Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie.

(dei Professori A. CLEBSCH e P. GORDAN, a Giessen).

UNA forma binaria di grado $2n+1$ ($n > 1$) può essere rappresentata tipicamente, ossia con coefficienti che siano a un tempo invarianti, se, deviando alquanto dal metodo adottato dal sig.^r HERMITE per le forme di quinto grado, si introducono due covarianti lineari come variabili. Siccome però il numero dei coefficienti della forma tipica, incluso un denominatore comune, supera di quattro il numero degli invarianti, così si possono introdurre i coefficienti medesimi della forma tipica come invarianti fondamentali, purchè si stabiliscano fra essi quattro relazioni, le quali diano a quella il carattere di forma tipica. Ciò si effettua costruendo per la forma tipica i covarianti scelti come variabili e scrivendo le condizioni perchè essi coincidano colle variabili stesse, moltiplicate per una potenza (facile a riconoscersi) del determinante della trasformazione. Questo processo però non è più sufficiente quando si voglia esprimere tutto mediante gli invarianti più semplici della forma. In tal caso conviene seguire vie speciali; e la forma tipica può essere ottenuta con mezzi che, se anche affatto simili fra loro, pure presentano qualche differenza pei diversi gradi. Noi effettueremo questa rappresentazione per le forme di quinto grado; la quale a un di presso comprende in sè tutta la teoria di queste forme; e si rileverà facilmente che le forme di grado dispari possono, l'una dopo l'altra, essere trattate nella stessa guisa.

Similmente per le forme di grado $2n$ ($n > 2$). Qui si ottiene la rappresentazione tipica introducendo tre covarianti di secondo grado; fra questi ha luogo una equazione di secondo grado, mentre la forma stessa è rappresentata come forma ternaria del grado n , ed i coefficienti sono tutti

invarianti. Anche in questo caso si possono assumere i coefficienti come invarianti fondamentali, cercando le relazioni fra i medesimi le quali caratterizzano la forma tipica. Per ottenere queste relazioni basta comporre per la forma tipica i prescelti covarianti di secondo grado e paragonarli con quelli assunti come dati. Ed anche qui occorrono metodi particolari per esprimere il tutto mediante gli invarianti più semplici. Noi li svilupperemo, in via d'esempio, per le forme di sesto grado, e daremo i tratti principali della teoria di queste forme; il proseguire la via analoga per le forme di grado superiore non ha alcuna difficoltà.

I risultati ottenuti, in quanto riguardano le forme di quinto grado, o sono già noti pei lavori dei signori CAYLEY, SYLVESTER, SALMON, HERMITE, o facilmente deducibili da essi; noi crediamo quindi che per questa parte l'importanza principale stia nell'esposizione sistematica. Ma rispetto alle forme di sesto grado sono state assegnate finora soltanto alcune forme fondamentali (CAYLEY, *Memoirs upon Quantics*) ed in ispecie calcolati gli invarianti (cfr. SALMON, *Higher Algebra*, 2.^a ediz.), senza che siasi tentato di presentare la connessione delle forme, il che invece noi facciamo completamente. Del resto gli invarianti qui prescelti come fondamentali differiscono da quelli usati altrove, essendo nella presente ricerca emersa da sè la necessità di introdurre appunto questi e non altri invarianti.

§ 1.

Forme di quinto grado. Loro forme fondamentali.

La forma binaria:

$$u = ax_1^5 + 5bx_1^4x_2 + 10cx_1^3x_2^2 + 10dx_1^2x_2^3 + 5ex_1x_2^4 + fx_2^5$$

si rappresenti simbolicamente con:

$$u = a_x^5 = a_x'^5 = \dots (a_x = a_1x_1 + a_2x_2, \quad a'_x = a'_1x_1 + a'_2x_2, \dots)$$

Ricavando da u la forma di quarto grado nelle y :

$$\frac{1}{5} \left(x_1 \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right) = a_y^4 \cdot a_x, \quad$$

e formando rispetto ad essa gli invarianti i, j della forma di quarto grado, si ottengono covarianti di secondo e terzo grado. Se con u_i, u_{ik} si indicano sempre derivate divise per $\nu, \nu(\nu-1), \dots$, dove ν è il grado della funzione, sarà:

$$i = 2 \{ u_{1111} u_{2222} - 4 u_{1112} u_{1222} + 3 u_{1122}^2 \} ,$$

$$j = 3 \begin{vmatrix} u_{1111} & u_{1112} & u_{1122} \\ u_{1112} & u_{1122} & u_{1222} \\ u_{1122} & u_{1222} & u_{2222} \end{vmatrix} ,$$

ovvero simbolicamente, posto $a_i b_k - b_i a_k = (a b)_i$:

$$i = i_x^2 = i_x'^2 \dots = (a a')^4 a_x a_x' ,$$

$$j = j_x^2 = j_x'^2 \dots = \frac{1}{2} (a a')^2 (a' a'')^2 (a'' a)^2 a_x a_x' a_x'' .$$

L'espressione simbolica di j può essere trasformata, e si arriva così ad un'altra maniera di generare j . In fatti, se si fa uso dell'equazione simbolica:

$$(a a') a_x'' = (a a'') a_x' - (a' a'') a_x ,$$

j si muta nella somma di due termini che collo scambio di a' ed a diventano perfettamente eguali, onde si può invece dei due termini medesimi porre il doppio dell'uno di essi. Si ha così:

$$j = -(a a') (a' a'')^3 (a a'')^2 a_x^2 a_x' .$$

Sostituendo di nuovo per $(a a'') a_x'$ il suo valore desunto dall'identità superiore, j si divide ancora in due parti:

$$j = -(a a') (a a'') (a' a'')^4 a_x^3 - (a a')^2 (a a'') (a' a'')^3 a_x^2 a_x'' ;$$

la seconda delle quali è $-j$, perchè essa si desume dall'espressione precedente scambiando a' con a'' ; e la prima è, con altro segno, l'espressione simbolica della funzione $u_{11} i_{22} - 2 u_{12} i_{12} + u_{22} i_{11}$; si ha dunque la formola:

$$u_{11} i_{22} - 2 u_{12} i_{12} + u_{22} i_{11} = -2 j ,$$

che somministra una seconda maniera di formare j .

Ma fra u e j sussiste ancora un'altra relazione che è di importanza fondamentale per la teoria. Cioè si annulla identicamente il covariante di secondo grado:

$$u_{111}j_{222} - 3u_{112}j_{122} + 3u_{122}j_{112} - u_{222}j_{111} = (aj)^3 a_x^2.$$

In fatti, se si pone per j l'espressione simbolica:

$$j = -\frac{1}{2}(ai)^2 a_x^3,$$

che risulta dalla sua seconda rappresentazione, il covariante anzidetto assume la forma:

$$(ai)^2 \cdot (aa')^3 \cdot a_x'^2 = \frac{1}{2}(aa')^3 \{ (ai)^2 a_x'^2 - (a'i)^2 a_x^2 \},$$

la quale, per l'identità già considerata:

$$(ai)a_x' - (a'i)a_x = (aa')i_x,$$

diviene:

$$\frac{1}{2}(aa')^4 i_x \{ (ai)a_x' + (a'i)a_x \}.$$

Ma questa non è altra cosa che il determinante funzionale di due funzioni entrambe uguali ad i , epperò è identicamente zero.

Da j scaturisce un secondo covariante quadratico:

$$\tau = 2(j_{11}j_{22} - j_{12}^2) = 2 \begin{vmatrix} j_{111} & j_{112} & x_2^2 \\ j_{112} & j_{122} & -x_1 x_2 \\ j_{122} & j_{222} & x_1^2 \end{vmatrix} = \tau_x^2 \dots = (jj')^2 j_x j_x'.$$

Se questo covariante si combina con i nella forma $\tau + \lambda i$, nei coefficienti del determinante di questa funzione si otterranno gli invarianti indipendenti di u . Cioè, se si pone:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} + \lambda i_{11} & \tau_{12} + \lambda i_{12} \\ \tau_{12} + \lambda i_{12} & \tau_{22} + \lambda i_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 A + 2\lambda B + C,$$

i tre invarianti (i cui ordini sono rispettivamente 4, 8 e 12) saranno:

$$\begin{aligned}
A &= i_{11} i_{22} - i_{12}^2 = \frac{1}{2} (i i')^2, \\
B &= \frac{1}{2} (i_{11} \tau_{22} - 2 i_{12} \tau_{12} + i_{22} \tau_{11}) = \frac{1}{2} (i \tau)^2, \\
C &= \tau_{11} \tau_{22} - \tau_{12}^2 = \frac{1}{2} (\tau \tau')^2.
\end{aligned}$$

Il divisore 2 in B non è che apparente, perchè, in virtù del modo con cui sono formati, $i_{11}, i_{22}, \tau_{11}, \tau_{22}$ sono divisibili per 2.

Inoltre da i e da τ si ricava il covariante:

$$S = i_1 \tau_2 - \tau_1 i_2 = (i \tau) i_x \tau_x = \begin{vmatrix} i_{11} & \tau_{11} & x_2^2 \\ i_{12} & \tau_{12} & -x_1 x_2 \\ i_{22} & \tau_{22} & x_1^2 \end{vmatrix}.$$

L'ultima espressione di S mostra a dirittura che hanno luogo le due equazioni:

$$S_{11} i_{22} - 2 S_{12} i_{12} + S_{22} i_{11} = 0,$$

$$S_{11} \tau_{22} - 2 S_{12} \tau_{12} + S_{22} \tau_{11} = 0.$$

Ma il determinante di S è:

$$\frac{1}{2} (S_{11} S_{22} - 2 S_{12} S_{12} + S_{22} S_{11}),$$

e può per conseguenza essere riprodotto dalla moltiplicazione dei determinanti corrispondenti dei sistemi incompleti:

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{22} \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{22} & -2 i_{12} & i_{11} \\ \tau_{22} & -2 \tau_{12} & \tau_{11} \end{vmatrix},$$

che dà il determinante:

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} i_{11} i_{22} - 2 i_{12} i_{12} + i_{22} i_{11} & i_{11} \tau_{22} - 2 i_{12} \tau_{12} + i_{22} \tau_{11} \\ \tau_{11} i_{22} - 2 \tau_{12} i_{12} + \tau_{22} i_{11} & \tau_{11} \tau_{22} - 2 \tau_{12} \tau_{12} + \tau_{22} \tau_{11} \end{vmatrix}.$$

Si ha dunque la formola:

$$S_{11} S_{22} - S_{12}^2 = A C - B^2.$$

Per rappresentare $\mathcal{S}^2$ in i e τ , si ha in virtù dell'espressione di $\mathcal{S}$ già adoperata:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{22} \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{22} \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{22} & -2i_{12} & i_{11} \\ \tau_{22} & -2\tau_{12} & \tau_{11} \\ x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 \end{vmatrix},$$

ossia, eseguendo la moltiplicazione :

$$\mathcal{S}^2 = \begin{vmatrix} A & B & i \\ B & C & \tau \\ i & \tau & 0 \end{vmatrix},$$

e finalmente :

$$\mathcal{S}^2 = -\{A\tau^2 - 2B\tau i + Ci^2\}.$$

Differenziando questa equazione si trova :

$$\mathcal{S}\mathcal{S}_1 = i_1(B\tau - Ci) - \tau_1(A\tau - Bi),$$

$$\mathcal{S}\mathcal{S}_2 = i_2(B\tau - Ci) - \tau_2(A\tau - Bi),$$

e quindi :

$$\mathcal{S}_1 i_2 - \mathcal{S}_2 i_1 = A\tau - Bi,$$

$$\mathcal{S}_1 \tau_2 - \mathcal{S}_2 \tau_1 = B\tau - Ci.$$

Da ultimo ritornando alle forme i e j , dalla combinazione delle medesime nasce un covariante lineare :

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{1}{2}(i_{11} j_{22} - 2i_{12} j_{12} + i_{22} j_{11}) = \frac{1}{2}(ij)^2 j_x = -\frac{1}{4}(ai)^2 (ai')^2 a_x.$$

Altri covarianti lineari si formano combinando α con i , τ , $\mathcal{S}$ (*); di alcuni fra essi si tratterà ancora più avanti.

(*) Formando il determinante funzionale di ciascun covariante quadratico i con ciascun covariante φ di grado ν , si genera un altro covariante dello stesso grado. Ma si possono formare nuovi covarianti dello stesso grado ν anche differenziando φ rispetto ai coefficienti della funzione primitiva u di grado n e mettendo invece delle differen-

§ 2.

Relazioni fra gli invarianti.

L'equazione:

$$\mathfrak{S}^2 = - \{ A \tau^2 - 2 B \tau i + C i^2 \}$$

somministra incontanente la rappresentazione del quadrato dell'invariante (di HERMITE) del 18.^o ordine mediante gli invarianti A, B, C . In fatti, se in $\mathfrak{S}$, τ ed i poniamo per x_1, x_2 i coefficienti $\alpha_2, -\alpha_1$ del covariante lineare α , allora $\mathfrak{S}$ si cambia nell'invariante del 18.^o ordine:

$$2R = \begin{vmatrix} i_{11} & \tau_{11} & \alpha_1^2 \\ i_{12} & \tau_{12} & \alpha_1 \alpha_2 \\ i_{22} & \tau_{22} & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = \mathfrak{S}_{11} \alpha_1^2 - 2 \mathfrak{S}_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \mathfrak{S}_{22} \alpha_2^2,$$

ziali i coefficienti della forma $u_1 i_2 - i_1 u_2$, che è parimente di grado n . Allora si presenta la notevole circostanza che i due processi conducono al medesimo risultato. Sia in fatti la funzione data:

$$u = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n \cdot n-1}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots;$$

le equazioni differenziali parziali soddisfatte dal covariante φ si possono, secondo il signor ARONHOLD, porre sotto la forma simbolica:

$$\begin{aligned} \xi_1 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \lambda \varphi, & \xi_2 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 0, \\ \xi_1 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0, & \xi_2 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \lambda \varphi, \end{aligned}$$

introducendo le equazioni simboliche:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = \xi_1^n, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = n \cdot \xi_1^{n-1} \xi_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = \frac{n \cdot n-1}{2} \xi_1^{n-2} \xi_2^2, \text{ ecc.}$$

Indicati ora con $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ i coefficienti della forma $u_1 i_2 - i_1 u_2$, corrispondenti agli a , consideriamo la nuova forma nascente da φ :

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} \alpha_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \alpha_1 + \dots,$$

mentre i e τ diventano gli invarianti del 12.^o e del 16.^o ordine:

$$2M = i_{11} \alpha_2^2 - 2i_{12} \alpha_1 \alpha_2 + i_{22} \alpha_1^2,$$

$$2N = \tau_{11} \alpha_2^2 - 2\tau_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \tau_{22} \alpha_1^2.$$

Dunque dall'equazione superiore si ha la relazione fra R, M, N :

$$R^2 = - \{ AN^2 - 2BMN + CM^2 \}.$$

Resta soltanto ad esprimere M ed N per mezzo di A, B, C , ciò che si fa razionalmente.

Se le forme α, i, j , che sono rispettivamente del primo, secondo e terzo grado, si riguardano come indipendenti fra loro, competono ad esse cinque invarianti indipendenti i quali sono gli invarianti A, B, C, M, N .

Se si fa uso solamente della circostanza che α nasce da i e j , considerando però ancora i coefficienti di i e j come indipendenti, ne segue una relazione fra i cinque invarianti, ed in vero si vede facilmente che essa consiste in una rappresentazione di N per mezzo di A, B, C . Si ottiene questa relazione nel modo seguente.

La forma N non è che $\frac{1}{2}\tau$, dove x_1, x_2 siano surrogate da $\alpha_2, -\alpha_1$, cioè si ha:

$$N = \begin{vmatrix} j_{111} \alpha_2 - j_{112} \alpha_1 & j_{112} \alpha_2 - j_{122} \alpha_1 \\ j_{112} \alpha_2 - j_{122} \alpha_1 & j_{122} \alpha_2 - j_{222} \alpha_1 \end{vmatrix},$$

la quale per mezzo delle sostituzioni simboliche si trasforma manifestamente in:

$$\alpha_0 \zeta_1^n + n \alpha_1 \zeta_1^{n-1} \zeta_2 + \dots = (u_1 i_2 - i_2 u_1)_{\zeta},$$

per modo che si ha simbolicamente:

$$\psi = (i_{12} \zeta_1 + i_{22} \zeta_2) u_1(\zeta) - (i_{11} \zeta_1 + i_{12} \zeta_2) u_2(\zeta),$$

ovvero, per le equazioni differenziali parziali soddisfatte da φ :

$$\psi = \frac{1}{n} \left(i_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = \frac{\nu}{n} \left(i_2 \varphi_1 - i_1 \varphi_2 \right).$$

Si ha dunque il teorema:

Se si differenzia un covariante φ di grado ν rispetto ai coefficienti della funzione u di grado n , dalla quale esso trae origine, e se invece delle differenziali si pongono i coefficienti della forma $u_1 i_2 - i_1 u_2$, dove i è un covariante quadratico qualsivoglia, si ottiene il covariante $\varphi_1 i_2 - i_1 \varphi_2$ moltiplicato per $\frac{\nu}{n}$.

vale a dire, N è il determinante della forma di secondo grado:

$$j_1 \alpha_2 - j_2 \alpha_1 = j_x^2(j\alpha),$$

la quale, mercè l'introduzione dell'espressione simbolica di α assume successivamente le forme:

$$\begin{aligned} j_x^2(j\alpha) &= \frac{1}{2} j_x^3(jj')(j'i)^2 \\ &= \frac{1}{4} (jj') \{ j_x^2(j'i)^2 - j_x'^2(ji)^2 \} \\ &= -\frac{1}{4} (jj')^2 i_x \{ (ji)j'_x + (j'i)j_x \} \\ &= \frac{1}{2} (i\tau) i_x \tau_x = \frac{1}{2} \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Dunque N è il determinante di $\mathfrak{S}$, diviso per 4, cioè si ha:

$$N = \frac{1}{4} (A C - B^2).$$

Se poi, in secondo luogo, si considera inoltre che i e j sono composti coi coefficienti della medesima forma di quinto grado, si ottiene una seconda relazione che serve ad esprimere M per mezzo di A, B, C .

A quest'uopo cominciamo dal considerare la forma cubica:

$$v = u_{11} \tau_{22} - 2 u_{12} \tau_{12} + u_{22} \tau_{11} = a_x^3 (a\tau)^2.$$

che è di un'importanza primaria anche per ciò che segue. Il prodotto:

$$A j = \frac{1}{4} (ii')^2 (aa')^2 (aa'')^2 (a'a'')^2 a_x a_x' a_x'',$$

per mezzo dell'equazione:

$$(ii')^2 (aa')^2 = \{ (ai)(a'i') - (a'i)(ai') \}^2,$$

che scaturisce dalla relazione identica già usata più volte, e riunendo i termini identici, si trasforma in:

$$A j = \frac{1}{2} \{ (ai)^2 (a'i')^2 - (ai)(a'i')(a'i)(a'i') \} (aa'')^2 (a'a'')^2 a_x a_x' a_x''.$$

Inoltre dalle identità:

$$\begin{aligned} (ai)(a'a'') + (aa')(a''i) + (aa'')(i'a') &= 0, \\ (ai')(a'a'') + (aa')(a''i') + (aa'')(i'a') &= 0 \end{aligned}$$

seguono le equazioni:

$$\begin{aligned} 2(ai)(a'i)(aa'')(a'a'') &= (ai)^2(a'a'')^2 + (a'i)^2(aa'')^2 - (aa')^2(a''i)^2, \\ 2(ai')(a'i')(aa'')(a'a'') &= (ai')^2(a'a'')^2 + (a'i')^2(aa'')^2 - (aa')^2(a''i')^2; \end{aligned}$$

e trasformando, mediante queste equazioni, la seconda parte dell'espressione precedente di Aj , si trova, dopo aver riuniti i termini identici:

$$Aj = -\frac{3}{8}(ai)^2(ai')^2(a'a'')^4 a_x a_x' a_x'' + \frac{3}{4}(ai)^2(a'i')^2(aa'')^2(a'a'')^2 a_x a_x' a_x''.$$

La prima parte del secondo membro non è altro che $\frac{3}{2} ai$; la seconda parte, in virtù della seconda formola per j , può essere surrogata da:

$$3(ja)^2(j'a)^2 a_x j_x j_x',$$

e quindi trasformata mediante l'equazione:

$$(ja)j'_x = (jj')a_x - (j'a)j_x,$$

omettendovi la seconda parte contenente $(j'a)^3$, a cagione della relazione fra u e j . Si trova così per quella parte l'espressione:

$$\begin{aligned} 3(ja)(j'a)^2(jj')a_x^2 j_x &= \frac{3}{2}(ja)(j'a)(jj')a_x^2 \{ (j'a)j_x - (ja)j_x' \} \\ &= -\frac{3}{2}(ja)(j'a)(jj')^2 a_x^3 = -\frac{3}{2}(\tau a)^2 a_x^3. \end{aligned}$$

Questa è la forma cercata, e si ha perciò l'importante equazione:

$$u_{11}\tau_{22} - 2u_{12}\tau_{12} + u_{22}\tau_{11} = -\frac{2}{3}Aj + ia.$$

Cerchiamo ora che cosa avvenga di questa equazione, se in luogo delle potenze delle x vi si introducano, in ordine rovesciato e coi segni cambiati, i coefficienti della forma cubica:

$$3(i_1 j_2 - j_1 i_2) = 3(ij)i_x j_x^2.$$

Il primo membro diviene:

$$3(a\tau)^2(ij)(ia)(ja)^2 = -3(a\tau)(ia)(ja)^2 \{ (ai)(j\tau) - (aj)(\tau i) \},$$

ovvero, omessa la parte moltiplicata per $(ja)^3$:

$$3(a\tau)(ai)^2(ja)^2(j\tau) = -6(j'\tau)(jj')^2(j\tau) = -6(\tau\tau')^2 = -6C.$$

Poi da j si ricava:

$$3(ij)(ij')(jj')^2 = 3(i\tau)^2 = 3B.$$

Finalmente la combinazione di $i\alpha$ colla funzione $3(i_1j_2 - j_1i_2)$ dà:

$$(ij)\{2(ii')(ji')(j\alpha) + (ji')^2(i\alpha)\}.$$

La prima parte di questa espressione è identicamente nulla, perchè essa muta di segno se si scambia j con j' . La seconda è:

$$(i\alpha)^2 = 2M.$$

Dunque, in seguito a queste operazioni, l'equazione proposta diviene:

$$-6C = -2AB + 2M,$$

onde si ottiene per M il valore:

$$M = AB - 3C,$$

e questa è la seconda relazione fra gli invarianti.

§ 3.

Forme tipiche per $i, \tau, \mathfrak{S}, j$.

Se si forma il determinante funzionale di α e di un covariante quadratico, ne risulta un nuovo covariante lineare. Siccome α è del 5° ordine nei coefficienti di u , così le combinazioni di α con $i, \tau, \mathfrak{S}$ danno covarianti lineari degli ordini 7, 5, 13. Fra essi l'ultimo ha una particolare importanza, ed è appropriato ad essere introdotto nelle forme tipiche, essendo la differenza del suo ordine con quello di α divisibile per 4; d'onde segue che, se si assumono α e:

$$\gamma = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}_1\alpha_2 - \alpha_1\mathfrak{S}_2),$$

come variabili nella composizione delle forme tipiche, gli ordini dei coefficienti dei singoli termini saranno tutti numeri congrui rispetto al modulo 4, e conseguentemente l'invariante del 18° ordine, il quale è espresso irrazionalmente per mezzo degli altri non può entrare nei coefficienti. Invece esso è il determinante della trasformazione, avendosi:

$$\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 = R.$$

Prima di tutto esprimiamo i , τ e $\mathcal{S}$ per mezzo di α e γ .

Dalle formole:

$$\gamma = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,$$

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

segue:

$$R \cdot x_1 = \gamma \alpha_2 - \gamma_2 \alpha,$$

$$R \cdot x_2 = -\gamma \alpha_1 + \gamma_1 \alpha,$$

e per una qualsivoglia forma di grado ν :

$$\phi = (\phi_1 x_1 + \phi_2 x_2)^\nu$$

si ottiene l'espressione simbolica:

$$\begin{aligned} R^\nu \phi &= [(\phi_1 \alpha_2 - \phi_2 \alpha_1) \gamma - (\phi_1 \gamma_2 - \phi_2 \gamma_1) \alpha]^\nu \\ &= \phi_{\alpha^\nu} \cdot \gamma^\nu - \frac{\nu}{1} \cdot \phi_{\alpha^{\nu-1} \gamma} \cdot \gamma^{\nu-1} \alpha + \frac{\nu \cdot \nu - 1}{1 \cdot 2} \phi_{\alpha^{\nu-2} \gamma^2} \cdot \gamma^{\nu-2} \alpha^2 + \dots \end{aligned}$$

In particolare quindi sarà:

$$R^2 \cdot \mathcal{S} = \mathcal{S}_{\alpha\alpha} \cdot \gamma^2 - 2\mathcal{S}_{\alpha\gamma} \cdot \alpha\gamma + \mathcal{S}_{\gamma\gamma} \cdot \alpha^2,$$

$$R^2 \cdot i = i_{\alpha\alpha} \cdot \gamma^2 - 2i_{\alpha\gamma} \cdot \alpha\gamma + i_{\gamma\gamma} \cdot \alpha^2,$$

$$R^2 \cdot \tau = \tau_{\alpha\alpha} \cdot \gamma^2 - 2\tau_{\alpha\gamma} \cdot \alpha\gamma + \tau_{\gamma\gamma} \cdot \alpha^2.$$

I coefficienti si determinano come segue. In primo luogo, per la definizione degli invarianti R , M , N , è:

$$\mathcal{S}_{\alpha\alpha} = 2R, \quad i_{\alpha\alpha} = 2M, \quad \tau_{\alpha\alpha} = 2N.$$

Poi, se ϕ esprime una qualunque delle funzioni i , τ , $\mathcal{S}$, si ha:

$$\phi_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \phi_{11} \alpha_2 - \phi_{12} \alpha_1 & \mathcal{S}_{11} \alpha_2 - \mathcal{S}_{12} \alpha_1 \\ \gamma_{12} \alpha_2 - \phi_{22} \alpha_1 & \mathcal{S}_{12} \alpha_2 - \mathcal{S}_{22} \alpha_1 \end{vmatrix},$$

cioè $\phi_{\alpha\gamma}$ è la metà del determinante funzionale di ϕ e $\mathcal{S}$, ove pongansi α_2 , — α_1 invece di x_1 , x_2 . Perciò dalla espressione di questo determinante funzionale, superiormente data, si ha:

$$\mathcal{S}_{\alpha\gamma} = 0, \quad i_{\alpha\gamma} = -(AN - BM), \quad \tau_{\alpha\gamma} = -(BN - CM).$$

Le due combinazioni:

$$S = AN - BM, \quad T = CM - BN,$$

che sono le metà delle derivate di $-R^2$ rispetto ad M ed N , sembrano abbastanza importanti per giustificare una particolare notazione. Per mezzo di questa abbiamo:

$$\mathfrak{S}_{\alpha\gamma} = 0, \quad i_{\alpha\gamma} = -S, \quad \tau_{\alpha\gamma} = T.$$

Da ultimo si trovano $\mathfrak{S}_{\gamma\gamma}$, $i_{\gamma\gamma}$, $\tau_{\gamma\gamma}$, applicando le equazioni:

$$\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{22} - \mathfrak{S}_{12}^2 = AC - B^2,$$

$$\mathfrak{S}_{11}i_{22} + \mathfrak{S}_{22}i_{11} - 2\mathfrak{S}_{12}i_{12} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{11}\tau_{22} + \mathfrak{S}_{22}\tau_{11} - 2\mathfrak{S}_{12}\tau_{12} = 0$$

alla forma tipica, onde esse diventano:

$$\mathfrak{S}_{\alpha\alpha}\mathfrak{S}_{\gamma\gamma} - \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}^2 = R^2(AC - B^2) = 4NR^2,$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha\alpha}i_{\gamma\gamma} - 2\mathfrak{S}_{\alpha\gamma}i_{\alpha\gamma} + \mathfrak{S}_{\gamma\gamma}i_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha\alpha}\tau_{\gamma\gamma} - 2\mathfrak{S}_{\alpha\gamma}\tau_{\alpha\gamma} + \mathfrak{S}_{\gamma\gamma}\tau_{\alpha\alpha} = 0.$$

Di qui si desume:

$$\mathfrak{S}_{\gamma\gamma} = 2NR, \quad i_{\gamma\gamma} = -2NM, \quad \tau_{\gamma\gamma} = -2N^2,$$

epperò le forme tipiche di $\mathfrak{S}$, i , τ sono le seguenti:

$$\frac{1}{2}R\mathfrak{S} = \gamma^2 + N\alpha^2,$$

$$\frac{1}{2}R^2i = M(\gamma^2 - N\alpha^2) + Sa\gamma,$$

$$\frac{1}{2}R^2\tau = N(\gamma^2 - N\alpha^2) - Ta\gamma.$$

Queste equazioni danno:

$$\gamma^2 + N\alpha^2 = \frac{R\mathfrak{S}}{2},$$

$$\gamma^2 - N\alpha^2 = -\frac{S\tau + Ti}{2},$$

$$a\gamma = \frac{M\tau - Ni}{2},$$

dove si è adoperata soltanto la:

$$MT + NS = -R^2.$$

Di qui si vede che α e γ possono anche essere definiti come i fattori razionali della combinazione $M\tau - Ni$. E finalmente dalle stesse equazioni segue:

$$N\alpha^2 = \frac{R\mathfrak{S} + Ti + S\tau}{4},$$

$$\gamma^2 = \frac{R\mathfrak{S} - Ti - S\tau}{4},$$

$$\alpha\gamma = \frac{M\tau - Ni}{2}.$$

Ora queste equazioni possono anzitutto essere utilizzate per determinare la forma tipica di j . Sebbene questa determinazione non sia necessaria per ciò che segue, tuttavia essa è degna d'attenzione per sè stessa, in quanto che serve già a mettere in chiaro il metodo generale di queste composizioni.

Posto, dietro le cose premesse:

$$R^2 \cdot j = j_{\alpha^3} \cdot \gamma^3 - 3j_{\alpha^2\gamma} \cdot \gamma^2\alpha + 3j_{\alpha\gamma^2} \cdot \gamma\alpha^2 - j_{\gamma^3} \cdot \alpha^3,$$

si ha anche:

$$R \cdot j_{\alpha\alpha} = R[j_{11}\alpha_2^2 - 2j_{12}\alpha_1\alpha_2 + j_{22}\alpha_1^2] = j_{\alpha^3} \cdot \gamma - j_{\alpha^2\gamma} \cdot \alpha,$$

$$R \cdot j_{\alpha\gamma} = R[j_{11}\alpha_2\gamma_2 - j_{12}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + j_{22}\alpha_1\gamma_1] = j_{\alpha^2\gamma} \cdot \gamma - j_{\alpha\gamma^2} \cdot \alpha,$$

$$R \cdot j_{\gamma\gamma} = R[j_{11}\gamma_2^2 - 2j_{12}\gamma_1\gamma_2 + j_{22}\gamma_1^2] = j_{\alpha\gamma^2} \cdot \gamma - j_{\gamma^3} \cdot \alpha.$$

Dunque se nelle formole superiori esprimenti $\alpha^2, \gamma^2, \alpha\gamma$, in luogo di x_1^2, x_1x_2, x_2^2 si pongono le quantità $j_{22}, -j_{12}, j_{11}$, si otterrà:

$$N(j_{\alpha^3} \cdot \gamma - j_{\alpha^2\gamma} \cdot \alpha) = \frac{R}{4}(Rj_{\mathfrak{g}} + Tj_i + Sj_{\mathfrak{r}}),$$

$$j_{\alpha^2\gamma} \cdot \gamma - j_{\alpha\gamma^2} \cdot \alpha = \frac{R}{2}(Mj_{\mathfrak{r}} - Nj_i),$$

$$j_{\alpha\gamma^2} \cdot \gamma - j_{\gamma^3} \cdot \alpha = \frac{R}{4}(Rj_{\mathfrak{g}} - Tj_i - Sj_{\mathfrak{r}}),$$

dove si è posto per brevità:

$$\begin{aligned} j_s &= \mathfrak{S}_{11} j_{22} - 2\mathfrak{S}_{12} j_{12} + \mathfrak{S}_{12} j_{11}, \\ j_i &= i_{11} j_{22} - 2i_{12} j_{12} + i_{22} j_{11}, \\ j_\tau &= \tau_{11} j_{22} - 2\tau_{12} j_{12} + \tau_{22} j_{11}. \end{aligned}$$

La seconda di queste funzioni è 2α ; la terza, come covariante lineare della forma cubica j , è identicamente nulla; la prima sia $\frac{p\gamma + q\alpha}{R}$. Allora le equazioni superiori, eguagliando i coefficienti, danno:

$$\begin{aligned} Nj_{\alpha^3} &= \frac{pR}{4}, & j_{\alpha^2\gamma} &= 0, & j_{\alpha\gamma^2} &= \frac{pR}{4}, \\ Nj_{\alpha^2\gamma} &= -\left(\frac{q}{4} + \frac{T}{2}\right)R, & j_{\alpha\gamma^2} &= NR, & j_{\gamma^3} &= -\left(\frac{q}{4} - \frac{T}{2}\right)R. \end{aligned}$$

Dal confronto di queste formole segue:

$$q = -2T, \quad p = 4N,$$

$$j_{\alpha^3} = R, \quad j_{\alpha^2\gamma} = 0, \quad j_{\alpha\gamma^2} = NR, \quad j_{\gamma^3} = TR,$$

epperò la forma tipica di j sarà:

$$R^3.j = \gamma^3 + 3N\gamma\alpha^2 - T\alpha^3.$$

§ 4.

Rappresentazione di u .

La rappresentazione di u si ottiene in modo analogo a quella di j . A quest' uopo cominciamo dal formare le equazioni:

$$\begin{aligned} N^2\alpha^4 &= \frac{(R\mathfrak{S} + \varphi)^2}{16}, & \alpha^2\gamma^2 &= \frac{\psi^2}{4}, \\ N\alpha^3\gamma &= \frac{(R\mathfrak{S} + \varphi)\psi}{8}, & \alpha\gamma^3 &= \frac{(R\mathfrak{S} - \varphi)\psi}{8}, \\ N\alpha^2\gamma^2 &= \frac{R^2\mathfrak{S}^2 - \varphi^2}{16}, & \gamma^4 &= \frac{(R\mathfrak{S} - \varphi)^2}{16}, \end{aligned}$$

dove per brevità si è posto:

$$\phi = Ti + S\tau, \quad \psi = M\tau - Ni.$$

Ora rappresentando la forma tipica di u coll'equazione:

$$R^5 \cdot u = u_{\alpha^5} \cdot \gamma^5 - 5u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma^4 \alpha + 10u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma^3 \alpha^2 - 10u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma^2 \alpha^3 + 5u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma \alpha^4 - u_{\gamma^5} \cdot \alpha^5,$$

si ha di nuovo:

$$\begin{aligned} u_{\alpha^5} \cdot \gamma - u_{\alpha^4\gamma} \cdot \alpha &= R[u_{1111} \alpha_2^4 - 4u_{1112} \alpha_2^3 \alpha_1 + \dots], \\ u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma - u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \alpha &= R[u_{1111} \alpha_2^3 \gamma_2 - u_{1112} (\alpha_2^3 \gamma_1 + 3\alpha_1 \alpha_2^2 \gamma_2) + \dots], \\ u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha &= R[u_{1111} \alpha_2^2 \gamma_2^2 - 2u_{1112} (\alpha_2^2 \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2 \alpha_1 \alpha_2) + \dots], \\ u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma - u_{\alpha\gamma^4} \cdot \alpha &= R[u_{1111} \alpha_2 \gamma_2^3 - u_{1112} (\alpha_1 \gamma_2^3 + 3\alpha_2 \gamma_1 \gamma_2^2) + \dots], \\ u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma - u_{\gamma^5} \cdot \alpha &= R[u_{1111} \gamma_2^4 - u_{1112} \gamma_2^3 \gamma_1 + \dots]; \end{aligned}$$

i termini fra parentesi nel secondo membro si ottengono surrogando le potenze delle x in α^4 , $\alpha^3\gamma$, ecc., colle quantità u_{1111} , $-u_{1112}$, $\dots$. Introducendo le notazioni:

$$u_{\phi} = u_{11} \phi_{22} - 2u_{12} \phi_{12} + u_{22} \phi_{11}, \text{ ecc.}$$

$$u_{\phi\psi} = u_{\psi\phi} = (u_{\phi})_{11} \psi_{22} - 2(u_{\phi})_{12} \psi_{12} + (u_{\phi})_{22} \psi_{11}, \text{ ecc.}$$

si hanno, per la determinazione dei coefficienti della forma tipica, le equazioni seguenti:

$$N^2(u_{\alpha^5} \cdot \gamma - u_{\alpha^4\gamma} \cdot \alpha) = \frac{R}{16} (R^2 u_{\phi\phi} + 2R u_{\phi\psi} + u_{\psi\psi}),$$

$$N(u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma - u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \alpha) = \frac{R}{8} (R u_{\phi\psi} + u_{\psi\psi}),$$

$$N(u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha) = \frac{R}{16} (R^2 u_{\phi\phi} - u_{\psi\psi}),$$

$$(u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha) = \frac{R}{4} u_{\psi\psi},$$

$$u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma - u_{\alpha\gamma^4} \cdot \alpha = \frac{R}{8} (R u_{\phi\psi} - u_{\psi\psi}),$$

$$u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma - u_{\gamma^5} \cdot \alpha = \frac{R}{16} (R^2 u_{\phi\phi} - 2R u_{\phi\psi} + u_{\psi\psi}).$$

Il confronto della terza colla quarta equazione dà:

$$R^2 u_{ss} = u_{qq} + 4N u_{\psi\psi},$$

cnde le sei equazioni precedenti possono essere sostituite dalle cinque seguenti:

$$N^2 (u_{\alpha^5} \cdot \gamma - u_{\alpha^4\gamma} \cdot \alpha) = \frac{R}{8} (2N u_{\psi\psi} + u_{qq} + R u_{sq}),$$

$$N (u_{\alpha^4\gamma} \cdot \gamma - u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \alpha) = \frac{R}{8} (R u_{sq} + u_{q\psi}),$$

$$u_{\alpha^3\gamma^2} \cdot \gamma - u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \alpha = \frac{R}{4} \cdot u_{\psi\psi},$$

$$u_{\alpha^2\gamma^3} \cdot \gamma - u_{\alpha\gamma^4} \cdot \alpha = \frac{R}{8} (R u_{sq} - u_{q\psi}),$$

$$u_{\alpha\gamma^4} \cdot \gamma - u_{\gamma^5} \cdot \alpha = \frac{R}{8} (2N u_{\psi\psi} + u_{qq} - R u_{sq}).$$

Dei cinque covarianti lineari:

$$u_{\psi\psi} = a_{\psi\psi} \gamma - b_{\psi\psi} \alpha, \quad u_{q\psi} = a_{q\psi} \gamma - b_{q\psi} \alpha, \quad u_{qq} = a_{qq} \gamma - b_{qq} \alpha,$$

$$R u_{sq} = a_{sq} \gamma - b_{sq} \alpha, \quad R u_{s\psi} = a_{s\psi} \gamma - b_{s\psi} \alpha$$

due possono essere espressi mediante gli altri tre. In fatti il confronto dei coefficienti nelle cinque equazioni superiori dà:

$$N^2 u_{\alpha^5} = \frac{R}{8} (2N a_{\psi\psi} + a_{qq} + a_{sq}), \quad N^2 u_{\alpha^4\gamma} = \frac{R}{8} (2N b_{\psi\psi} + b_{qq} + b_{sq}),$$

$$N u_{\alpha^4\gamma} = \frac{R}{8} (a_{sq} + a_{q\psi}), \quad N u_{\alpha^3\gamma^2} = \frac{R}{8} (b_{sq} + b_{q\psi}),$$

$$u_{\alpha^3\gamma^2} = \frac{R}{4} a_{\psi\psi}, \quad u_{\alpha^2\gamma^3} = \frac{R}{4} b_{\psi\psi},$$

$$u_{\alpha^2\gamma^3} = \frac{R}{8} (a_{sq} - a_{q\psi}), \quad u_{\alpha\gamma^4} = \frac{R}{8} (b_{sq} - b_{q\psi}),$$

$$u_{\alpha\gamma^4} = \frac{R}{8} (2N a_{\psi\psi} + a_{qq} - a_{sq}), \quad u_{\gamma^5} = \frac{R}{8} (2N b_{\psi\psi} + b_{qq} - b_{sq}),$$

Si ha per conseguenza:

$$2Nb_{\psi\psi} + b_{\varphi\varphi} + b_{\varphi\psi} = N(a_{\varphi\psi} + a_{\psi\psi}),$$

$$b_{\varphi\psi} + b_{\psi\varphi} = 2Na_{\psi\psi},$$

$$2b_{\psi\psi} = a_{\varphi\psi} - a_{\psi\varphi},$$

$$b_{\varphi\psi} - b_{\psi\varphi} = 2Na_{\psi\psi} + a_{\varphi\varphi} - a_{\psi\psi}.$$

Queste equazioni forniscono i valori:

$$a_{\varphi\psi} = 2b_{\psi\psi} + a_{\psi\varphi}, \quad a_{\psi\varphi} = 2b_{\varphi\psi} + a_{\varphi\varphi},$$

$$b_{\varphi\psi} = 2Na_{\psi\psi} - b_{\psi\varphi}, \quad b_{\psi\varphi} = 2Na_{\varphi\psi} - b_{\varphi\varphi},$$

introducendo i quali si hanno pei richiesti coefficienti le espressioni:

$$Nu_{\alpha^2\beta} = \frac{R}{4}(Na_{\psi\psi} + a_{\varphi\varphi} + b_{\varphi\psi}),$$

$$Nu_{\alpha^4\gamma} = \frac{R}{4}(b_{\psi\psi} + a_{\varphi\psi}),$$

$$u_{\alpha^3\gamma^2} = \frac{R}{4}a_{\psi\psi},$$

$$u_{\alpha^2\gamma^3} = \frac{R}{4}b_{\psi\psi},$$

$$u_{\alpha\gamma^4} = \frac{R}{4}(Na_{\psi\psi} - b_{\varphi\psi}),$$

$$u_{\gamma^5} = \frac{R}{4}(Nb_{\psi\psi} + b_{\varphi\varphi} - Na_{\varphi\psi}).$$

Finalmente rimane ad esprimere i covarianti $u_{\varphi\varphi}$, $u_{\varphi\psi}$, $u_{\psi\psi}$ per mezzo di α e γ . Per la definizione di ϕ e ψ si ha:

$$u_{\varphi\varphi} = T^2u_{ii} + 2STu_{it} + S^2u_{tt},$$

$$u_{\varphi\psi} = -NTu_{ii} + (MT - NS)u_{it} + MSu_{tt},$$

$$u_{\psi\psi} = N^2u_{ii} - 2MNU_{it} + M^2u_{tt}.$$

Inoltre, per le cose precedenti, è:

$$u_i = -2j, \quad u_t = -\frac{2Aj}{3} + i\alpha^2$$

dunque :

$$u_{ii} = -2j_i = -4\alpha, \quad u_{i\tau} = -2j_\tau = 0,$$

$$u_{\tau\tau} = \frac{2}{3} \{ B\alpha + i_1\alpha_1\tau_{22} - (i_1\alpha_2 + \alpha_1i_2)\tau_{12} + i_2\alpha_2\tau_{11} \}.$$

L'espressione che segue dopo $B\alpha$ fra le parentesi ha la forma simbolica $i_x(i\tau)(\alpha\tau)$. Ora è evidente che:

$$i_x(i\tau)(\alpha\tau) + \tau_x(i\tau)(\alpha i) = 2\mathfrak{S}_x(\alpha\mathfrak{S}) = -4\gamma,$$

$$i_x(i\tau)(\alpha\tau) - \tau_x(i\tau)(\alpha i) = \alpha_x(i\tau)^2 = 2B\alpha;$$

dunque :

$$i_x(i\tau)(\alpha\tau) = B\alpha - 2\gamma,$$

e :

$$u_{\tau\tau} = \frac{4}{3} (B\alpha - \gamma).$$

Quindi anche :

$$u_{\varphi\varphi} = -4\alpha T^2 + \frac{4}{3} (B\alpha - \gamma) S^2,$$

$$u_{\varphi\psi} = 4\alpha NT + \frac{4}{3} (B\alpha - \gamma) MS,$$

$$u_{\psi\psi} = -4\alpha N^2 + \frac{4}{3} (B\alpha - \gamma) M^2,$$

ossia :

$$a_{\varphi\varphi} = -\frac{4}{3} S^2, \quad a_{\varphi\psi} = -\frac{4}{3} MS, \quad a_{\psi\psi} = -\frac{4}{3} M^2,$$

$$b_{\varphi\varphi} = 4T^2 - \frac{4}{3} BS^2, \quad b_{\varphi\psi} = -4NT - \frac{4}{3} BMS, \quad b_{\psi\psi} = 4N^2 - \frac{4}{3} BM^2.$$

Introducendo questi valori, è facile effettuare la divisione per N e per N^2 nei primi due coefficienti di u . Cioè sarà:

$$u_{\alpha^4\gamma} = R \left(N - \frac{M}{3} \cdot \frac{BM+S}{N} \right) = R \left(N - \frac{AM}{3} \right),$$

$$u_{\alpha^5} = \frac{R}{N^2} \left(-\frac{NM^2}{3} - \frac{S^2}{3} - NT - \frac{BMS}{3} \right) = -\frac{R}{3N} (M^2 + AS + 3T)$$

$$= -\frac{R}{3N} \{ M(M - AB + 3C) + N(A^2 - 3B) \} = R \left(B - \frac{A^2}{3} \right).$$

Per conseguenza i coefficienti di u sono:

$$\begin{aligned} u_{\alpha^5} &= R \left(B - \frac{A^2}{3} \right), & u_{\alpha^4 \gamma} &= R \left(N - \frac{AM}{3} \right), \\ u_{\alpha^3 \gamma^2} &= -\frac{RM^2}{3}, & u_{\alpha^2 \gamma^3} &= R \left(N^2 - \frac{BM^2}{3} \right), \\ u_{\alpha \gamma^4} &= R \left(NT - \frac{MN - BS}{3} M \right), & u_{\gamma^5} &= R \left(N^3 + T^2 + \frac{NMS - BM^2 N - BS^2}{3} \right), \end{aligned}$$

e la forma tipica di u sarà:

$$\begin{aligned} R^4 \cdot u &= \left(B - \frac{A^2}{3} \right) \gamma^5 - 5 \left(N - \frac{AM}{3} \right) \gamma^4 \alpha - 10 \frac{M^2}{3} \gamma^3 \alpha^2 - 10 \left(N^2 - \frac{BM^2}{3} \right) \gamma^2 \alpha^3 + \\ &+ 5 \left(NT - \frac{MN - BS}{3} M \right) \gamma \alpha^4 - \left(N^3 + T^2 + \frac{NMS - BM^2 N - BS^2}{3} \right) \alpha^5. \end{aligned}$$

§ 5.

Caso eccezionale: $R=0$. Seconda forma tipica.

La rappresentazione tipica di u che precede è sempre possibile, purchè R non sia zero. Se R è zero, per ottenere la forma tipica, bisogna invece di γ scegliere un altro covariante. Tale è il seguente derivato da i :

$$\beta = \frac{1}{2} (i_1 \alpha_2 - \alpha_1 i_2),$$

ed il determinante della trasformazione è in questo caso:

$$\beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 = M.$$

La forma tipica di u sarà allora:

$$M^5 \cdot u = u_{\alpha^5} \cdot \beta^5 - 5 u_{\alpha^4 \beta} \cdot \beta^4 \alpha + 10 u_{\alpha^3 \beta^2} \cdot \beta^3 \alpha^2 - 10 u_{\alpha^2 \beta^3} \cdot \beta^2 \alpha^3 + 5 u_{\alpha \beta^4} \cdot \beta \alpha^4 - u_{\beta^5} \cdot \alpha^5.$$

Noi la svilupperemo in generale, senza supporre da principio la condizione $R=0$. Per convincersi che questa condizione semplificherà molto l'espressione di $M^5 u$, basta enumerare le dimensioni; donde segue che u_{α^5} , $u_{\alpha^3 \beta^2}$, $u_{\alpha \beta^4}$ contengono il fattore R , epperò si annullano con esso; cioè se $R=0$, α è un fattore di u , ed il rimanente fattore di quarto grado non

contiene che i quadrati di α e β . Dunque l'equazione $u=0$ ha allora un fattore razionale conosciuto α , e l'equazione $\frac{u}{\alpha}=0$ è risolubile mediante radici quadrate.

Per cercare, indipendentemente dalla condizione $R=0$, l'espressione tipica di M^3u , mediante α e β , noi possiamo tenere precisamente la stessa strada seguita dianzi, così che non sarà necessario di indicare di nuovo completamente tutti i passaggi. Da prima si trova:

$$\begin{aligned}\frac{Mi}{2} &= \beta^3 + \frac{A}{4} \alpha^2, \\ \frac{M^2\tau}{2} &= N\beta^2 + R\alpha\beta + \left(\frac{MB}{2} - \frac{AN}{4}\right) \alpha^2, \\ \frac{M^2\mathfrak{S}}{2} &= R\beta^2 - S\alpha\beta + \frac{AR}{4} \alpha^2.\end{aligned}$$

La prima di queste equazioni c'insegna che questa forma tipica ha una assai semplice connessione con quella del sig. HERMITE. In fatti le variabili introdotte dal sig. HERMITE sono i fattori di i , cioè:

$$\beta + \frac{\alpha}{2} \sqrt{-A}, \quad \beta - \frac{\alpha}{2} \sqrt{-A}.$$

Passando poi a comporre j , troviamo:

$$M^3j = R\beta^3 - \frac{3}{2}S\beta^2\alpha - \frac{3AR}{4}\beta\alpha^2 + \left(M^2 + \frac{AS}{8}\right)\alpha^3.$$

E da ultimo pei coefficienti della forma tipica di u si ottiene la serie seguente:

$$\begin{aligned}u_{\alpha^5} &= R\left(B - \frac{A^2}{3}\right), \\ u_{\alpha^4\beta} &= M\left(N - \frac{AM}{3}\right) + \frac{S}{2}\left(B - \frac{A^2}{3}\right), \\ u_{\alpha^3\beta^2} &= -R\left(M + \frac{A}{4}\left(B - \frac{A^2}{3}\right)\right), \\ u_{\alpha^2\beta^3} &= M\left(\frac{A^2M}{12} - \frac{AN}{4} - \frac{S}{2}\right) - \frac{AS}{8}\left(B - \frac{A^2}{3}\right),\end{aligned}$$

$$u_{\alpha^3\beta^4} = R \left(\frac{MA}{2} + \frac{A^2}{16} \left(B - \frac{A^2}{3} \right) \right),$$

$$u_{\beta^5} = M \left(\frac{A^2N}{16} - \frac{A^3M}{48} + \frac{AS}{4} + M^2 \right) + \frac{A^2S}{32} \left(B - \frac{A^2}{3} \right),$$

In particolare, per $R=0$, u ha la rappresentazione seguente:

$$\begin{aligned} M^5 u = & -5\beta^4\alpha \left[M \left(N - \frac{AM}{3} \right) + \frac{S}{2} \left(B - \frac{A^2}{3} \right) \right] \\ & - 10\beta^2\alpha^3 \left[M \left(\frac{A^2M}{12} - \frac{AN}{4} - \frac{S}{2} \right) - \frac{AS}{8} \left(B - \frac{A^2}{3} \right) \right] \\ & - \alpha^5 \left[M \left(\frac{A^2N}{16} - \frac{A^3M}{48} + \frac{AS}{4} + M^2 \right) + \frac{A^2S}{32} \left(B - \frac{A^2}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

§ 6.

Secondo caso d'eccezione: $R=0$, $M=0$.

Nessuna delle precedenti trasformazioni è possibile quando R ed M sono nulli simultaneamente. Per la discussione di questi casi, supponiamo da prima che nessuno dei covarianti α, τ, j, i sia identicamente zero.

Siccome per $M=0$, R si riduce alla forma semplice AN^2 , così dobbiamo cominciare dal distinguere due casi, secondo che è zero A od N , ed invero da prima uno solo di questi invarianti.

1. Se $M=0$, $A=0$, l'espressione di M dà anche $C=0$; invece supporremo che B sia diverso da zero, affinchè non si annulli anche N . In questo caso i e τ sono quadrati, però fra loro differenti; siccome inoltre $M=i_{11}\alpha_2^2 - 2i_{12}\alpha_1\alpha_2 + i_{22}\alpha_1^2$ mostra che i è divisibile per α , così ne segue:

$$i = \rho \cdot \alpha^2, \quad \tau = \sigma \cdot \eta^2,$$

dove η è un'espressione lineare. Essendo poi τ il determinante di j , anche j conterrà η come doppio fattore, cioè sarà:

$$j = \eta^2 (3p\alpha + q\eta).$$

Se ora si considerano α ed η come variabili, il modo col quale j è generato mediante i ed u , dà per quest'ultima forma la condizione che $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ sia proporzionale a j ; dunque:

$$u = p' \alpha^5 + 5 q' \alpha^4 \eta + 5 r' \alpha \eta^4 + s' \eta^5 .$$

Ricavando di qui i e ponendolo proporzionale ad α^2 , si trova:

$$\frac{1}{2} \rho \alpha^2 = p' r' . \alpha^2 + (p' s' - 3 q' r') \alpha \eta + q' s' . \eta^2 .$$

I coefficienti p' ed r' non possono essere nulli, dunque $s' = 0$, $q' = 0$. Cioè in questo caso è:

$$u = \alpha (p' \alpha^4 + r' \eta^4) .$$

2. Se $M = 0$, $N = 0$, i e τ hanno il fattore comune α ; e fra gli invarianti sussistono le equazioni:

$$A B = 3 C , \quad A C = B^2 ,$$

cioè $B = 0$, $C = 0$, oppure $C = \frac{A^3}{9}$ e $B = \frac{A^2}{3}$.

L'invariante A si suppone diverso da zero, per non ricadere nel caso antecedente.

1) $B = 0$, $C = 0$. Qui τ è un quadrato, $\tau = \rho . \alpha^2$, ed i ha il fattore α ed un altro fattore diverso da α , cioè $i = \sigma . \alpha \eta$. Quindi j è della forma:

$$j = \alpha^2 (p \alpha + 3 q \eta) .$$

Allora l'equazione che definisce j per mezzo di u ed i , mostra che $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \eta}$ è proporzionale a j , epperò u avrà la forma:

$$u = p' \alpha^5 + 5 q' \alpha^4 \eta + 10 r' \alpha^3 \eta^2 + s' \eta^5 .$$

Di qui si ricava per i l'espressione:

$$(p' \alpha + q' \eta) s' \eta + 3 r' \alpha^2 ,$$

dunque r' e q' devono essere nulli. Per tal modo si ha finalmente per u la forma:

$$u = p'\alpha^5 + s'\eta^5.$$

Ma allora $j=0$; dunque l'annullarsi di B e C trae necessariamente seco che vi sia qualche covariante identicamente nullo.

2) $C = \frac{A^3}{9}$, $B = \frac{A^2}{3}$. In questo caso, se α non si annulla, τ ed i sono divisibili per α , ma nessuno di essi è un quadrato.

Posto:

$$\tau = 2\rho.\alpha\eta, \quad i = \sigma.\alpha^2 + 2\pi.\alpha\eta,$$

sarà:

$$j = p\alpha^3 + q\eta^3,$$

e se ora da i e j si deriva α , si ottiene $\sigma q\eta$, che in nessun modo può coincidere con α stesso. Dunque è effettivamente impossibile che i e τ siano divisibili per α , senza che α si annulli identicamente: il qual caso sarà esaminato meglio in seguito.

Resta da indagare il caso che si verifichino simultaneamente le ipotesi 1. 2., cioè che A, B, C siano tutti e tre eguali a zero. Allora i e τ sono quadrati non differenti fra loro che per un fattore costante, se pure uno di essi non si annulla. Supposto ancora che α non sia zero, dovrà essere $i = \rho\alpha^2$, $\tau = \sigma\alpha^2$, epperò:

$$j = p\alpha^3 + 3q\alpha^2\eta,$$

e $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ proporzionale a j , onde:

$$u = p'\alpha^5 + 5q'\alpha^4\eta + 10r'\alpha^3\eta^2 + 10s'\alpha^2\eta^3.$$

Formando i , risulta l'espressione:

$$-4(q'\alpha + r'\eta)s'\alpha + 3(r'\alpha + s'\eta)^2;$$

ed affinchè questa sia proporzionale ad α^2 , dev'essere $s'=0$; ma allora in j sarebbe anche $q=0$, e per conseguenza τ identicamente nullo: caso che sarà trattato più tardi.

§ 7.

Casi eccezionali che risultano dall'annullarsi di covarianti.

Studiamo da prima il caso che si annulli α . Allora M, N, R sono eguali a zero. Cominciamo col supporre che τ non sia nullo.

1. Non sia i un quadrato, ma invece $i=2\rho xy$. A cagione di α nullo è:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} = 0,$$

epperò:

$$j = px^3 + qy^3, \quad \tau = 2\sigma xy,$$

cioè τ proporzionale ad i . Siccome poi anche $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sarà proporzionale a j , così:

$$u = p'x^5 + 5q'x^4y + 5r'xy^4 + s'y^5.$$

Di qui si ricava per i la forma:

$$(p'x + q'y)(r'x + s'y) - 4q'r'xy,$$

epperò dev'essere $p'r' = q's' = 0$, senza che si annulli $p's' - 3q'r'$; il che non può aver luogo se non sono zero p' ed s' , ovvero q' ed r' . Ma nel secondo caso sarebbe nullo j ; dunque dee sussistere il primo, e si avrà:

$$u = 5xy(q'x^3 + r'y^3).$$

Dunque, se α è zero senza che lo sia anche τ , e senza che i sia un quadrato, u è il prodotto di una forma cubica pel suo determinante.

2. Se i è un quadrato, $i = \rho x^2$, si ha $A = 0$, epperò anche $B = 0, C = 0$, a cagione di $M = 0, N = 0$; donde segue che se τ non è nullo, sarà $\tau = \sigma x^2$. Quindi $j = 3px^2y$, e per conseguenza, siccome $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ è proporzionale a j :

$$u = p'x^5 + 5q'x^4y + 10r'x^2y^3.$$

Formando i , otteniamo l'espressione:

$$-4q'r'x^2 + 3r'^2y^2,$$

la quale, per coincidere con i , richiede $r'=0$; ma allora si annulla i : caso che dev'essere trattato più avanti.

Passiamo ora ai casi nei quali si annulla τ , essendo α e j differenti da zero. Allora $j=\rho x^3$ e, siccome α sarà proporzionale a $\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}$, così $\alpha=\sigma x$. Dalla relazione identica fra u e j , segue $u_{222}=0$, dunque:

$$u = px^5 + 5qx^4y + 10rx^3y^2.$$

Formando $i=2 \cdot 3r^2x^2$ e combinandolo con u , si ottiene per j un'espressione che coincide colla precedente. Ma la combinazione di i con j fornisce $\alpha=0$. Dunque, se τ è nullo, si annulla necessariamente anche α , ed in questo caso u ha un fattore triplo.

Se $j=0$, si annullano anche τ, α, B, C . Supposto che i non sia zero, distinguiamo due casi.

1. Se i non è un quadrato, sia $i=2\rho xy$. Allora sarà $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$, epperò u è la somma di due quinte potenze.

2. Se i è un quadrato, $i=\rho x^2$, si ha $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, epperò:

$$u = px^5 + 5qx^4y.$$

Ma allora si annulla contemporaneamente i .

Non resta dunque da esaminare che il caso dell'annullarsi di i , che trae seco anche $j=0$, ecc.

Questo caso ha primieramente luogo se u è una quinta potenza. Supposto che ciò non sia, potremo scegliere per variabili due fattori differenti di u e porre:

$$u = 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4.$$

L'annullamento di i esige le eguaglianze:

$$3c^2 - 4bd = 0, \quad 2cd - 3be = 0, \quad 3d^2 - 4ce = 0.$$

Allora o è zero b e quindi anche c e d ; ovvero sono zero e, d, c ; ed in entrambi i casi u contiene un fattore quadruplo. Da ultimo si può prendere:

$$d = \frac{3c^2}{4b}, \quad e = \frac{27c^3}{64b^2},$$

ma questo non si può accordare colla seconda delle equazioni superiori. Dunque l'essere i identicamente nullo è la condizione per l'esistenza di una radice quadrupla in $u=0$.

§ 8.

Forme di sesto grado. Forme fondamentali.

Indichiamo una data forma binaria di sesto grado con:

$$u = ax_1^6 + 6bx_1^5x_2 + 15cx_1^4x_2^2 + 20dx_1^3x_2^3 + 15ex_1^2x_2^4 + 6fx_1x_2^5 + gx_2^6.$$

Se, conservando la notazione già adoperata, ricaviamo da essa la forma:

$$u_{1111}y_1^4 + 4u_{1112}y_1^3y_2 + 6u_{1122}y_1^2y_2^2 + 4u_{1222}y_1y_2^3 + u_{2222}y_2^4,$$

che è del quarto grado rispetto alle y e del secondo rispetto alle x ; e se prendiamo il primo invariante di questa forma rispetto alle y , otteniamo una forma di quarto grado in x :

$$\begin{aligned} k &= 6(u_{1111}u_{2222} - 4u_{1112}u_{1222} + 3u_{1122}^2) \\ &= \alpha x_1^4 + 4\beta x_1^3x_2 + 6\gamma x_1^2x_2^2 + 4\delta x_1x_2^3 + \varepsilon x_2^4, \end{aligned}$$

dove i singoli coefficienti hanno le significazioni seguenti:

$$\alpha = 6(ac - 4bd + 3c^2),$$

$$\beta = 3(af - 3be + 2cd),$$

$$\gamma = ag - 9ce + 8d^2,$$

$$\delta = 3(bg - 3cf + 2de),$$

$$\varepsilon = 6(cg - 4df + 3e^2).$$

Questa forma k è di fondamentale importanza per la teoria delle forme di sesto grado. Ponendo simbolicamente:

$$u = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^6 = a_x^6 = a_x'^6 = a_x''^6 \dots,$$

si ottieno per k la rappresentazione simbolica:

$$k = 3(a a')^4 a_x^2 a_x'^2.$$

Fra u e k ha luogo una notevole relazione che è espressa dall'annullarsi del covariante di quarto grado formato con esse:

$$h = u_{111} k_{222} - 3 u_{112} k_{122} + 3 u_{122} k_{112} - u_{222} k_{111}.$$

In fatti dalla rappresentazione simbolica di k si ha:

$$k_{111} y_1^3 + 3 k_{112} y_1^2 y_2 + 3 k_{122} y_1 y_2^2 + k_{222} y_2^3 = 3(a a')^4 a'_x a'_y a_y^2,$$

e quindi, sostituendo alle quantità $y_1^3, y_1^2 y_2, y_1 y_2^2, y_2^3$ ordinatamente le:

$$- u_{222} = - a_2''^3 \cdot a_x''^3, u_{122} = a_2''^2 a_1'' \cdot a_x''^3, - u_{112} = - a_2'' a_1''^2 \cdot a_x''^3, u_{111} = a_1''^3 \cdot a_x''^3,$$

sarà:

$$h = - 3(a a')^4 a'_x a_x''^3 \cdot (a' a'')(a a'')^2.$$

E adoperando la solita equazione identica:

$$(a a') a''_x + (a' a'') a_x + (a'' a) a'_x = 0,$$

troviamo:

$$h = 3(a a')^3 a'_x a''_x{}^2 (a' a'')(a a'')^2 \{ (a' a'') a_x - (a a'') a'_x \}.$$

Delle due parti, nelle quali si decompone questa espressione, la prima muta di segno se si fa lo scambio (che evidentemente è indifferente) delle a colle a' ; e la seconda muta di segno per lo scambio delle a' colle a'' . Dunque ciascuna delle due parti, epperò anche h è identicamente zero; ciò che si voleva provare.

Un altro covariante di quarto grado risulta dallo stesso k , ed è il suo determinante Hessiano. Indichiamolo con Δ , ponendo:

$$\Delta = 2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2),$$

ossia, facendo simbolicamente $k = k_x^i = k_x^i \dots$:

$$\Delta = k_x^2 k_x'^2 (kk')^2.$$

Da k ed u scaturisce una serie di covarianti di secondo grado. Da prima, combinando k con u , si ottiene la forma quadratica:

$$\begin{aligned} l &= u_{1111}k_{2222} - 4u_{1112}k_{1222} + 6u_{1122}k_{1122} - 4u_{1222}k_{1112} + u_{2222}k_{1111} \\ &= a_x^2 (ak)^4 = l_x^2, \end{aligned}$$

e poi combinando l con k , ecc.

$$m = k_{11}l_{22} - 2k_{12}l_{12} + k_{22}l_{11} = k_x^2 (kl)^2 = m_x^2,$$

$$n = k_{11}m_{22} - 2k_{12}m_{12} + k_{22}m_{11} = k_x^2 (km)^2 = n_x^2,$$

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Ponendo:

$$A_{ll} = l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \frac{1}{2}(ll')^2,$$

$$A_{mm} = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 = \frac{1}{2}(mm')^2,$$

$$A_{nn} = n_{11}n_{22} - n_{12}^2 = \frac{1}{2}(nn')^2,$$

$$A_{mn} = \frac{1}{2}(m_{11}n_{22} - 2m_{12}n_{12} + m_{22}n_{11}) = \frac{1}{2}(mn)^2,$$

$$A_{nl} = \frac{1}{2}(n_{11}l_{22} - 2n_{12}l_{12} + n_{22}l_{11}) = \frac{1}{2}(nl)^2,$$

$$A_{ln} = \frac{1}{2}(l_{11}m_{22} - 2l_{12}m_{12} + l_{22}m_{11}) = \frac{1}{2}(lm)^2,$$

sono questi sei invarianti di u , rispettivamente degli ordini 6, 10, 14, 12, 10, 8. Fra le tre funzioni l, m, n ha luogo una relazione facile a scriversi, i cui coefficienti sono questi medesimi invarianti. Eseguendo il prodotto:

$$0 = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} & 0 \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} & 0 \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} & 0 \\ x_1^2 & -x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{22} & -2l_{12} & l_{11} & 0 \\ m_{22} & -2m_{12} & m_{11} & 0 \\ n_{22} & -2n_{12} & n_{11} & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix},$$

e dividendo per 4, si ottiene quella relazione nella forma:

$$0 = \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & m \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = -\Phi,$$

$$= -\{B_{ll}l^2 + B_{mm}m^2 + B_{nn}n^2 + 2B_{mn}mn + 2B_{nl}nl + 2B_{lm}lm\},$$

dove le B indicano i determinanti minori formati colle A .

Se invece formiamo l'altro prodotto:

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} & 0 \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} & 0 \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} & 0 \\ x_1^2 & -x_1 x_2 & x_2^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{22} & -2l_{12} & l_{11} & \lambda \\ m_{22} & -2m_{12} & m_{11} & \mu \\ n_{22} & -2n_{12} & n_{11} & \nu \\ x_1^2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix},$$

otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 2A_{ll} & 2A_{lm} & 2A_{ln} & l \\ 2A_{ml} & 2A_{mm} & 2A_{mn} & m \\ 2A_{nl} & 2A_{nm} & 2A_{nn} & n \\ l+\lambda & m+\mu & n+\nu & 0 \end{vmatrix} = -2\{\lambda\Phi'(l) + \mu\Phi'(m) + \nu\Phi'(n)\}.$$

Ora il primo fattore dell'antecedente prodotto è l'invariante di 15° ordine (quello d'ordine dispari più piccolo che esista):

$$2R = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} \end{vmatrix},$$

mentre l'altro fattore è il determinante :

$$-2 \begin{vmatrix} \lambda & l_1 & l_2 \\ \mu & m_1 & m_2 \\ \nu & n_1 & n_2 \end{vmatrix},$$

Perciò confrontando si ottengono i determinanti funzionali delle l, m, n , espressi per mezzo di queste medesime funzioni :

$$R(m_1 n_2 - n_1 m_2) = \frac{1}{2} \Phi'(l) = B_{ll} l + B_{lm} m + B_{ln} n,$$

$$R(n_1 l_2 - l_1 n_2) = \frac{1}{2} \Phi'(m) = B_{ml} l + B_{mm} m + B_{mn} n,$$

$$R(l_1 m_2 - m_1 l_2) = \frac{1}{2} \Phi'(n) = B_{nl} l + B_{nm} m + B_{nn} n.$$

E pel quadrato di R si trova :

$$R^2 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{22} & -2l_{12} & l_{11} \\ m_{22} & -2m_{12} & m_{11} \\ n_{22} & -2n_{12} & n_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 9,

Relazioni fra gli invarianti.

Fra i sei invarianti $A_u \dots$ sono eguali quei due che sono dello stesso ordine, cioè :

$$A_{nl} = A_{mm}.$$

In fatti è simbolicamente :

$$A_{nl} = \frac{1}{2} (nl)^2 = \frac{1}{2} (km)^2 (kl)^2 = \frac{1}{2} (mm')^2 = A_{mm}.$$

Inoltre A_{mn} ed A_{nn} si possono ridurre a quegli invarianti d'ordine inferiore che si derivano senz'altro dalla funzione k , cioè :

$$B = \alpha\epsilon - 4\beta\delta + 3\gamma^2 = \frac{1}{2} (kk')^4,$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \epsilon \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (kk')^2 (k'k'')^2 (k''k)^2.$$

A tale uopo rappresentiamo in due modi diversi il covariante quadratico che segue dopo l, m, n :

$$p = k_{11}n_{22} - 2k_{12}n_{12} + k_{22}n_{11}.$$

Dall'espressione del determinante funzionale $l_1m_2 - m_1l_2$ per mezzo di l, m, n , segue l'equazione:

$$B_{nl}m + B_{nm}n + B_{nn}p = R\{k_{11}(l_1m_2 - m_1l_2)_{22} \dots\}.$$

L'espressione simbolica della quantità fra parentesi è:

$$k_x^2(lm)(kl)(km),$$

e per mezzo della relazione identica:

$$k_x(lm) = l_x(km) - m_x(kl),$$

si cambia in:

$$\begin{aligned} k_x(kl)(km) \{ l_x(km) - m_x(kl) \} \\ = n_x l_x(nl) - m_x m'_x(m'l) = n_1 l_2 - n_2 l_1. \end{aligned}$$

Introducendo per quest'ultimo determinante il suo valore, si ha l'equazione:

$$B_{nl}m + B_{nm}n + B_{nn}p = B_{ml}l + B_{mm}m + B_{nn}n,$$

ossia:

$$B_{nn}p = B_{ml}l + (B_{mm} - B_{nl})m.$$

Quest'equazione è degna d'attenzione sotto più aspetti. Nell'espressione di p non entra più n . Siccome poi nel ricavare questa formola non si è fatto uso della derivazione di $l, m, \dots$ da k ed u , ma piuttosto della circostanza che l, m, n, p sono consecutivi nella serie dei covarianti di secondo grado, così si fa chiaro il teorema:

Nella serie dei covarianti di secondo grado $l, m, n, p \dots$ ciascuno è composto linearmente coi due che precedono di due e di tre posti.

La seconda espressione di p scaturisce da due formole che adopereremo anche in seguito e che, spettando alla teoria delle forme di quarto grado,

qui saranno solamente citate. Se k è una qualsivoglia forma di quarto grado, e:

$$\Delta = 2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2);$$

se B e C sono gli invarianti di k già menzionati; e inoltre se ϕ è una funzione di secondo grado, e:

$$\psi = k_{11}\phi_{22} - 2k_{12}\phi_{12} + k_{22}\phi_{11}.$$

si avranno le due equazioni:

$$\Delta_{11}\phi_{22} - 2\Delta_{12}\phi_{12} + \Delta_{22}\phi_{11} = k_{11}\psi_{22} - 2k_{12}\psi_{12} + k_{22}\psi_{11} - \frac{2}{3}B\phi$$

$$\Delta_{11}\psi_{22} - 2\Delta_{12}\psi_{12} + \Delta_{22}\psi_{11} = \frac{1}{3}B\psi + 2C\phi.$$

Ponendo qui $\phi = l$, $\psi = m$, ovvero $\phi = m$, $\psi = n$, si ottengono le quattro equazioni:

$$\Delta_{11}l_{22} - 2\Delta_{12}l_{12} + \Delta_{22}l_{11} = n - \frac{2}{3}Bl,$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11}m_{22} - 2\Delta_{12}m_{12} + \Delta_{22}m_{11} &= \frac{1}{3}Bm + 2Cl \\ &= p - \frac{2}{3}Bm, \end{aligned}$$

$$\Delta_{11}n_{22} - 2\Delta_{12}n_{12} + \Delta_{22}n_{11} = \frac{1}{3}Bn + 2Cm.$$

Dunque è:

$$p = Bm + 2Cl;$$

e confrontando questa colla precedente espressione di p , si trova:

$$B_{ml} = 2C \cdot B_{nn},$$

$$B_{mm} - B_{nl} = B \cdot B_{nn}.$$

Pongansi questi valori nelle equazioni identiche:

$$A_{ll}B_{ml} + A_{ml}B_{mm} + A_{nl}B_{nn} = 0,$$

$$A_{ml}B_{ml} + A_{mm}B_{mm} = A_{nl}B_{nl} + A_{nn}B_{nn},$$

e si osservi che $A_{nl} = A_{mm}$; si avranno le due equazioni:

$$A_{nm} = BA_{lm} + 2CA_{ll},$$

$$A_{nn} = BA_{mm} + 2CA_{ml},$$

mediante le quali A_{nm} ed A_{nn} sono ricondotti ad A_{ll} , A_{ml} , A_{mm} ed a B , C .

Siccome la funzione u non può possedere che quattro invarianti indipendenti fra loro, così fra i cinque invarianti suddetti dovrà verificarsi un'altra relazione. In ciò che precede, non essendo noi risaliti al fatto che l, k traggono origine da u , le forme $A_u, A_{ml}, A_{mm}, B, C$ sono gli invarianti simultanei di k, l , indipendenti fra loro. Perciò l'ultima relazione deve necessariamente tener calcolo di tale origine. Se ammettiamo che, per u , oltre agli invarianti degli ordini 4 (B), 6 (C, A_u), 8 (A_{lm}), 10 (A_{mm}), ne esista anche uno di second'ordine:

$$A = \frac{1}{2} (aa')^2 = ag - 6bf + 15ce - 10d^2,$$

allora il problema che dobbiamo risolvere consiste nello scoprire due relazioni fra $A, B, C, A_u, A_{lm}, A_{mm}$. Questo problema si risolve nella seguente maniera.

Secondo il processo più volte impiegato, si ha:

$$\begin{aligned} Ak &= \frac{1}{2} (aa')^2 \cdot k_x^2 = \frac{1}{2} (aa')^2 \{ (ak)a'_x - (a'k)a_x \}^2 \\ &= \{ (ak)^2 a_x'^2 - 4(ak)^3 (a'k)a_x a'_x + 3(ak)^2 (a'k)a_x^2 a_x'^2 \} (aa')^2. \end{aligned}$$

Siccome poi dalla:

$$k = 3(aa')^2 a_x^2 a_x'^2$$

si ricava mediante la differenziazione:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 k}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} y_2^2 \right) = (aa')^2 (2a_x a'_x a_y a'_y + a_x^2 a_y'^2),$$

così, ponendo $k_x k_y, -k_x k_1$ invece di y_1, y_2 si trova:

$$\begin{aligned} \Delta &= (aa')^2 k_x^2 \left(2(ak)(a'k)a_x a'_x + (a'k)^2 a_x^2 \right) \\ &= (aa')^2 \left(2(ak)(a'k)a_x a'_x + (a'k)^2 a_x^2 \right) \left((ak)^2 a_x'^2 - 2(ak)(a'k)a_x a'_x + (a'k)^2 a_x^2 \right) \\ &= (aa')^2 (a'k)^4 a_x^4 + 2(aa')^2 (a'k)^3 (ak)a_x^2 a'_x - 3(aa')^2 (a'k)^2 (ak)^2 a_x^3 a_x'^2. \end{aligned}$$

Da ultimo ricaviamo dal covariante identicamente nullo h la forma parimente nulla $(ha)^3 h_x a_x^3$, ossia l'equazione identica:

$$0 = (ak)^3 (aa')^3 k_x a_x'^3 + 3(ak)^3 (aa')^2 (k'a')a_x a_x'^3,$$

la quale, in virtù della:

$$(a a') k_x = (a k) a'_x - (a' k) a_x,$$

si muta in:

$$0 = (a k)^4 (a a')^2 a'_x{}^4 - 4(a a')^2 (a k)^3 (a' k) a_x a'_x{}^3.$$

Ora, se per brevità si pone:

$$\rho = (a a')^2 (a k)^4 a'_x{}^4, \quad \sigma = (a k)^3 (a' k) (a a')^2 a_x a'_x{}^3,$$

$$\tau = (a a')^2 (a k)^2 (a' k)^2 a_x^2 a'_x{}^2,$$

per le cose precedenti avremo le equazioni:

$$A k = \rho - 4\sigma + 3\tau, \quad 0 = \rho - 4\sigma,$$

$$\Delta = \rho + 2\sigma - 3\tau,$$

alle quali si può aggiungere la definizione:

$$u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} = \rho.$$

Si ha dunque:

$$\tau = \frac{1}{3} A k, \quad \rho = \frac{2}{3} (\Delta + A k),$$

e quindi la relazione fra covarianti:

$$u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} = \frac{2}{3} (\Delta + A k).$$

Se si scrive questa equazione nella forma simbolica:

$$a_x^4 (a l)^2 = \frac{2}{3} (k k')^2 k_x^2 k'_x{}^2 + \frac{2}{3} A k_x^4,$$

sostituendo $k_2, -k_1$ in luogo di x_1, x_2 , si otterrà:

$$(a k)^4 (a l)^2 = \frac{2}{3} (k k')^2 (k k'')^2 (k' k'')^2 + \frac{2}{3} A (k k')^4,$$

ossia:

$$A_n = 2 \left(C + \frac{AB}{3} \right),$$

che è una delle relazioni cercate. L'altra si ricava dalla considerazione dell'espressione:

$$\begin{aligned} u_{11}m_{22} - 2u_{12}m_{12} + u_{22}m_{11} &= a_x^4(am)^2 = a_x^4(ak)^2(kl)^2 \\ &= (ak)^2 a_x^2 \{k_x(al) - l_x(ak)\}^2 \\ &= (ak)^2(al)^2 a_x^2 k_x^2 + (ak)^4 a_x^2 l_x^2 - 2(ak)^3(al) a_x^2 k_x l_x. \end{aligned}$$

La seconda parte di quest'espressione è a dirittura:

$$(ak)^4 a_x^2 l_x^2 = l_x'^2 l_x^2 = l^2.$$

La prima nasce dalla forma:

$$\phi = u_{11}l_{22} - 2u_{12}l_{12} + u_{22}l_{11} = a_x^4(al)^2,$$

mediante l'operazione:

$$\phi_{11}k_{22} - 2\phi_{12}k_{12} + \phi_{22}k_{11},$$

epperò è eguale a:

$$\frac{2}{3}(\Delta_{11}k_{22} - 2\Delta_{12}k_{12} + \Delta_{22}k_{11}) + \frac{2}{3}A\Delta;$$

ossia eguale a:

$$\frac{2}{9}Bk + \frac{2}{3}A\Delta,$$

perchè, in virtù della teoria delle forme di quarto grado, l'espressione fra parentesi ha il valore $\frac{1}{3}Bk$.

La terza parte si ottiene col sussidio del covariante $h = (ak)^3 a_x^3 k_x$, che è identicamente nullo. Da questo si trae subito:

$$\begin{aligned} 0 &= 4(h_1l_2 - l_1h_2) = (ak)^3 a_x^2 \{3(al)k_x l_x + (kl)a_x l_x\} \\ &= (ak)^3 a_x^2 \{4(al)k_x l_x - (ak)l_x^2\}, \end{aligned}$$

dunque:

$$(ak)^3(al)a_x^2 k_x l_x = \frac{1}{4}(ak)^4 a_x^2 l_x^2 = \frac{1}{4}l^2.$$

Laonde si ha finalmente la formola:

$$u_{11}m_{22} - 2u_{12}m_{12} + u_{22}m_{11} = \frac{1}{2}l^2 + \frac{2}{9}Bk + \frac{2}{3}A\Delta;$$

la quale simbolicamente equivale a:

$$(am)^2 a_x^4 = \frac{1}{2}l_x^2 l_x'^2 + \frac{2}{9}Bk_x^4 + \frac{2}{3}A(kk')^2 k_x^2 k_x'^2,$$

dove, ponendo di nuovo $k_2, -k_1$ invece di x_1, x_2 , risulta la relazione fra invarianti:

$$(lm)^2 = \frac{1}{2}(lm)^2 + \frac{2}{9}B(kk')^4 + \frac{2}{3}A(kk')^2(kk'')^2(k'k'')^2,$$

ossia:

$$A_{lm} = \frac{4}{9}B^2 + 4AC.$$

In conclusione vediamo essere conveniente di assumere per fondamentali gli invarianti:

$$A \text{ (di 2° ordine), } B \text{ (di 4° ordine), } C \text{ (di 6° ordine),}$$

$$D = A_{mm} \text{ (del 10° ordine),}$$

come i più semplici, mentre l'invariante A_{ml} di 8° ordine si esprime razionalmente per mezzo dei precedenti.

Quindi le espressioni finali degli invarianti divengono:

$$A_{ll} = 2C + \frac{2}{3}AB, \quad A_{ml} = \frac{4}{9}B^2 + 4AC, \quad A_{nl} = A_{mm} = D,$$

$$A_{nm} = 4(C^2 + \frac{4}{3}ABC + \frac{1}{9}B^3), \quad A_{nn} = BD + \frac{8}{9}B^2C + 8AC^2.$$

E da ultimo:

$$R^2 = \begin{vmatrix} 2C + \frac{2}{3}AB & \frac{4}{9}B^2 + 4AC & D \\ \frac{4}{9}B^2 + 4AC & D & 4C^2 + \frac{16}{3}ABC + \frac{4}{9}B^3 \\ D & 4C^2 + \frac{16}{3}ABC + \frac{4}{9}B^3 & BD + \frac{8}{9}B^2C + 8AC^2 \end{vmatrix}.$$

§ 10.

Rappresentazioni tipiche.

Se per un covariante ϕ si conoscono le forme :

$$\phi_l = \phi_{11} l_{22} - 2\phi_{12} l_{12} + \phi_{22} l_{11},$$

$$\phi_m = \phi_{11} m_{22} - 2\phi_{12} m_{12} + \phi_{22} m_{11},$$

$$\phi_n = \phi_{11} n_{22} - 2\phi_{12} n_{12} + \phi_{22} n_{11},$$

nella loro rappresentazione tipica per mezzo di l, m, n , si può facilmente assegnare anche l'espressione di ϕ . In fatti, se alle equazioni precedenti si aggiunge la :

$$\phi = \phi_{11} x_1^2 + 2\phi_{12} x_1 x_2 + \phi_{22} x_2^2,$$

eliminando ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{22} , risulta :

$$0 = \begin{vmatrix} l_{22} & -l_{12} & l_{11} & \phi_l \\ m_{22} & -m_{12} & m_{11} & \phi_m \\ n_{22} & -n_{12} & n_{11} & \phi_n \\ x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 & \phi \end{vmatrix},$$

ovvero, confrontando colla fine del § 6, e moltiplicando per R :

$$R^2 \cdot \phi = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & \phi_l \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & \phi_m \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & \phi_n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}.$$

Indichiamo per un momento con ciascuno de' simboli $\mu, \nu, \dots$ uno qualunque degli indici l, m, n , e con ciascuno de' simboli $l_\mu, l_\nu, \dots$ una qualunque delle funzioni l, m, n ; allora potremo scrivere l'equazione precedente anche così:

$$R^2 \cdot \phi = \sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{\mu\nu} l_\mu \phi_\nu.$$

Se analogamente ϕ_l, ϕ_m, ϕ_n sono date per mezzo di $\phi_{ll}, \phi_{lm} = \phi_{ml}$, ecc., sarà anche :

$$R^2 \cdot \phi_\nu = \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} B_{\varrho\sigma} l_{\varrho} \phi_{\nu\sigma},$$

epperò :

$$\begin{aligned} R^4 \cdot \phi &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\varrho} \sum_{\sigma} B_{\mu\nu} B_{\varrho\sigma} l_{\mu} l_{\varrho} \phi_{\nu\sigma} \\ &= \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\varrho} B_{\sigma\nu} l_{\mu} l_{\varrho} \phi_{\sigma\nu} - R^2 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\varrho, \sigma\nu} l_{\mu} l_{\varrho} \phi_{\nu\sigma}. \end{aligned}$$

Ora, siccome $\sum \sum B_{\mu\varrho} l_{\mu} l_{\varrho}$ è identicamente zero, così l'equazione si può dividere per R^2 , onde si ha :

$$R^2 \cdot \phi = - \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{\mu\varrho, \sigma\nu} l_{\mu} l_{\varrho} \phi_{\nu\sigma}.$$

Quindi, scrivendo per un momento $\overline{\phi_\nu \cdot \phi_\sigma}$ simbolicamente in luogo di $\phi_{\nu\sigma}$, questa formola diviene :

$$R^2 \cdot \phi = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & l & \overline{\phi_l} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & m & \overline{\phi_m} \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & n & \overline{\phi_n} \\ l & m & n & 0 & 0 \\ \overline{\phi_l} & \overline{\phi_m} & \overline{\phi_n} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Queste formole bastano per la rappresentazione di k, Δ ed u . In fatti si ha già per k :

$$\begin{aligned} k_{11} l_{22} - 2k_{12} l_{12} + k_{22} l_{11} &= m, \\ k_{11} m_{22} - 2k_{12} m_{12} + k_{22} m_{11} &= n, \\ k_{11} n_{22} - 2k_{12} n_{12} + k_{22} n_{11} &= p = Bm + 2Cl; \end{aligned}$$

epperò :

$$R^2 \cdot k = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & m \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & n \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & Bm + 2Cl \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}.$$

Poi si aveva :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} l_{22} - 2\Delta_{12} l_{12} + \Delta_{22} l_{11} &= n - \frac{2}{3}Bl, \\ \Delta_{11} m_{22} - 2\Delta_{12} m_{12} + \Delta_{22} m_{11} &= \frac{1}{3}Bm + 2Cl, \\ \Delta_{11} n_{22} - 2\Delta_{12} n_{12} + \Delta_{22} n_{11} &= \frac{1}{3}Bn + 2Cm, \end{aligned}$$

dunque :

$$R^2 \cdot \Delta = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & n - \frac{2}{3} B l \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & \frac{1}{3} B m + 2 C l \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & \frac{1}{3} B n + 2 C m \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente è :

$$u_l = u_{11} l_{22} - 2 u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} = \frac{2}{3} \Delta + \frac{2}{3} A k,$$

$$u_m = u_{11} m_{22} - 2 u_{12} m_{12} + u_{22} m_{11} = \frac{1}{2} l^2 + \frac{2}{9} B k + \frac{2}{3} A \Delta.$$

A queste equazioni si deve anzitutto aggiungere il valore di u_n . Seguendo precisamente la stessa via adottata per u_m (§ 9), troviamo :

$$u_n = u_{11} n_{22} - 2 u_{12} n_{12} + u_{22} n_{11} = m l + \frac{2}{9} B \Delta - \frac{2}{3} C k.$$

Ora combinando di nuovo u_l, u_m, u_n con l, m, n , si trovano espressioni nelle quali non restano incognite che quelle parti che nascono dai termini l^2, ml . Ma, se ϕ, ψ, χ sono tre funzioni qualunque di secondo grado, si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi \cdot \psi}{\partial x_1^2} \chi_{22} - 2 \frac{\partial^2 \phi \cdot \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \chi_{12} + \frac{\partial^2 \phi \cdot \psi}{\partial x_2^2} \chi_{11} \right) \\ &= 3 \psi (\phi_{11} \chi_{22} - 2 \phi_{12} \chi_{12} + \phi_{22} \chi_{11}) + 3 \phi (\psi_{11} \chi_{22} - 2 \psi_{12} \chi_{12} + \psi_{22} \chi_{11}) - \\ & \quad - 2 \chi (\phi_{11} \psi_{22} - 2 \phi_{12} \psi_{12} + \phi_{22} \psi_{11}), \end{aligned}$$

com'è facile a provarsi. Quindi sarà :

$$\begin{aligned} (ll)_l &= \frac{4}{3} A_{ll} \cdot l, & (ml)_l &= \frac{4}{3} A_{ml} \cdot l + A_{ll} \cdot m, \\ (ll)_m &= 2 A_{lm} \cdot l - \frac{2}{3} A_{ll} \cdot m, & (ml)_m &= A_{mm} \cdot l + \frac{4}{3} A_{ml} \cdot m, \\ (ll)_n &= 2 A_{ln} \cdot l - \frac{2}{3} A_{ll} \cdot n, & (ml)_n &= A_{nn} \cdot l + A_{nl} \cdot m - \frac{2}{3} A_{ml} \cdot n, \end{aligned}$$

e per conseguenza :

$$\begin{aligned}
u_{ll} &= -\frac{4}{9}Bl + \frac{2}{3}Am + \frac{2}{3}n, \\
u_{ml} &= \frac{4}{3}Cl + \frac{2}{9}Bm + \frac{2}{3}An, \\
u_{nl} &= \frac{4}{3}ACl + (\frac{2}{3}AB + \frac{4}{3}C)m + \frac{2}{9}Bn, \\
u_{mm} &= (\frac{4}{9}B^2 + \frac{16}{3}AC)l - \frac{2}{3}Cm + \frac{2}{9}Bn, \\
u_{mn} &= (D + \frac{4}{9}BC)l + (\frac{4}{3}AC + \frac{2}{9}B^2)m - \frac{2}{3}Cn, \\
u_{nn} &= (\frac{4}{9}B^3 + \frac{16}{3}ABC + \frac{8}{3}C^2)l + (D - \frac{2}{9}BC)m - (\frac{2}{9}B^2 + \frac{8}{3}AC)n.
\end{aligned}$$

Quindi, introducendo le funzioni di invarianti :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2}{3}D - \frac{16}{3}A^2C - \frac{4}{9}AB^2 + \frac{4}{9}BC, \\
F &= \frac{2}{3}AD - \frac{20}{9}ABC - \frac{4}{3}C^2 - \frac{16}{81}B^3,
\end{aligned}$$

risulta per u la forma tipica :

$$\begin{aligned}
R^2 \cdot u &= E \{ -8C^2l^3 - Cm^3 + n^3 + (\frac{3}{2}D - 7BC)l^2m - 2B^2lm^2 - 2Bln^2 + Bm^2n - 6Clmn \} \\
&\quad + 3F \{ (B^3 + 12AC)l^2m - 4Cl^2n - 4Clm^2 + mn^2 - 2Blmn \},
\end{aligned}$$

mentre la relazione fra l, m, n si muta nella :

$$\begin{aligned}
0 &= E \{ (\frac{3}{2}BD + \frac{1}{3}B^2C)l^2 + (4BC - \frac{3}{2}D)m^2 + 3Cn^2 + \frac{4}{3}B^2mn + (2BC - 3D)nl + 12C^2lm \} \\
&\quad + F \{ (B^3 + 12ABC + 12C^2)l^2 - 12ACm^2 + Bn^2 + 12Cmn - 2(B^3 + 12AC)nl + 4BClm \}.
\end{aligned}$$

Nello stesso tempo R^2 , espresso per mezzo di E, F , assume la forma semplice :

$$R^2 = (\frac{15}{2}BC - \frac{9}{4}D)E^2 - (\frac{3}{2}B^2 + 18AC)EF - 18CF^2.$$

§ 14.

Caso eccezionale: $R=0$. **Seconda rappresentazione di u .**

La precedente rappresentazione tipica di u diventa impossibile se R è nullo, epperò se ha luogo fra l, m, n una relazione lineare. Supponiamo da prima che m ed l non siano nè proporzionali fra loro, nè identicamente nulle. Al-

lora n è una funzione lineare di l ed m , e per conseguenza non può essere adoperata. Invece si potrà in tal caso usare come terza funzione il determinante:

$$\mathfrak{S} = l_1 m_2 - m_1 l_2,$$

il quale (cfr. § 1) è legato con l , m mediante l'equazione di secondo grado:

$$\mathfrak{S}^2 = -(A_{ll} m^2 - 2 A_{lm} m l + A_{mm} l^2).$$

Cominceremo dall'eseguire in generale questa trasformazione di u . In luogo di R^2 subentra il determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{ll} & A_{ml} & A_{\mathfrak{S}l} \\ A_{lm} & A_{mm} & A_{\mathfrak{S}m} \\ A_{l\mathfrak{S}} & A_{m\mathfrak{S}} & A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} \end{vmatrix},$$

nel quale $A_{l\mathfrak{S}}$, ecc. indicano le espressioni formate analogamente ad A_{lm} , ecc. Ma pel § 1 si ha:

$$A_{l\mathfrak{S}} = 0, \quad A_{m\mathfrak{S}} = 0, \quad A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = A_{ll} A_{mm} - A_{ml}^2,$$

onde il valore del determinante superiore è a dirittura $A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}^2 = B_{nn}$. Dunque questa trasformazione è possibile ogni qualvolta $A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$ non sia nullo.

Posto per una funzione qualunque ϕ :

$$\phi_{\mathfrak{S}} = \phi_{11} \mathfrak{S}_{22} - 2 \phi_{12} \mathfrak{S}_{12} + \phi_{22} \mathfrak{S}_{11},$$

si ha la formola:

$$A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}^2 \cdot \phi = - \begin{vmatrix} A_{ll} & A_{lm} & 0 & \phi_l \\ A_{ml} & A_{mm} & 0 & \phi_m \\ 0 & 0 & A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} & \phi_{\mathfrak{S}} \\ l & m & \mathfrak{S} & 0 \end{vmatrix},$$

vale a dire che, dopo aver diviso per $A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$, è:

$$A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} \cdot \phi = \mathfrak{S} \phi_{\mathfrak{S}} + m (A_{ll} \phi_m - A_{ml} \phi_l) - l (A_{ml} \phi_m - A_{mm} \phi_l),$$

e quindi anche:

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}}^2 \phi &= \mathfrak{S}^2 \phi_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} + 2\mathfrak{S}m(A_u \phi_{m\mathfrak{g}} - A_{m\mathfrak{l}} \phi_{\mathfrak{l}\mathfrak{g}}) - 2\mathfrak{S}l(A_{m\mathfrak{l}} \phi_{m\mathfrak{g}} - A_{mm} \phi_{\mathfrak{l}\mathfrak{g}}) \\ &+ (A_u \phi_{mm} - 2A_{lm} \phi_{m\mathfrak{l}} + A_{mm} \phi_u)(A_u m^2 - 2A_{m\mathfrak{l}} m l + A_{mm} l^2) \\ &- A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}}(m^2 \phi_u - 2m l \phi_{m\mathfrak{l}} + l^2 \phi_{mm}) \\ &= 2\mathfrak{S}^2 \phi_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} - A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}}(m^2 \phi_u - 2m l \phi_{m\mathfrak{l}} + l^2 \phi_{mm}) \\ &+ 2\mathfrak{S}m(A_u \phi_{m\mathfrak{g}} - A_{m\mathfrak{l}} \phi_{\mathfrak{l}\mathfrak{g}}) - 2\mathfrak{S}l(A_{m\mathfrak{l}} \phi_{m\mathfrak{g}} - A_{mm} \phi_{\mathfrak{l}\mathfrak{g}}), \end{aligned}$$

essendo identicamente :

$$\phi_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} = -(A_u \phi_{mm} - 2A_{m\mathfrak{l}} \phi_{m\mathfrak{l}} + A_{mm} \phi_u).$$

Ma, se nella formola :

$$A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \cdot \phi = \mathfrak{S} \phi_{\mathfrak{g}} + m(A_u \phi_m - A_{m\mathfrak{l}} \phi_{\mathfrak{l}}) - l(A_{m\mathfrak{l}} \phi_m - A_{mm} \phi_{\mathfrak{l}})$$

poniamo in luogo della funzione arbitraria ϕ la funzione $\phi_{\mathfrak{g}}$, del pari arbitraria, e moltiplicata per 2 l'equazione risultante la sottraggiamo dall'equazione che dà $A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}}^2 \cdot \phi$, otterremo la formola semplice :

$$A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \cdot \phi = 2\mathfrak{S} \cdot \phi_{\mathfrak{g}} - (m^2 \phi_u - 2lm \phi_{m\mathfrak{l}} + l^2 \phi_{mm});$$

quindi anche :

$$A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \cdot \phi_{\mathfrak{g}} = 2\mathfrak{S} \phi_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} - (m^2 \phi_{u\mathfrak{g}} - 2lm \phi_{m\mathfrak{l}\mathfrak{g}} + l^2 \phi_{mm\mathfrak{g}}),$$

ossia sarà :

$$A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}}^2 \cdot \phi = 4\mathfrak{S}^2 \phi_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} - (m^2 \phi_u - 2lm \phi_{m\mathfrak{l}} + l^2 \phi_{mm}) A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} - 2\mathfrak{S}(m^2 \phi_{u\mathfrak{g}} - 2lm \phi_{m\mathfrak{l}\mathfrak{g}} + l^2 \phi_{mm\mathfrak{g}}).$$

Applicando questa formola ad u , si ha :

$$u_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} = \frac{2}{3} BEl - Fm - En,$$

$$\begin{aligned} m^2 u_u - 2m l u_{m\mathfrak{l}} + l^2 u_{mm} &= \frac{4}{3} ACl^3 + \frac{2}{3} Am^3 + \frac{2}{3} (AB - 2C) l^2 m \\ &- \frac{8}{9} B l m^2 + \frac{2}{3} n(m^2 - 2Alm + \frac{1}{3} B l^2), \end{aligned}$$

$$m^2 u_{u\mathfrak{g}} - 2m l u_{m\mathfrak{l}\mathfrak{g}} + l^2 u_{mm\mathfrak{g}} = \frac{2}{3} R(m^2 - 2Alm + \frac{1}{3} B l^2).$$

Quindi la formola per u diviene :

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}}^2 \cdot u &= 4\mathfrak{S}^2 (\frac{2}{3} BEl - Fm - En) - (\frac{2}{3} n A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} + \frac{4}{3} R\mathfrak{S})(m^2 - 2Alm + \frac{1}{3} B l^2) - \\ &- \frac{2}{3} A_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \{ 2ACl^3 + (AB - 2C) l^2 m - \frac{4}{3} B l m^2 + A m^3 \}. \end{aligned}$$

Se s'introduce anche il valore di n preso dalla formola (§ 8):

$$R\mathfrak{S} = B_{nl}.l + B_{nm}.m + B_{nn}.n,$$

si ottiene la seguente rappresentazione di u per mezzo di $l, m, \mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} A_{gg}^3.u = & R\mathfrak{S}\{4E\mathfrak{S}^2 + (2m^2 - 4Alm + \frac{2}{3}Bl^2)A_{gg}\} \\ & + 4\mathfrak{S}^2\{\frac{2}{3}BB_{nn} + EB_{ln}\}l + (-FB_{nn} + EB_{mn})m\} \\ & + \frac{2}{3}A_{gg}(B_{nl}l + B_{nm}m)(m^2 - 2lmA + \frac{1}{3}Bl^2) \\ & - \frac{2}{3}A_{gg}^2\{2ACl^3 + (AB - 2C)l^2m - \frac{4}{3}Blm^2 + Am^3\}, \end{aligned}$$

che dev'essere combinata coll'equazione:

$$\mathfrak{S}^2 = -(A_{ll}m^2 - 2A_{lm}ml + A_{mm}l^2).$$

Consideriamo ora particolarmente il caso di $R=0$. Ponendo per $\mathfrak{S}^2$ il suo valore, troviamo:

$$A_{gg}^3.u = Pl^3 + 3Ql^2m + 3Slm^2 + Tm^3,$$

dove:

$$\begin{aligned} P = & -4A_{mm}E(\frac{2}{3}BB_{nn} + B_{nl}) + \frac{2}{9}BB_{nl}B_{nn} - \frac{4}{3}ACB_{nn}^2, \\ 3Q = & 8A_{ml}E(\frac{2}{3}BB_{nn} + B_{nl}) - 4A_{mm}(EB_{mn} - FB_{nn}) - \frac{4}{3}AB_{nl}B_{nn} \\ & + \frac{2}{9}BB_{nm}B_{nn} - \frac{2}{3}(AB - 2C)B_{nn}^2, \\ 3S = & -4A_{ll}E(\frac{2}{3}BB_{nn} + B_{nl}) + 8A_{ml}(EB_{mn} - FB_{nn}) + \frac{2}{3}B_{nn}B_{nl} \\ & - \frac{4}{3}AB_{nm}B_{nn} + \frac{8}{3}BB_{nn}^2, \\ T = & -4A_{ll}(EB_{mn} - FB_{nn}) + \frac{2}{3}B_{nm}B_{nn} - \frac{2}{3}AB_{nn}^2. \end{aligned}$$

Si ha dunque il teorema:

Se $R=0$, senza che sia nullo anche A_{gg} , la forma u si può rappresentare come funzione razionale di terzo grado in l, m .

Ne risulta che in questo caso l'equazione di sesto grado $u=0$ può essere risolta nel modo seguente. Mediante la sostituzione di secondo grado:

$$z = \frac{m}{l},$$

l'equazione si riduce a quest'altra di terzo grado :

$$P + 3Qz + 3Sz^2 + Tz^3 = 0.$$

Se $z = \zeta$ è una radice di questa equazione, si avrà inoltre :

$$S = l \sqrt{-(A_{ll}\zeta^2 - 2A_{lm}\zeta + A_{mm})}.$$

Siccome ora i rapporti fra l, m, S sono affatto determinati, così si possono scrivere le equazioni :

$$l = \mu \cdot \alpha, \quad m = \mu \cdot \beta, \quad S = \mu \cdot \gamma,$$

ove μ è un fattore indeterminato ed α, β, γ esprimono numeri dati. Queste tre equazioni sono lineari rispetto ad x_1^2, x_1x_2, x_2^2 ; e risolvendole si trovano le radici dell'equazione data.

Il caso presente è quello nel quale le radici dell'equazione $u = 0$ formano un'involuzione ⁽¹⁾. In fatti, se $A_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ non si annulla, l ed m possono essere trasformati simultaneamente, mediante una sostituzione lineare, in somme di quadrati, ed $u = 0$ si trasforma in un'equazione che del pari contiene soltanto i quadrati delle variabili: il che è il segno distintivo dell'involuzione. Viceversa, se vi è involuzione, si ha sempre $R = 0$. In fatti, supposto che u contenga solamente i quadrati delle variabili, è facile vedere che anche k conterrà i soli quadrati, e la medesima cosa dovrà verificarsi per l, m, n . Quindi fra l, m, n avrà luogo una relazione lineare e per conseguenza il determinante R di queste funzioni dovrà ridursi a zero.

§ 12.

Secondo caso eccezionale: $R = 0, A_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = 0$.

Le due rappresentazioni tipiche che abbiamo date precedentemente divengono impossibili quando, oltre R , si annulli anche $A_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$. Per mezzo dell'equazione :

$$A_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = A_{ll} A_{mm} - A_{lm}^2 = 0,$$

⁽¹⁾ Vedi SALMON, *Higher Algebra*, p. 210 (2.^a ediz.)

la $R^2=0$ si muta in:

$$A_{ll} A_{nn} - A_{lm} A_{ln} = 0,$$

ossia:

$$A_{ml} A_{nn} - A_{mn} A_{ln} = 0.$$

Siccome $A_{ln}=A_{nm}$, così si possono determinare due numeri λ, μ in modo che:

$$A_{ll}=\lambda^4, \quad A_{lm}=\lambda^3\mu, \quad A_{ln}=A_{nm}=\lambda^2\mu^2, \quad A_{nn}=\lambda\mu^3,$$

e le equazioni:

$$A_{nn}=B A_{lm} + 2 C A_{ll}, \quad A_{nn}=B A_{nn} + 2 C A_{ml}$$

diverranno allora:

$$\mu^3=B\lambda^2\mu+2C\lambda^3, \quad A_{nn}=(B\lambda^2\mu+2C\lambda^3)\mu=\mu^4.$$

Gli invarianti $A_{ll}, A_{lm}, \dots, A_{nn}$ sono dunque i coefficienti di un biquadrato perfetto $(\lambda x + \mu y)^4$; e la quantità $\frac{\mu}{\lambda}$ sodisfa all'equazione cubica:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 - B \frac{\mu}{\lambda} - 2C = 0.$$

Poi le equazioni che esprimono A_{ll}, A_{lm} per mezzo di A, B, C , divengono:

$$\lambda^4 = 2(C + \frac{1}{3}AB), \quad \lambda^3\mu = 4(AC + \frac{1}{9}B^3),$$

donde si ricava:

$$\frac{\mu}{\lambda} = 2 \frac{AC + \frac{1}{9}B^3}{C + \frac{1}{3}AB^2},$$

e introducendo questo valore nell'equazione cubica superiore, si ottiene la relazione seguente fra A, B, C .

$$\begin{aligned} 0 &= (C + \frac{1}{3}AB)^3 C + B(AC + \frac{1}{9}B^3)(C + \frac{1}{3}AB)^2 - 4(AC + \frac{1}{9}B^3)^2 \\ &= (C^3 - \frac{1}{27}B^3) \{ C^2 - 4A^3 C + 2ABC - \frac{1}{3}A^2 B^2 + \frac{4}{27}B^3 \}. \end{aligned}$$

Qui si vede che sono a distinguersi due casi secondo che si annulli il primo o il secondo fattore. Alla medesima conseguenza si giunge anche per

altra via, che manifesta a un tempo il significato dell'annullarsi di questi fattori. L'equazione $A_{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}=0$, in virtù della quale $\mathfrak{S}$ è un quadrato perfetto, indica evidentemente che le forme quadratiche l, m posseggono un fattore comune. Se questo fattore è di primo grado, onde $l=a.b$, $m=a.c$ (dove a, b, c sono espressioni lineari, e b è diverso da c), l'equazione $R=0$ dice che fra l, m, n sussiste una relazione lineare, e che per conseguenza anche n contiene il fattore a ; sia $n=a.d$. Invece, se quel fattore comune di l ed m è di secondo grado, sarà $m=\varepsilon.l$, e allora l'equazione $R=0$ è soddisfatta da sè. Siccome poi si ha:

$$n=k_{11}m_{22}-2k_{12}m_{12}+k_{22}m_{11}=\varepsilon(k_{11}l_{22}-2k_{12}l_{12}+k_{22}l_{11})=\varepsilon.m=\varepsilon^2.l,$$

così anche n è proporzionale ad l .

Cominciamo dal considerare il primo caso. Posto per brevità:

$$k_1 a_2 - k_2 a_1 = k',$$

si ha:

$$k_{11}l_{22} - 2k_{12}l_{12} + k_{22}l_{11} = k'_1 b_2 - k'_2 b_1 = m = ac,$$

$$k_{11}m_{22} - 2k_{12}m_{12} + k_{22}m_{11} = k'_1 c_2 - k'_2 c_1 = n = ad.$$

L'equazione identica:

$$0 = \begin{vmatrix} k' & b & c \\ k'_1 & b_1 & c_1 \\ k'_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

dà pertanto:

$$0 = k'(b_1 c_2 - c_1 b_2) + a(c^2 - b d).$$

Di qui segue che k' è divisibile per a , epperò $= a k''$. Ma introducendo questo valore nelle equazioni precedenti si ottiene:

$$3ac = k''(a_1 b_2 - b_1 a_2) + 2a(k''_1 b_2 - k''_2 b_1),$$

$$3ad = k''(a_1 c_2 - c_1 a_2) + 2a(k''_1 c_2 - k''_2 c_1),$$

e siccome in ogni caso o le b o le c sono diverse dalle a , così risulta di qui che k'' è ancora divisibile per a , cioè $k' = a^2 e$, dove ora e è una funzione

lineare. Posto per k' questo valore, le equazioni superiori riescono divisibili per a , e servono a definire c e d mediante a, b, e .

Ora dall'equazione:

$$k_1 a_2 - k_2 a_1 = a^2 e$$

segue, se ξ è una funzione lineare qualunque differente da a :

$$0 = \begin{vmatrix} k & a & \xi \\ k_1 & a_1 & \xi_1 \\ k_2 & a_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = k(a_1 \xi_2 - \xi_1 a_2) + a \{ (\xi_1 k_2 - k_1 \xi_2) + \xi a e \}.$$

Dunque k è divisibile per a , cioè $k = a.s$; onde la nostra equazione diviene:

$$0 = 3s(a_1 \xi_2 - \xi_1 a_2) + a \{ 3(\xi_1 s_2 - s_1 \xi_2) + 4\xi e \}.$$

Quindi s è di nuovo divisibile per a ; e posto $k = a^2.r$, l'equazione precedente acquista il fattore a . Dunque k contiene due fattori eguali al fattore comune di l ed m .

Passando ora alla forma u , abbiamo le equazioni seguenti, nelle quali si è posto $u' = u_1 a_2 - a_1 u_2$:

$$\begin{aligned} u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} &= u'_1 b_2 - u'_2 b_1 = \frac{2}{3} \Delta + \frac{2}{3} A k, \\ u_{11} m_{22} - 2u_{12} m_{12} + u_{22} m_{11} &= u'_1 c_2 - u'_2 c_1 = \frac{1}{2} l^2 + \frac{2}{9} B k + \frac{2}{3} A \Delta. \end{aligned}$$

Ma la funzione Δ è, insieme con k , divisibile per a^2 ; epperò questo fattore è comune ai due termini del secondo membro dell'equazione. Si dimostrerà adunque, nello stesso modo come si è fatto sopra per k , che u' è divisibile per a^3 , cioè $u' = a^3.f$, ed allora dall'equazione:

$$0 = \begin{vmatrix} u & a & \xi \\ u_1 & a_1 & \xi_1 \\ u_2 & a_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = u(a_1 \xi_2 - \xi_1 a_2) + a \{ (\xi_1 u_2 - u_1 \xi_2) + \xi a^2 f \}$$

segue che anche u contiene il fattore a^3 . Con ciò è dimostrato il teorema:

Se l ed m hanno un fattore comune, però senza essere proporzionali fra loro, questo fattore è contenuto al quadrato in k ed al cubo in u .

Dalla prima proprietà s'inferisce che in questo caso il discriminante di k è nullo, cioè:

$$C^2 - \frac{1}{27} B^3 = 0,$$

dove il primo membro è il primo de'due fattori dell'equazione sopra incontrata.

Il teorema ora enunciato si può anche invertire. Se a è una funzione lineare e w una funzione cubica, entrambe qualsivogliano, e se $u = a^3 w$, sarà k sempre divisibile per a^2 , ed l, m divisibili per a . In fatti, assunti a e ξ come variabili, e formato k rispetto a queste variabili, si ha per k , astrazion fatta da un fattore costante, l'espressione:

$$\frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^4} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^3 \cdot \partial \xi} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a \cdot \partial \xi^3} + 3 \left(\frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^2 \cdot \partial \xi^2} \right)^2,$$

nella quale il primo termine è nullo, e ciascuno degli altri è divisibile per a^2 . Quindi $k = a^2 r$. Se ora formiamo anche l rispetto alle variabili a, ξ , otteniamo l'espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a^4} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial \xi^4} - 4 \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a^3 \cdot \partial \xi} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a \cdot \partial \xi^3} + 6 \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a^2 \cdot \partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^2 \cdot \partial \xi^2} \\ - 4 \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial a \cdot \partial \xi^3} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^3 \cdot \partial \xi} + \frac{\partial^4 . a^2 r}{\partial \xi^4} \cdot \frac{\partial^4 . a^3 w}{\partial a^4}, \end{aligned}$$

che è divisibile per a . La stessa cosa ha luogo per l'espressione di m :

$$\frac{\partial^3 . a^2 r}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^3 l}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^3 . a^2 r}{\partial a \cdot \partial \xi} \cdot \frac{\partial^3 l}{\partial \xi \cdot \partial a} + \frac{\partial^3 . a^2 r}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^3 l}{\partial a^2},$$

come anche per l'espressione analoga di n . Dunque possiamo enunciare il teorema:

Se u contiene un fattore cubico, questo entra al quadrato in k e linearmente in l, m, n , e sono nulli gl'invarianti R e $C^2 - \frac{1}{27} B^3$.

Passiamo ora all'altro caso nel quale m ed l non differiscono che per un fattore costante ε . Per le cose precedenti si ha in questo caso:

$$m = \varepsilon l, \quad n = \varepsilon^2 l,$$

$$\begin{aligned} A_{ml} = \varepsilon A_{ll}, \quad A_{mm} = A_{nl} = \varepsilon^2 A_{ll}, \quad A_{mn} = \varepsilon^3 A_{ll}, \quad A_{nn} = \varepsilon^4 A_{ll}, \\ \varepsilon^3 - B\varepsilon - 2C = 0, \quad \varepsilon(C + \frac{1}{3}AB) - 2(A^2C + \frac{1}{9}B^2) = 0. \end{aligned}$$

Le equazioni per k, Δ divengono:

$$\begin{aligned} k_{11} l_{22} - 2k_{12} l_{12} + k_{22} l_{11} &= \varepsilon l, \\ \Delta_{11} l_{22} - 2\Delta_{12} l_{12} + \Delta_{22} l_{11} &= (\varepsilon^2 - \frac{2}{3}B)l, \end{aligned}$$

mentre dall'equazioni per u si ottiene:

$$\begin{aligned} u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} &= \frac{2}{3}Ak + \frac{2}{3}\Delta \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2}l^2 + \frac{2}{9}Bk + \frac{2}{3}A\Delta \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\varepsilon l^2 - \frac{2}{3}Ck + \frac{2}{9}B\Delta \right). \end{aligned}$$

Da queste ultime segue o che k e Δ non differiscono da l^2 che per un fattore, o che dev'essere nullo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & A & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{9}B & \frac{2}{3}A \\ \varepsilon - \frac{2}{3}C & \frac{2}{9}B & \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\varepsilon(A^3 - \frac{1}{3}B) - \frac{1}{3}(C + \frac{1}{3}AB).$$

Nell'ultimo caso, sostituendo il valore:

$$\varepsilon = 2 \frac{AC + \frac{1}{9}B^2}{C + \frac{1}{3}AB},$$

si ottiene la condizione:

$$C^2 - 4A^3C + 2ACB - \frac{1}{3}A^2B^2 + \frac{4}{27}B^3 = 0,$$

dove il primo membro è il secondo dei fattori dell'equazione sopra ricordata. In questo caso che noi tratteremo per primo, si può rappresentare simultaneamente B e C come funzioni intere di A ed ε , in modo che la predetta condizione sia soddisfatta identicamente. In fatti dalle equazioni:

$$\varepsilon^3 - B\varepsilon - 2C = 0, \quad 2\varepsilon(A^2 - \frac{1}{3}B) - (C + \frac{1}{3}AB),$$

segue:

$$B = 3\varepsilon(2A - \varepsilon), \quad C = 2\varepsilon^3 - 3A\varepsilon^2.$$

Siccome inoltre:

$$A_{11} = 2C + \frac{2}{3}AB = 4\varepsilon(\varepsilon - A^2),$$

così tutti gli invarianti sono espressi come funzioni intere di A, ε .

Le equazioni sopra riferite per u danno :

$$\frac{3}{4} l^2 = \frac{\varepsilon - A}{\varepsilon} (\Delta + \varepsilon k).$$

In fatti, per la teoria delle forme biquadratiche, le tre quantità λ che rendono $\Delta + \lambda k$ un quadrato perfetto sono date dall'equazione cubica :

$$\lambda^3 - B\lambda - 2C = 0,$$

che, per le cose precedenti, ha la radice ε . Si vede poi dall'equazione precedente che per $\lambda = \varepsilon$ la radice del quadrato perfetto differisce da l soltanto di un fattore costante.

Immaginiamo ora che l sia da prima il prodotto di due fattori disuguali. Assumendo questi come variabili x, y , onde $l = 2xy$, l'equazione :

$$k_{11} l_{22} - 2k_{12} l_{12} + k_{22} l_{11} = \varepsilon l$$

diviene :

$$-k_{12} = \varepsilon \cdot xy,$$

epperò :

$$k = px^4 - 3\varepsilon x^2 y^2 + qy^4,$$

dove p e q sono due coefficienti ancora incogniti, fra i quali però ha luogo l'equazione :

$$pq = 6A\varepsilon - \frac{11}{4}\varepsilon^2,$$

risultante dalle definizioni di B e C . Inoltre l'equazione :

$$u_{11} l_{22} - 2u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} = \frac{2}{3}(Ak + \Delta)$$

diviene :

$$-3u_{12} = (A - \varepsilon) \{px^4 + qy^4 + 9\varepsilon x^2 y^2\},$$

onde :

$$u = p'x^6 + q'y^6 - 2(A - \varepsilon) \{(px^4 + qy^4)xy + 5\varepsilon x^3 y^3\}.$$

Si osservi che qui mancano i termini $x^4 y^2$ ed $x^2 y^4$ ($c = 0$, $e = 0$). Se ora si scrivono i coefficienti di k e si pongono, come dev'essere, il secondo ed il penultimo eguali a zero, si scorge che il discriminante di k è diverso

da zero solamente quando p' e q' sono nulli. Ma se è nullo il discriminante di k , si annullano entrambi i fattori dell'equazione di condizione superiormente decomposta: caso che sarà considerato più avanti.

Di qui si vede che se deve annullarsi soltanto il secondo di quei fattori, u diviene il prodotto xy moltiplicato per una funzione pari di quarto grado, ed è facile mostrare che una forma u così fatta conduce sempre ad un covariante k che contiene le sole potenze pari, e che l è proporzionale ad m . Per valutare la scelta speciale delle variabili, si noti che x^2y^2 è uno dei tre quadrati nei quali può essere trasformata una somma della funzione di quarto grado e del suo determinante. Abbiamo dunque il teorema:

Sia ϕ una funzione binaria di quarto grado ed l^2 uno dei quadrati nei quali può essere trasformata l'espressione $\Delta_\phi + \lambda\phi$. Allora $\phi.l$ è l'unica funzione di sesto grado per la quale A_{33} ed R si annullano in modo che l sia proporzionale ad m e che l'espressione:

$$C^2 - 4A^3C + 2ACB - \frac{1}{3}A^2B^2 + \frac{4}{27}B^3$$

sia nulla, senza che vada a zero anche il discriminante di k .

Per completare la dimostrazione del teorema, si deve ancora mostrare che, se l è un quadrato, sotto le predette condizioni il discriminante di k è zero. In fatti, per ciò che si è detto sopra, allora è zero A_u , epperò anche ε o $\varepsilon - A$. Quindi o è $B=0$, $C=0$, oppure $B=3\varepsilon^2$, $C=-\varepsilon^2$, cioè $B^3=27C^2$, ciò che si doveva dimostrare.

Casi ulteriori che risultano dall'annullarsi identicamente di m o di l saranno trattati in seguito.

Del resto la equazione di condizione sopra considerata, insieme con $R=0$, è equivalente ad $E=0$, $F=0$; perchè essa è il risultato dell'eliminazione di D da queste ultime equazioni.

Passiamo ora all'altro caso che si ricava dalla proporzionalità di m ed l . In questo caso k e Δ erano proporzionali ad l^2 . Possiamo in ciò che precede cominciare dal supporre che l non sia un quadrato, $l=2xy$, e troviamo allora k , Δ proporzionali ad x^2y^2 . Quindi anche u_{12} è proporzionale ad l^2 , cioè u assume la forma:

$$u = px^6 + 20qx^3y^3 + ry^6.$$

In fatti, presupponendo questa forma per u , si trova il covariante k proporzionale ad $x^2 y^2$ ed l proporzionale ad xy . Si ha così il teorema:

Se m è proporzionale ad l , e se k è proporzionale al quadrato di l , la forma u è riducibile, per mezzo di una sostituzione lineare, ad una funzione quadratica di cubi.

Se in questo caso l è un quadrato, $l=x^2$, avremo k e Δ proporzionali ad x^4 , quindi $m=0$, il che sarà più avanti soggetto di speciale ricerca.

Passiamo ora ai casi ne' quali si annullano entrambi i fattori:

$$B^3 - 27 C^2, \quad C^2 - 4 A^3 C + 2 A C B - \frac{1}{3} A^2 B^2 + \frac{4}{27} B^3.$$

Allora introducendo nella prima condizione i valori:

$$B = 3\varepsilon(2A - \varepsilon), \quad C = \varepsilon^2(2\varepsilon - 3A),$$

che soddisfanno alla seconda, si trova:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}B\right)^3 - C^2 &= \varepsilon^3 \{8A^3 - 21A^2\varepsilon + 18A\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3\} \\ &= \varepsilon^3 (A - \varepsilon)^2 (8A - 5\varepsilon). \end{aligned}$$

Fatta astrazione dal caso $\varepsilon=0$ che conduce ad $m=0$, e da $A=\varepsilon$ che, a cagione dell'equazione:

$$\frac{3}{4}l^2 = \frac{\varepsilon - A}{\varepsilon} (\Delta + \varepsilon k),$$

conduce ad $l=0$, non rimane che il caso:

$$A = \frac{5}{8}\varepsilon, \quad B = \frac{3}{4}\varepsilon^2, \quad C = \frac{1}{8}\varepsilon^3.$$

Qui possiamo supporre che $A_u = 4\varepsilon(\varepsilon - A)^2 = \frac{9}{16}\varepsilon^3$ non sia zero, epperò che l abbia due fattori differenti. Posto adunque $l=2xy$, segue come sopra:

$$k = px^4 + qy^4 - 3\varepsilon x^2 y^2,$$

colla condizione $p \cdot q = 0$. Sia p. e. $q=0$; allora:

$$k = px^4 - 3\varepsilon y^2 x^2, \quad \Delta = -p\varepsilon x^4 - \frac{3}{2}\varepsilon^2 x^2 y^2,$$

quindi:

$$u_{11}l_{22} - 2u_{12}l_{12} + u_{22}l_{11} = -\frac{1}{15} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{8}\varepsilon px^4 - \frac{27}{8}\varepsilon^2 x^2 y^2.$$

Per conseguenza u ha la forma:

$$u = ax^6 + 6bx^5y + 20dx^3y^3 + gy^6.$$

Ricavando di qui k , si trova :

$$k = -24bdx^4 + 6(ag + 8d^2)x^2y^2 + 12bgxy^3.$$

Affinchè questa espressione coincida colla forma precedente di k , deve essere zero bg . Ma siccome $A = ag - 10d^2$, $B = (ag + 8d^2)^2$, così la condizione $\frac{4}{3}B - (\frac{8}{3}A)^2$ per $g = 0$ non è verificata che per $d = 0$, donde $k = 0$: caso del quale sarà trattato più sotto. Facendo invece $b = 0$, si ha un caso speciale incluso in quello dianzi considerato, nel quale u è rappresentabile come funzione quadratica di cubi lineari.

§ 13.

Ricerca dei casi: $m = 0$, $l = 0$, $k = 0$.

Sinora abbiamo esauriti tutti i casi particolari ne' quali m non si annulla. Se ciò ha luogo, si annullano a dirittura anche gli invarianti :

$$R, A_{ml}, A_{mm}, A_{mn}, A_{nn},$$

e si annullano inoltre le forme n e

$$p = Bm + 2Cl.$$

Se l non dev'essere zero, sarà $C = 0$. Dalla :

$$0 = A_{ml} = \frac{4}{9}B^2 + 4AC,$$

allora segue $B = 0$, e quindi anche :

$$A_n = 2C + \frac{2}{3}AB = 0.$$

Dunque l è un quadrato, $l = \rho x^2$. Dall'equazione :

$$k_{11}l_{22} - 2k_{12}l_{12} + k_{22}l_{11} = 0,$$

abbiamo per k la determinazione $k_{22} = 0$, onde :

$$k = px^4 + 4qx^3y,$$

e simultaneamente :

$$\Delta = -2q^2x^4 = \frac{3}{24}\{u_{11}m_{22} - 2u_{12}m_{12} + u_{22}m_{11} - \frac{1}{2}l^2\} = -\frac{3\rho^2}{4A}x^4;$$

epperò :

$$q^2 = \frac{3}{8}\frac{\rho^2}{A},$$

se non è $A=0$, donde seguirebbe $\frac{1}{2}l^2 = -\frac{2}{3}A\Delta = 0$.

Inoltre dalla :

$$u_{11}l_{22} - 2u_{12}l_{12} - u_{22}l_{11} = \frac{2}{3}(\Delta + Ak),$$

segue l'equazione :

$$\frac{\rho}{20} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (Ap - 2q^2)x^4 + 4Aqx^3y;$$

quindi, se non è zero ρ cioè l , si avrà per u la forma :

$$u = ax^6 + 6bx^5y + 6fxy^5 + gy^6.$$

Ricavando di qui k , si ottiene :

$$k = 12afx^3y + 6agx^2y^2 + 12bgxy^3.$$

Per tal modo si vede che nelle formole antecedenti dev'essere $p=0$, ed inoltre $ag=0$, $bg=0$. O sono nulli a e b , epperò anche k ; o è zero g , ed allora :

$$u = ax^6 + 6bx^5 + 6fxy^5, \quad k = 12afx^3y.$$

Quindi :

$$l = -4u_{1222}k_{1112} = -12af^2y^2,$$

ciò che contraddice al valore assunto per l . Dunque è in ogni caso $l=0$, e si ha il teorema :

Se il covariante m si annulla identicamente, è identicamente zero anche il covariante l .

Rimane dunque ad esaminarsi solamente in quali casi l è zero; cominciando a supporre che k non si annulli. Siccome in questo caso :

$$\Delta + Ak = \frac{3}{2}(u_{11}l_{22} - 2u_{12}l_{12} + u_{22}l_{11}) = 0,$$

così k è un quadrato perfetto. Per conseguenza si può porre $k = 6x^2y^2$ oppure $k = x^4$. Nel primo caso l'equazione che definisce l per mezzo di k ed u diviene $u_{1122} = 0$, ossia :

$$cx^2 + 2dxy + ey^2 = 0.$$

Dunque $c=d=e=0$, epperò :

$$u = ax^6 + 6bx^5y + 6fxy^5 + gy^6.$$

Ricavando k , si trova :

$$k = 12afx^3y + 6agx^2y^2 + 12bgxy^3.$$

Perciò dev'essere $af=0$, $bg=0$; quindi, se k non deve andare a zero, $b=0$, $f=0$. Dunque u è una somma di seste potenze.

In secondo luogo, se $k=x^4$, l'equazione che definisce l per mezzo di u e k dà $u_{2222}=0$, dunque:

$$u = ax^6 + 6bx^5y + 15cx^4y^2 + 20dx^3y^3,$$

donde segue:

$$k = 6(3c^2 - 4bd)x^4 + 24cdx^3y + 8d^2x^2y^2.$$

Perchè questa forma di k coincida colla prima, dev'essere $d=0$, onde:

$$u = ax^6 + 6bx^5y + 15cx^4y^2.$$

E si ha così il teorema:

Se l è zero, o u è una somma di due seste potenze, ovvero u contiene una radice quadrupla; ed in entrambi i casi si annulla sempre anche l .

Finalmente restano soltanto i casi ne' quali k è identicamente nullo. Ciò si verifica in primo luogo, evidentemente, se u è una sesta potenza. Se u non ha questa forma, si possono assumere come variabili due diversi fattori di k , onde si avrà $a=0$, $g=0$; ed affinchè allora k si annulli, devono essere soddisfatte le equazioni:

$$\begin{aligned} 4bd - 3c^2 &= 0 & , & & 3be - 2cd &= 0, \\ 4df - 3e^2 &= 0 & , & & 3cf - 2de &= 0, \\ 9ce - 8d^2 &= 0. \end{aligned}$$

Se in primo luogo è $d=0$, anche c ed e devono essere zero; quindi u ha la forma:

$$u = 6(x^5y + y^5x).$$

Ma se d è diverso da zero, nessuno dei coefficienti c , e , b , f può essere nullo, ed esprimendo tutto mediante b , c , si trova:

$$\begin{aligned} u &= \frac{3xy}{2b^3} \{ 4b^4x^4 + 10cb^3x^3y + 10c^2b^2x^2y^2 + 5c^3bxy^3 + c^4y^4 \} \\ &= \frac{3x(cy + bx)}{2b^3c} \{ (cy + bx)^4 - b^4x^4 \}, \end{aligned}$$

espressione che mediante una sostituzione lineare si reca del pari alla forma $6xy(x^4 + y^4)$.

La forma $6xy(x^4+y^4)$ è il covariante di sesto ordine di una forma biquadratica:

$$x^4+y^4+6\lambda x^2y^2.$$

Si può adunque enunciare il teorema:

Se per una forma binaria u di sesto grado il covariante k è identicamente nullo, u sarà una sesta potenza, ovvero sarà il covariante di sesto grado di una forma biquadratica; e viceversa k si annulla identicamente in ambedue questi casi.

Per risolvere l'equazione $u=0$ nel caso che k sia nullo, basta fare l'osservazione che i fattori di $6xy(x^4+y^4)$, cioè:

$$2xy, \quad x^2+y^2i, \quad x^2-y^2i,$$

danno sempre zero, se si formano gli invarianti simultanei di due qualunque fra essi. Dunque, se i fattori di u si indicano con:

$$x^2+2\alpha xy+\beta y^2, \quad x^2+2\alpha' xy+\beta' x^2, \quad x^2+2\alpha'' xy+\beta'' y^2$$

questi possederanno la medesima proprietà, onde:

$$\beta+\beta'=2\alpha\alpha', \quad \beta'+\beta''=2\alpha'\alpha'', \quad \beta''+\beta=2\alpha''\alpha.$$

I coefficienti del prodotto di quei tre fattori diventano perciò i seguenti:

$$\begin{aligned} 1, \quad 2(\alpha+\alpha'+\alpha''), \quad \beta+\beta'+\beta''+4(\alpha\alpha'+\alpha'\alpha''+\alpha''\alpha) &= 5(\beta+\beta'+\beta''), \\ 2(\alpha'\beta'+\alpha''\beta)+8\alpha\alpha'\alpha'', \quad 4(\alpha\alpha'\beta''+\alpha'\alpha''\beta+\alpha''\alpha\beta')+\beta'\beta''+\beta''\beta+\beta\beta' &= \\ = 5(\beta\beta'+\beta'\beta''+\beta''\beta), \quad 2(\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'), \quad \beta\beta'\beta'' &. \end{aligned}$$

Dunque, se è data la forma:

$$u=ax^6+6bx^5y+15x^4y^2+20dx^3y^3+15ex^2y^4+6fxy^5+gy^6,$$

si ricavano le β dall'equazione cubica:

$$a\beta^3-3c\beta^2+3e\beta-g=0,$$

e quindi le α mediante equazioni lineari.