer le cercle donné en un nombre limité d'anneaux concentriques et un petit cercle auxquels seront applicables les inégalités (6). En introduisant une nouvelle circonférence dans chacun des anneaux on verra facilement que le procédé de M. Picard est applicable et que des inégalités (6) et (8) résultent les inégalités (10). Arrivons donc à la démonstration du lemme fondamental.

5. Lemme. *Soit z une solution de l'équation*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \geqq 0\right)$$

dont les dérivées premières admettent des modules trigonométriques finis à l'intérieur d'un cercle C. Soit d'autre part une fonction $\varphi(\theta)$ dont la dérivée première admet un développement trigonométrique absolument convergent. On peut dans ces conditions déterminer un nombre α tel que, pour $|\varepsilon| < \alpha$, l'équation (1) *admette une solution u dont les dérivées premières ont leurs modules trigonométriques finis et qui sur la circonférence C se réduit à $z + \varepsilon\varphi(\theta)$.*

---

*) É. Picard, „Sur la généralisation du problème de Dirichlet", Acta Mathematica, t. XXV.

Posons a priori

$$u = z(xy) + \varepsilon z_1(xy) + \frac{\varepsilon^2}{2} z_2(xy) + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} z_n(xy) + \cdots \tag{11}$$

et cherchons à déterminer successivement $z_i = \frac{\partial^i u}{\partial \varepsilon^i}$ de sorte que u satisfasse identiquement à l'équation (1) et que sur la circonférence C on ait $z_1 = \varphi(\theta)$, $z_2 = z_n = 0$. Pour déterminer z_1 on aura l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} z_1 = 0$$

et successivement:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \dfrac{\partial z_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \dfrac{\partial z_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} z_2 = A_1 \\
\dfrac{\partial^2 z_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \dfrac{\partial z_3}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \dfrac{\partial z_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} z_3 = A_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \dfrac{\partial z_n}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \dfrac{\partial z_n}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} z_n = A_{n-1}. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right. \tag{12}$$

où A_i ne dépend que des z_k, $\frac{\partial z_k}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k}{\partial y}$ avec $k \leqq i$.

En appliquant les inégalités (10) on obtient:

$$|z_1|_R < \mu M, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_R < \mu M, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_R < \mu M,$$

où μ est un nombre fixe indépendant de $\varphi(\theta)$ et M la somme de la série des modules des coefficients du développement trigonométrique de $\varphi'(\theta)$. Les A_i ont donc leurs modules trigonométriques finis et on a d'une façon générale:

$$|z_n|_R < \lambda\, |A_{n-1}|_R, \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|_R < \lambda\, |A_{n-1}|_R, \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right|_R < \lambda\, |A_{n-1}|_R. \tag{13}$$

Or l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \frac{\partial z_n}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_n + A_{n-1}$$

est la dérivée n^e totale de $f\left(xyu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ par rapport à ε, lorsque $\varepsilon = 0$.

Nous pouvons par conséquent appliquer le calcul des limites de Cauchy de la façon suivante. Considérons l'équation auxiliaire*)

$$v = \mu M \varepsilon + \lambda F(v) \tag{14}$$

où $F(v)$ est une fonction analytique de v telle que

$$F(0) = F'(0) = 0,\ F^{(n)}(0) > \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^i \partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^k \partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^l} \right|_R \qquad (i+k+l = n \geqq 2).$$

L'équation (14) nous donne manifestement v en fonction de ε

$$v = \mu M \varepsilon + \frac{1}{2} a_2 \varepsilon^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} \varepsilon^n + \cdots$$

où

$$a_n > |z_n(xy)|_R, \quad a_n > \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|_R, \quad a_n > \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right|_R.$$

La série (11) converge, par conséquent, pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Or du moment qu'il en est ainsi il est évident que u satisfait à l'équation (1) avec les conditions aux limites voulues. La proposition est donc établie.

Remarque. Il est clair que si f ne contenait pas les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, il suffirait pour que le lemme soit exact de supposer le module trigonométrique de z fini et la série $\varphi(\theta)$ absolument convergente.

II.

Cas où le problème de Dirichlet est possible.

6. Nous pouvons aborder maintenant le problème de Dirichlet.

Problème de Dirichlet. *Déterminer une fonction z analytique satisfaisant à l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \geqq 0\right) \tag{1}$$

et se réduisant sur une circonférence C de rayon R à une fonction de l'angle θ, $F(\theta)$, telle que le développement trigonométrique de $F'(\theta)$ soit absolument convergent.

Nous admettrons les deux points suivants faciles à vérifier: 1° La solution z (si elle existe) est entièrement déterminée par les conditions du

*) La fonction $F(v) = F\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ qui ressemble à une fonction majorante en diffère essentiellement, puisque nous ne supposons aucunement qu'un même développement de Taylor soit valable pour f lorsque z et ses dérivées prennent des valeurs finies quelconques. Nous supposons, en effet, seulement que f n'a pas de singularités réelles finies.

problème; 2° une solution z (sur la nature de laquelle on ne sait rien) dont les dérivées premières admettent des modules trigonométriques finis est analytique.

Supposons que pour une raison ou une autre on sache que l'équation (1) admette une solution qui sur le contour se reduit à une fonction $\Phi(\theta)$ jouissant des propriétés exigées par le lemme fondamental. La marche que nous devons suivre est toute indiquée. Nous savons que le problème est possible si au lieu de $\Phi(\theta)$ nous prenons la fonction

$$F(\theta, \alpha) = \Phi(\theta) + \alpha[F(\theta) - \Phi(\theta)]$$

pourvu que le module de α soit suffisamment petit. La solution $u(xy\alpha)$ se trouve être une fonction analytique de α et en remarquant que

$$F(\theta, 1) = F(\theta)$$

on voit que la question de la possibilité du problème de Dirichlet se trouve ramenée à celle de la possibilité du prolongement analytique de $u(xy\alpha)$ le long du segment 01. C'est de cette dernière question que nous allons nous occuper. Supposons que la solution existe tant que $\alpha < \alpha_0$. Que pouvons-nous en conclure pour $\alpha = \alpha_0$? Soit $\alpha_1 < \alpha_0$ et $\alpha_2 < \alpha_0$ deux nombres très voisins, de sorte que $|\alpha_2 - \alpha_1| < \beta$. Soient u_1 et u_2 les deux solutions correspondantes. La différence $u_2 - u_1 = \delta$ vérifiera manifestement une équation linéaire de la forme:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + a\frac{\partial \delta}{\partial x} + b\frac{\partial \delta}{\partial y} + c\delta = 0 \tag{15}$$

avec $c \leqq 0$. Par conséquent, $\delta = u_2 - u_1$ ne peut avoir ni maxima ni minima; de sorte que si M est le module maximum de $F(\theta) - \Phi(\theta)$, on aura, pour toute valeur de x et y, $|u_2 - u_1| < \beta M$. Donc, si α tend vers α_0, u tend uniformément vers une limite u_0. Mais, c'est tout ce que nous pouvons dire dans le cas général: les dérivées premières pourront croître indéfiniment et au point $\alpha = \alpha_0$ nous ne serons plus dans les conditions exigées par le lemme fondamental. Pour qu'il en soit ainsi, pour que nous puissions affirmer que le point α_0 n'est pas un point singulier, il suffira d'indiquer une limite supérieure pour les modules trigonométriques de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ quel que soit $\alpha < \alpha_0$. Dans ces conditions, en effet, en prenant α' suffisamment voisin de α_0, nous serons assurés que le cercle de convergence du développement de u suivant les puissances de $(\alpha - \alpha')$ comprendra à son intérieur le point α_0 qui dès lors ne saurait être singulier.

7. Examinons d'abord le cas simple, où f ne contient pas les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ce cas a été étudié d'une façon plus ou moins complète

par d'autres méthodes, mais je crois que la méthode paramétrique conduit au résultat le plus facilement.

En effet, d'après la remarque faite à la fin du premier chapitre nous n'avons pas à nous préoccuper dans ce cas des modules trigonométriques de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$; il suffit d'avoir une limite supérieure du module trigonométrique de u. Or cela est facile. D'après le raisonnement général du paragraphe précédent, on a

$$|u| < N + M\alpha_0$$

où $|u|$ désigne la valeur absolue de u et N la valeur absolue maxima de $\Phi(\theta)$. Soit alors A le maximum de la valeur absolue de $f(xyu)$. En appliquant la formule de Green on a

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int Gf(xyu)\,dx\,dy + H(xy)$$

de laquelle on déduit:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < kA + B, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < kA + B,$$

G étant la fonction ordinaire de Green, H la fonction harmonique qui prend les mêmes valeurs que u sur la circonférence C, k un nombre fixe et B le maximum de la série des modules des coefficients du développement trigonométrique de $F_\theta'(\theta, \alpha)$. Du moment qu'on connaît les limites supérieures de $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ on a sans difficulté une limite supérieure du module trigonométrique de u. La possibilité du problème de Dirichlet sous la restriction indiquée au commencement de ce chapitre est donc démontrée. Or nous verrons plus loin et très simplement que grâce au théorème établi au début, on peut affirmer l'existence d'une solution au moins régulière dans tout le plan; par conséquent le problème de Dirichlet dans ce cas particulier est résolu sans restriction.

Passons maintenant au cas plus général.

8. Théorème. *Si dans l'équation* (1) *la fonction analytique*

$$f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ne croît pas plus rapidement que les deuxièmes puissances de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, *lorsque celles-ci croissent indéfiniment, le problème de Dirichlet admet toujours une solution.*

Pour fixer les idées nous supposerons que f est un polynome du second degré en $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Nous adopterons les notations:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Commençons par limiter supérieurement l'inclinaison du plan tangent à la surface S_α sur le bord B. Nous verrons que ce n'est qu'en ce point de la démonstration que la condition que f soit du second degré en p et en q joue un rôle vraiment essentiel. Il suffira, en effet, de limiter supérieurement p au point P du bord B dont les coordonnées sont $x = -R$, $y = 0$, $z = z_0$, q ayant une valeur donnée q_0. Soit, pour fixer les idées, $p > 0$. Donnons-nous un contour fermé B' tangent en P au contour B et *situé entièrement au-dessus de la surface* S_α. Il est clair que la surface S' satisfaisant à l'équation (1) qui passera par B' aura $p' > p$ au point P. Or faisons le changement de fonction et de variables de façon à considérer x comme fonction de y et z. Un calcul élémentaire montre que l'équation (1) prend la forme:

$$(16)\quad \left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - 2\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\partial x}{\partial z}\,F\left(xyz\,\frac{\partial x}{\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial z}\right)$$

où F est un polynome du second degré en $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}$.

On voit immédiatement que l'équation (16) admet la solution $x = \varphi(y)$ quelle que soit φ. En d'autres termes, l'équation (16) ou *l'équation* (1) *admet comme solutions tous les cylindres à génératrice verticale.* Cette remarque d'ailleurs ne suppose pas f analytique. Mais pour en tirer des conséquences rigoureuses nous sommes obligés d'introduire cette hypothèse.*) L'équation (16) admettra alors une solution analytique passant par la droite $x + R = z - z_0 - q_0 y = 0$, avec $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p'}$ le long de cette droite. De plus, si $A > q_0 > B$ et $p' > c > 0$, on pourra fixer un nombre positif suffisamment petit b tel que si

$$(17)\qquad |z - z_0| < (A+1)b, \quad |y| < b$$

on a:

$$|x| < M, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial z}\right| < M, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| < M; \quad \left|\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right| < M; \quad \left|\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z}\right| < M.$$

De sorte que, d'après l'équation (16), on peut fixer un nombre k, tel que les inégalités (17) entraînent

$$(18)\qquad -k\frac{\partial x}{\partial z} < \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} < k\frac{\partial x}{\partial z}.$$

D'où

$$(19)\qquad \frac{1}{p'}\,e^{-ku} < \frac{\partial x}{\partial z} < \frac{1}{p'}\,e^{ku}$$

en désignant par u l'accroissement de z pour y fixe.

---

*) Cette hypothèse a d'ailleurs déjà joué un rôle important puisqu'elle est à la base de notre démonstration du lemme fondamental.

D'où encore, en posant $x + R = x_1$:

$$1 - e^{-ku} < kp'x_1 < e^{ku} - 1.$$

Et enfin

$$\frac{1}{k}\log(1 + kp'x_1) < u < -\frac{1}{k}\log(1 - kp'x_1). \tag{20}$$

Prenons maintenant comme *bord B' de cette surface S' le contour qui a comme projection sur le plan des xy l'arc de la circonférence C situé à gauche d'une corde $x_1 = c^{te}$ et cette corde elle-même.* Nous choisissons en outre cette corde de façon qu'on ait:

$$\frac{1}{k}\log(1 - kp'x_1) = -b. \tag{21}$$

On sera alors assuré que sur le bord B'

$$\frac{1}{k}\log(1 + kp'x_1) < u. \tag{20bis}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer p' par la condition que le bord B' soit au-dessus de la surface S_α. Pour ce qui concerne la partie du bord qui se projette sur la circonférence C, ça ne présente pas de difficulté; mais pour celle qui se projette suivant la corde une explication supplémentaire et nécessaire. Nous nous bornerons à considérer le point où $y = 0$, le raisonnement étant identique dans tous les cas. Considérons une surface S_{α_1} de la même famille voisine de S_α de sorte que

$$|F(\theta, \alpha_1) - F(\theta, \alpha)| < \varepsilon.$$

Si p_1 est la limite supérieure de la dérivée première sur S_{α_1}, l'accroissement de z_1, lorsque x_1 varie de 0 à x_1, sera inférieur à $p_1 x_1$. Par conséquent, l'accroissement de z sur la surface S_α sera au plus égal à $p_1 x_1 + 2\varepsilon$. En vertu de l'inégalité (20^{bis}), il suffira donc qu'on ait:

$$p_1 x_1 + 2\varepsilon < \frac{1}{k}\log(1 + kp'x_1).$$

En tenant compte de (21) cette condition se transforme en:

$$kp_1 x_1 + 2k\varepsilon < \log(2 - e^{-kb}).$$

Or, posons par exemple:

$$\varepsilon = \frac{\log(2 - e^{-kb})}{4k}. \tag{22}$$

Il en résultera:

$$p' > 2p_1 \frac{1 - e^{-kb}}{\log(2 - e^{-kb})}. \tag{23}$$

On a ainsi la certitude *qu'il suffit que p' satisfasse à l'inégalité* (23) *pour que le point en question de la surface S' soit au-dessus du point correspondant de la surface S_α.* D'une façon générale on arrivera par le même procédé à fixer une limite supérieure pour p:

$$p < p' = Lp_1.$$

9. ε étant d'après (22) un nombre déterminé, on voit qu'en effectuant un nombre *fini* de fois la même opération on obtiendra une limite supérieure des dérivées premières; pourvu toutefois que de la connaissance des dérivées p et q sur les bords on puisse tirer une limite supérieure des dérivées premières à l'intérieur. Il nous faut donc éclaircir ce point.

Considérons l'expression

$$v = p\cos\lambda + q\sin\lambda,$$

λ étant un paramètre variant de 0 à π. Il est évident que la connaissance de v pour deux valeurs différentes de λ nous détermine p et q. Cela étant, proposons-nous de déterminer une limite supérieure du maximum du module de v. On aura manifestement:

$$r\cos\lambda + s\sin\lambda = s\cos\lambda + t\sin\lambda = 0.$$

D'autre part en différentiant l'équation (1), il vient:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s$$
$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t.$$

D'où pour v maximum ou minimum:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v\frac{\partial f}{\partial z} + \cos\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\lambda\,\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{24}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}$ étant positif on voit qu'*en général* pour v très grand le second membre aura le signe de v et par conséquent v ne pourra avoir ni un maximum positif très grand, ni un minimum négatif considérable. Pourtant, si on ne veut pas laisser de côté des cas particuliers importants, une étude plus détaillée s'impose. Écrivons f sous sa forme explicite:

$$f = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F,$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions analytiques de x, y, z. La condition $\dfrac{\partial f}{\partial z} \geqq 0$ entraîne manifestement

$$\delta = A_z' C_z' - (B_z')^2 \geqq 0.$$

Le cas qui exige une discussion est celui, où

$$\delta = 0.$$

Alors on aura évidemment aussi $D_z' = E_z' = 0$ Et de plus, si on ne peut rien tirer de l'équation (24) pour une succession continue de valeurs de λ, c'est qu'on a aussi

$$A_z' = B_z' = C_x' = 0.$$

On pourrait même montrer que le seul cas où on ne peut rien dire de v quel que soit λ est celui, où toutes ces égalités sont remplies identiquement. Mais nous allons indiquer un artifice qui est applicable dans tous les cas.

Soit M le module maximum de A, B, C. Il est clair que si nous prenons comme fonction inconnue la fonction $z = \alpha z_1$, dans l'équation en z_1 le module maximum des coefficients correspondants A_1, B_1, C_1 sera αM. En choisissant α suffisamment petit, nous pouvons donc réduire ce maximum autant qu'il nous plaira. Posons pour fixer les idées

$$\alpha M < \frac{1}{8} \tag{25}$$

et opérons sur la nouvelle fonction z_1 que nous désignerons par z. Soit $a - 1$ son module maximum. Si nous posons

$$z + a = e^u,$$

la fonction u sera toujours positive. Cela étant, formons l'équation à laquelle satisfait u.

On aura:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-u} f - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

Un calcul semblable à celui que nous avons fait tout à l'heure montre que si en un certain point $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ est maximum, l'inégalité suivante doit être vérifiée:

$$\left\{e^{-u} f - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left[f_z' + \frac{\partial u}{\partial x} f_p' + \frac{\partial u}{\partial y} f_q' - e^{-u} f\right]$$
$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial x} f_x' + \frac{\partial u}{\partial y} f_y'\right] \leqq 0. \tag{26}$$

Or, lorsque $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ devient très grand, le premier membre de l'inégalité (26) aura le signe de la somme des termes du quatrième degré en $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, si cette somme ne s'annulle que pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Écrivons donc cette somme

$$S = w^2 + (2 - 3e^{-u})\overset{2}{f}w + e^{-2u}\overset{2}{f}{}^2 + w\underset{z}{\overset{2}{f'}}$$

où $\overset{2}{f}$ est la somme des termes du second degré en $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ de f.

Or en remarquant que $w\underset{z}{\overset{2}{f'}}$ ne peut être que positif ou nul et en tenant compte de l'inégalité (25), on a

$$S > \frac{1}{2}\, w^2.$$

w peut donc être limité supérieurement. On en déduit de même facilement une limite supérieure pour p et q à l'intérieur d'un contour, lorsqu'on en a une sur le bord. Il résulte donc de la discussion faite dans ces deux paragraphes *qu'on peut limiter a priori p et q sur une surface analytique S_{α_0} de la famille pourvu que l'équation* (1) *admette une solution quel que soit* $0 < \alpha \leqq \alpha_0$.

10. Nous nous proposons d'en déduire une limite supérieure des modules trigonométriques de p et q. Cette fois notre raisonnement sera indépendent du dégre de f. Posons

$$z = z_1 + H,$$

H étant la fonction harmonique qui sur C prend les mêmes valeurs que z. On aura

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

et, d'après ce qui précède, on peut assigner une limite supérieure au second membre. On a souvent attiré l'attention sur ce fait que tandis qu'on peut en tirer (par la formule de Green) une limite supérieure de la fonction et de ses dérivées premières, on ne peut certainement pas en déduire une limite supérieure pour les dérivées secondes. Nous serions donc privés du moyen ordinaire (mais grossier) pour trouver les modules trigonométriques des dérivées premières. Nous allons montrer que néanmoins *ces modules trigonométriques peuvent être limités supérieurement pourvu qu'on suppose (ce qui a bien lieu actuellement) que le second membre est fini et intégrable.*

En effet, considérons la solution z_1 qui s'annulle sur C de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial \theta^2} = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

Le second membre étant borné et intégrable, intégrons les deux membres par rapport à θ; en posant $u_1 = \int_0^{\theta} z_1 d\theta$ on a:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial u_1}{\partial \theta^2} = a + A_0\theta + \sum_1^\infty \frac{A_n}{n}\sin n\theta - \frac{B_n}{n}\cos n\theta$$
$$= a + a_0\theta + \sum_1^\infty a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

où a est une fonction de ϱ facile à déterminer qui d'ailleurs disparaîtra dans la suite des calculs. En effet, la fonction u_1 qui s'annulle sur C se présente aussi sous la forme

$$u_1 = c + c_0\theta + \sum_1^\infty c_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

les formules (2) subsistant entièrement. Après différentiation par rapport à θ, c (qui seul dépend de a) disparaît ainsi que le terme linéaire qui se réduit à une constante par rapport à θ. Par contre

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta\, \partial \varrho} = \frac{\partial z_1}{\partial \varrho}$$

ont en vertu des formules (2) leurs modules trigonométriques finis, puisque $\sum_0^\infty |a_n| + |b_n|$ est finie.

Donc $p = \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}$ *et* $q = \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}$ *ont leurs modules trigonométriques finis. Par conséquent, quel que soit* α *nous sommes dans des conditions où le lemme fundamental est applicable. Le problème de Dirichlet est donc possible pour une fonction quelconque* $F(\theta)$ *sur la circonférence* C, *s'il est possible pour une fonction déterminée* $\Phi(\theta)$ *sur cette même circonférence.*

Or il est aisé de montrer, en vertu du théorème 2 qu'il est *toujours possible.* En effet, soit C une circonférence pour laquelle le problème de Dirichlet est possible. En prenant pour $F(\theta)$ une fonction analytique, on sera certain que la solution correspondante peut être prolongée et par conséquent il existe un cercle C_1 de rayon plus grand pour lequel le problème de Dirichlet sera possible $F_1(\theta)$ étant une fonction déterminée; il le sera donc aussi pour une fonction quelconque et, en répétant ce raisonnement autant de fois qu'on le veut, on voit que *le problème de Dirichlet est toujours possible sous les conditions énoncées au* § 8.

11. Il sera peut-être utile que nous indiquions un sujet de recherches important. Il se rattache au théorème 2 que nous venons d'utiliser. Ainsi, si les données sur le contour sont analytiques on peut affirmer que la surface S qui satisfait au problème peut être prolongée à l'extérieur. La question qui se pose est de savoir dans quels cas ce prolongement peut se faire indéfiniment sans singularités, dans quels cas la surface n'aura

comme singularités réelles que des points isolés. Dans le cas des fonctions harmoniques la réponse est aisée: on sait que si la fonction se réduit à une fonction entière de l'arc θ sur un cercle, elle n'a pas de singularités à distance finie; on a le même critère évident pour décider de l'existence de lignes singulières réelles. Dans le cas général, on n'a plus la ressource de ramener l'étude d'une fonction de deux variables à celle d'une fonction d'une seule variable complexe. Pourtant les critères sont probablement souvent analogues; pour la démonstration rigoureuse on devra approfondir la question de la propagation des singularités le long des caractéristiques.

Dans la deuxième partie de ce travail nous nous occuperons des équations de la forme $Ar + 2Bs + Ct = 0$ et en particulier de celle des surfaces minima.*)

---

*) Comptes Rendus, 2 octobre 1905.