

SUR LES COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

IVAR BENDIXSON

à STOCKHOLM.

Dans ses mémoires »Sur les courbes définies par des équations différentielles»¹ M. POINCARÉ a envisagé l'étude des équations différentielles sous un point de vue nouveau. En se bornant au côté qualitatif de la question, il a démontré une suite de théorèmes de la plus grande importance, à l'aide desquels on peut déterminer complètement la nature des courbes intégrales réelles, satisfaisant à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

X et Y désignant des polynomes en x et en y .

Il s'est d'ailleurs borné au cas où chaque point singulier (a, b) de l'équation en question est tel que l'on ait

$$X = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + X_2,$$

$$Y = \gamma(x - a) + \delta(y - b) + Y_2,$$

X_2 et Y_2 désignant des polynomes en $x - a, y - b$, ne contenant que des termes au moins de la deuxième dimension, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des constantes assujetties à ces deux conditions que l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

n'ait pas de racine nulle et n'ait pas de racine multiple.

¹ Journal de Mathématiques, 1881, 1882, ...

L'étude des points singuliers est basée chez M. POINCARÉ sur le développement en série des intégrales qu'il avait donné antérieurement.¹ Dans le présent mémoire je veux d'abord prouver que les théorèmes les plus importants de M. POINCARÉ peuvent s'étendre au cas, où on fait sur les fonctions X et Y la seule hypothèse qu'elles soient continues ainsi que leurs dérivées prises par rapport à x et à y .

Dans le chapitre I nous démontrerons les principaux théorèmes qu'on obtient dans ce cas très général. En particulier j'insiste sur la notion de *courbe intégrale traversant un point singulier* et sur celle de *région nodale*, notions qui sont d'une grande importance pour l'étude des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier.

Dans les chapitres suivants nous étudierons ensuite de plus près la nature des points singuliers dans le cas où X et Y sont des fonctions holomorphes des variables.

Après avoir donné dans le chapitre II la démonstration de divers théorèmes généraux, nous étudierons dans le chapitre III le cas où les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 1, et où les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ne sont pas toutes deux nulles. Nous traiterons ces cas à l'aide des théorèmes généraux établis dans les chapitres précédents, et sans avoir besoin de connaître les développements en série des intégrales dans le voisinage d'un point singulier. Le point singulier sera dans ce cas un Nœud, Foyer, Centre, Col, ou enfin il sera traversé par deux courbes intégrales limitant une région nodale.

Dans les chapitres suivants nous étudierons le cas général, et nous le réduirons toujours par une suite de substitutions bilinéaires à des équations différentielles de la forme suivante:

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y); \quad \text{où } a \neq 0$$

¹ *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.* Journal de l'école polytechnique, Cahier 45.

Voir aussi POINCARÉ *Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars 1879.

§ désignant une série de Taylor dont tous les termes sont de dimension > 1 .

Cette réduction nous permet non seulement de déterminer complètement la nature des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, mais encore d'obtenir des développements en série, en appliquant à ces dernières équations la méthode de mon mémoire *Sur les points singuliers des équations différentielles*.¹

A l'égard de cette méthode de réduction, nous ferons encore la remarque qu'elle nous permet aussi toujours de réduire le calcul des intégrales holomorphes dans le voisinage d'un point singulier à celui des intégrales holomorphes dans le voisinage de l'origine de plusieurs équations différentielles de la forme traitée dans le mémoire cité. Nous sommes donc parvenus à la résolution complète d'une question traitée par BRIOT et BOUQUET dans leur mémoire *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*,² où les dits auteurs ont développé une autre méthode de réduction qui admet d'ailleurs plusieurs cas d'exception.

Nous nous bornons ici à cette remarque, voulant dans ce mémoire traiter seulement *les courbes intégrales réelles* des équations différentielles.

Nous attirerons enfin l'attention sur la relation qui subsiste entre le nombre c des courbes intégrales traversant un point singulier, le nombre n_f des régions nodales fermées appartenant à ce point, et l'indice i de M. POINCARÉ. Cette relation peut s'écrire

$$c - n_f = 2(i + 1).$$

¹ Öfversigt af K. Vet. Akad. Förbandl., Stockholm, Febr. 9, 1898.

² Journal de l'école polytechnique, 1856.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux sur les courbes définies par des équations différentielles.

1. Étant donné un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) \end{aligned}$$

où $X, Y, \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}$ sont des fonctions continues à l'intérieur d'une région finie A du plan des x, y , on sait qu'il existe un seul système d'intégrales

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x(t - t_0, x_0, y_0), \\ y &= y(t - t_0, x_0, y_0), \end{aligned}$$

satisfaisant aux équations (1) et prenant pour $t = t_0$ les valeurs x_0, y_0 , quand (x_0, y_0) est un point quelconque du plan, situé à l'intérieur de A .

En appliquant par exemple la méthode d'approximation de M. PICARD on obtient pour ces intégrales des développements en séries convergentes tant que

$$|t - t_0| \leq \delta,$$

δ désignant une quantité positive suffisamment petite.

Mais on s'assure de plus aisément, que c'est là le seul système d'intégrales pour lequel

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0;$$

Soient en effet $x_1, y_1; x_2, y_2$; deux systèmes d'intégrales satisfaisant aux

équations (3), et supposons pour fixer les idées que les équations (3) soient satisfaites quand t tend en décroissant vers t_0 . Les deux équations

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = X(x_1, y_1) - X(x_2, y_2),$$

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = Y(x_1, y_1) - Y(x_2, y_2)$$

nous donnent

$$\left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right| \leq 2N[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|],$$

N désignant la valeur maxima des fonctions $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ à l'intérieur de A .

On pourra donc écrire

$$\begin{aligned} \left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right| & \leq 2N \cdot \lim_{\varepsilon=0} \left[\left| \int_{t_0+\varepsilon}^t \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} dt \right| + \left| \int_{t_0+\varepsilon}^t \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} dt \right| \right] \\ & \leq 2N \cdot \lim_{\varepsilon=0} \left[\int_{t_0+\varepsilon}^t \left(\left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right| \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Soit M_t la valeur maxima de la fonction $\left| \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \right| + \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} \right|$ pour les valeurs de la variable comprises entre t_0 et t , on voit que

$$M_t \leq 2N \cdot M_t \cdot (t - t_0).$$

On aura donc, ou bien

$$1 \leq 2N(t - t_0),$$

ce qui est impossible quand t a une valeur voisine de t_0 , ou bien $M_t = 0$. Mais $M_t = 0$ conduit à

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0; \quad \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0;$$

équations qui nous montrent que $x_1 - x_2 = 0$; $y_1 - y_2 = 0$.

c. q. f. d.

2. Les équations (2) représentent toujours une courbe intégrale du système (1), excepté dans le cas où x_0, y_0 satisfont à

$$X(x_0, y_0) = 0, \quad Y(x_0, y_0) = 0.$$

Dans ce cas le point (x_0, y_0) est dit *un point singulier* du système, et l'intégrale (2) se réduit au point (x_0, y_0) .

Le théorème ci-dessus démontré met alors en évidence qu'il n'existe pas de courbe intégrale tendant vers le point singulier (x_0, y_0) quand t tend vers une valeur finie.

Si x_0, y_0 n'est pas un point singulier, et si t'_0 a une valeur telle que

$$|t'_0 - t_0| < \delta,$$

les fonctions $x(t - t_0, x_0, y_0), y(t - t_0, x_0, y_0)$ prendront pour $t = t'_0$ des valeurs déterminées x'_0, y'_0 . En formant maintenant le système d'intégrales qui pour $t = t'_0$ prend les valeurs x'_0, y'_0 , on obtiendra

$$(2') \quad \begin{aligned} x &= x(t - t'_0, x'_0, y'_0), \\ y &= y(t - t'_0, x'_0, y'_0). \end{aligned}$$

Ces séries sont convergentes pour

$$|t - t'_0| \leq \delta_1$$

et les équations (2) et (2') représentent pour les valeurs de t , qui satisfont aux deux inégalités $|t - t_0| \leq \delta, |t - t'_0| \leq \delta_1$, exactement la même courbe intégrale.

Le développement (2') nous donnera en général une continuation de la courbe intégrale définie par les équations (2).

En procédant de cette manière, on peut former des parties d'une courbe intégrale de plus en plus grandes.

3. Quand on cherche à étendre ce prolongement de la courbe intégrale pour des valeurs de $t > t_0$, il peut arriver, ou que l'on obtient des développements en série pour chaque valeur de t , ou qu'il existe des valeurs de t auxquelles on ne peut pas parvenir par de tels prolongements. Il y aura évidemment lieu de faire la même distinction pour les valeurs de $t < t_0$.

I. Supposons d'abord que T soit la limite supérieure des valeurs de t auxquelles on peut parvenir par les dits prolongements pour une courbe intégrale déterminée

$$x = x(t); \quad y = y(t).$$

Envisageons alors une région quelconque A' du plan des x, y , située à l'intérieur de A , je dis que la courbe intégrale ne peut pas rester à l'intérieur de A' , quand t tend vers T en croissant depuis t_0 .

En effet si la courbe intégrale restait toujours à l'intérieur de A' , on pourrait déterminer un nombre positif M tel que

$$|X| < M; \quad |Y| < M; \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq T,$$

ce qui nous donnerait

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} X dt \right| < M |t_1 - t_2|,$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} Y dt \right| < M |t_1 - t_2|.$$

Quand t_1 et t_2 tendent vers T , on aura donc

$$\lim_{\substack{t_1=T \\ t_2=T}} (x(t_1) - x(t_2)) = 0; \quad \lim_{\substack{t_1=T \\ t_2=T}} (y(t_1) - y(t_2)) = 0,$$

ce qui fait voir que $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers des limites déterminées a et b , quand t tend vers T .

Le point $(x = a, y = b)$ ne peut donc pas être un point singulier du système (1), car il n'existe aucun autre système d'intégrales se rapprochant de ce point, quand t tend vers T , que le point (a, b) lui-même. De même ce point ne peut pas être un point régulier, car $x(t), y(t)$ seraient alors donnés par des séries convergentes dans le voisinage de $t = T$, et on pourrait alors prolonger la courbe intégrale pour des valeurs de $t > T$. Il n'est donc pas possible que la courbe reste à l'intérieur de A' .

c. q. f. d.

II. Supposons maintenant que l'on puisse étendre le prolongement de la courbe intégrale pour chaque valeur de $t > t_0$, et que la courbe intégrale soit située à l'intérieur de A' pour les valeurs de $t > t_0$.

Deux cas sont alors à distinguer, suivant que $x(t)$, $y(t)$ tendent vers des limites déterminées ou non.

Si l'on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = b;$$

je dis que le point (a, b) est un point singulier du système (1).

En effet supposons pour fixer les idées que

$$X(a, b) \neq 0.$$

On pourrait alors déterminer un nombre positif m suffisamment grand pour que l'on eut

$$|X(x(t), y(t))| > \left| \frac{X(a, b)}{2} \right|, \quad \text{pour } t \geq m;$$

ce qui nous donnerait

$$\begin{aligned} |x(t) - x(m)| &= \left| \int_m^t X(x, y) dt \right| \\ &> (t - m) \frac{|X(a, b)|}{2} \end{aligned}$$

et on en concluerait que $x(t)$ tend vers l'infini avec t , ce qui est contraire à notre supposition.

c. q. f. d.

4. Afin de traiter le cas où $x(t)$ et $y(t)$ ne tendent pas vers des limites déterminées quand t tend vers l'infini, nous aurons besoin d'établir auparavant quelques théorèmes simples.

Nous désignerons dorénavant, avec M. POINCARÉ, par le nom de *caractéristiques* les courbes que nous avons appelées jusqu'ici des courbes intégrales.

Si la courbe intégrale tend vers le point singulier (a, b) , quand t tend vers $+\infty$, nous dirons que la *demi-caractéristique* correspondant à $t > t_0$ aboutit au point (a, b) .

De même, si $x(t)$, $y(t)$ sont des fonctions telles que l'on ait

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = b;$$

nous dirons que la demi-caractéristique correspondant à $t < t_0$ aboutit au point singulier (a, b) .

5. Nous démontrerons à présent le théorème suivant:

Théorème I. *Soient*

$$(4) \quad x = x(t - t_0, x_0, y_0), \quad y = y(t - t_0, x_0, y_0),$$

les équations d'une caractéristique qui pour $t_0 \leqq t \leqq t_1$ est située à l'intérieur de A , et soient

$$(4') \quad \bar{x} = \bar{x}(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0), \quad \bar{y} = \bar{y}(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0),$$

les équations d'une autre caractéristique qui pour $t = t_0$ passe par un point (\bar{x}_0, \bar{y}_0) voisin de (x_0, y_0) . Ayant choisi un nombre positif δ aussi petit que l'on voudra, je dis qu'on peut toujours déterminer un nombre positif ε suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x| < \delta, \\ |\bar{y} - y| < \delta, \end{aligned} \quad \text{pour } t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

pourvu que l'on ait $|\bar{x}_0 - x_0| \leqq \varepsilon$, $|\bar{y}_0 - y_0| \leqq \varepsilon$.

Je veux donner de ce théorème élémentaire une démonstration qui m'a été communiquée par M. LINDELÖF.

La caractéristique (4) étant pour $t_0 \leqq t \leqq t_1$ située à l'intérieur de A , on peut toujours déterminer une région A' du plan, située à l'intérieur de A et telle que la caractéristique soit pour ces valeurs de t située à l'intérieur de A' .

Désignons par ρ la distance minima d'un point de la caractéristique (4) (pour $t_0 \leqq t \leqq t_1$) au contour de A' , et par N la valeur absolue maxima des fonctions $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, à l'intérieur et sur le contour de A' .

On aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{x} - x) &= X(\bar{x}, \bar{y}) - X(x, y) \\ &= (\bar{x} - x)X'_x(\xi, \eta) + (\bar{y} - y)Y'_y(\xi, \eta) \end{aligned}$$

le point ξ, η étant situé sur la droite joignant le point (x, y) au point (\bar{x}, \bar{y}) , et entre ces deux points.

Tant què

$$(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 < \rho^2$$

on est donc sûr que

$$\left| \frac{d}{dt}(\bar{x} - x) \right| < N[|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|],$$

et on aura de la même manière

$$\left| \frac{d}{dt}(\bar{y} - y) \right| < N[|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|].$$

Ces deux inégalités conduisent à la suivante

$$(5) \quad \left| \frac{d}{dt}(|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|) \right| < 2N[|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|],$$

et celle-ci aura donc certainement lieu tant que

$$|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y| < \rho.$$

Soit maintenant δ un nombre aussi petit que l'on voudra, et déterminons un nombre positif ε tel que

$$2\varepsilon e^{2N(t_1-t_0)} < \delta < \rho.$$

Si l'on détermine alors les valeurs \bar{x}_0, \bar{y}_0 telles que

$$|\bar{x}_0 - x_0| \leq \varepsilon, \quad |\bar{y}_0 - y_0| \leq \varepsilon,$$

je dis qu'on aura toujours

$$|\bar{x} - x| < \delta; \quad |\bar{y} - y| < \delta; \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une valeur t' de t , située entre t_0 et t_1 , telle que la fonction $|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|$ serait égale à δ pour $t = t'$, mais serait $< \delta$ pour $t_0 \leq t \leq t'$.

L'inégalité (5) étant alors satisfaite pour $t_0 \leq t \leq t'$, on aurait

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x| + |\bar{y} - y| &< [|\bar{x}_0 - x_0| + |\bar{y}_0 - y_0|] e^{2N(t-t_0)} \\ &< 2\varepsilon e^{2N(t'-t_0)} < \delta, \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t', \end{aligned}$$

ce qui est contraire à notre supposition que $|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y| = \delta$ pour $t = t'$.

c. q. f. d.

6. Nous pouvons de la manière suivante énoncer ce théorème sous une forme plus géométrique.

Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points du plan situés sur la même caractéristique, et entourons (x_1, y_1) par un cercle C_1 de rayon δ_1 aussi petit que l'on voudra. On peut alors toujours entourer le point (x_0, y_0) par un cercle C de rayon δ suffisamment petit, pour qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de C , traverse toujours C_1 .

Envisageons maintenant un point x_0, y_0 d'une caractéristique, correspondant à $t = t_0$, et menons en (x_0, y_0) une normale N à cette courbe. Quand t en croissant dépasse t_0 , notre caractéristique traversera la normale en passant d'un côté à l'autre. Il nous sera plus tard nécessaire de distinguer l'un de l'autre les deux côtés de la normale. A cet effet nous désignerons par *côté positif* de la normale celui que traverse la caractéristique pour $t > t_0$, et par *côté négatif* celui qu'elle traverse pour $t < t_0$.

Un corollaire qu'on obtient immédiatement est le suivant:

» On peut toujours entourer le point x_0, y_0 par un cercle C de rayon suffisamment petit, pour que chaque caractéristique passant par un point de C coupe la normale N de manière à passer du côté négatif au côté positif de cette normale, quand t va en croissant. »

7. Théorème II. Si

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

sont les équations d'une caractéristique qui lorsque t croît de t_0 vers $+\infty$ reste toujours à l'intérieur de A' , sans approcher indéfiniment d'aucun point singulier, deux cas seulement sont possibles. Ou la caractéristique sera elle-même une courbe fermée, ou elle s'approchera indéfiniment d'une caractéristique fermée.

Observons d'abord que la caractéristique en question, laquelle nous désignerons par L , aura nécessairement plus d'un point limite quand t tend vers $+\infty$. Autrement elle aboutirait à un point singulier (voir page 8) ce qui est contraire à notre hypothèse.

Soit donc P un point limite de L . Deux cas seront à distinguer, suivant que le point P est situé sur L ou non.

I. Si P est un point de L , la caractéristique L sera une courbe fermée.

En effet, si L n'est pas une courbe fermée, elle doit nécessairement couper la normale en P une infinité de fois dans le voisinage de P . Supposons que L coupe la normale encore une fois en P_1 (pour $t = t_1$). Si P_1 est un point suffisamment voisin de P , on sait que, en P_1 , L passe du côté négatif au côté positif de la dite normale. (Fig. I.)

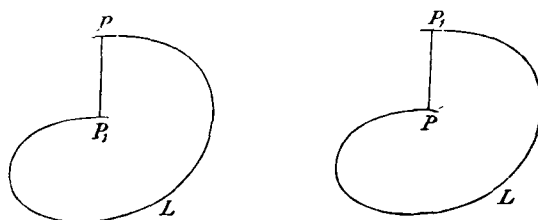


Fig. I.

Envisageons maintenant la région C du plan, limitée par la courbe fermée qui est composée par la partie de L située entre P et P_1 et par la normale PP_1 .

Si L entre à l'intérieur de C quand t dépasse la valeur t_1 , cette courbe ne peut plus sortir de C , sans traverser la normale dans le sens opposé à celui dans lequel il l'a traversée en P et P_1 , ce qui est impossible. Etant alors toujours située à l'intérieur de C pour $t > t_1$, elle ne peut traverser ni la normale entre P et P_1 , ni le prolongement de la normale P_1P situé à l'extérieur de C . On en conclut que P n'est pas un point limite de L pour $t = +\infty$.

Si au contraire L sort de C , quand t dépasse la valeur t_1 , elle ne peut plus couper la normale entre P et P_1 sans passer du côté positif au côté négatif, ce qui est impossible. P ne peut donc pas être un point limite de L .

Nous sommes donc parvenus à une contradiction en supposant que L n'est pas une courbe fermée.

c. q. f. d.

II. Si P n'est pas un point de L , la caractéristique passant par P sera une courbe fermée.

Soit en effet K la demi-caractéristique passant par le point P et correspondant à $t > t_0$. On voit aisément que chaque point de K est un point limite de L .

En effet, soit (a_1, b_1) un point quelconque de K ; entourons ce point par un cercle C_1 de rayon aussi petit que l'on voudra. Le théorème I nous apprend qu'on pourra entourer le point P par un cercle C de rayon suffisamment petit pour que chaque caractéristique passant par un point de C aille couper C_1 . Mais L passera nécessairement par des points de C , et on en conclut que L doit traverser C_1 . Or C_1 est un cercle de rayon aussi petit que l'on voudra, ce qui met en évidence que (a_1, b_1) est un point limite de L .

On en conclut que K ne peut pas s'approcher indéfiniment d'un point singulier.

La caractéristique K ayant alors pour $t = +\infty$ des points limites qui ne sont pas des points singuliers, soit $x = a_2, y = b_2$, un tel point.

Je veux prouver que le point (a_2, b_2) est nécessairement un point de K . Supposons en effet que (a_2, b_2) ne soit pas un point de K , et par le point (a_2, b_2) menons une normale à la caractéristique passant par (a_2, b_2) .

Envisageons une partie suffisamment petite de cette normale, telle que chaque caractéristique rencontrant cette partie de la normale passe du côté négatif au côté positif, quand t va en croissant. Quand t croît vers l'infini, K doit nécessairement couper cette normale un nombre infini de fois. Soient P_1, P_2, P_3 trois points consécutifs où K coupe la normale, pour les valeurs $t_1 < t_2 < t_3$ de t . On prouve alors de même qu'au cas I que K ne peut pas couper la normale entre P_1 et P_2 , ni entre P_2 et P_3 . Il s'ensuit que P_2 est situé entre P_1 et P_3 .

Mais on s'assure aussi aisément que L ne peut couper la normale plus d'une fois entre P_1 et P_2 .

Désignons en effet comme ci-dessus par C la région du plan limitée par la courbe fermée, composée par la partie de K comprise entre P_1 et P_2 , et par la normale P_1P_2 . Lorsque L traverse la normale, quand t va en croissant, et entre dans C , elle n'en peut plus sortir sans traverser la normale entre P_1 et P_2 du côté positif au côté négatif, ce qui est impossible. L restera donc toujours à l'intérieur de C et ne peut donc pas couper la normale P_1P_2 encore une fois.

La courbe L ne peut donc pas couper la normale entre P_1 et P_2 .

plus d'une fois. De la même manière on s'assure que L ne peut pas couper la normale entre P_2 et P_3 plus d'une fois.

Le point P_2 ne peut donc pas être un point limite de L .

La supposition que (a_2, b_2) n'est pas un point de K nous a donc conduit à une contradiction, et on peut donc conclure que (a_2, b_2) est un point de K , ou enfin que K est une courbe fermée, d'après ce que nous avons prouvé au cas I. c. q. f. d.

8. Notre théorème étant ainsi démontré, nous ferons quelques remarques à l'égard des caractéristiques fermées.

En un point P de la caractéristique fermée K nous menons une normale à K d'une longueur suffisamment petite, pour qu'une caractéristique passant par un point de cette partie de la normale aille rencontrer encore une fois cette normale, quand t va en croissant. (En vertu du théorème I cela est toujours possible).

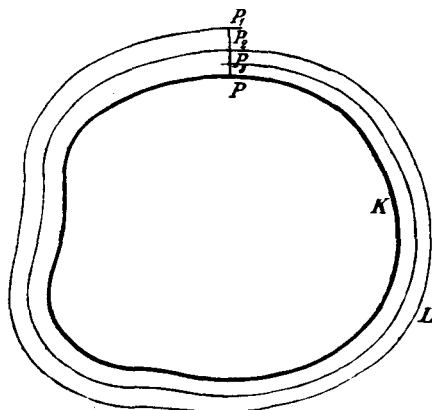


Fig. II.

Soit L (Fig. II) une caractéristique s'approchant indéfiniment de K , et supposons pour fixer les idées que L soit situé à l'extérieur de K . On s'assure alors aisément que L doit couper la dite partie de la normale un nombre infini de fois, aux points consécutifs $P, P_2, \dots, P_\nu, \dots$, pour les valeurs $t_1, t_2, \dots, t_\nu, \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_\nu < \dots$) de t . Les points P_ν tendront alors vers P , quand ν va en croissant, et la courbe L aura la forme d'une spirale se rapprochant de K . Envisageons maintenant une

caractéristique L' passant par un point P'_1 de la normale située entre P_1 et P_2 . On sait que L' rencontre nécessairement la normale encore une fois quand t va en croissant. Je dis que le point consécutif P'_2 , où L' rencontre la normale, est situé entre P_2 et P_3 .

D'abord il est évident qu'au point P'_1 la caractéristique L' entre à l'intérieur de la partie du plan qui est limitée par L et par la normale P_1P_2 , et comme elle ne peut plus en sortir, le point P'_2 doit être situé entre P_2 et P .

On prouve de la même manière que L , qui rencontre la normale en P_2 entre P'_1 et P'_2 , doit rencontrer cette normale en un point consécutif P_3 , situé entre P'_2 et P .

P'_2 sera donc situé entre P_2 et P_3 .

En continuant ainsi on s'assure que L' coupera la normale en des points $P'_1, P'_2, \dots, P'_v, \dots$ tels, que P'_v soit situé entre P_v et P_{v+1} . Il s'ensuit que L sera aussi une spirale se rapprochant indéfiniment de K .

Mais, en prenant un point quelconque (a, b) de L , on peut, d'après le théorème I, entourer le point (a, b) par un cercle C de rayon suffisamment petit, pour que chaque caractéristique passant par C aille rencontrer la normale entre P_1 et P . On obtient donc le corollaire suivant:

Si (a, b) est un point régulier par lequel passe une caractéristique qui pour $t = +\infty$ s'approche indéfiniment d'une caractéristique fermée K , n'aboutissant pas à un point singulier, on peut toujours entourer le point (a, b) par un cercle C de rayon suffisamment petit pour qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de C , soit une spirale se rapprochant indéfiniment de K , quand t tend vers $+\infty$.

Observons enfin que les considérations ci-dessus exposées mettent en évidence que, si L est une spirale se rapprochant de K , quand t va vers $+\infty$, la caractéristique L ne peut pas s'approcher de K , quand t tend vers $-\infty$.

S'il existe des caractéristiques qui ont la caractéristique fermée K pour asymptote, nous dirons avec M. POINCARÉ que K est un *cycle limite*.

S'il n'existe pas de caractéristique ayant K pour asymptote et située à l'extérieur de K , les considérations développées ici mettent en évidence que, dans toute région annulaire limitée par K et par une courbe fermée

quelconque extérieure à K , il y a nécessairement une infinité de caractéristiques fermées.

De même s'il n'existe pas de caractéristique ayant K pour asymptote et située à l'intérieur de K , il y a une infinité de caractéristiques fermées situées dans toute région annulaire limitée par K et par une courbe fermée quelconque située à l'intérieur de K .

Dans le cas où X et Y sont des fonctions holomorphes, M. POINCARÉ a démontré le théorème suivant :

« Si une caractéristique fermée, qui ne passe par aucun point singulier, n'est pas un cycle limite, on peut l'entourer par une région annulaire telle que toutes les caractéristiques de cette région soient des caractéristiques fermées. »

Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de M. POINCARÉ.

9. **Théorème III.** *A l'intérieur d'une caractéristique fermée K , n'aboutissant pas à un point singulier, il existe toujours au moins un point singulier.*

Supposons en effet qu'il n'existe pas à l'intérieur de K de point singulier tel qu'une caractéristique issue d'un point régulier peut en approcher indéfiniment. Alors chaque caractéristique L passant par un point (x_0, y_0) , situé à l'intérieur de K ou bien sera fermée ou bien s'approchera indéfiniment de deux caractéristiques fermées, l'une pour $t = +\infty$, l'autre pour $t = -\infty$.

Je désignerai par $A(x_0, y_0)$ une fonction qui sera égale à l'aire renfermée par la caractéristique L , si L est fermé, mais qui sera égale ou supérieure à l'aire B renfermée par K , chaque fois que (x_0, y_0) représente un point tel que la caractéristique L n'est pas une courbe fermée.

Les quantités $A(x_0, y_0)$ auront alors une certaine limite inférieure, quand le point (x_0, y_0) prendra toutes les positions possibles à l'intérieur de K , et cette limite inférieure sera inférieure à B . Soit g cette limite inférieure, et soit (a, b) un point choisi de manière que la limite inférieure de $A(x_0, y_0)$ soit égale à g pour un entourage de (a, b) aussi petit que l'on voudra.

Je dis que le point (a, b) est nécessairement un point singulier.

En effet, s'il était régulier, par (a, b) passerait une caractéristique L' qui serait fermée ou qui aurait pour asymptotes deux caractéristiques fermées.

Dans le premier cas il existerait une caractéristique fermée située à l'intérieur de L' et pour les points (x_0, y_0) situés sur cette dernière caractéristique la fonction $A(x_0, y_0)$ prendrait évidemment une valeur inférieure à celles que l'on obtient dans le voisinage de (a, b) , ce qui est contraire à notre supposition. Dans le second cas on aurait $A(x_0, y_0) \geq B$ dans le voisinage du point (a, b) .

10. Nous étudierons à présent la nature des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, en nous bornant pourtant au cas où le point singulier P est un *point singulier isolé*, c'est à dire où on peut entourer le point P par un cercle à l'intérieur duquel ne se trouve aucun point singulier autre que P . Désignons par C une région finie du plan des x, y , à l'intérieur et sur le contour de laquelle il n'existe aucun point singulier autre que P . Nous voulons alors démontrer le théorème suivant:

Théorème IV. *L étant une caractéristique qui pour $t > t_0$ est toujours située à l'intérieur de C , les seuls cas à distinguer sont les quatre suivants:*

- 1) *L sera une caractéristique fermée entourant le point P .*
- 2) *L sera une spirale se rapprochant indéfiniment d'une telle caractéristique fermée.*
- 3) *L aboutira au point singulier P .*
- 4) *L sera une spirale se rapprochant indéfiniment d'une caractéristique fermée aboutissant au point P et pour $t = +\infty$ et pour $t = -\infty$.*

En effet, supposons d'abord que P ne soit pas un point limite de L , quand t croît vers $+\infty$. Les théorèmes II et III nous apprennent alors, que l'un des cas 1) ou 2) aura lieu.

Si au contraire P est le seul point limite de L quand t croît vers $+\infty$, c'est le cas 3) qui aura lieu.

Supposons enfin que P soit un point limite de L quand t croît vers $+\infty$, et que cette demi-caractéristique ait aussi d'autres points limites. Nous envisageons la caractéristique K passant par l'un quelconque d'entre eux, en nous bornant d'abord à la demi-caractéristique correspondant à $t > t_0$. On sait alors que tous les points de K sont des points limites de L , d'où l'on conclut que K ne peut pas sortir de C , quand t croît de t_0 vers $+\infty$. Or K ne peut pas être une courbe fermée entourant le point P , car alors L n'aurait pas P pour point limite. Et K ne pouvant non plus être une spirale se rapprochant d'une telle caractéristique fermée, par la même raison, il faut que K ait P pour point limite.

Supposons que K ait aussi pour point limite un point Q différent de P , et menons en Q la normale à la caractéristique passant par Q . On prouve alors de la même manière qu'au théorème II, que la demi-caractéristique K , correspondant à $t > t_0$, qui ne peut évidemment pas être une caractéristique fermée, doit rencontrer cette normale en trois points consécutifs P_1, P_2, P_3 , très voisins de Q , et tels que P_2 soit situé entre P_1 et P_3 . D'où l'on conclut enfin que P_2 ne peut pas être un point limite de L , cette courbe ne pouvant traverser la normale plus d'une fois ni entre P_1 et P_2 , ni entre P_2 et P_3 .

Il est donc impossible que K ait un autre point limite que P , quand t va en croissant.

Envisageons maintenant la demi-caractéristique K correspondant à $t < t_0$. On s'assure aisément que tous les points de cette demi-caractéristique sont aussi des points limites de L , quand t va en croissant. Soit en effet Q_1 un point de la dite demi-caractéristique, et $t_0 - T$ la valeur correspondante de t (la valeur t_0 correspondant au point Q_0). Si L passe dans le voisinage de Q_0 pour les valeurs $t_1, t_2, \dots, t_\nu, \dots$ ($t_1 < t_2 < \dots, \lim t_\nu = \infty$) le théorème I fait voir que L passe dans le voisinage de Q_1 pour les valeurs $t_1 - T, t_2 - T, \dots$. Cela posé, on démontre de la même manière pour cette demi-caractéristique que pour l'autre, qu'elle a le point P pour seul point limite. La caractéristique K étant donc une courbe fermée, on prouve comme à la page 14, que L est une spirale se rapprochant de K .

Observons enfin qu'il est nécessaire dans ce cas que L soit situé à l'extérieur de K , car autrement la partie de L correspondant à $t < t_0$ nous donnerait une demi-caractéristique, située à l'intérieur de K , et n'ayant pas le point P pour point limite, ce qui est impossible en vertu des théorèmes II et III.

Notre théorème est ainsi démontré.

11. A l'égard des caractéristiques fermées, aboutissant au même point singulier, et pour $t = +\infty$, et pour $t = -\infty$, nous ferons la remarque suivante.

Si L est une caractéristique fermée aboutissant au point singulier P pour $t = +\infty$ ainsi que pour $t = -\infty$, et ne comprenant à son intérieur aucun point singulier, par chaque point du plan des x, y , situé à l'intérieur de L , passe une caractéristique fermée aboutissant à P , et pour $t = +\infty$, et pour $t = -\infty$.

Une demi-caractéristique passant par un tel point est en effet toujours située à l'intérieur de L , et doit alors être telle que nous l'avons énoncé au théorème IV. Mais les cas 1), 2), 4) sont évidemment exclus, ce qui fait voir que la demi-caractéristique doit aboutir à P .

Nous désignerons par le nom de « *région nodale fermée* » appartenant à P une pareille région du plan des x, y , où toutes les caractéristiques sont des courbes fermées aboutissant à P pour $t = +\infty$ ainsi que pour $t = -\infty$.

12. Nous démontrerons à présent un théorème très important.

Théorème V. *Soient L et L' deux caractéristiques aboutissant au point singulier isolé P , et telles qu'il n'existe pas de caractéristique aboutissant à P qui soit située entre L et L' . Soit Q un point de L et Q' un point de L' ; entourons Q d'un cercle C' de rayon aussi petit que l'on voudra. On peut alors entourer Q d'un cercle C de rayon suffisamment petit pour que chaque caractéristique passant par un point de C , situé entre L et L' , traverse la partie de C' qui est située entre L et L' .*

A cause du théorème I, il nous suffit de démontrer notre théorème pour des points Q et Q' situés dans le voisinage de P . Nous supposons donc que ces deux points sont situés à l'intérieur d'un cercle \bar{C} où n'existe aucun point singulier autre que P .

Menons en Q une normale QN à L , et en Q' une normale $Q'N'$ à L' , et prenons ces normales suffisamment petites pour que chaque caractéristique, passant par un point de QN ou de $Q'N'$, passe du côté négatif au côté positif de la normale, quand t va en croissant.

Joignons enfin N et N' par une courbe NN' , située toute entière à l'intérieur de \bar{C} (Fig. III).

Désignons par B la région du plan limitée par la courbe fermée $PQNN'Q'P$, et supposons, pour fixer les idées, que la caractéristique L aboutisse à P , quand t tend vers $+\infty$.

Envisageons maintenant une caractéristique L_1 passant par un point quelconque de QN . Cette caractéristique entre à l'intérieur de B au point P_1 , quand t va en croissant. Je dis qu'elle finira par sortir de B en un point P'_1 , situé sur la courbe $P_1NN'Q'$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, L_1 resterait toujours à l'intérieur de B , quand t va en croissant, et le théorème IV serait alors applicable. Mais

les cas 1) et 2) sont évidemment exclus, car s'il existait une courbe intégrale fermée entourant le point P , cette courbe devrait rencontrer les courbes L et L' , et on aurait alors des points singuliers autres que P à l'intérieur de \bar{C} .

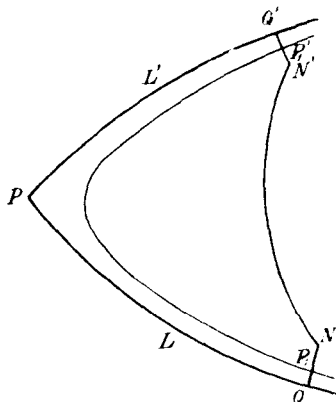


Fig. III.

Le cas 3 est exclu à cause de notre supposition concernant les courbes L et L' .

Le cas 4 est aussi exclu, car dans ce cas L_1 serait une spirale entourant le point P , et cette spirale rencontrerait les courbes L et L' à l'intérieur de \bar{C} .

Mais tous les cas du théorème IV étant exclus, il est nécessaire que L_1 sorte de B quand t va en croissant. Nous désignerons par P_1 le premier point où L_1 traverse le contour $P_1NN'Q'$.

Lorsque P_1 s'approche de Q , le point P_1' s'éloigne de plus en plus de P_1 sur le contour de B . Il s'ensuit que le point P_1' s'approche de plus en plus d'un point déterminé S , quand P_1 tend vers Q . Je dis maintenant que ce point S coïncide avec Q' .

Envisageons, en effet, la caractéristique K passant par le point S pour $t = t_0$, et supposons en outre que S soit différent de Q' .

Quand t décroît à partir de t_0 , K ne peut pas être situé à l'extérieur de B , car une caractéristique passant par un point du contour P_1NS suffisamment voisin de S sortirait alors de B quand t va en décroissant, au lieu d'en sortir quand t va en croissant, comme nous l'avons démontré. La caractéristique K est donc située à l'intérieur de B pour des valeurs de $t < t_0$, voisines de t_0 , et, de même que L_1 , et pour la même raison, elle doit évidemment sortir de B , cette fois quand t va en décroissant.

Soit S' le point où la courbe K sort de B . Il est évident que S' est situé entre S et Q' . Mais les caractéristiques passant par des points voisins de S , et situés entre Q et S , sortiraient alors de B entre S et Q' , quand t va en décroissant, au lieu d'en sortir entre P_1 et Q , comme nous l'avons supposé.

Il est donc nécessaire que le point P_1 tende de plus en plus vers Q' , quand P_1 tend vers Q , ce qui établit notre théorème.

13. A cause de la propriété ainsi démontrée des deux demi-caractéristiques L et L' , nous n'arrêterons pas la caractéristique L en P , mais nous regarderons L' comme le prolongement de L , c'est à dire nous regarderons les deux caractéristiques L, L' comme une seule courbe, et nous dirons *qu'une pareille caractéristique (LL') traverse le point singulier P* . Observons de plus que la démonstration donnée nous permet de dire: *Si (LL') traverse le point singulier, l'une des demi-caractéristiques L et L' aboutira à P quand t va en croissant, l'autre quand t va en décroissant.*

On doit observer enfin que la même caractéristique L peut donner naissance à deux caractéristiques LL' et LL'' traversant le point singulier P , si L' et L'' sont des caractéristiques situées, l'une à gauche, l'autre à droite de L . C'est ainsi qu'un col est traversé par 4 caractéristiques à savoir $(LL'), (L'L_1), (L_1L'_1), (L'_1L)$ (Fig. IV).

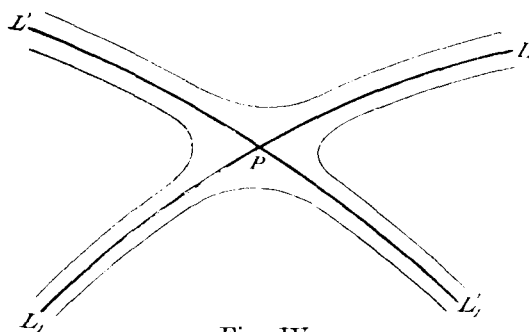


Fig. IV.

14. Mais il y a aussi un autre cas, où de deux caractéristiques L et L' , aboutissant à un point singulier, l'une doit être regardée comme le prolongement de l'autre.

Soient en effet Q un point de L et Q' un point de L' . Supposons qu'il soit possible de joindre Q et Q' par une courbe C telle qu'il n'y ait

pas de point singulier à l'intérieur de la courbe fermée $PQQ'P$, et qu'aucune caractéristique passant par un point quelconque de C n'aboutisse à P . Les caractéristiques entrant à l'intérieur de $PQQ'P$ en un point voisin de Q , sortiraient alors de cette région du plan en un point voisin de Q' , ce que l'on établit exactement de la même manière que pour le théorème V, et nous regarderons alors la courbe L' comme le prolongement de L , bien qu'il puisse exister aussi des caractéristiques aboutissant à P et situées entre L et L' .

En effet il peut très bien se faire qu'il y ait une ou plusieurs régions nodales fermées situées entre L et L' , comme le met en évidence la Fig. V.

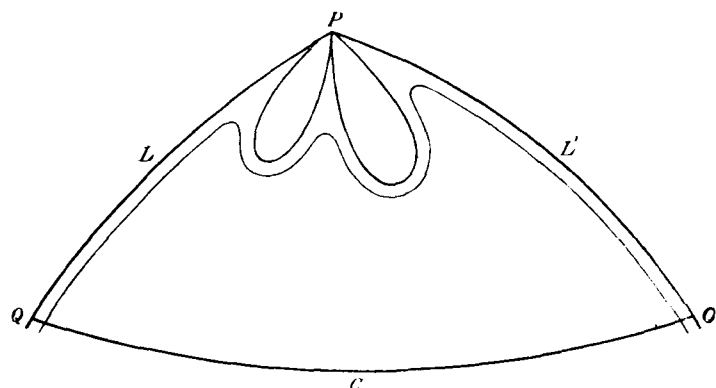


Fig. V.

Si le nombre de ces régions nodales fermées est fini, il est évident qu'il existe toujours une certaine caractéristique L'' située entre L et L' et telle que LL'' soit une caractéristique traversant le point singulier P . C'est ce qui aura lieu dans le cas où les fonctions X et Y de l'équation (1) sont des fonctions holomorphes dans le voisinage de P , comme nous le prouverons dans le chapitre suivant.

Mais dans le cas général il faut compter avec l'éventualité d'un nombre infini de régions nodales fermées situées entre L et L' , et alors il pourrait bien se faire qu'il n'y eut pas de caractéristique L'' , située entre L et L' , et telle que (L, L'') traversât le point P .

Dans ce cas on peut regarder le prolongement L' de L comme dépendant du contour C , de sorte que l'on obtient une infinité de diffé-

rents prolongements L' , en déformant la courbe C , de manière à lui faire traverser les régions nodales en question.

15. Envisageons maintenant une caractéristique L aboutissant à P , et soit C un contour fermé coupant la caractéristique L , entourant P , et à l'intérieur duquel ne se trouve aucun point singulier autre que P . Soit Q le dernier point de rencontre entre L et C . Les seuls cas à distinguer alors sont les deux suivants:

- 1) *Il existe une demi-caractéristique L' passant par un point de C et aboutissant à P qui est toujours situé à l'intérieur de C et qui est telle que par aucun point de C , situé entre L et L' , il ne passe aucune demi-caractéristique aboutissant à P et étant toujours située à l'intérieur de C . La courbe L' est donc le prolongement de L par rapport à C .*
- 2) *On peut entourer le point Q par un cercle suffisamment petit pour que la caractéristique passant par un point quelconque de ce cercle aboutisse au point P .*

Nous dirons dans ce dernier cas que L s'arrête ou finit en P .

Supposons en effet pour fixer les idées que L aboutisse à P pour $t = +\infty$, et soit \bar{Q} un point de L situé entre Q et P . Menons en \bar{Q} une normale $Q_1\bar{Q}Q_2$ à L , Q_1 étant situé d'un côté de L et Q_2 de l'autre côté. Nous supposons en outre que les points Q_1 et Q_2 soient choisis de telle manière que chaque caractéristique passant par Q_1Q_2 passe du côté négatif de la normale au côté positif quand t va en croissant.

Envisageons maintenant les caractéristiques passant par les points de $\bar{Q}Q_1$, et supposons d'abord qu'il existe un point P_1 de $\bar{Q}Q_1$ par lequel passe une demi-caractéristique L_1 aboutissant à P et située tout entière à l'intérieur de C . On s'assure alors aisément que L_1 ne peut pas couper $\bar{Q}Q_1$ encore une fois en un point P_2 , car dans la région du plan limitée par la normale P_1P_2 et la partie de L_1 située entre P_1 et P_2 serait alors situé un point singulier.

En vertu du théorème IV il est alors évident que toute demi-caractéristique passant par un point quelconque de $\bar{Q}P_1$ et correspondant à des valeurs croissantes de t doit aboutir à P , car ne pouvant pas traverser la normale $P_1\bar{Q}$ du côté positif au côté négatif elle doit toujours être située dans la partie du plan limitée par L , par L_1 et par la normale $P_1\bar{Q}$.

Supposons maintenant qu'il n'existe entre \bar{Q} et Q_1 aucun point de la normale par lequel passe une demi-caractéristique aboutissant à P et située tout entière à l'intérieur de C . Soit alors P_1 un point quelconque de la normale $\bar{Q}Q_1$, le théorème IV nous apprend que la caractéristique L_1 passant par P_1 doit nécessairement sortir de la région limitée par C , quand t va en croissant.

Soit P'_1 le point de C où cela a lieu, on s'assure de la même manière qu'au théorème V que P'_1 tend vers un point déterminé S , quand P_1 tend vers \bar{Q} .

Il est d'ailleurs évident que L_1 doit sortir de la région limitée par C , aussi pour t décroissant.

Par aucun point de C situé entre Q et S ne peut alors passer une demi-caractéristique aboutissant à P et située tout entière à l'intérieur de C . En effet si L_2 était une pareille caractéristique, toutes les caractéristiques passant par des points de la normale situés entre \bar{Q} et Q_1 , seraient situées dans la partie du plan limité par L , par L_1 et par C et aucune d'entre elles ne pourrait sortir de la région limitée par C dans le voisinage de S .

Envisageons maintenant la demi-caractéristique L' passant par S et correspondant à des valeurs décroissantes de t ; nous voulons prouver que L' aboutit à P .

Entourons à cet effet S par un cercle B suffisamment petit pour que B ne coupe pas la normale $\bar{Q}Q_1$ entre \bar{Q} et Q_1 , et envisageons la partie de L' qui est située à l'intérieur de B . Je dis que cette partie de L' ne passe par aucun point situé à l'extérieur de C .

En effet, si S' était un point de L' situé à l'extérieur de C et tel que la partie SS' de L' était tout entière située à l'intérieur de B , les demi-caractéristiques correspondant à des valeurs décroissantes de t et passant par des points très voisins de S sortiraient toutes de la région limitée par C , avant d'avoir atteint le contour B , et il n'y aurait alors aucune caractéristique L_1 passant par un point P'_1 voisin de S qui couperait la normale $\bar{Q}Q_1$ en P_1 avant de sortir de C quand t va en décroissant.

L' est donc situé à l'intérieur de C dans le voisinage de S , et on établit aisément que L' ne peut jamais sortir de la région limitée par C .

En effet L' ne peut pas couper la normale $\bar{Q}Q_1$ avant de sortir de cette région. Si L' sortait donc de la dite région en S' , une demi-carac-

téristique passant par un point quelconque très voisin de S et correspondant à $t < t_0$, sortirait donc aussi de la région limitée par C dans le voisinage de S' sans avoir rencontré la normale entre \bar{Q} et Q_1 , ce qui est contraire à notre hypothèse.

Or L' étant par conséquent toujours situé à l'intérieur de C , le théorème IV nous apprend que L' aboutit à P , ce qui fait voir que L' est le prolongement de L .

En appliquant le même raisonnement aux points de $\bar{Q}Q_2$, on s'assure que le seul cas où il n'existe pas de prolongement de L sera quand il existe et sur $\bar{Q}Q_1$, et sur $\bar{Q}Q_2$, des points par lesquels passent des caractéristiques aboutissant à P , et il est alors évident que l'on peut entourer \bar{Q} par un cercle tel que par chaque point de ce cercle passe une caractéristique aboutissant à P . Par conséquent on peut aussi entourer Q par un cercle jouissant de la même propriété. c. q. f. d.

16. Nous désignerons dorénavant par le nom de *région nodale* appartenant au point singulier P , une pareille région du plan où toutes les caractéristiques aboutissent à P . Quand les caractéristiques d'une région nodale n'aboutissent à P que pour $t = +\infty$ (ou $t = -\infty$), nous dirons qu'elle est ouverte. Envisageons maintenant un point singulier isolé P , que nous entourerons par une courbe fermée C , ne comprenant à son intérieur aucun point singulier autre que P .

Je dis qu'il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques coupant C et aboutissant à P d'une manière telle qu'elles aient des prolongements par rapport à C .

Supposons en effet qu'il y ait un nombre infini de pareilles caractéristiques qui puissent être prolongées par rapport à C . On peut alors supposer que celles qui aboutissent à P , quand t va en croissant, sont en nombre infini. Désignons-les par $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$.

Si L_n aboutissait à P , comme nous l'avons supposé, il existerait un point P_n qui serait le dernier point où L_n rencontrerait C , quand t va en croissant, de sorte que L_n serait toujours situé à l'intérieur de C entre P_n et P .

Les points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ auraient alors au moins un point limite P' situé sur C . Il est alors évident que la caractéristique L' , passant par P' , aboutirait à P quand t va en croissant. En effet, s'il n'en était pas ainsi,

la courbe L' sortirait de C quand t va en croissant, et on en concluerait que les caractéristiques passant par des points très voisins de P' , en sortiraient aussi quand t va en croissant. Mais en prenant des valeurs convenables de ν , suffisamment grandes, on pourrait faire en sorte que les points P_ν correspondants fussent situés aussi près de P' que l'on voudra. On en conclut donc qu'il existerait des courbes L_ν qui ne resteraient pas à l'intérieur de C entre P_ν et P , ce qui est contraire à notre hypothèse.

On conclut de cela que L' doit nécessairement aboutir à P , ainsi que L_ν . En prenant alors P_ν suffisamment voisin de P' , le théorème que nous venons de démontrer met en évidence, que toute la région du plan, comprise entre L' , L_ν et C , formerait une seule région nodale, où toutes les caractéristiques s'arrêteraient en P , ce qui est contraire à notre supposition qu'il passe dans le voisinage de P' une infinité de caractéristiques L_ν qui peuvent être prolongées par rapport à C .

Nous sommes ainsi parvenus à une contradiction en supposant qu'il existe une infinité de courbes telles que L_ν . c. q. f. d.

17. A l'égard des points singuliers isolés nous distinguerons les deux classes suivantes.

Il peut arriver, qu'ayant entouré le point singulier par un cercle C de rayon aussi petit que l'on voudra, il existe toujours à l'intérieur de C une infinité de caractéristiques fermées entourant P .

Dans ce cas nous dirons que le point singulier est un *Centre*.¹

Mais il peut évidemment aussi arriver qu'il y ait des caractéristiques aboutissant au point singulier. Nous prouverons dans le théorème suivant que ce sont les deux seuls cas à distinguer.

Théorème VI. *Si le point singulier isolé P n'est pas un centre, il existe toujours au moins une caractéristique aboutissant à P . Ayant entouré un pareil point singulier par une courbe fermée C , ne comprenant à son intérieur aucun point singulier autre que P , il n'existe qu'un nombre fini de*

¹ On doit observer que cette définition diffère de celle de M. POINCARÉ. Dans le cas étudié par l'illustre géomètre le centre est en effet toujours tel que toutes les caractéristiques qui passent par des points suffisamment voisins du point singulier sont des caractéristiques fermées. Comparer les travaux cités de M. POINCARÉ.

caractéristiques coupant C et aboutissant à P de manière qu'elles puissent être prolongées par rapport à C .

En effet, soit P un point singulier qui n'est pas un centre; entourons P par une courbe fermée C , à l'intérieur de laquelle ne se trouve aucun point singulier autre que P , ni aucune caractéristique fermée entourant P . Soient C' un cercle ayant P pour centre et situé à l'intérieur de C , Q un point quelconque du contour de C' , et L la caractéristique passant par Q .

Nous voulons d'abord prouver qu'il existe au moins une caractéristique aboutissant à P .

Si L reste à l'intérieur de C , soit quand t va en croissant, soit quand t va en décroissant, le théorème IV nous fait voir qu'il existe une caractéristique aboutissant à P , car les cas 1) et 2) sont exclus, à cause de notre supposition qu'il n'existe pas à l'intérieur de C de caractéristique fermée entourant l'origine.

Désignons maintenant par ρ la distance minima de P à la partie de L comprise à l'intérieur de C .

Quand Q parcourt le contour C' , les valeurs de ρ auront une limite inférieure, laquelle nous désignerons par g . Il existe alors sur le contour de C' au moins un point Q' tel que la limite inférieure de ρ soit égale à g pour les caractéristiques passant par les points situés dans le voisinage de Q' . Si L' désigne la caractéristique passant par Q' , il ne peut pas arriver que L' sorte de C , et quand t va en croissant, et quand t va en décroissant. En effet s'il en était ainsi, le théorème I nous apprend que la distance minima de P à L' ne pourrait être plus grande que g . Or on s'assure de la même manière que cette distance minima ne peut pas être égale à g , car par un point très voisin de L' , et situé entre P et L' , passerait alors une caractéristique qui sortirait de C et, quand t va en croissant, et quand t va en décroissant. La distance minima de cette caractéristique à P serait évidemment $< g$, ce qui est impossible, g étant par supposition la limite inférieure de ρ . Or si l'une des demi-caractéristiques passant par Q' reste toujours à l'intérieur de C , le théorème IV fait voir qu'il existe toujours au moins une caractéristique aboutissant à P .

c. q. f. d.

Quant à la seconde partie du théorème, nous l'avons déjà démontrée. Supposons maintenant qu'il existe une caractéristique isolée aboutissant

à P pour $t = +\infty$. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il en existe alors aussi une, aboutissant à P pour $t = -\infty$.

En effet s'il n'y avait que la seule demi-caractéristique L aboutissant à P , on prouverait de la même manière qu'au théorème V, qu'une caractéristique passant par un point très voisin de L entre en C par un point situé d'un côté de L et sort de cette aire par un point très voisin, situé de l'autre côté de L . Mais il s'en suivrait que les caractéristiques passant d'un côté de L traverseraient une normale à cette courbe du côté positif au côté négatif, et celles situées de l'autre côté traverseraient la même normale du côté négatif au côté positif, ce qui est impossible.

Le nombre de caractéristiques aboutissant à P sera donc supérieur ou égal à deux.

18. Observons enfin que, *s'il n'existe qu'un nombre fini m de caractéristiques aboutissant à un point singulier P , le nombre m est un nombre pair, et il existe autant de caractéristiques aboutissant à P pour $t = +\infty$ que pour $t = -\infty$.*

Soient en effet L_1, L_2, \dots, L_m les caractéristiques aboutissant à P , rangées de telle manière que $(L_\nu, L_{\nu+1})$ traverse P , pour $\nu = 1, 2, \dots, m$ (L_{m+1} étant identique à L_1), et supposons, pour fixer les idées, que L_1 aboutisse à P pour $t = +\infty$.

Il s'ensuit que L_2 aboutira à P pour $t = -\infty$, que L_3 aboutira à P pour $t = +\infty$, et ainsi de suite.

Si m était un nombre impair, $L_{m+1} = L_1$ devrait donc aboutir à P pour $t = -\infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans le cas, où il n'existe pas plus de deux caractéristiques aboutissant au point singulier, celui-ci peut être assimilé à un point régulier, car il n'existe alors qu'une seule caractéristique passant par ce point, de même que pour les points réguliers. L'origine par exemple est un tel point pour l'équation

$$x^{n+2} \frac{dy}{dx} = ax^2 + by^2; \quad \begin{array}{l} a > 0; \\ b > 0; \end{array}$$

car il n'existe aucune caractéristique autre que $x = 0$, qui aboutit à l'origine.¹

¹ Voir mon mémoire *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. 1898, page 186.

Si l'on veut étudier les caractéristiques dans le voisinage d'un point singulier P , on doit donc entourer P par un contour C ne contenant à son intérieur aucun point singulier autre que P . Il faudra avant tout déterminer les courbes intégrales passant par des points de C et aboutissant à P d'une manière telle qu'elles puissent être prolongées par rapport à C . Ces courbes une fois déterminées, limiteront un certain nombre de régions nodales, à l'intérieur desquelles chaque caractéristique finit en P . Une caractéristique qui n'appartient pas à l'une de ces régions nodales, traversera toujours la courbe fermée.

S'il n'existe pas de caractéristique qui puisse être prolongée au delà de P , le point P sera un Noeud ou un Centre.

19. Nous voulons maintenant prouver le théorème suivant.

Théorème VII. *Si une demi-caractéristique L , convenablement prolongée par rapport aux points singuliers auxquels elle aboutit, est toujours située à l'intérieur d'une région finie A ne renfermant qu'un nombre fini m de points singuliers, l'un des trois cas suivants aura lieu: La caractéristique sera ou une courbe fermée, ou elle s'approchera indéfiniment d'une courbe fermée, (qui sera composée d'une caractéristique et de ses prolongements) ou enfin elle s'arrêtera en un point singulier.*

Soient en effet P_1, P_2, \dots, P_m les points singuliers. Entourons chacun de ces points P_v par un cercle C_v , à l'intérieur duquel ne se trouve d'autre point singulier que P_v , tous les cercles C_v étant en outre situés l'un à l'extérieur de l'autre, et envisageons une caractéristique L passant par un point P de A , situé à l'extérieur de tous les C_v .

Supposons de plus que L ne finisse pas en un point singulier, quand t croît vers $+\infty$. Si alors L n'a aucun des points P_v pour point limite quand t croît vers $+\infty$, le théorème se réduit au théorème II. Si L a un seul des points P_v pour point limite, le théorème se réduit ou au théorème IV ou il existe un point limite de L , situé à l'extérieur de tous les C_v ; nous traiterons ce cas tout à l'heure.

Supposons enfin que L ait P_1, P_2, \dots, P_r pour points limites. Il s'ensuit que L a un point limite Q , situé à l'extérieur de tous les C_v . Soit K la caractéristique passant par Q . On prouve alors aisément que K doit nécessairement aboutir à un point singulier, car s'il n'en était

pas ainsi, le même raisonnement qu'au théorème II mettrait en évidence que K serait une courbe fermée n'aboutissant pas à un point singulier, et L ne pourrait avoir alors pour point limite un point singulier.

Or K ne peut pas finir en un point singulier, sans que L y finisse aussi. Si K aboutit à P_v , cette courbe doit donc pouvoir être prolongée au delà de P_v . Soit K_1 le prolongement de K par rapport à C_v , il est évident que tous les points de K_1 sont des points limites de L . Si au contraire K a deux prolongements K_1 et K'_1 par rapport à C_v dont l'un sera situé à gauche, l'autre à droite de K , l'une de ces caractéristiques sera alors telle que tous ses points seront des points limites de L . En prenant cette caractéristique K_1 pour prolongement de K , on s'assure de la même manière que pour K , que K_1 ira à un point singulier P_{v_1} au delà duquel cette caractéristique pourra être prolongée par une courbe K_2 qui sortira de C_{v_1} . En continuant ainsi on reviendra toujours finalement à la première caractéristique K , car il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques aboutissant aux points singuliers de telle manière qu'elles puissent être prolongées en dehors des cercles C_v . On en conclut enfin que la courbe limite ainsi décrite est une courbe fermée, composée d'une caractéristique et de ses prolongements.

c. q. f. d.

CHAPITRE II.

Théorèmes généraux relatifs au cas où X et Y sont des fonctions holomorphes.

20. Nous supposerons toujours dans les chapitres suivants que X et Y sont des fonctions holomorphes dans le voisinage de chaque point de A , et qu'elles ne possèdent pas de diviseur commun. On sait qu'alors chaque point singulier est un point singulier isolé, et tous les théorèmes du chapitre I ont alors lieu.

Supposons que le point $x = 0$, $y = 0$ soit le point singulier que nous voulons étudier. Il est évident alors que l'on peut toujours supposer que les termes de la plus petite dimension dans les développements de X et de Y en série de TAYLOR sont de même ordre m . En effet, s'il n'en

était pas ainsi, on pourrait toujours à l'aide d'une substitution linéaire convenable faire en sorte que cela ait lieu.

Écrivons donc nos équations différentielles de la manière suivante:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_m + X_{m+1}, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_m + Y_{m+1}, \end{aligned}$$

X_m et Y_m désignant des polynomes en x et en y de dimension m , et X_{m+1} , Y_{m+1} désignant des séries de TAYLOR ne contenant que des termes de dimension plus grande que m , et convergentes pour $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \delta$. Nous supposerons en outre que δ soit suffisamment petit pour que le point $x = 0$, $y = 0$, soit le seul point singulier du système, situé à l'intérieur du cercle C , $x^2 + y^2 \leq \delta^2$.

21. Je veux d'abord démontrer le théorème suivant:

Théorème VIII. *Le système d'équations différentielles (6) possède au plus $2m$ régions nodales fermées aboutissant à l'origine.*

Envisageons en effet une caractéristique L appartenant à une région nodale fermée, et soit

$$x = x(t); \quad y = y(t);$$

l'équation de cette caractéristique.

Comme $x(t)$ s'annule pour $t = +\infty$, ainsi que pour $t = -\infty$, cette fonction atteindra nécessairement sa valeur maxima pour une certaine valeur t_1 de t , pour laquelle on aura

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

C'est à dire qu'il existe sur L un point tel que l'on ait

$$(7) \quad X_m + X_{m+1} = 0.$$

On en conclut que l'une des courbes satisfaisant à l'équation (7) traverse la région nodale en question.

Or on sait qu'il existe au plus $2m$ branches de courbes satisfaisant à

(7) et aboutissant à l'origine, ce qui met en évidence que le nombre de régions nodales fermées est égale au plus à $2m$. c. q. f. d.

On peut tirer de ce théorème la conséquence suivante:

Si L est une caractéristique aboutissant à l'origine et qui peut être prolongée au delà de l'origine, il existe nécessairement une caractéristique L' aboutissant à l'origine et telle que (L, L') soit une caractéristique traversant l'origine.

Dans le cas où X et Y sont des fonctions holomorphes, nous pouvons donc affirmer qu'une caractéristique aboutissant à un point singulier P , ou bien finit en P , ou bien traverse P .

22. Revenons maintenant au système d'équations (6); nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème IX. *Le système d'équations différentielles (6) possède au plus $2(m + 1)$ caractéristiques traversant l'origine.*

Soit en effet (LL') une pareille caractéristique, et envisageons la caractéristique K passant par un point (x_0, y_0) très voisin de L et situé entre L et L' . Un point de cette caractéristique entrera alors en C pour une certaine valeur t_1 de t et en sortira pour une autre valeur t_2 de cette variable. On en conclut que la fonction

$$ax^2 + by^2, \quad a > 0; b > 0;$$

prendra une valeur minima à l'intérieur de C , quand le point parcourt la caractéristique K . Il existe donc sur une pareille caractéristique K au moins un point satisfaisant à

$$axX_m + byY_m + axX_{m+1} + byY_{m+1} = 0,$$

et on en conclut, de la même manière qu'au théorème VIII, que le nombre de caractéristiques traversant l'origine est égal au plus à $2(m + 1)$. En général il suffit de prendre $a = b = 1$, mais pour le cas où $xX_m + yY_m$ s'annule identiquement on doit donner à ces quantités d'autres valeurs convenables.

c. q. f. d.

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il existe des cas où le nombre des caractéristiques traversant l'origine est égal à $2(m + 1)$. Cela sera par exemple le cas, si l'origine est un *Col*.

Si X et Y sont des fonctions holomorphes, un point singulier sera donc traversé par un certain nombre c de caractéristiques, qui limiteront un certain nombre n de régions nodales.

Pour l'étude des points singuliers, il nous sera d'abord nécessaire de déterminer ces deux nombres c et n .

Si $c = 0$, chaque caractéristique qui aboutit au point singulier s'y arrêtera. Si au contraire $n = 0$, chaque caractéristique qui aboutit au point singulier traversera ce point.

Quant aux régions nodales nous aurons à distinguer les *régions nodales fermées* des *régions nodales ouvertes*. On doit observer enfin qu'une région nodale peut être composée de plusieurs régions nodales fermées et d'un certain nombre de régions nodales ouvertes. On établit aisément à l'égard de ces régions nodales les résultats suivants:

Une région nodale fermée appartenant au point singulier P , sera limitée par une caractéristique L qui traverse un point singulier.

En effet, si L ne traverse aucun point singulier, cette courbe doit finir en P pour $t = +\infty$, ainsi que pour $t = -\infty$, et les courbes voisines y finissant aussi, il est évident que L serait situé à l'intérieur de la région nodale fermée.

En général les demi-caractéristiques L_+ et L_- dont L est composé traverseront toutes les deux P . Mais si l'une d'entre elles, par exemple L_+ , finit en P , L traversera nécessairement P ou un autre point singulier P_1 , et on aura alors une région nodale, limitée par L_+ et située à l'extérieur de la région nodale fermée que nous avons envisagée. Cette nouvelle région nodale peut évidemment être ou une région nodale fermée ou une région nodale ouverte.

On établit de la même manière le résultat suivant:

Une caractéristique, limitant une région nodale ouverte appartenant à P , traversera toujours un point singulier.

En effet il est évident qu'une pareille caractéristique sera ou une courbe intégrale qui traverse P , ou une caractéristique limitant une région nodale fermée.

23. Nous voulons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème X. *Une caractéristique du système d'équations différentielles (6), aboutissant à l'origine, sera une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine, ou bien elle aura à l'origine une tangente déterminée satisfaisant à l'équation¹*

$$(8) \quad xY_m - yX_m = 0.$$

Deux cas seront ici à distinguer, suivant que le membre gauche de l'équation (8) s'annule identiquement ou non.

Dans le second cas, les seules tangentes à l'origine possibles seront données par l'équation (8). Dans le premier cas au contraire, à chaque demi-droite tirée de l'origine correspond en général une et une seule caractéristique qui parvient à l'origine de telle manière qu'elle y est tangente à cette demi-droite.

1) Supposons d'abord que l'équation (8) ne soit pas identiquement satisfaite et faisons la substitution

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta;$$

On obtient alors

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_1} &= \rho [\cos \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{X}(\rho, \cos \theta, \sin \theta)], \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \cos \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{Y}(\rho, \cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

où \bar{X} et \bar{Y} sont des fonctions développables en séries de TAYLOR pour tout système de valeurs ρ, θ , telles que

$$0 \leq \rho \leq \delta, \quad -\infty < \theta < +\infty,$$

et où t_1 désigne une variable auxiliaire telle que $\frac{dt_1}{dt} = \rho^{m-1}$.

Soit maintenant L une caractéristique du système (6) aboutissant à l'origine, quand t tend vers $+\infty$, on peut alors toujours déterminer un nombre positif m tel que le point, parcourant la courbe L , reste à l'intérieur de C , tant que $t > m$.

¹ J'ai donné une démonstration de ce théorème dans le dernier de mes mémoires: *Sur les points singuliers des équations différentielles.* Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. 1898.

A la courbe L du plan des x, y correspond alors une caractéristique L_1 du plan des ρ, θ , satisfaisant aux équations (9), et telle que L_1 reste toujours entre les deux droites

$$\rho = 0, \quad \text{et} \quad \rho = \delta,$$

tant que $t_1 > m_1$, où m_1 est la valeur de t_1 correspondant à la valeur m de t . Observons de plus que la première des équations (9) nous montre que $t_1 = \infty$, quand $\rho = 0$; d'où l'on conclut que t_1 tend vers l'infini en même temps que t .

Donc t_1 tendant vers l'infini, L_1 tendra vers un ou plusieurs points limites. La seconde hypothèse n'est pas admissible. En effet, supposons que les points $\rho = 0; \theta = a$; et $\rho = 0; \theta = b > a$; soient de tels points limites de L_1 , et envisageons un point $\rho = 0; \theta = \alpha$; de l'intervalle $a \dots b$ qui ne soit pas un point singulier. Supposons pour fixer les idées que

$$\cos \alpha Y_m(\cos \alpha, \sin \alpha) - \sin \alpha X_m(\cos \alpha, \sin \alpha) > 0$$

et assujettissons en outre la quantité δ à la condition

$$\frac{d\theta}{dt_1} > 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \alpha, \quad \text{tant que} \quad |\rho| \leq \delta.$$

L'inégalité $\frac{d\theta}{dt_1} > 0$ nous apprend alors que la courbe L_1 ne peut entre les droites $\rho = \delta$ et $\rho = 0$, traverser la droite $\theta = \alpha$ plus d'une fois, car elle doit toujours traverser cette droite du côté du plan des ρ, θ , où $\theta < \alpha$ au côté où $\theta > \alpha$, quand t_1 va en croissant, et les deux points a, b ne peuvent donc pas être des points limites de L_1 .

Il y a donc un seul point limite qui est ou bien l'infini, ou bien un point singulier $\rho = 0, \theta = \beta$.

Dans le premier cas L sera une spirale, dans le second L aboutira à l'origine avec la tangente déterminée

$$y \cos \beta - x \sin \beta = 0,$$

satisfaisant à l'équation (8).

2) Si au contraire l'équation (8) est identiquement satisfaite, on aura

$$xY_m = yX_m = xyQ_{m-1},$$

Q_{m-1} désignant un polynome en x et en y de dimension $m - 1$.

La substitution

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta;$$

nous donne alors

$$(g') \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_1} &= Q_{m-1}(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{X}(\rho, \cos \theta, \sin \theta), \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \rho^r [Z_{m+r+2}(\cos \theta, \sin \theta) + \rho \bar{Y}(\rho, \cos \theta, \sin \theta)], \end{aligned} \quad r \geq 0,$$

Z_{m+r+2} désignant un polynome en $\cos \theta, \sin \theta$ de dimension $m + r + 2$, \bar{X} et \bar{Y} désignant des fonctions développables en séries de TAYLOR pour $0 \leq \rho \leq \delta$; $-\infty < \theta < +\infty$; et t_1 étant une variable auxiliaire telle que $\frac{dt_1}{dt} = \rho^m$.

Soit $\theta = \alpha, \rho = 0$, un point régulier de ce système, il existe une caractéristique et une seule passant par le point $\theta = \alpha, \rho = 0$. Si $Q_{m-1}(\cos \alpha, \sin \alpha) \neq 0$, on en conclut qu'il existe une caractéristique et une seule du système (6) aboutissant à l'origine avec la tangente déterminée

$$x = \rho \cos \alpha; \quad y = \rho \sin \alpha; \quad \rho > 0,$$

Désignons maintenant par L' et L'' les deux caractéristiques du système (g') passant par les points $\rho = 0, \theta = \alpha$, et $\rho = 0, \theta = \alpha + 2\pi$.

A une caractéristique L du système (6), aboutissant à l'origine, correspond alors une caractéristique L_1 du système (g') qui sera, pour des valeurs suffisamment grandes de t , située entre L', L'' , et les deux droites $\rho = 0, \rho = \delta$.

Quant t croît vers l'infini, t_1 tendra vers une limite déterminée, finie ou infinie.

Si cette limite est une quantité finie T , L_1 tendra vers un point régulier $\rho = 0, \theta = \beta$, et on en conclut que L aboutira à l'origine avec la tangente déterminée

$$y \cos \beta - x \sin \beta = 0.$$

Si la limite de t_1 est infinie, L_1 doit aboutir à un point singulier $\rho = 0, \theta = \beta$, car autrement elle tendrait vers plusieurs points limites situés entre L' et L'' , et on s'assure aussi aisément que dans le premier cas, que cela est impossible.

On en conclut enfin que L aboutira à l'origine avec la tangente déterminée

$$y \cos \beta - x \sin \beta = 0.$$

24. Le théorème X étant ainsi démontré, nous en tirons le corollaire suivant :

Corollaire. *S'il existe une caractéristique L du système (6) aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, toute caractéristique, aboutissant à l'origine, y aura en ce point une tangente déterminée.*

En effet, s'il existait une caractéristique qui fut une spirale, cette spirale rencontrerait nécessairement la courbe L à l'intérieur de C , ce qui est impossible à cause de notre supposition que l'origine est le seul point singulier situé à l'intérieur de C .

25. Supposons maintenant qu'il existe une caractéristique L qui soit une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine. Il s'ensuit que l'identité (8) n'est pas satisfaite. Le système (9) possède alors une caractéristique tendant vers l'infini de telle manière que

$$\rho = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \infty.$$

Soit alors $\rho = 0$, $\theta = \alpha$, un point régulier du système (9), et supposons pour fixer les idées que

$$\cos \alpha Y_m(\cos \alpha, \sin \alpha) - \sin \alpha X_m(\cos \alpha, \sin \alpha) > 0,$$

et que l'on ait choisi δ de telle manière que

$$\frac{d\theta}{dt_1} > 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \alpha, \quad \text{tant que} \quad \rho \leq \delta.$$

On peut alors déterminer un nombre n suffisamment grand pour que le point où la caractéristique correspondante L_1 du plan des ρ, θ rencontre la droite $\theta = \alpha + 2n\pi$ soit situé entre les droites $\rho = 0$ et $\rho = \delta$ du plan des ρ, θ .

Envisageons maintenant une caractéristique passant par un point quelconque de la droite $\theta = \alpha + 2n\pi$, situé entre L_1 et la droite $\rho = 0$. Quand t_1 va en croissant, cette caractéristique sera toujours située entre L_1 et la droite $\rho = 0$, et ne pouvant pas rencontrer l'une des droites $\theta = \alpha + 2(n + \nu)\pi$ plus d'une fois, il est évident qu'une pareille carac-

téristique, qui ne peut pas aboutir à un point singulier situé sur la droite $\rho = 0$, à cause du corollaire que nous venons de démontrer, doit nécessairement s'éloigner vers l'infini.

Comme on a $\rho = 0$ pour $\theta = \infty$ sur cette caractéristique, on en conclut enfin que la caractéristique correspondante du plan des x, y , sera une spirale se rapprochant de l'origine.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

S'il existe une caractéristique qui est une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine, on peut entourer l'origine par un cercle C de rayon suffisamment petit pour qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de C , soit toujours une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Nous dirons dans ce cas avec M. POINCARÉ que l'origine est un *Foyer*.

On conclut enfin que chaque branche d'une caractéristique traversant l'origine sera une courbe qui aboutit à l'origine avec une tangente déterminée.

26. Rappelons enfin une notion importante introduite par M. POINCARÉ,¹ à savoir celle de *l'indice* d'une courbe fermée et d'un point singulier.

Supposons qu'un point parcourt une courbe fermée dans le sens positif, et considérons les variations de signe de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$, et k le nombre de fois que l'expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h - k}{2},$$

le nombre i s'appelle, d'après M. POINCARÉ, *l'indice* de la courbe fermée.

Par indice d'un point singulier on entend alors l'indice d'une courbe fermée infiniment petite entourant le point singulier,

et on établit aisément le théorème suivant:

L'indice d'une courbe fermée est égale à la somme des indices de tous les points singuliers situés à l'intérieur de la courbe fermée.

¹ Voir POINCARÉ: *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Journal de Math., 1881, pages 400 et suivantes.

A l'égard de l'indice d'un point singulier nous démontrerons ici un théorème important:

Théorème XI. *Soit c le nombre de caractéristiques traversant un point singulier, n_f le nombre de régions nodales fermées appartenant à ce point, et i son indice, on aura toujours*

$$(10) \quad c - n_f = 2(i + 1).$$

Nous commencerons par établir que l'indice d'un point singulier n'est pas changé, si l'on effectue sur les variables une substitution linéaire à déterminant positif.

27. Envisageons à cet effet le système d'équations différentielles

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X, \\ \frac{dy}{dt} &= Y, \end{aligned}$$

où X et Y sont des fonctions holomorphes de x et de y , s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$, et faisons la substitution linéaire

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y, \\ y_1 &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \quad \text{où } \alpha\delta - \beta\gamma > 0.$$

Je dis que l'indice d'une courbe fermée C ne sera pas changé par cette substitution. Après la substitution nous devons en effet chercher le nombre de fois que la fonction

$$\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y}$$

saute de $-\infty$ à $+\infty$, ainsi que le nombre de fois que cette fonction saute de $+\infty$ à $-\infty$, quand le point x, y parcourt le contour C .

Soit i l'indice de l'expression $\frac{Y}{X}$ sur C , et i' l'indice de l'expression $\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y}$ sur le même contour.

Dans le voisinage des points où $\alpha X + \beta Y = 0$, on aura sensiblement

$$\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y} = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta^2 \left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{Y}{X} \right]}.$$

Nous n'avons donc à étudier que la manière dont la fonction

$$-\frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{Y}{X}}$$

saute par l'infini.

Soient P_1, P_2, \dots, P_n les points consécutifs du contour C , où $\frac{Y}{X}$ passe par l'infini, et désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, des quantités qui sont égales à 1, si $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$, mais égales à -1 , si l'expression en question saute de $+\infty$ à $-\infty$.

Envisageons deux points consécutifs P_ν et $P_{\nu+1}$, et désignons par i'_ν la valeur qu'on obtient pour l'indice de la fonction $\frac{\gamma X + \delta Y}{\alpha X + \beta Y}$, en parcourant la partie de C , située entre P_ν et $P_{\nu+1}$. L'on devra distinguer les cas suivants:

Si $\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} = 0$, l'expression $\frac{Y}{X}$, ainsi que $\frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{Y}{X}}$, aura le même signe

pour des points de C très voisins de P_ν et $P_{\nu+1}$ (et situés entre P_ν et $P_{\nu+1}$).

La fonction $-\frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{Y}{X}}$ ne pouvant changer de signe qu'en passant par ∞ ,

doit donc sauter autant de fois de $-\infty$ à $+\infty$ que de $+\infty$ à $-\infty$, et on en conclut que $i'_\nu = 0$.

Si $\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} = 2$, l'expression $\frac{Y}{X}$, ainsi que $\frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{Y}{X}}$, aura le signe $+$

pour des points de C très voisins de P_ν et le signe $-$ pour des points très voisins de $P_{\nu+1}$. En parcourant la partie de C , située entre P_ν et

$P_{\nu+1}$, la fonction $-\frac{1}{\frac{a}{\beta} + \frac{Y}{X}}$ sautera une fois plus de $-\infty$ à $+\infty$ que de

$+\infty$ à $-\infty$, ce qui nous donne $2i'_\nu = 1$.

Si $\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} = -2$, on prouve de même que $2i'_\nu = -1$.

On aura donc toujours

$$\frac{\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}}{2} = 2i'_\nu.$$

Or on a évidemment

$$2i = \sum_{\nu=1}^n \frac{\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}}{2}; \quad (\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1)$$

et

$$2i' = \sum_{\nu=1}^n 2i'_\nu,$$

ce qui nous permet d'affirmer que $i' = i$.

Le nombre i est donc invariant pour une substitution linéaire à déterminant positif.

Ce point étant établi, nous pouvons toujours supposer que Y n'est pas divisible par x , ni X par y , car s'il en était autrement, on pourrait au moyen d'une substitution linéaire convenable faire que cela ait lieu.

28. Afin d'établir la relation (10), nous envisagerons l'indice i sous un point de vue nouveau.

Posons à cet effet

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta;$$

On obtient alors

$$(12) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \rho \cdot \frac{xX + yY}{xY - yX}.$$

Entourons maintenant l'origine par un cercle $\rho = \delta$, et supposons qu'un point parcourt le contour de ce cercle dans le sens positif (c'est à dire de telle manière que θ aille en croissant). Soit h le nombre de fois que l'expression $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passe par zéro, en passant du signe — au signe +, et soit k le nombre de fois que cette expression passe par zéro, en passant du signe + au signe —; je dis que

$$2(i + 1) = h - k.$$

Chaque fois que le second membre de l'équation (12) passe par zéro, on aura

$$\frac{Y}{x} = \frac{-X}{y} = \frac{xY - yX}{x^2 + y^2},$$

en effet, à cause des suppositions faites sur X et Y , la fonction $xX + yY$ ne s'annule, ni pour $x = 0$, ni pour $y = 0$

L'expression $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passera donc par zéro exactement de la même manière que l'expression

$$-\frac{xX + yY}{yX},$$

c'est à dire de la même manière que

$$-\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}.$$

Désignons par h' le nombre de fois que cette dernière expression saute de $-\infty$ à $+\infty$, et par k' le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. On aura évidemment

$$h - k = -(h' - k').$$

Mais $\frac{h' - k'}{2}$ est l'indice de la fonction $-\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}$, qui sera égal à $-i - 1$.

On aura donc

$$h - k = 2(i + 1).$$

29. Soit maintenant (L_1, L'_1) (voir Fig. VI) une caractéristique traversant l'origine, et soit P_c le point où L_1 sort du cercle $\rho = \delta$, et P'_c le

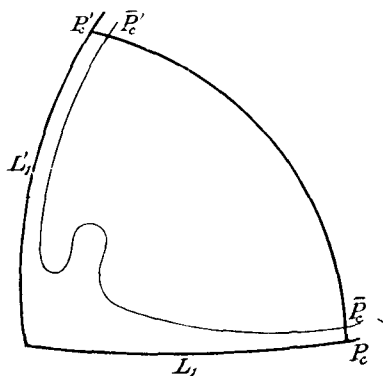


Fig. VI.

point où L'_1 sort du même cercle. Supposons pour fixer les idées qu'on parcourre l'arc de cercle $P_c P'_c$ dans le sens positif, en allant de P_c à P'_c , et envisageons une caractéristique L_c passant par un point \bar{P}_c très voisin de P_c . L_c entrera donc dans le cercle par \bar{P}_c et en sortira par un point

\bar{P}'_c très voisin de P'_c . La distance ρ de l'origine aura donc un certain nombre de valeurs minima, quand on parcourt L_c de \bar{P}_c à \bar{P}'_c , et il est évident que ρ passera par une valeur minima une fois de plus que par une valeur maxima, si l'on parcourt L_c de \bar{P}_c à \bar{P}'_c .

La valeur de $h - k$ sur L_c sera donc égale à $+ 1$, et on en conclut que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $\bar{P}_c\bar{P}'_c$ sera aussi égale à $+ 1$. L'arc de cercle en question et la caractéristique L_c forment en effet une courbe fermée à l'intérieur de laquelle il n'existe pas de point, où les deux fonctions $xX + yY$ et $xY - yX$ s'annulent simultanément, et le théorème de la page 38 nous apprend que l'indice de l'expression $\frac{xY - yX}{xX + yY}$ sur ce contour fermé est alors égal à zéro.

On en conclut enfin que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P_cP'_c$ est égal à $+ 1$.

30. Envisageons maintenant une région nodale ouverte, et soit P_n le point par où on entre dans cette région, si on parcourt le contour du cercle $\rho = \delta$ dans le sens positif, et P'_n le point par où l'on sort de cette région nodale.

Soit P_1 le premier point sur l'arc de cercle $P_nP'_n$ où la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passe par zéro en changeant de signe, et supposons pour fixer les idées qu'elle passe en ce point de $+$ à $-$. Soit enfin L la caractéristique passant par P_1 . Les deux demi-caractéristiques seront alors situées à l'intérieur du cercle dans le voisinage de P_1 , car ρ aura en P_1 une valeur maxima. Or l'une de ces demi-caractéristiques sortira nécessairement du cercle $\rho = \delta$, autrement L appartiendrait à une région nodale fermée. Soit P'_1 le point où L sort du cercle. Quand un point parcourt la caractéristique L de P_1 à P'_1 , sa distance de l'origine passera nécessairement par un certain nombre de valeurs minima, ce qui met en évidence que P'_1 est situé entre P_1 et P'_n , et, comme le point commence par s'approcher de l'origine et finit par s'en éloigner, il passe par une valeur minima une fois de plus que par une valeur maxima. On en conclut que la valeur de $h - k$ que l'on obtient en parcourant L entre P_1 et P'_1 est égal à $+ 1$. Elle sera donc égale à $+ 1$ entre P_1 et P'_1 sur le cercle, et, comme la valeur de $h - k$ est égale à $- 1$ en passant par P_1 , on en conclut que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P_nP'_1$ est égale à zéro.

Soit maintenant P_2 le premier point sur l'arc de cercle $P'_1P'_n$ où la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ passe par zéro en changeant de signe, et supposons dans ce cas qu'elle passe en ce point de $-$ à $+$. Soit enfin L la caractéristique passant par P_2 . Les deux demi-caractéristiques passant par P_2 seront donc situées à l'extérieur du cercle dans le voisinage de P_2 , mais l'une d'entre elles aboutira à l'origine, d'où l'on conclut que l'une d'entre elles entrera à l'intérieur du cercle par un point P'_2 . On prouve alors de la même manière que ci-dessus que P'_2 est situé entre P_2 et P'_n , et que la valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P'_1P'_2$ est égale à zéro.

L'arc de cercle $P_nP'_n$ sera de cette manière divisé en plusieurs parties telles que la valeur de $h - k$ sur chacune de ces parties sera égale à zéro. La valeur de $h - k$ sur l'arc de cercle $P_nP'_n$ sera alors égale à zéro.

31. Envisageons enfin une région nodale fermée, et soit P_{n_f} le point par où un point qui parcourant le cercle $\rho = \delta$ dans le sens positif entre en cette région nodale, et soit P'_{n_f} le point par où il en sort.

Il existe alors certainement une courbe intégrale L , appartenant à cette région nodale fermée, qui est tangente au cercle $\rho = \delta$ et qui ne sort jamais de ce cercle. Soit P le point où L rencontre le cercle $\rho = \delta$. On démontre alors, de la même manière que pour une région nodale ouverte, que la valeur de $h - k$ qu'on obtient en parcourant l'arc de cercle de P_{n_f} jusqu'à un point très voisin de P sera égale à zéro. En parcourant l'arc de cercle situé entre un point très voisin de P (situé entre P et P'_{n_f}) et P'_{n_f} , $h - k$ aura aussi la valeur zéro. En parcourant l'arc de cercle infiniment petit passant par P , la valeur de $h - k$ sera égale à -1 , ce qui met en évidence que la valeur de $h - k$ sur $P_{n_f}P'_{n_f}$ sera égale à -1 .

32. Nous sommes donc parvenus au résultat suivant.

La valeur de $h - k$ sera égale à $+1$, 0 , ou -1 , suivant que l'arc de cercle correspondant est limité par deux branches de caractéristiques traversant l'origine, ou par les deux caractéristiques limitant une région nodale ouverte ou enfin par la caractéristique limitant une région nodale fermée.

En parcourant tout le cercle, on aura donc comme conséquence immédiate que $h - k = c - n_f$, ou enfin que

$$c - n_f = 2(i + 1). \quad \text{c. q. f. d}$$

CHAPITRE III.

Les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 1.

33. Nous traiterons d'abord l'équation différentielle

$$(13) \quad x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y),$$

\mathfrak{P} désignant une série de TAYLOR ne contenant que des termes d'une dimension ≥ 2 , et a une quantité différente de zéro.

Cette équation joue un rôle capital dans les recherches qui suivent. On peut en effet réduire l'étude d'un point singulier quelconque à celle de diverses équations de la forme (13).

Nous voulons donc étudier le point $x = 0, y = 0$, de cette dernière équation.¹

Observons d'abord qu'il n'existe pas de région nodale fermée appartenant à l'origine de cette équation, car, sur une courbe fermée d'une pareille région nodale, on aurait un point où $\frac{dx}{dy} = 0$, c'est à dire où $x = 0$, ce qui est impossible, aucune caractéristique ne pouvant couper la caractéristique $x = 0$, dans le voisinage de l'origine en un point autre que le point $x = 0, y = 0$.

L'équation (10) nous donne dans ce cas

$$c = 2(i + 1),$$

et le nombre de caractéristiques traversant l'origine sera ainsi déterminé.

Pour étudier de plus près la nature de ces caractéristiques, nous entourons l'origine par un cercle C de rayon suffisamment petit δ pour qu'il n'existe à l'intérieur de C aucun point singulier autre que l'origine.

¹ Comparer à ce sujet mon mémoire: *Sur les points singuliers des équations différentielles*. Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. Febr. 9, 1898, où j'ai donné une méthode pour calculer par des approximations successives les caractéristiques de cette équation passant par l'origine.

L'expression $\frac{dy}{dx}$ ne devenant jamais infinie à l'intérieur de C , excepté sur la caractéristique $x = 0$, il est évident que la partie d'une caractéristique quelconque, qui est située à l'intérieur de C , peut être décrite de telle manière que $|x|$ aille toujours en décroissant.

34. Il faut alors distinguer les quatre cas suivants:

1) $a > 0$; $m =$ nombre pair.

Déterminons alors $\delta_1 < \delta$ de telle manière que

$$\begin{aligned} a\delta_1 + \mathfrak{F}(0, \delta_1) &> 0, \\ -a\delta_1 + \mathfrak{F}(0, -\delta_1) &< 0. \end{aligned}$$

On peut alors déterminer un nombre positif ε suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned} a\delta_1 + bx + \mathfrak{F}(x, \delta_1) &> 0, \\ -a\delta_1 + bx + \mathfrak{F}(x, \delta_1) &< 0, \end{aligned} \quad \text{pour } |x| \leq \varepsilon.$$

Envisageons enfin le rectangle R , formé par les quatre droites

$$y = \delta_1; \quad x = 0; \quad y = -\delta_1; \quad x = \varepsilon.$$

On sait qu'il n'y a pas de point singulier à l'intérieur de R .

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant alors partout positive sur le côté $y = \delta_1$ de ce rectangle, on en conclut qu'une caractéristique, passant par un point quelconque de ce côté, entrera à l'intérieur de R , quand x va en décroissant.

De la même manière on s'assure qu'une caractéristique, passant par un point quelconque du côté $y = -\delta_1$, entrera à l'intérieur de R , quand x va en décroissant.

Une caractéristique L , passant par un point quelconque de R , ne peut donc pas sortir de R , quand x va en décroissant, car elle ne peut pas traverser ni le côté $y = \delta_1$, ni le côté $y = -\delta_1$, ni enfin le côté $x = 0$ qui est une caractéristique. On en conclut que L doit aboutir à l'origine, car autrement il existerait une caractéristique fermée située à l'intérieur de R , ce qui est contraire au théorème III.

Le rectangle R en question constitue donc une *région nodale*.

Envisageons maintenant le rectangle R_1 , limité par les quatre droites

$$y = \delta_1; \quad x = 0; \quad y = -\delta_1; \quad x = -\varepsilon.$$

Une caractéristique passant par un point quelconque du côté $y = \delta_1$ de ce rectangle sortira alors de R_1 quand $|x|$ va en décroissant, car en un tel point on a $\frac{dy}{dx} > 0$. On s'assure aussi de la même manière qu'une caractéristique passant par un point du côté opposé, sortira aussi de R_1 , quand $|x|$ va en décroissant.

La caractéristique L , passant par un point P , situé sur la droite $y = \delta_1$, doit donc, quand $|x|$ va en croissant, traverser le côté $x = -\varepsilon$ en un point P' . Si P tend vers le point $x = 0, y = \delta_1$, P' tendra vers un point déterminé S , situé sur le côté $x = -\varepsilon$, et on prouve aisément que la caractéristique K , passant par S , aboutit aussi à l'origine, et qu'elle sera le prolongement de l'axe des y positifs.

A gauche de l'axe des y , il existe donc au moins une caractéristique aboutissant à l'origine. Je veux maintenant prouver qu'il n'existe certainement pas plus d'une seule caractéristique aboutissant à l'origine et située à gauche de l'axe des y .

Supposons en effet qu'il en existe deux, et soient

$$y = y_1(x); \quad y = y_2(x);$$

leurs équations (on sait en effet qu'à chaque valeur de x correspond une seule valeur de y , $\frac{dy}{dx}$ étant toujours fini). On aura alors

$$x^m \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = (y_2 - y_1)[a + \chi(x)],$$

où

$$\chi(x) = \frac{\mathfrak{P}(x, y_2) - \mathfrak{P}(x, y_1)}{y_2 - y_1} = \mathfrak{P}_1(x, y_1, y_2),$$

\mathfrak{P}_1 désignant une série de TAYLOR en x, y_1, y_2 , et qui s'annule pour $x = 0, y_1 = 0, y_2 = 0$. On aura donc $\chi(0) = 0$.

Cela posé, on peut déterminer un nombre positif σ suffisamment petit pour que

$$|\chi(x)| < \frac{a}{2}, \quad \text{pour } |x| \leq \sigma.$$

On en conclut alors que

$$y_2 - y_1 = (\hat{y}_2 - \hat{y}_1) e^{\int_{x_0}^x \frac{a+\chi(x)}{x^m} dx},$$

\hat{y}_1 et \hat{y}_2 désignant les valeurs $y_1(x_0)$ et $y_2(x_0)$, et x_0 une valeur négative de x dont la valeur absolue est $< \sigma$.

Pour les valeurs de x situées entre x_0 et 0 on aura alors

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &> |\hat{y}_2 - \hat{y}_1| e^{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{a}{x^m} dx} \\ &> |\hat{y}_2 - \hat{y}_1|, \end{aligned}$$

ce qui est contraire à notre supposition que ces caractéristiques vont toutes deux à l'origine.

Il n'existe donc qu'une seule caractéristique aboutissant à l'origine et située à gauche de l'axe des y .

Les nombres n et c seront donc dans ce cas

$$c = 2; \quad n = 1;$$

et l'axe des y positifs ainsi que l'axe des y négatifs pourra être prolongé au delà de l'origine, à gauche de l'axe des y (voir Fig. VII).

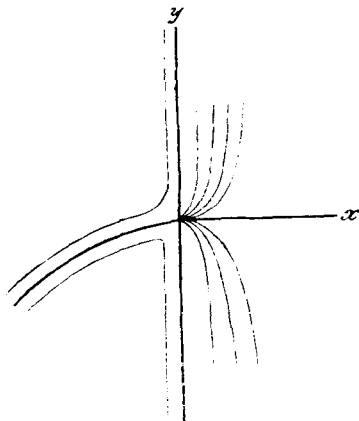


Fig. VII.

2) $a < 0$; $m =$ nombre pair.

Ce cas se réduit au précédent par la substitution $x = -\xi$, ce qui nous donne

$$c = 2; \quad n = 1;$$

et l'axe des y positifs, ainsi que l'axe des y négatifs, pourra être prolongé, à droite de l'axe des y , au delà de l'origine.

3) $a > 0$; $m =$ nombre impair.

Pour la partie du plan, située à droite de l'axe des y , on démontre qu'elle forme une *région nodale* de la même manière qu'au cas (1). Au moyen de la substitution $x = -\xi$, on s'assure que la partie du plan, située à gauche de cet axe, forme aussi une *région nodale*. On aura donc

$$c = 0; \quad n = 1.$$

Dans ce cas l'origine est un *Nœud*.

4) $a < 0$; $m =$ nombre impair.

Pour $x > 0$ la discussion est la même que pour le cas 2), et pour $x < 0$ elle est la même que pour le cas 1). On en conclut que

$$c = 4; \quad n = 0.$$

L'origine dans ce cas sera donc un *Col*.

35. Envisageons maintenant un système d'équations différentielles

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y + X_2, \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x + \delta y + Y_2, \end{aligned}$$

X_2 et Y_2 désignant des séries de TAYLOR dont tous les termes sont de dimension > 1 , et désignons par μ_1 et μ_2 les racines de l'équation

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \alpha - \mu & \beta \\ \gamma & \delta - \mu \end{vmatrix} = 0$$

36. Les différents cas qui peuvent se présenter sont les suivants:

I. μ_1 et μ_2 sont réels et de même signe.

Pour fixer les idées nous supposerons que μ_1 et μ_2 soient tous les deux > 0 .

Au moyen d'une substitution linéaire convenable

$$\xi = ax + by; \quad \eta = cx + dy;$$

on obtient alors

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu_1 \xi + \bar{X}_2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu_2 \eta + \bar{Y}_2, \end{aligned}$$

\bar{X}_2 et \bar{Y}_2 désignant des séries de TAYLOR dont tous les termes sont de dimension ≥ 2 .

On aura donc

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \eta^2 + \xi \bar{X}_2 + \eta \bar{Y}_2,$$

ce qui met en évidence que

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} > 0, \quad \text{pour } |\xi| < \delta, \quad |\eta| < \delta,$$

quand δ est un nombre positif suffisamment petit.

Une caractéristique, passant par un point du cercle $\xi^2 + \eta^2 = \delta^2$, entrera donc à l'intérieur de ce cercle, quand t ira en décroissant, et n'en pourra donc plus sortir, quand t ira en décroissant. Mais à l'intérieur de ce cercle il n'existe pas de caractéristique fermée, car sur une pareille caractéristique $\xi^2 + \eta^2$ aurait une valeur maxima ce qui conduirait à $\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = 0$. Il est donc évident que la caractéristique aboutira à l'origine, qui dans ce cas sera un Noeud.

Le seul cas où on ne parvient pas à un système de la forme (16) est celui où μ_1 et μ_2 sont égaux, et alors au moyen d'une substitution linéaire convenable on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu_1 \xi + \bar{X}_2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda \xi + \mu_1 \eta + \bar{Y}_2. \end{aligned}$$

Soit maintenant x une quantité positive suffisamment grande pour que

$$x\mu_1 \xi^2 + \lambda \xi \eta + \mu_1 \eta^2$$

soit une forme quadratique définie, on aura

$$x\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} > 0 \text{ tant que } |\xi| \leq \delta, |\eta| \leq \delta,$$

δ désignant une quantité positive suffisamment petite.

Soit

$$x\xi^2 + \eta^2 = \delta_1^2$$

une ellipse suffisamment voisine de l'origine; on prouve, de la même manière que ci-dessus, que par chaque point de cette ellipse passe une caractéristique aboutissant à l'origine.

Dans ce cas on aura donc toujours

$$c = 0; \quad n = 1; \quad n_f = 0;$$

37. II. μ_1 et μ_2 sont réels et de signes contraires.

Posons alors

$$\mu_1 = a > 0; \quad \mu_2 = -b < 0;$$

Une substitution linéaire convenable nous donnera alors

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + \bar{X}_2, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -b\eta + \bar{Y}_2, \end{aligned}$$

où X_2 et Y_2 ne contiennent que des termes au moins de la seconde dimension.

La substitution

$$\eta = \xi\eta_1$$

nous donnera alors

$$\xi \frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{-(b+a)\eta_1 + \xi\varphi}{a + \xi\psi},$$

φ et ψ désignant des fonctions holomorphes. Les développements du n° 34 nous apprennent alors que cette dernière équation possède exactement quatre branches de caractéristiques aboutissant à l'origine. Deux de ces branches seront données par $\xi = 0$, à laquelle correspond le point $\xi = 0, \eta = 0$ des équations (17).

Il existe donc deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques des équations (17), qui aboutissent à l'origine et y ont pour tangente $\eta = 0$.

On prouve de la même manière qu'il existe deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques du système (17) aboutissant à l'origine et ayant $\xi = 0$ pour tangente.

Mais toutes les caractéristiques du système (17) qui aboutissent à l'origine devant y avoir une tangente déterminée, aussitôt qu'il en existe une seule aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, on voit que les caractéristiques aboutissant à l'origine doivent y avoir des tangentes dont la direction est déterminée par l'équation

$$\xi\eta = 0.$$

On en conclut enfin qu'il n'existe pas plus de quatre branches de caractéristiques du système (17) qui aboutissent à l'origine.

On aura donc toujours dans ce cas

$$c = 4; \quad n = 0;$$

38. III. $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 i; \mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2 i.$

Pour fixer les idées nous supposons en outre que $\lambda_1 \geq 0.$

Une substitution linéaire réelle convenable nous donnera alors

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi - \lambda_2 \eta + \bar{X}_2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \xi + \lambda_1 \eta + \bar{Y}_2.$$

L'équation déterminant les tangentes possibles à l'origine sera

$$\lambda_2[\xi^2 + \eta^2] = 0$$

d'où l'on conclut que l'origine dans ce cas est un Foyer ou un Centre.

Si $\lambda_1 > 0,$ on aura

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_1 \eta^2 + \xi \bar{X}_2 + \eta \bar{Y}_2,$$

c'est à dire

$$\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} > 0; \quad \text{pour } |\xi| < \delta, \quad |\eta| < \delta,$$

si δ est une valeur positive suffisamment petite; on prouve alors, comme au cas I, qu'une caractéristique, passant par un point suffisamment voisin de l'origine, aboutira à l'origine.

On aura donc dans ce cas

$$c = 0; \quad n = 1; \quad n_f = 0;$$

et l'origine sera un Foyer.

Pour le cas où $\lambda_1 = 0$, cas qui sera traité dans le chapitre suivant, nous renvoyons le lecteur à l'intéressante discussion de M. POINCARÉ.¹

39. IV. $\mu_2 = 0$, mais μ_1 est différent de zéro.

Au moyen d'une substitution linéaire convenable

$$x = ax_1 + by_1; \quad y = cx_1 + dy_1;$$

on obtient alors

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= X_{q_1} + X_{q_1+1}, \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= y_1 - k_1 x_1 + Y_2, \end{aligned}$$

X_{q_1+1} et Y_2 désignant des séries de TAYLOR ne contenant que des termes de dimensions plus grandes que q_1 et 1, et X_{q_1} un polynome de dimension $q_1 > 1$. La variable auxiliaire t_1 est liée à l'ancienne variable t par la relation $dt_1 = \mu_1 dt$. L'équation déterminant les tangentes possibles à l'origine sera alors

$$x_1(y_1 - k_1 x_1) = 0.$$

Nous prouverons d'abord qu'il existe deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques du système (18) aboutissant à l'origine et ayant $x_1 = 0$ pour tangente.

Mettons à cet effet

$$x_1 = \xi y_1$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt_1} &= -\xi[1 - k\xi + y_1\varphi] + y_1\psi, \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= y_1[1 - k\xi + y_1\chi], \end{aligned}$$

¹ Voir POINCARÉ, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Journal de Math. 1885, pages 172—193.

φ , ψ et χ désignant des séries de TAYLOR convergentes pour des valeurs suffisamment petites de ξ et de y_1 . Or pour ce système l'équation (15) devient

$$(\mu + 1)(\mu - 1) = 0$$

ce qui fait voir qu'il passe 4, et pas plus de 4, branches de caractéristiques par le point $\xi = 0$, $y_1 = 0$, dont deux sont données par l'équation $y_1 = 0$, à laquelle correspond le point $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ du système (18). Il existe donc deux, et pas plus de deux, branches de caractéristiques du système (18) aboutissant à l'origine et ayant $x_1 = 0$ pour tangente, l'une étant située au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe des x_1 .

On en conclut donc que toutes les autres caractéristiques qui aboutissent à l'origine ont la tangente déterminée

$$y_1 - k_1 x_1 = 0.$$

Posons donc

$$y_1 = (k_1 + y_2)x_1$$

ce qui donne

$$(19) \quad x_1^{q_1} \frac{dy_2}{dx_1} = \frac{y_2 - k_1 x_1 + Y_2'}{X_{q_2} + X_{q_2+1}} - x_1^{q_1-1} (k_1 + y_2),$$

X_{q_2} désignant les termes de la plus petite dimension dans le dénominateur.

Si $q_2 = 0$, cette équation se réduit à une équation pareille à celle que nous avons traitée au n° 33.

Si au contraire $q_2 > 0$, on doit observer qu'il nous suffit d'étudier les caractéristiques aboutissant à l'origine et ayant $y_2 - k_2 x_1 = 0$ pour tangente. On prouve en effet, de la même manière que ci-dessus, que l'équation (19) ne possède pas plus de deux branches de caractéristiques aboutissant à l'origine et ayant $x_1 = 0$ pour tangente, d'où l'on conclut que la droite $x_1 = 0$ est la seule caractéristique aboutissant à l'origine avec cette tangente. La substitution

$$y_2 = (k_2 + y_3)x_1$$

donnera alors une équation de la forme

$$x_1^{q_1+q_2} \frac{dy_3}{dx} = \frac{y_3 - k_2 x_1 + Y_2''}{X_{q_3} + X_{q_3+1}} - x_1^{q_1-1} \cdot \varphi,$$

où X_{q_3} désigne un polynôme de dimension q_3 et Y_2'' , X_{q_3+1} et φ des séries

de TAYLOR dont les deux premières ne contiennent que des termes des dimensions respectives ≥ 2 et $q_3 + 1$.

Si $q_3 > 0$, nous ferons la substitution

$$y_3 = (k_3 + y_4)x_1.$$

En continuant ainsi, au moyen de la substitution

$$y_{\lambda-1} = (k_{\lambda-1} + y_\lambda)x_1$$

on parviendra à l'équation

$$(19') \quad x_1^{q_1+q_2+\dots+q_{\lambda-1}} \frac{dy_\lambda}{dx_1} = \frac{y_\lambda - k_\lambda x_1 + Y_2^{(\lambda-1)}}{X_{q_\lambda} + X_{q_{\lambda+1}}} - x_1^{q_1-1} \cdot \varphi,$$

où X_{q_λ} est un polynome de dimension q_λ en x_1 et en y_λ , et φ une série de TAYLOR. Il nous suffira d'étudier les caractéristiques de cette équation aboutissant à l'origine et ayant $y_\lambda - k_\lambda x_1 = 0$ pour tangente.

Je dis qu'en prenant λ suffisamment grand, on parviendra toujours à une pareille équation (19'), où $q_\lambda = 0$.

On aura en effet

$$(20) \quad \begin{aligned} Y &= y_1 - k_1 x_1 + Y_2 = x_1 [y_2 - k_2 x_1 + Y_2'] = \dots = x_1^{\lambda-1} [y_\lambda - k_\lambda + Y_2^{\lambda-1}], \\ X &= X_{q_1} + X_{q_{1+1}} = x_1^{q_1} [X_{q_2} + X_{q_{2+1}}] = \dots = x_1^{q_1+q_2+\dots+q_{\lambda-1}} [X_{q_\lambda} + X_{q_{\lambda+1}}]. \end{aligned}$$

Mais en faisant

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = \xi, \quad \gamma x_1 + \delta y_1 = \eta,$$

les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes convenables, on aura¹

$$(21) \quad \begin{aligned} Y &= [\eta - \varphi(\xi)] e^{\mathfrak{B}(\xi, \eta)}, \\ X &= [\gamma^{q_1} + \phi_1(\xi) \gamma^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1}(\xi)] e^{\mathfrak{B}_1(\xi, \eta)}, \end{aligned}$$

$\varphi, \phi_1, \dots, \phi_{q_1}, \mathfrak{B}$ et \mathfrak{B}_1 désignant des fonctions holomorphes des variables. Soit

$$L(\xi, \eta) = \frac{\eta^{q_1} + \phi_1(\xi) \eta^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1}(\xi) - [\varphi^{q_1} + \phi_1(\xi) \varphi^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1}]}{\eta - \varphi(\xi)},$$

¹ Voir WEIERSTRASS, *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen sich beziehende Sätze*. Math. Werke, Tome II.

on aura

$$\eta^{q_1} + \phi_1(\xi)\eta^{q_1-1} + \dots + \phi_{q_1} - [\eta - \varphi(\xi)]L(\xi, \eta) = \xi^s e^{\mathfrak{B}(\xi)}$$

où $\mathfrak{B}(\xi)$ est une série de TAYLOR et s un nombre entier.

En exprimant les variables ξ, η en y_1, x_1 , les équations (20) et (21) nous apprennent que le premier membre de cette dernière équation est divisible par $x_1^{q_1-1}$. Or le second membre ne sera divisible que par x_1^s , si $\alpha + \beta k_1 \neq 0$, car on a

$$\begin{aligned} \xi &= (\alpha + \beta k_1 + \beta y_2)x_1 \\ &= (\alpha + \beta k_1)x_1 + \beta k_2 x_1^2 + \dots + \beta y_2 x_1^k. \end{aligned}$$

Après un nombre $\lambda > s + 1$ de substitutions on parviendra donc nécessairement à une équation différentielle (19') telle que X_{q_λ} soit une constante.

On distinguera alors les trois cas suivants:

I. Si l'on a $X_{q_\lambda} > 0$, $q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1} =$ nombre impair.

Il n'existe pas de caractéristique de l'équation (19') traversant l'origine, et on en conclut que le système (18) ne possède pas de caractéristique traversant l'origine.

On aura donc

$$c = 0; \quad n = 1.$$

II. Si $X_{q_\lambda} < 0$, $q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1} =$ nombre impair.

Alors il existe seulement deux caractéristiques de l'équation (19') aboutissant l'origine, si l'on ne compte pas la caractéristique $x_1 = 0$ à laquelle correspond le point $x_1 = 0, y_1 = 0$ du système (18).

Nous avons donc 4, et pas plus de 4, caractéristiques du système (18) aboutissant l'origine, ce qui nous donne

$$c = 4; \quad n = 0;$$

III. Si enfin $X_{q_\lambda} \neq 0$; $q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1} =$ nombre pair.

Il existe alors deux caractéristiques de l'équation (19') traversant l'origine. Ces deux caractéristiques correspondront évidemment à deux caractéristiques du système (18) traversant l'origine de telle sorte que l'une des branches de chacune de ces caractéristiques aboutira à l'origine et y aura $x_1 = 0$ pour tangente, tandis que l'autre y aura $y_1 - k_1 x_1 = 0$ pour tangente. Nous aurons alors

$$c = 2; \quad n = 1.$$

40. On s'assure enfin aisément que le système (18) ne possède jamais de région nodale fermée appartenant à l'origine.

En effet, s'il y avait une pareille région nodale fermée, il existerait toujours une infinité de caractéristiques aboutissant à l'origine avec la tangente déterminée $y_1 - k_1 x_1 = 0$ et pour $t_1 = +\infty$ et pour $t_1 = -\infty$. A la tangente $x_1 = 0$ ne correspond en effet pas plus de deux branches de caractéristiques.

On en concluerait que le système

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= x_1^{q_1} [X_{q_2} + X_{q_2+1}], \\ \frac{dy_2}{dt_1} &= y_2 - k_2 x_1 + Y_2' - x_1^{q_1-1} (k_1 + y_2) [X_{q_2} + X_{q_2+1}] \end{aligned}$$

aurait une infinité de demi-caractéristiques aboutissant à l'origine pour $t_1 = +\infty$ ainsi qu'une infinité, y aboutissant pour $t_1 = -\infty$. De la même manière on s'assurerait qu'il existerait une infinité de demi-caractéristiques du système

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= x_1^{q_1+q_2+\dots+q_{\lambda-1}} [X_{q_\lambda} + X_{q_\lambda+1}], \\ \frac{dy_\lambda}{dt_1} &= y_\lambda - k_\lambda x_1 + Y_\lambda^{q_\lambda-1} - x_1^{q_1-1} \varphi [X_{q_\lambda} + X_{q_\lambda+1}], \end{aligned}$$

aboutissant à l'origine pour $t_1 = +\infty$, ainsi qu'une infinité y aboutissant pour $t_1 = -\infty$.

Or ce dernier système possède tout au plus une région nodale et pas de région nodale fermée. Les caractéristiques de cette région nodale aboutissent donc toutes à l'origine pour $t_1 = +\infty$, s'il y a une seule d'entre elles y aboutissant pour $t_1 = +\infty$, et on en conclut qu'il n'existe pas une infinité de caractéristiques aboutissant à l'origine pour $t_1 = -\infty$.

Nous pouvons réunir dans le théorème suivant les résultats obtenus pour tous les cas traités jusqu'ici.

Quand les racines de l'équation (15) ne sont pas toutes les deux égales à zéro, la nature du point singulier $x = 0, y = 0$, du système (14) sera complètement déterminée par la valeur de i , et on aura

$$c = 2(i + 1); \quad 2n = (1 - i)(2 + i); \quad n_f = 0.$$

Dans le cas, au contraire, où les deux racines de l'équation (15) sont égales à zéro, on voit aisément qu'il ne suffit pas de connaître la valeur de i pour savoir déterminer la nature du point singulier.

41. Supposons enfin que les deux racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - \mu & \beta \\ \gamma & \delta - \mu \end{vmatrix} = 0$$

soient toutes les deux égales à zéro.

Au moyen d'une substitution linéaire convenable on peut alors réduire le système d'équations différentielles à la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= X_{q_1} + X_{q_1+1}, \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= x_1 + Y_2, \end{aligned}$$

t_1 étant une nouvelle variable auxiliaire convenable.

En faisant

$$y_1 = \xi; \quad x_1 + \alpha y_1 = \eta;$$

on obtient

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt_1} &= \eta - \alpha\xi + X_2, \\ \frac{d\eta}{dt_1} &= \alpha(\eta - \alpha\xi) + Y_2, \end{aligned}$$

X_2 et Y_2 ne contenant que des termes dont la dimension est > 1 .

Nous traiterons d'ailleurs ce cas plus tard.

CHAPITRE IV.

Cas où le polynome $xY_m - yX_m$ (ou Q_{m-1}) n'a pas de facteur linéaire réel multiple.

42. A cause des développements des pages 34, 35 au moyen d'une substitution linéaire convenable on peut réduire le système d'équations différentielles à l'une des formes suivantes:

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_m(x_1, y_1) + X_{m+1}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= Y_m(x_1, y_1) + Y_{m+1}, \end{aligned}$$

où $x_1 Y_m - y_1 X_m$ ne s'annule pas identiquement, et

$$(23') \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 Q_{m-1}(x_1, y_1) + X_{m+1}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1 Q_{m-1}(x_1, y_1) + Y_{m+1}. \end{aligned}$$

La substitution peut en outre être choisie de telle manière que les polynomes X_m et Q_{m-1} soient encore assujettis aux conditions

$$X_m(0, y_1) \neq 0, \quad Q_{m-1}(0, y_1) \neq 0.$$

Nous ne traiterons en général dans ce chapitre que le cas où aucun des polynomes

$$x_1 Y_m - y_1 X_m \quad \text{et} \quad Q_{m-1}(x_1, y_1)$$

ne contient de facteur linéaire réel multiple.

Envisageons d'abord le système (23). On devra distinguer deux cas suivant que $x_1 Y_m - y_1 X_m$ a des facteurs linéaires réels ou non.

43. I. Supposons d'abord que $x_1 Y_m - y_1 X_m$ n'ait pas de facteur linéaire réel.

On sait qu'il n'existe pas alors de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, et l'origine sera alors un Foyer ou un Centre.

Pour pouvoir décider lequel de ces cas aura lieu, nous ferons la substitution

$$x_1 = \rho \cos \theta,$$

$$y_1 = \rho \sin \theta,$$

ce qui donne

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho[\cos \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho P]}{\cos \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta) + \rho Q},$$

P et Q désignant des séries de TAYLOR en ρ , $\cos \theta$, $\sin \theta$, convergentes tant que ρ est suffisamment petit.

A cause des suppositions faites la fonction

$$\cos \theta Y_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta X_m(\cos \theta, \sin \theta)$$

ne s'annule pour aucune valeur de θ . On peut alors développer le second membre de la dernière équation en série ordonnée suivant les puissances entières positives de ρ , ce qui donne

$$(24) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \rho V_1(\theta) + \rho^2 V_2(\theta) + \dots + \rho^\nu V_\nu(\theta) + \dots,$$

où les fonctions V_ν sont des fonctions rationnelles finies de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Soit $\rho(\theta, \rho_0)$ l'intégrale de cette équation prenant pour $\theta = 0$ la valeur ρ_0 . En donnant à $|\rho_0|$ une valeur suffisamment petite, la fonction $\rho(\theta, \rho_0)$ d'après un théorème bien connu de M. POINCARÉ,¹ peut alors être développée en série procédant suivant les puissances entières positives de ρ_0 , convergente pour ces valeurs de ρ_0 , tant que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On pourra par conséquent écrire

$$\rho(\theta, \rho_0) = \rho_0 u_1(\theta) + \rho_0^2 u_2(\theta) + \dots + \rho_0^\nu u_\nu(\theta) + \dots$$

Or on sait que

$$\rho(0, \rho_0) = \rho_0,$$

ce qui nous donne

$$u_1(0) = 1; \quad u_\nu(0) = 0, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

En introduisant cette valeur de $\rho(\theta, \rho_0)$ dans l'équation (24) et en égalant

¹ Voir POINCARÉ: *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*. Tome I, page 58.

les coefficients des diverses puissances de ρ_0 dans les deux membres de cette équation, on obtient une série d'équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions u_ν , à savoir

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{d\theta} &= u_1 V_1(\theta), \\
 (25) \quad \frac{du_2}{d\theta} &= u_2 V_1(\theta) + u_1^2 V_2(\theta), \\
 \frac{du_3}{d\theta} &= u_3 V_1(\theta) + 2u_1 u_2 V_2(\theta) + u_1^3 V_3(\theta), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Les fonctions u_ν seront complètement déterminées par la condition que $u_1(0) = 1$, $u_\nu(0) = 0$, pour $\nu = 2, 3, \dots$

Supposons maintenant que les $q - 1$ premières fonctions u_ν soient des fonctions périodiques de θ , mais que u_q ne soit pas périodique.

Supposons pour fixer les idées que

$$u_q(2\pi) - u_q(0) = -h < 0.$$

On aura alors

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) = \rho_0^q [-h + \rho_0 [u_{q+1}(2\pi) - u_{q+1}(0)] + \dots].$$

En prenant δ suffisamment petit on aura donc

$$\rho(2\pi, \rho_0) - \rho(0, \rho_0) < 0 \quad \text{pour } 0 < \rho_0 < \delta.$$

On en conclut que

$$\rho(0, \rho_0) > \rho(2\pi, \rho_0) > \rho(4\pi, \rho_0) > \dots$$

La caractéristique du système qui rencontre la droite $y = 0$ au point ρ_0 rencontrera donc cette droite de nouveau en des points de plus en plus voisins de l'origine. Il n'existe donc pas de caractéristique fermée dans le voisinage de l'origine, et ce point sera donc un Foyer.

La condition nécessaire et suffisante, pour que l'origine soit un Centre est donc que toutes les fonctions u_ν soient des fonctions périodiques de θ , et dans ce cas l'origine sera évidemment entourée par une région où toutes les caractéristiques seront des courbes fermées.

Quant à la question de savoir si les fonctions u_ν sont des fonctions périodiques ou non, on doit observer que l'on peut toujours par des calculs algébriques déterminer, si la fonction u_1 est périodique ou non. Mais, quand il s'agit des fonctions u_ν , où $\nu > 1$, les difficultés sont beaucoup plus grandes. On devra faire alors une étude analogue à celle que j'expose dans mon mémoire *Sur les équations différentielles linéaires à solutions périodiques*,¹ pour pouvoir déterminer si dans ce cas, l'on peut s'assurer par des calculs algébriques si u_ν est une fonction périodique ou non.

44. II. Si au contraire $x_1 Y_m - y_1 X_m$ a des facteurs linéaires réels, nous ferons la substitution $y_1 = x_1 \eta$, ce qui nous donne

$$(26) \quad x_1 \frac{d\eta}{dx} = \frac{Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta) + x_1 \bar{Y}}{X_m(1, \eta) + x_1 \bar{X}},$$

\bar{X} et \bar{Y} désignant des séries de TAYLOR en x_1 et en η .

Soient $k_1 < k_2 < \dots < k_s$, les différentes racines réelles de l'équation

$$Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta) = 0,$$

on sait que, à cause des suppositions faites,

$$\frac{d}{d\eta} [Y_m(1, \eta) - \eta X_m(1, \eta)] \neq 0, \quad \text{pour } \eta = k_s$$

En vertu des développements du chapitre précédent on sait alors déterminer complètement la nature de chaque point singulier, $x_1 = 0$, $\eta = k_s$, de l'équation (26). En particulier on sait qu'il passe par un tel point, $x_1 = 0$, $\eta = k_s$, au moins une caractéristique autre que la droite $x_1 = 0$. Il existe donc certainement des caractéristiques du système (23) aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée. On en conclut que toutes les caractéristiques aboutissant à l'origine y ont des tangentes déterminées.

Les directions des tangentes possibles seront alors données par l'équation

$$x_1 Y_m - y_1 X_m = 0.$$

Au moyen de l'hypothèse que $X_m(0, \eta) \neq 0$, on a fait en sorte qu'il n'y ait pas de caractéristique aboutissant à l'origine avec la tangente $x_1 = 0$,

¹ Voir Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. 11 Mars 1896.

et on a évité de cette manière la discussion des points à distance infinie de l'équation (26).

On déterminera donc toutes les catactéristiques du système (23) aboutissant à l'origine, si l'on sait déterminer toutes les caractéristiques de l'équation (26) aboutissant aux points singuliers $x_1 = 0$, $\eta = k_\nu$, problème que nous avons résolu dans le chapitre précédent.

Observons d'abord que, s'il existe une caractéristique de l'équation (26) traversant le point $x_1 = 0$, $\eta = k_\nu$, l'axe des η est nécessairement l'une des branches de cette caractéristique. On en conclut que les deux branches d'une caractéristique du système (23) qui traversent l'origine n'aboutissent pas en ce point avec la même tangente. Si l'une de ces branches aboutit à l'origine avec la tangente $y_1 - k_\nu x_1 = 0$, l'autre y parviendra ou avec la tangente $y_1 - k_{\nu+1} x_1 = 0$, ou avec la tangente $y_1 - k_{\nu-1} x_1 = 0$.

Etudions les divers cas qui peuvent se présenter, en nous bornant pourtant, pour fixer les idées, aux caractéristiques situées à droite de l'axe des y . Désignons à cet effet par P_1, P_2, \dots, P_ν , les différents points $x = 0$, $\eta = k_\nu$, du plan des x, η , et par $L_{\nu,0}$ la partie de l'axe des η interceptée entre P_ν et $P_{\nu+1}$.

On devra distinguer les cas suivants

1) $L_{\nu,0}$ peut être prolongé au delà de P_ν et de $P_{\nu+1}$.

Soit alors $(L_{\nu,0}, L_\nu)$ la caractéristique traversant P_ν , et $(L_{\nu,0}, L_{\nu+1})$ celle traversant $P_{\nu+1}$. Soient de plus L'_ν et $L'_{\nu+1}$ les caractéristiques du système (23) correspondant à L_ν et $L_{\nu+1}$ de l'équation (26). Il est alors évident que la caractéristique $(L'_\nu, L'_{\nu+1})$ traverse l'origine. Car par un point très voisin de L_ν , et situé entre L_ν et $L_{\nu+1}$, passe alors une caractéristique qui ne rencontre pas l'axe des η et qui est située entre L_ν et $L_{\nu+1}$. Par le point correspondant du plan des x_1, y_1 passe alors une caractéristique n'aboutissant pas à l'origine, et située entre L'_ν et $L'_{\nu+1}$.

2) $L_{\nu,0}$ peut être prolongé au delà de P_ν , mais $L_{\nu,0}$ finit en $P_{\nu+1}$.

Si L_ν désigne le prolongement de $L_{\nu,0}$, et L'_ν la caractéristique du plan des x_1, y_1 , correspondant à L_ν , on s'assure aisément qu'une caractéristique passant par un point du plan des (x_1, y_1) très voisin de L_ν et situé audessus de cette courbe, finira en $P_{\nu+1}$. La caractéristique correspondante du plan des x_1, y_1 , s'arrêtera donc à l'origine et appartiendra à une *région nodale ouverte*.

Si L_{ν_0} peut être prolongé au delà de $P_{\nu+1}$, mais finit en P_ν , on s'assure de la même manière qu'il existe une région nodale ouverte dont les caractéristiques aboutiront à l'origine avec $y_1 - k_\nu x_1 = 0$ pour tangente.

3) Si enfin L_{ν_0} s'arrête et en P_ν et en $P_{\nu+1}$, il est évident qu'une caractéristique passant par un point très voisin de L_{ν_0} s'arrêtera et en P_ν et en $P_{\nu+1}$. La caractéristique correspondante du plan des x_1, y_1 appartiendra donc à une *région nodale fermée*.

C'est donc seulement dans le cas 1) que le système (23) possède une caractéristique située à droite de l'axe des y et traversant l'origine. Elle traversera alors l'origine d'une manière telle que l'une des branches y ait la droite $y - k_\nu x = 0$ pour tangente, et que l'autre parvienne à l'origine avec la droite $y - k_{\nu+1} x = 0$ pour tangente.

Il est évident que ce procédé s'applique aussi au cas où il s'agit de déterminer, s'il existe une caractéristique traversant l'origine et dont les deux branches y auront pour tangentes les deux droites $y_1 - k_\nu x_1 = 0$ et $y_1 - k_1 x_1 = 0$. On doit seulement observer que par un point très voisin de l'axe des η , situé à droite de cet axe et au-dessus de la droite $\eta = k_\nu$, passera une caractéristique s'éloignant vers l'infini et dont le prolongement sera une caractéristique très voisine de l'axe des η , située à gauche de cet axe et allant de $\eta = -\infty$ vers $\eta = k_1$, chose dont on s'assure aisément en effectuant la substitution $x_1 = \xi y_1$ et en étudiant l'équation différentielle

$$y_1 \frac{d\xi}{dy_1} = \frac{X_m(\xi, 1) - \xi Y_m(\xi, 1) + y_1 \bar{X}}{Y_m(\xi, 1) + y_1 \bar{Y}}$$

entre les variables ξ et y_1 .

45. Envisageons maintenant le système (26'). La substitution $y_1 = x_1 \eta$ donnera

$$(27) \quad \frac{d\eta}{dx_1} = x_1^{r-1} \frac{Z(x_1, \eta)}{Q_{m-1}(1, \eta) + x_1 Z_1}, \quad r \geq 1.$$

Comparer à ce sujet le n° 23.

Supposons d'abord que $r = 1$. L'équation (27) n'aura donc en général pas de point singulier situé sur l'axe des η . Par chaque point $x_1 = 0$, $\eta = k$ passe alors une caractéristique à laquelle correspondent deux caractéristiques du système (23) aboutissant à l'origine et ayant $y_1 - k x_1 = 0$, pour tangente.

On distinguera alors les cas suivants:

I. Si $Q_{m-1}(1, k) \neq 0$, la caractéristique du plan des x_1, η , passant par le point $x_1 = 0, \eta = k$, passera de l'un côté à l'autre de l'axe des η , et il s'ensuit que les caractéristiques voisines couperont de même nécessairement cet axe.

Les caractéristiques du plan des x_1, y_1 , correspondant aux demi-caractéristiques du plan des x_1, η , situées à gauche de l'axe des η , aboutiront donc toutes à l'origine, ce qui met en évidence que toutes ces caractéristiques appartiennent à une région nodale.

Il en sera évidemment de même pour les caractéristiques du plan des x_1, y_1 correspondant aux demi-caractéristiques du plan des x_1, η , qui sont situées à droite de l'axe des η .

II. Si au contraire $Q_{m-1}(1, k) = 0, \chi(0, k) \neq 0$, on devra distinguer deux cas suivant que la première dérivée de $Q_{m-1}(1, \eta)$ qui ne s'annule pas pour $\eta = k$ est d'ordre pair ou est d'ordre impair.

Si son ordre est un nombre pair, la caractéristique passant par le point $x_1 = 0, \eta = k$, passera de l'un côté à l'autre de l'axe des η , et la discussion sera identique à celle qui vient d'être faite.

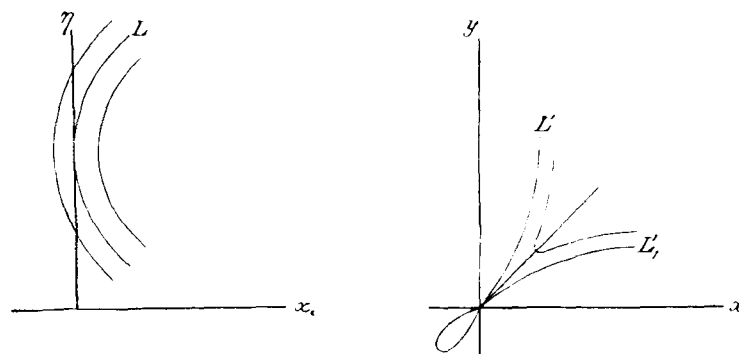


Fig. VIII.

Si au contraire la première dérivée de $Q_{m-1}(1, \eta)$ qui ne s'annule pas est d'ordre impair, la caractéristique L passant par le point $x_1 = 0, \eta = k$ sera tangente à l'axe des η (voir fig. VIII) et sera située de l'un des côtés de cet axe, ce qui met en évidence que les caractéristiques voisines, situées de l'un des côtés de L , couperont l'axe des η en deux points voisins du point $x_1 = 0, \eta = k$ et que les caractéristiques situées de l'autre côté s'éloigneront de l'axe

des η . A la caractéristique L correspondra donc dans le plan des x_1, y_1 deux branches de caractéristiques L' et L'_1 aboutissant à l'origine avec la même tangente $y_1 - kx_1 = 0$, et situées toutes les deux du même côté de l'axe des y , et il est alors évident que la caractéristique (L', L'_1) traverse l'origine (voir Fig. VIII).

De l'autre côté de l'axe des η une caractéristique voisine de L ira couper l'axe des η en deux points, ce qui met en évidence que l'on aura dans le plan des x_1, y_1 une région nodale fermée située de l'autre côté de l'axe des y_1 .

Aux caractéristiques passant par des points de l'axe des η voisins du point $x_1 = 0, \eta = k$ correspondront dans ce cas dans le plan des x_1, y_1 une caractéristique traversant l'origine et une région nodale fermée.

Si l'équation

$$Q_{m-1}(1, \eta) = 0$$

a s racines réelles dont aucune n'est racine de $\chi(0, \eta) = 0$, il existe alors en général s courbes intégrales traversant l'origine et s régions nodales fermées.

III. Si $Q_{m-1}(1, k) = 0, \chi(0, k) = 0$, le point $x_1 = 0, \eta = k$ est un point singulier qui sera en général de la forme traitée dans le chapitre précédent. L'équation déterminant les tangentes possibles des caractéristiques aboutissant à ce point nous montre qu'il n'y a pas de caractéristique tangente à l'axe des η . Soit i_1 l'indice du point $x_1 = 0, \eta = k$, et $c_1 = 2(i_1 + 1)$ le nombre de caractéristiques traversant ce point, on distinguera les cas suivants:

1) $i_1 = -1, c_1 = 0$. Les caractéristiques passant par des points de l'axe des η très voisins du point $x = 0, \eta = k$, aboutiront alors toutes à ce point. Les caractéristiques passant par des points où $\eta < k$ correspondront donc à une région nodale fermée du plan des x_1, y_1 , et celles qui passent par des points où $\eta > k$ correspondront à une autre région nodale fermée de ce plan.

2) $i_1 = 0; c_1 = 2$. Il existe alors deux courbes intégrales traversant le point $x = 0, \eta = k$. L'une de ces courbes sera telle que l'une de ses branches sera située d'un côté et l'autre de l'autre de l'axe des η . A cette caractéristique ne correspond évidemment pas de caractéristique du plan des x_1, y_1 traversant l'origine. L'autre caractéristique qui traverse le point $x = 0, \eta = k$, sera telle que les branches sont toutes les deux situées

du même côté de l'axe des η . A cette caractéristique correspond évidemment une caractéristique du plan des x_1, y_1 traversant l'origine.

On prouve de la même manière qu'au cas 1), qu'on aura aussi une région nodale fermée correspondant à $x_1 = 0, \eta = k$.

3) $i_1 = 1; c_1 = 4$. On voit alors qu'il existe deux caractéristiques traversant le point $x_1 = 0, \eta = k$, dont les deux branches sont situées du même côté de l'axe des η . A ces caractéristiques correspondent alors dans le plan des x_1, y_1 deux caractéristiques traversant l'origine, et dans ce cas il n'y aura pas de région nodale fermée.

Si enfin $r > 1$, toutes les racines de l'équation

$$Q_{m-1}(1, \eta) = 0$$

nous donneront des points singuliers de l'équation (27) situés sur l'axe des η , et la discussion de ces points est tout analogue à celle du cas où $r = 1$. On doit seulement observer que si l'on a

$$Q_{m-1}(1, k) = 0; \quad \chi(0, k) = 0;$$

le point $x_1 = 0, \eta = k$ ne rentrera pas dans les cas traités dans le chapitre précédent.

CHAPITRE V.

Le cas général.

46. Au moyen d'une substitution de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y, \\ y_1 &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \quad \text{où } \alpha\delta - \beta\gamma > 0,$$

on peut alors réduire le système (11) à l'une des formes (23) et (23'). Si on est en présence du système (23), la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1, \\ y_1 &= (\eta_1 + k_1)\xi_1, \end{aligned}$$

où k_1 est une racine réelle de l'équation

$$(28) \quad Y_m(\mathbf{I}, \eta) - \eta X_m(\mathbf{I}, \eta) = 0,$$

nous donne un système de la forme

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= \xi_1 [X_m(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi], \\ \frac{d\eta_1}{dt_1} &= Y_m(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) - (\eta_1 + k_1) X_m(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \psi, \end{aligned}$$

φ et ψ désignant des séries de TAYLOR en ξ_1, η_1 , convergentes dans le voisinage de $\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$.

A une caractéristique du système (23) aboutissant à l'origine et y ayant pour tangente $y_1 - k_1 x_1 = 0$, correspondra alors une caractéristique du système (29) aboutissant à l'origine.

S'il existe des courbes intégrales du premier système aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées, on les obtiendra toutes en déterminant les caractéristiques de tous les systèmes (29) passant par l'origine (correspondant aux différentes racines de l'équation (28)).

On doit observer de plus que toutes les caractéristiques du système (29) aboutissant à l'origine, y auront des tangentes déterminées, car il existe toujours une caractéristique, à savoir $\xi_1 = 0$, qui aboutit à l'origine avec une tangente déterminée.

On aura en outre

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y &= \xi_1^m [X_m(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi], \\ [r - \alpha(k_1 + \eta_1)] X + [\delta - \beta(k_1 + \eta_1)] Y \\ &= \xi_1^m [Y_m(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) - (\eta_1 + k_1) X_m(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \psi]. \end{aligned}$$

Si au contraire on est en présence du système (23'), et si k_1 est une racine réelle de

$$(28') \quad Q_{m-1}(\mathbf{I}, \eta_1) = 0$$

la substitution en question réduit l'étude des caractéristiques du système (23') aboutissant à l'origine avec la tangente $y - k_1 x = 0$, à celle des caractéristiques aboutissant à l'origine d'un système d'équations de la forme

$$(20') \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= Q_{m-1}(\mathbf{I}, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi, \\ \frac{d\eta_1}{dt_1} &= \xi_1^{r-1} \chi(\xi_1, \eta_1), \end{aligned} \quad \text{où } r \geq 1.$$

On doit observer pourtant qu'il nous suffit d'étudier les caractéristiques de ce système aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées car une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine de l'équation (29') coupera nécessairement la droite $\xi_1 = 0$ en une infinité de points réguliers et ne nous donnera donc pas de caractéristiques du système (23') autres que celles qu'on obtient en étudiant les points réguliers de la droite $\xi_1 = 0$. Dans le cas où l'origine du système (29') est un *Foyer* (ou un *Centre*) il n'existe évidemment pas de caractéristique du système (23') aboutissant à l'origine avec la tangente $y_1 - k_1 x_1 = 0$; mais cette droite sera comprise dans deux régions nodales fermées, l'une située à gauche de l'axe des y , l'autre à droite.

À chaque demi-droite tirée de l'origine dans une direction voisine de celle de $y - k_1 x = 0$, correspondra alors une caractéristique appartenant à l'une de ces régions nodales fermées et aboutissant à l'origine de manière à y avoir pour tangente la demi-droite en question. Voir Fig. IX.

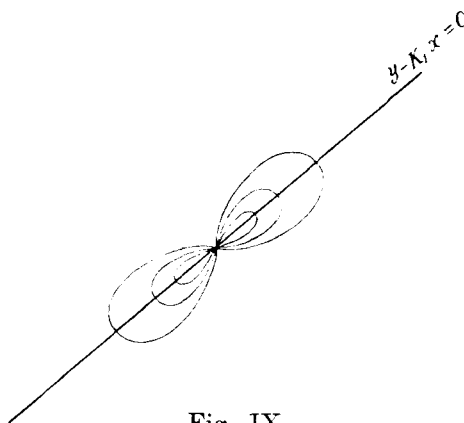


Fig. IX.

Les expressions des seconds membres du système (29') seront données par les équations suivantes:

$$\alpha X + \beta Y = \xi_1^m [Q_{m-1}(\xi_1, \eta_1 + k_1) + \xi_1 \varphi],$$

$$[\gamma - \alpha(k_1 + \eta_1)]X + [\delta - \beta(k_1 + \eta_1)]Y = \xi_1^{m+1} [\xi_1^{r-1} \chi(\xi_1, \eta_1)].$$

47. Résumons enfin les résultats obtenus: Etant donné un système d'équations différentielles de la forme

$$(30) \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

on peut donc toujours par une substitution bilinéaire convenable réduire l'étude des caractéristiques de ce système à celle des caractéristiques, aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées, des divers systèmes d'équations de la forme

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt_1} &= X_1(\xi_1, \eta_1), \\ \frac{d\eta_1}{dt_1} &= Y_1(\xi_1, \eta_1), \end{aligned}$$

où les termes de la plus petite dimension sont de l'ordre $m_1 \leq m + 1$, et où l'on a

$$\alpha X + \beta Y = \xi_1^{m-1+\varepsilon} X_1,$$

$$[\gamma - \alpha(k_1 + \eta_1)]X + [\delta - \beta(k_1 + \eta_1)]Y = \xi_1^{m+\varepsilon} Y_1,$$

ε étant une quantité égale à 1 ou à zéro, suivant que le polynôme de dimension en $xY - yX$ s'annule identiquement ou non. On aura donc enfin

$$(32) \quad \begin{aligned} X &= \xi_1^{m-1}[(a + b\eta_1)\xi_1^\varepsilon X_1 + b\xi_1^{1+\varepsilon} Y_1], \\ Y &= \xi_1^{m-1}[(c + d\eta_1)\xi_1^\varepsilon X_1 + d\xi_1^{1+\varepsilon} Y_1], \end{aligned}$$

les quantités a, b, c, d étant données par les équations suivantes

$$a = \frac{\delta - \beta k_1}{a\delta - \beta\gamma}; \quad b = -\frac{\beta}{a\delta - \beta\gamma}; \quad c = -\frac{\gamma + ak_1}{a\delta - \beta\gamma}; \quad d = \frac{a}{a\delta - \beta\gamma}.$$

Nous supposons en outre que les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont choisies de telle sorte que

$$\delta - \beta k_1 \neq 0,$$

k_1 désignant une racine quelconque de l'équation (28) ou de l'équation (28').

48. En écrivant la substitution bilinéaire sous la forme suivante

$$(33) \quad \begin{aligned} x &= (a + b\eta_1)\xi_1, \\ y &= (c + d\eta_1)\xi_1, \end{aligned} \quad a \neq 0$$

nous pouvons donc affirmer qu'au moyen d'une telle substitution on peut réduire l'étude des courbes intégrales du système (30) aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées à celle des caractéristiques aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées des divers systèmes de la forme (31) où les fonctions X_1, Y_1 et X, Y , sont assujetties aux relations (32).

49. En traitant le système (31) de la même manière on peut donc réduire l'étude de l'origine de ce système à celle de l'origine de divers systèmes d'équations différentielles

$$(31') \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dt_2} &= X_2(\xi_2, \eta_2), \\ \frac{d\eta_2}{dt_2} &= Y_2(\xi_2, \eta_2), \end{aligned}$$

que l'on obtient au moyen de substitutions de la forme

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (a_1 + b_1\eta_2)\xi_2, \\ \eta_1 &= (c_1 + d_1\eta_2)\xi_2, \end{aligned} \quad a_1 \neq 0$$

où les termes de la plus petite dimension sont de l'ordre $m_2 \leq m_1 + 1$, et où

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi_2^{m_1-1} [(a_1 + b_1\eta_2)\xi_2^{\varepsilon_1} X_2 + b_1\xi_2^{1+\varepsilon_1} Y_2], \\ Y_1 &= \xi_2^{m_1-1} [(c_1 + d_1\eta_2)\xi_2^{\varepsilon_1} X_2 + d_1\xi_2^{1+\varepsilon_1} Y_2]. \end{aligned}$$

En continuant ainsi on sera en général conduit à étudier les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_\nu}{dt_\nu} &= X_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \\ \frac{d\eta_\nu}{dt_\nu} &= Y_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \end{aligned}$$

que l'on obtient au moyen des substitutions

$$\begin{aligned} \xi_{\nu-1} &= (a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\xi_\nu, \\ \eta_{\nu-1} &= (c_{\nu-1} + d_{\nu-1}\eta_\nu)\xi_\nu, \end{aligned} \quad a_{\nu-1} \neq 0,$$

et où

$$\begin{aligned} X_{\nu-1} &= \xi_\nu^{m_\nu-1} [(a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\xi_\nu^{\varepsilon_\nu-1} X_\nu + b_{\nu-1}\xi_\nu^{\varepsilon_\nu-1+1} Y_\nu], \\ Y_{\nu-1} &= \xi_\nu^{m_\nu-1} [(c_{\nu-1} + d_{\nu-1}\eta_\nu)\xi_\nu^{\varepsilon_\nu-1} X_\nu + d_{\nu-1}\xi_\nu^{\varepsilon_\nu-1+1} Y_\nu]. \end{aligned}$$

On aura alors

$$(34) \quad \begin{aligned} x &= (a + b\eta_1)(a_1 + b_1\eta_2) \dots (a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\xi_\nu, \\ y &= (c + d\eta_1)(a_1 + b_1\eta_2) \dots (a_{\nu-1} + b_{\nu-1}\eta_\nu)\xi_\nu, \end{aligned}$$

et

$$(35) \quad \begin{aligned} X &= \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} \bar{X}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \\ Y &= \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} \bar{Y}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu), \end{aligned}$$

où \bar{X}_ν et \bar{Y}_ν désignent des séries de TAYLOR en ξ_ν et η_ν convergentes dans le voisinage de $\xi_\nu = 0$, $\eta_\nu = 0$.

50. Je dis qu'en prenant ν suffisamment grand, on parviendra toujours à des fonctions \bar{X}_ν et \bar{Y}_ν telles que leurs termes de la plus petite dimension soient tout au plus du premier ordre.

En posant

$$hx + ky = \xi,$$

$$h_1x + k_1y = \eta,$$

après avoir choisi les constantes h, k, h_1, k_1 d'une manière convenable, on sait en effet, d'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS,¹ qu'on peut écrire

$$\alpha X + \beta Y = [\gamma^m + \varphi_1(\xi)\gamma^{m-1} + \dots + \varphi_m(\xi)]e^{\mathfrak{B}(\xi, \eta)},$$

$$\gamma X + \delta Y = [\gamma^m + \psi_1(\xi)\gamma^{m-1} + \dots + \psi_m(\xi)]e_1^{\mathfrak{B}_1(\xi, \eta)},$$

les fonctions φ_ν, ψ_ν ainsi que \mathfrak{B} et \mathfrak{B}_1 étant des séries de TAYLOR convergentes dans le voisinage de $\xi = 0$, $\eta = 0$.

En faisant

$$\varphi(\xi, \eta) = \gamma^m + \varphi_1(\xi)\gamma^{m-1} + \dots + \varphi_m(\xi),$$

$$\psi(\xi, \eta) = \gamma^m + \psi_1(\xi)\gamma^{m-1} + \dots + \psi_m(\xi),$$

on aura alors en vertu des équations (35)

$$\varphi(\xi, \eta) = \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} X'_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

$$\psi(\xi, \eta) = \xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1} Y'_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

les fonctions X'_ν et Y'_ν étant des séries de TAYLOR convergentes dans le voisinage de $\xi_\nu = 0$, $\eta_\nu = 0$.

¹ Voir WEIERSTRASS: *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*. Math. Werke, tome II.

Appliquons maintenant la méthode de la recherche du plus grand commun diviseur aux deux polynomes en η , φ et ψ . On pourra alors déterminer deux polynomes en η , $L(\xi, \eta)$, $M(\xi, \eta)$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes en ξ , tels que l'on ait

$$(36) \quad L(\xi, \eta) \cdot \varphi(\xi, \eta) + M(\xi, \eta) \cdot \psi(\xi, \eta) = \mathfrak{P}(\xi),$$

\mathfrak{P} désignant une série de TAYLOR en ξ , convergente dans le voisinage de $\xi = 0$, et que l'on pourra mettre sous la forme

$$\mathfrak{P}(\xi) = \xi^s e^{\mathfrak{P}_1(\xi)}$$

où s sera un nombre entier facile à déterminer et \mathfrak{P}_1 une autre série de TAYLOR convergente dans le voisinage de $\xi = 0$.

Choisissons enfin les constantes h et k de sorte que l'on ait

$$ha + kc \neq 0,$$

et introduisons dans l'équation (36) les nouvelles variables ξ_ν, η_ν .

Les équations (34) nous apprennent alors que le second membre de l'équation (36) est divisible par ξ_ν^s mais ne l'est pas par ξ_ν^{s+1} . Le premier membre sera au contraire divisible par $\xi_\nu^{m-1+m_1-1+\dots+m_{\nu-1}-1}$.

Il s'ensuit que si $\nu > s$ l'une des quantités $m-1, m_1-1, \dots, m_{\nu-1}-1$ sera nécessairement égale à zéro.

Il est donc établi qu'on parviendra toujours à un système de la forme

$$\frac{d\xi_\nu}{dt_\nu} = X_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

$$\frac{d\eta_\nu}{dt_\nu} = Y_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

où les termes de la dimension minima sont au plus du premier ordre.

c. q. f. d.

51. On pourra donc toujours, à l'aide de la méthode de réduction développée ici, réduire l'étude de l'origine du système (30) à l'étude des courbes intégrales de diverses équations différentielles dont les termes de la plus petite dimension sont au plus du premier ordre. Les seuls de ces systèmes que nous ne sachions pas encore traiter sont ceux de la forme (22), et il ne nous reste donc à traiter qu'un système de cette forme.

Observons d'abord que les caractéristiques de ce système aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées y aboutiront avec $\eta - \alpha\xi = 0$ pour tangente.

Au moyen de la substitution

$$\eta = (\alpha + \eta_1)\xi_1, \quad \xi_1 = \xi$$

on obtient alors

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \xi_1[\eta_1 + \xi_1\varphi], \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_1^2 + \xi_1\phi(\xi_1, \eta_1), \end{aligned}$$

φ et ϕ désignant des séries de TAYLOR.

Si $\phi(0, 0)$ ne s'annule pas, les caractéristiques aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées y aboutiront toutes avec $\xi_1 = 0$ pour tangente.

En faisant alors

$$\xi_1 = x_1\eta_1$$

on obtient

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= -\eta_1^2 + x_1\eta_1\phi(0, 0) + \psi_3, \\ \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1\eta_1 - x_1^2\phi(0, 0) + \varphi_3, \end{aligned}$$

ψ_3 et φ_3 ne contenant que des termes de dimension supérieure à 2.

L'équation déterminant les tangentes à l'origine sera ici

$$x_1\eta_1(2x_1\phi(0, 0) - 3\eta) = 0.$$

Toutes ces tangentes étant distinctes nous savons traiter le système (38) à l'aide de la méthode du chapitre IV.

La substitution $\eta = (\alpha + \eta_1)\xi$ conduira donc à un système que nous savons déjà traiter ou à un système (37) tel que $\phi(0, 0) = 0$, dont les termes de la plus petite dimension seront évidemment d'ordre 2. En traitant ce système par notre méthode de réduction donnée dans ce chapitre, on parviendra ou à un système que nous savons déjà traiter ou à un système de la forme (22); ce dernier conduira à un système dont les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 2, dans le cas où il ne conduit pas à un système que nous savons traiter.

Mais l'équation (36) met en évidence que nous ne pouvons pas rencontrer plus de s pareils systèmes d'équations dont les termes de la plus petite dimension sont d'ordre 2, et il s'ensuit que nous parviendrons toujours à des systèmes d'équations différentielles que nous savons traiter.

c. q. f. d.

52. La méthode de réduction développée ici offre la plus grande analogie avec celle qui a été employée par WEIERSTRASS pour l'étude des fonctions algébriques; je l'ai d'abord publiée dans un mémoire présenté à l'académie des sciences à Stockholm le 9 nov. 1898 et intitulé *Sur les points singuliers des équations différentielles*.

En appliquant cette méthode de réduction on sera donc conduit à étudier une suite d'équations différentielles de la forme

$$(39) \quad x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + c + \mathfrak{F}(x, y)$$

où \mathfrak{F} désigne une série de TAYLOR convergente pour des valeurs suffisamment petites de x et de y , et ne contenant que des termes au moins de la deuxième dimension.

Si $c \neq 0$, le point $x = 0, y = 0$, est un point régulier.

Dans le cas où toutes les équations différentielles (39) qu'on doit étudier sont telles que $x = 0, y = 0$ est un point régulier, on en conclut qu'il n'y a pas de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, et l'origine sera alors un Foyer ou un Centre. Inversément il est évident qu'il existe toujours au moins une branche de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, pourvu que l'une des équations (39) que l'on aura alors à étudier soit telle que $c = 0$.

Dans le cas où il existe des caractéristiques aboutissant à l'origine avec des tangentes déterminées, notre méthode permet toujours de déterminer les nombres c, n, n_f .

Dans le cas au contraire où il n'y a pas de caractéristique aboutissant à l'origine avec une tangente déterminée, notre méthode ne permet pas de décider si on est en présence d'un Foyer ou d'un Centre. L'étude de ces cas semble en général offrir des difficultés considérables que je n'ai pas su vaincre.

CHAPITRE VI.

Quelques théorèmes relatifs aux cas où X et Y sont des polynomes.

53. Dans le cas où X et Y sont des polynomes, on peut étudier les caractéristiques à distance infinie de la même manière que dans le voisinage d'un point singulier ordinaire. Supposons en effet que nos équations soient de la forme

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_{q-1}(x, y) + X_q(x, y) = X, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_{q-1}(x, y) + Y_q(x, y) = Y, \end{aligned}$$

où X_q et Y_q sont des polynomes de dimension q , et où X_{q-1} , Y_{q-1} ne contiennent pas de termes de dimension $> q - 1$.

Nous ferons une substitution de la forme

$$(41) \quad \bar{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

A un cercle $x^2 + y^2 = R^2$, dans le plan des x, y , de rayon très grand R , correspond alors un cercle, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{1}{R^2}$, dans le plan des \bar{x}, \bar{y} de rayon très petit $\frac{1}{R}$. Il nous suffit donc d'étudier le point $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ dans la nouvelle équation en \bar{x} et en \bar{y} qu'on obtient.

Or les équations (40) donnent

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [x(xY - yX) - y(xX + yY)], \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} [y(xY - yX) + x(xX + yY)]. \end{aligned}$$

On aura donc

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} &= \frac{y[xX + yY] - x[xY - yX]}{x[xX + yY] + y[xY - yX]} \\ &= \frac{\bar{Y}(\bar{x}, \bar{y})}{\bar{X}(\bar{x}, \bar{y})}, \end{aligned}$$

où \bar{Y} et \bar{X} sont des polynomes en \bar{x} et \bar{y} dont les termes de la plus petite dimension sont

$$\bar{y}[\bar{x}X_q(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}Y_q(\bar{x}, \bar{y})] - \bar{x}[\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}X_q(\bar{x}, \bar{y})]$$

et

$$\bar{x}[\bar{x}X_q(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{y}Y_q(\bar{x}, \bar{y})] + \bar{y}[\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}X_q(\bar{x}, \bar{y})].$$

L'équation déterminant les directions des tangentes à l'origine nouvelle sera

$$\bar{x}Y_q(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}X_q(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

et on en conclut que les directions des tangentes à l'infini du système (40) seront données par

$$(44) \quad xY_q(x, y) - yX_q(x, y) = 0.$$

On doit comparer à ceci la méthode de projection employée par M. POINCARÉ pour l'étude des points à l'infini.

Si l'équation (44) par exemple n'est satisfaite par aucune valeur réelle de $\frac{x}{y}$, l'infini sera un Foyer ou un Centre. Cela correspond chez M. POINCARÉ au cas où l'équateur est une caractéristique qui ne passe par aucun point singulier.

Les autres cas étudiés par l'illustre géomètre sont ceux où l'équation (44) n'a pas de facteur linéaire réel multiple.

Le cas où l'équation (44) est identiquement satisfaite correspondrait, ce me semble, dans la terminologie de M. POINCARÉ, au cas où chaque point de l'équateur est un point singulier.

Le nombre total des points singuliers (y compris le point à l'infini) étant dans ce cas un nombre fini, on peut donner la forme suivante au théorème VII de la page 28 :

Théorème. *Une demi-caractéristique L sera ou bien une courbe fermée, ou bien s'approchera indéfiniment d'une caractéristique fermée, ou enfin s'arrêtera dans un point singulier.*

Il sera toujours possible de faire la discussion complète des caractéristiques du système (40) dans le voisinage des points singuliers à l'aide des méthodes développées dans ce mémoire.

Quant à la détermination des caractéristiques fermées, c'est un problème d'une nature beaucoup plus compliquée. Pour l'étude de ce problème nous renvoyons le lecteur aux travaux de M. POINCARÉ.

Il existe pourtant un cas où il est facile de s'assurer qu'il n'existe pas de caractéristique fermée. C'est quand l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

ne représente pas de courbe réelle. On aura en effet

$$\iint_A \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] dx dy = - \int_S Y dx - X dy,$$

S désignant une courbe fermée, et A l'aire comprise à son intérieur. Si S est une caractéristique fermée, on aura donc

$$\iint_A \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] dx dy = 0,$$

ce qui met en évidence que l'aire A doit être traversée par l'une des courbes satisfaisant à l'équation $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$.

54. Maintenant soit i_x l'indice du point $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ de l'équation (43) et soient i_1, i_2, \dots, i_m , les indices des différents points singuliers finis P_1, P_2, \dots, P_m , du système (40). Nous voulons prouver que la relation suivante

$$(45) \quad i_x + \sum_{v=1}^m i_v = -2.$$

subsiste toujours.

A cet effet soit I l'indice de la fonction

$$\frac{xX + yY}{xY - yX}$$

pour un contour fermé C entourant l'origine, et soient $P_1, P_2, \dots, P_\gamma$ les points singuliers du système (40) situés à l'intérieur de C . On aura alors la relation

$$(46) \quad I = -i_1 - i_2 - \dots - i_\gamma - 1.$$

En effet supposons qu'on ait choisi les axes de telle manière qu'aucun des P_ν ne soit situé sur l'axe des x . Les seuls points où le numérateur et le dénominateur de la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$ s'annulent simultanément sont P_1, P_2, \dots, P_r , et l'origine. L'indice I sera donc égal à la somme des indices de ces points pour la fonction $\frac{xX + yY}{xY - yX}$.

Or cette fonction passe par zéro de la même manière exactement que la fonction

$$-\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}$$

(voir page 40). On en conclut que I est égal à l'indice de cette dernière fonction sur le contour C . Mais au point P_ν l'indice de la fonction $-\frac{x}{y} - \frac{Y}{X}$ est évidemment égal à $-i_\nu$, et à l'origine son indice est égal à -1 , ce qui met en évidence que l'équation (46) a lieu.

Maintenant prenons pour contour C le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, comprenant à son intérieur tous les points singuliers P_1, P_2, \dots, P_m du système (40).

• Quand le point x, y , parcourt le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ dans le sens positif, le point correspondant \bar{x}, \bar{y} , parcourt le cercle $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{1}{R^2}$ dans le sens positif. Or on a

$$\frac{\bar{x}\bar{X} + \bar{y}\bar{Y}}{\bar{x}\bar{Y} - \bar{y}\bar{X}} = -\frac{xX + yY}{xY - yX}.$$

L'indice du second membre sera sur le cercle C égal à $\sum_{\nu=1}^m i_\nu + 1$ et celui du membre premier sera sur le cercle $x^2 + y^2 = \frac{1}{R^2}$ égal à -1 , ce qui finalement donne

$$i_\infty + \sum_{\nu=1}^m i_\nu = -2.$$

En désignant par c^ν et n_ν les nombres c et n_f correspondant au point P_ν , cette relation peut s'écrire

$$(45') \quad c^\infty - n_f^\infty + \sum_{\nu=1}^m [c^\nu - n_\nu] = 2(m - 1).$$

On peut en conclure quelques résultats intéressants.

1) Dans le cas où il n'y a pas de point singulier fini, le point à l'infini sera nécessairement un point singulier auquel appartiendront au moins deux régions nodales fermées.

2) Dans le cas où $m \geq 2$, il existera nécessairement des caractéristiques traversant un point singulier.

55. Observons enfin que la relation (46) n'exige pas que X et Y soient des polynomes. En appliquant cette relation à une caractéristique fermée C entourant l'origine, on s'assure aisément que I est égal à zéro. A cause de la relation

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \cdot \frac{xX + yY}{xY - yX}$$

I sera en effet égal à la différence entre le nombre des valeurs maxima et le nombre des valeurs minima de ρ que l'on obtient, quand un point parcourt le contour C .

Or il est évident que le nombre de valeurs maxima est égal au nombre de valeurs minima, ce qui donne

$$I = 0.$$

On pourra donc énoncer le théorème suivant

Soit C une caractéristique fermée et soient i_1, i_2, \dots, i_m les indices des points singuliers situés à l'intérieur de C , on aura

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = -1.$$

Il est évident qu'on pourrait obtenir le théorème (III) comme conséquence immédiate de ce dernier théorème.

CHAPITRE VII.

Sur le calcul des intégrales par des approximations successives.

56. Nous avons prouvé dans les chapitres précédents que l'étude des caractéristiques dans le voisinage d'un point singulier se réduit toujours à celle de plusieurs équations différentielles de la forme

$$(47) \quad x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \varphi(x, y),$$

φ désignant une série de TAYLOR ne contenant que des termes de dimension ≥ 2 , convergente pour $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \delta$, et a désignant une quantité différente de zéro.

Pour effectuer le calcul des intégrales il suffit donc de traiter les équations différentielles de cette forme.¹

57. Pour fixer les idées nous traiterons ici le cas où $m = 2n$ et $a > 0$, et nous écrirons alors notre équation de la manière suivante:

$$(48) \quad x^{2n} \frac{dy}{dx} = (2n - 1)[a_1 y + b_1 x + \varphi_1(x, y)], \quad a_1 > 0.$$

Nous donnerons une méthode d'approximations successives à l'aide de laquelle on peut effectuer le calcul des intégrales de cette équation dans le voisinage de l'origine.

A cet effet soit M la valeur maxima de $\frac{b_1 x + \varphi(x, 0)}{x}$, et soit N la valeur maxima de $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, pour $|x| \leq \rho_1 < \delta$; $|y| \leq \rho_1 < \delta$.

¹ Comparer à ce sujet mon mémoire: *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandlingar, Febr. 9, 1898, où j'ai développé la méthode donnée dans ce chapitre d'une manière un peu différente de celle exposée ici.

En prenant ρ_1 suffisamment petit on peut alors faire en sorte que l'on ait

$$\frac{N}{a_1} < 1 \quad \text{pour } |x| \leq \rho_1; |y| \leq \rho_1.$$

La quantité ρ_1 étant ainsi déterminée, on déterminera la quantité positive ρ en sorte que l'on ait

$$(49) \quad \rho \frac{\left[1 + \frac{M}{a_1}\right]}{1 - \frac{N}{a_1}} < \rho_1.$$

Soit maintenant x_0, y_0 , un point du plan tel que l'on ait

$$0 < x_0 \leq \rho; \quad |y_0| \leq \rho;$$

et soit $y(x)$ l'intégrale de l'équation (48) qui prend pour $x = x_0$ la valeur y_0 . On sait alors que $y(0) = 0$ (voir page 45) et on pourra calculer de la manière suivante les valeurs de $y(x)$ pour $0 \leq x \leq \rho$.

Déterminons d'abord la fonction y_1 de manière qu'elle satisfasse à

$$x^{2n} \frac{dy_1}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_1 + b_1 x + \varphi_1(x, 0)]$$

et qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Ayant formé ensuite l'équation différentielle

$$x^{2n} \frac{dy_2}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_2 + b_1 x + \varphi_1(x, y_1)]$$

on déterminera y_2 par la condition qu'il prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$. En continuant ainsi on déterminera y_ν de manière qu'il satisfasse à l'équation

$$x^{2n} \frac{dy_\nu}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_\nu + b_1 x + \varphi_1(x, y_{\nu-1})], \quad \nu = 2, 3, \dots$$

et qu'il prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Je dis qu'alors l'intégrale $y(x)$ sera donnée par l'équation

$$y(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu), \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0.$$

58. En effet observons que la méthode de résolution bien connue des équations linéaires donne

$$(50) \quad y_\nu = y_0 e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2\nu-1}}} - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{h_1 x + \varphi_1(x, y_{\nu-1})}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx,$$

$\nu = 1, 2, 3, \dots$

Observons encore que si $\lim_{x \rightarrow +0} y_{\nu-1} = 0$, cette équation donne $\lim_{x \rightarrow +0} y_\nu = 0$.

On a en effet

$$y_\nu = y_0 e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2\nu-1}}} - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_\varepsilon^{x_0} \frac{\chi(x)}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

$$- e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^\varepsilon \frac{\chi(x)}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx,$$

$\chi(x)$ désignant une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow +0} \chi(x) = 0$, et ε une quantité positive très petite. Les deux premiers termes du second membre tendront vers zéro quand x tend vers $+0$. Le dernier terme pouvant s'écrire

$$e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^\varepsilon \frac{\chi(x)}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx = \chi(x_1) \left[\frac{1}{a_1} - \frac{e^{\frac{a_1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}}}{a_1} \right],$$

x_1 étant une valeur de x située entre x et ε , on en conclut que cette expression tend vers zéro quand ε et $x < \varepsilon$ tendent vers zéro.

Revenons maintenant à l'équation (50). On en tire

$$y_{\nu+1} - y_\nu = - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\varphi_1(x, y_\nu) - \varphi_1(x, y_{\nu-1})}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx.$$

Tant que les fonctions y_ν et $y_{\nu-1}$ seront $< \rho_1$ en valeur absolue pour $0 \leq x \leq x_0$, on aura

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{N |y_\nu - y_{\nu-1}|}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \quad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

Désignons enfin par m_ν la valeur maxima que prend la fonction $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ pour $0 \leq x \leq x_0$, on aura

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} m_\nu \int_x^{x_0} \frac{N}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx.$$

En effectuant l'intégration, on obtient

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < m_\nu \cdot \frac{N}{a_1} \left[1 - e^{\frac{a_1}{x_0^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}} \right] \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

ou finalement

$$m_{\nu+1} < m_\nu \cdot \frac{N}{a_1} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0.$$

Cette dernière inégalité subsiste tant que les fonctions y_ν et $y_{\nu-1}$ sont $< \rho_1$ en valeurs absolue pour $0 \leq x \leq x_0$. Or l'équation (50) donne

$$y_1 = y_0 e^{\frac{a_1}{x_0^{2n-1}} - \frac{a_1}{x^{2n-1}}} - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{b_1 x + \varphi_1(x, 0)}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

ou enfin

$$\begin{aligned} |y_1| &< \rho + e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^{x_0} \frac{\rho M}{x^{2n}} (2n - 1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \\ &< \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] < \rho_1 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$m_2 < m_1 \cdot \frac{N}{a_1} < \frac{N}{a_1} \cdot \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \rho \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

d'où

$$|y_2| < |y_2 - y_1| + |y_1| < \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \left[1 + \frac{N}{a_1} \right] < \rho_1.$$

De cette inégalité on tire

$$m_3 < m_2 \frac{N}{a_1} < \frac{N^2}{a_1} \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \rho \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

d'où l'on conclut

$$|y_3| < m_3 + m_2 + m_1 < \rho \left[1 + \frac{M}{a_1} \right] \left[1 + \frac{N}{a_1} + \frac{N^2}{a_1^2} \right] < \rho_1.$$

En continuant ainsi on voit que l'on a

$$m_{\nu+1} < m_\nu \frac{N}{a_1} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0$$

et on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu < \rho \frac{\left[1 + \frac{M}{a_1} \right]}{1 - \frac{N}{a_1}}.$$

Cette dernière inégalité met en évidence que la série

$$y(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu).$$

est uniformément convergente pour $0 \leq x \leq x_0$.

L'équation

$$\begin{aligned} x^{2n} \left| \sum_{\nu=m+1}^{m+m'} \frac{d}{dx} (y_{\nu+1} - y_\nu) \right| &= (2n - 1) [a_1 (y_{m+m'+1} - y_{m+1}) + \varphi_1(x, y_{m+m'}) - \varphi_1(x, y_m)] \\ &< (2n - 1) [a_1 |y_{m+m'+1} - y_{m+1}| + N |y_{m+m'} - y_m|] \end{aligned}$$

nous apprend alors que la série des dérivées $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (y_{\nu+1} - y_\nu)$ est uniformément convergente pour $\varepsilon \leq x \leq x_0$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra, et il s'ensuit que la fonction $y(x)$ satisfait pour toutes ces valeurs de x à l'équation différentielle donnée. Or ε étant aussi petit que l'on voudra, la fonction $y(x)$ représentera l'intégrale cherchée de l'équation (48) pour $0 < x \leq x_0$, et comme la série s'annule pour $x = 0$, elle représentera aussi pour cette valeur de x l'intégrale cherchée.

c. q. f. d.

59. Nous savons de cette manière calculer toute caractéristique aboutissant à l'origine et située à droite de l'axe des y . A gauche de cet axe il

n'existe plus qu'une seule caractéristique (voir page 46), et la méthode s'applique au calcul de cette caractéristique de la manière suivante.

Nous commencerons par prouver qu'une équation différentielle

$$x^{2n} \frac{dy}{dx} = (2n - 1)a_1 y + \psi(x),$$

où $\psi(x)$, pour des valeurs négatives de x , est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -0} \psi(x) = 0,$$

possède une seule intégrale qui s'annule pour $x = -0$.

En effet l'intégrale générale de cette dernière équation pouvant s'écrire

$$y = e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \left[C + \int_{-x_0}^x \frac{\psi(x)}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \right]$$

où C est une constante arbitraire, on voit qu'il faut avoir

$$C = - \int_{-x_0}^0 \frac{\psi(x)}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx$$

pour que $\lim_{x \rightarrow -0} y$ s'annule. L'intégrale s'annulant pour $x = -0$, pourra donc s'écrire

$$y = - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^0 \frac{\psi(x)}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx \quad \text{pour } -x_0 \leq x \leq 0.$$

En appliquant notre méthode d'approximations successives à l'équation (48) nous déterminerons maintenant y_1 , de manière que l'on ait

$$x^{2n} \frac{dy_1}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_1 + b_1 x + \varphi_1(x, 0)]$$

et que $\lim_{x \rightarrow -0} y_1 = 0$.

Nous déterminerons ensuite y_2 , en sorte que l'on ait

$$x^{2n} \frac{dy_2}{dx} = (2n - 1)[a_1 y_2 + b_1 x + \varphi_1(x, y_1)]$$

et que $\lim_{x \rightarrow -0} y_2 = 0$.

En continuant ainsi on obtient en général

$$y_\nu = - e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^0 \frac{bx + \varphi_1(x, y_{\nu-1})}{x^{2n}} e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} (2n-1) dx, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

pour $-x_0 \leq x \leq 0$

et

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < e^{-\frac{a_1}{x^{2n-1}}} \int_x^0 N \frac{|y_\nu - y_{\nu-1}|}{x^{2n}} (2n-1) e^{\frac{a_1}{x^{2n-1}}} dx,$$

tant que $|y_\nu| < \rho_1, |y_{\nu-1}| < \rho_1$

d'où l'on conclut enfin que

$$m_{\nu+1} < m_\nu \cdot \frac{N}{a_1}, \quad \text{pour } -x_0 \leq x \leq 0,$$

m_ν désignant, comme au cas précédent, la valeur maxima de $|y_\nu - y_{\nu-1}|$ pour $-x_0 \leq x \leq 0$, et l'inégalité ayant lieu tant que les fonctions y_ν et $y_{\nu-1}$ sont $< \rho_1$ en valeur absolue pour $-x_0 \leq x \leq 0$.

On prouve maintenant de la même manière qu'au cas précédent que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu$$

est convergente, d'où l'on conclut que les séries

$$y(x) = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu), \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (y_{\nu+1} - y_\nu)$$

sont uniformément convergentes, la première pour $-x_0 \leq x \leq 0$, la seconde pour $-x_0 \leq x \leq -\varepsilon$, ε étant une valeur positive aussi petite que l'on voudra. Il s'ensuit enfin que $y(x)$ est une intégrale de l'équation (48) telle que $\lim_{x \rightarrow -0} y(x) = 0$.

c. q. f. d.

Il est évident que la même méthode s'applique au calcul des intégrales de l'équation (47), quelles que soient les valeurs de m et de a . On doit pourtant observer que dans le cas où $m = 1$ et où $a > 0$, on aura

$$y_\nu = x^a \frac{y_0}{x_0^a} - x^a \int_x^{x_0} \frac{bx + \varphi(x, y_{\nu-1})}{x^{a+1}} dx.$$

Au contraire dans le cas où l'on a $m = 1$, $a = -a_1 < 0$, on aura

$$y_n = -x^{-a_1} \int_x^0 [bx + \varphi(x, y_{n-1})] x^{a_1-1} dx.$$

En ayant égard à cette observation, il est évident que la démonstration donnée embrasse aussi ces deux derniers cas.
