**2. Über den Einfluß
der Diffusion auf die Leitfähigkeit ionisierter
Gase in einem ebenen Kondensator;
von George Jaffé.**

Der Einfluß der Ionendiffusion auf die Form der Stromspannungscharakteristik ionisierter Gase ist noch nicht im wünschenswerten Umfange untersucht worden. Riecke¹⁾ hat zwar schon 1903 die Diffusion in seinen Gleichungen berücksichtigt, aber einerseits gelten die Rieckeschen Entwicklungen nur für nahezu gesättigten Strom, andererseits ist die Rechnung nicht so geführt, daß daraus der Einfluß der in Betracht kommenden Parameter auf die Form der Sättigungskurve hervorgeht.

Die Untersuchungen von Thomson,²⁾ Mie³⁾ und Seeliger⁴⁾ über die Leitfähigkeit ionisierter Gase lassen die Ionendiffusion unberücksichtigt. Neuerdings hat nun Langevin⁵⁾ den Ionisierungsstrom zwischen parallelen Platten für den Fall behandelt, daß der Verlust an Ionen durch Diffusion groß ist gegen den Verlust durch Wiedervereinigung. Diese Voraussetzung trifft zu für hinreichend kleine Werte des Plattenabstands, und die Langevinschen Rechnungen ergeben dann den Verlauf der Charakteristik mit jedem gewünschten Grade der Annäherung. Langevin hat gezeigt, daß sich auf seine Resultate eine Methode zur Bestimmung der Wertigkeit der Ionen gründen läßt, und seine Formeln sind überall dort von größtem Wert, wo es in der Hand des Experimentators liegt, mit dem Plattenabstand genügend weit herunter zu gehen.

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 12. p. 52. 814. 820. 1903.

2) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases. Chapter III. 1903.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 857. 1904.

4) R. Seeliger, Diss. München 1910; Ann. d. Phys. 33. p. 319. 1910.

5) P. Langevin, Le Radium 10. p. 113. 1913.

Häufiger noch dürfte aber der Fall eintreten, daß Plattenabstand und Ionisationsstärke durch anderweitige Rücksichten vorgeschrieben sind, und daß sich nun die Frage erhebt, bis zu welchem Betrage Abweichungen vom normalen Verhalten durch Diffusion auftreten können.

Um diese Frage unter allen Umständen beantworten zu können, ist im folgenden der Versuch gemacht, die Stromspannungscharakteristik eines zwischen parallelen Platten befindlichen ionisierten Gases für alle Werte der Parameter zu berechnen. Dabei wurde nicht etwa eine Strenge der Rechnung angestrebt, wie sie Seeliger für das analoge Problem — unter Vernachlässigung der Diffusion — erreicht hat, sondern es wurde mehr Wert darauf gelegt, daß sich handliche Formeln ergeben, welche den Einfluß der Diffusion in bequemer Weise abzulesen gestatten.

Zu diesem Zwecke wurden — nach dem Vorgang von Mie — Entwicklungen für schwache und für nahezu gesättigte Ströme gesucht. Was erstere betrifft, so ist die Rechnung nur für das erste Glied der Entwicklung — d. h. die Leitfähigkeit bei unendlich schwachem Strome — durchgeführt, und auch da nur unter gewissen rechnerischen Vereinfachungen; aber es wird sich zeigen, daß trotz dieser Beschränkung die Resultate der Rechnung ausreichen, einen Überblick über das gesamte fragliche Gebiet zu schaffen, und den Einfluß der Diffusion bei beliebigem Plattenabstand zahlenmäßig festzustellen.

I. Entwicklung für schwache Ströme.

Wählt man die x Richtung senkrecht zu den Ebenen der parallelen Kondensatorplatten und läßt man die Richtung der positiven x -Achse mit der Richtung des elektrischen Feldes h zusammenfallen, so lautet das System der Differentialgleichungen des zu behandelnden Problems¹⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} D \frac{d^2 p}{dx^2} - h \frac{d}{dx} h p = \alpha p n - q \\ D' \frac{d^2 n}{dx^2} + k' \frac{d}{dx} h n = \alpha p n - q \\ \frac{dh}{dx} = \frac{4\pi}{K} (p - n). \end{cases}$$

1) Vgl. P. Langevin, l. c.

Dabei bedeuten p und n die Dichte der positiven bzw. negativen Volumladung; q die pro Zeit- und Volumeinheit erzeugte Elektrizitätsmenge eines jeden Zeichens, die im ganzen Kondensator als konstant vorausgesetzt wird; k, k' und D, D' stellen die spezifischen Geschwindigkeiten und die Diffusionskoeffizienten der positiven bzw. negativen Ionen dar. Endlich bedeutet α den Wiedervereinigungskoeffizienten (bezogen auf Ladungsdichte, nicht auf Ionenzahlen) und K die Dielektrizitätskonstante des ionisierten Mediums. Die gesamten Betrachtungen gelten auch für flüssige Dielektrika, soweit dieselben als homogen ionisiert angesehen werden dürfen.

Versteht man unter a den Plattenabstand und unter V die angelegte Potentialdifferenz, so lauten die Bedingungen, denen die Lösung des Systems (1) genügen muß:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 0 \text{ und } n = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und für } x = a \\ \int_0^a h \, dx = V. \end{array} \right.$$

Diese fünf Bedingungen genügen gerade zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten, die bei der Integration von (1) auftreten. Der elektrische Strom, welcher den Kondensator durchfließt, ergibt sich als eine dieser Integrationskonstanten. Betrachten wir nämlich — hier, wie überall im folgenden — die Einheit des Querschnitts, so resultiert für die Stromdichte i aus den beiden ersten Gleichungen (1) durch Subtraktion und Integration:

$$(3) \quad i = D' \frac{dn}{dx} - D \frac{dp}{dx} + h(k'n + kp).$$

Um nun eine Lösung des Systems für schwache Ströme zu gewinnen, wollen wir den stationären Zustand, der sich beim Anlegen einer schwachen Potentialdifferenz ausbildet, als eine Deformation desjenigen Zustandes auffassen, der sich im Kondensator unter Einwirkung einer konstanten, überall gleich wirkenden Ionisationsquelle bei Abwesenheit eines elektrischen Feldes herstellt. Dieser letztere Zustand, der also durch Diffusion und Wiedervereinigung allein zustande kommt, ist von Langevin¹⁾ behandelt worden, wenigstens unter der ver-

1) P. Langevin, Journ. de Phys. IV. 4. p. 322. 1905.

einfachenden Annahme, daß die Geschwindigkeiten der beiden Ionenarten gleich sind. Diese Voraussetzung soll nun auch für die Betrachtung schwacher Ströme eingeführt werden, weil sonst — schon bei Abwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes — das Auftreten elektrischer Felder im Innern des Kondensators zu berücksichtigen wäre, und dadurch die Rechnung wesentlich kompliziert würde.

Es wird also für diesen Teil der Untersuchung vorausgesetzt, daß beide Ionenarten die gleiche Beweglichkeit $\bar{k}$ und den gleichen Diffusionskoeffizienten $\bar{D}$ haben, und diese fiktiven Werte sollen gleich dem arithmetischen Mittel der wirklich geltenden Werte sein, also:

$$(4) \quad \bar{k} = \frac{1}{2}(k + k'); \quad \bar{D} = \frac{1}{2}(D + D').$$

Unter diesen Voraussetzungen hat nun Langevin gezeigt, daß der stationäre Zustand bei Abwesenheit eines elektrischen Feldes von einem einzigen Parameter, dem reduzierten Plattenabstande

$$d = a' \sqrt[4]{\frac{q \alpha}{4 D^2}},$$

abhängig ist, wo $a' = a/2$ den halben, wahren Plattenabstand bedeutet.

Im Interesse der Einfachheit der folgenden Rechnungen soll der reduzierte Plattenabstand hier etwas abweichend definiert werden. Er soll nämlich zur Unterscheidung $\bar{\delta}$ genannt und sein Wert folgendermaßen festgesetzt werden:

$$(5) \quad \bar{\delta} = a \sqrt[4]{\frac{q \alpha}{36 D^2}}.$$

Das so definierte $\bar{\delta}$ steht also mit dem Langevinschen d in folgendem Zusammenhang:

$$(5') \quad \bar{\delta} = \frac{2 d}{\sqrt[3]{3}}.$$

Im Anschluß an Langevin führen wir jetzt für die Größen p, n, x, h, i reduzierte Größen $\pi, \nu, \xi, \eta, \iota$ ein, durch die Substitutionsgleichungen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi = \sqrt{\frac{\alpha}{q}} \cdot p; \quad \nu = \sqrt{\frac{\alpha}{q}} \cdot n; \quad \xi = \sqrt[4]{\frac{\alpha q}{36 D^2}} \cdot x; \\ \eta = \frac{K}{4 \pi} \sqrt[4]{\frac{\alpha^3}{q 36 D^2}} \cdot h; \quad \iota = \sqrt[4]{\frac{36 \alpha}{D^2 q^3}} \cdot i. \end{array} \right.$$

Berücksichtigt man die Voraussetzung, daß die Beweglichkeiten der beiden Ionenarten gleich sein sollen, so geht das System (1) durch die Substitutionen (6) in das folgende reduzierte System über:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{6} \frac{d^2 \pi}{d\xi^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d}{d\xi} \eta \pi = \pi \cdot \nu - 1 \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 \nu}{d\xi^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d}{d\xi} \eta \nu = \pi \cdot \nu - 1 \\ \frac{d\eta}{d\xi} = \pi - \nu. \end{cases}$$

Dabei ist unter

$$(8) \quad \varepsilon = \frac{\alpha K}{4 \pi \cdot 2 \bar{k}}$$

die Langevinsche Zahl verstanden, welche stets kleiner als 1 ist und für sehr dichte Medien den Grenzwert 1 annimmt.

Die Gleichung (3) geht durch die Substitutionen (6) in die folgende über

$$(9) \quad \iota = \frac{d\nu}{d\xi} - \frac{d\pi}{d\xi} + \frac{3}{\varepsilon} \eta (\pi + \nu),$$

und aus den Bedingungen (2) wird

$$(10) \quad \begin{cases} \pi = 0 \text{ und } \eta = 0 \text{ für } \xi = 0 \text{ und für } \xi = \delta; \\ \int_0^\delta \eta d\xi = \frac{\varepsilon}{3} \frac{\bar{k}}{\bar{D}} \int_0^a h dx = \frac{\varepsilon}{3} \frac{\bar{k}}{\bar{D}} V. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (7) bis (10) folgt, daß die Lösung von (7) und demnach auch der reduzierte Strom ι nur von den drei Parametern ε , δ und $\bar{k}/\bar{D} \cdot V$ abhängen kann.

Um nun das System (7) für kleine Werte von V zu integrieren, setzen wir die folgenden Entwicklungen an:

$$(11) \quad \begin{cases} \pi = \pi_0 + \pi_1 V + \pi_2 V^2 + \dots \\ \nu = \nu_0 + \nu_1 V + \nu_2 V^2 + \dots \\ \eta = \eta_1 V + \eta_2 V^2 + \dots \\ \iota = \iota_1 V + \iota_2 V^2 + \dots \end{cases}$$

Indem man diese Entwicklungen in (7) einsetzt, und die Koeffizienten, welche dabei gleich hohe Potenzen von V zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens erhalten, einander gleich setzt, ergeben sich Differentialgleichungen, aus denen im Prinzip die Funktionen π_q , ν_q und η_q bestimmt werden können;

die ι_q ergeben sich dann aus den Grenzbedingungen, welche lauten:

$$(12) \begin{cases} \pi_q \text{ und } v_q = 0 \text{ für } \xi = 0 \text{ und für } \xi = \delta; & q = 1, 2, 3 \dots \\ \int_0^\delta \eta_1 d\xi = \frac{\varepsilon}{3} \frac{\bar{k}}{D}; & \int_0^\delta \eta_r d\xi = 0; & r = 2, 3, 4 \dots \end{cases}$$

Der Ansatz (11) und die Bedingungen (12) entsprechen durchaus dem Lösungsverfahren, das Langevin in seiner neuesten Arbeit anwendet; diese Arbeit ist darum methodisch von größter Wichtigkeit, weil Langevin in ihr nicht aus dem System (1) eine Gleichung isoliert, die nur h und i enthält, sondern die einzelnen Gleichungen des Systems parallel zueinander behandelt. Dieses Verfahren ist auch in der vorliegenden Arbeit angewandt, wenn auch — um des geänderten Gültigkeitsbereichs willen — die Entwicklungen anders angesetzt, und die Fälle schwacher bzw. nahezu gesättigter Ströme getrennt behandelt werden mußten.

Setzt man, wie angegeben, die Reihen (11) in (7) ein, so liefern die von V freien Glieder folgende Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{1}{6} \frac{d^2 \pi_0}{d\xi^2} = \pi_0 v_0 - 1 \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 v_0}{d\xi^2} = \pi_0 v_0 - 1 \\ \pi_0 - v_0 = 0. \end{cases}$$

Wegen der letzten dieser Gleichungen gehen die beiden ersten in die folgende über:

$$(14) \quad \frac{1}{6} \frac{d^2 \pi_0}{d\xi^2} = \pi_0^2 - 1.$$

Diese Gleichung bestimmt den Zustand bei Abwesenheit eines Feldes; sie ist — bis auf die Zahlenfaktoren — mit der von Langevin¹⁾ behandelten identisch und liefert nach Multiplikation mit $d\pi_0$ und einmaliger Integration:

$$(15) \quad \frac{1}{12} \left(\frac{d\pi_0}{d\xi} \right)^2 = \frac{1}{3} \pi_0^3 - \pi_0 + c.$$

Die Integrationskonstante c bestimmt sich aus der Bedingung, daß $d\pi_0/d\xi$ für $\xi = \delta/2$ verschwinden muß. Sei π_0' der Wert von π_0 für $\xi = \delta/2$, so ergibt sich

1) P. Langevin, Journ. de Phys. I. c.

$$(16) \quad c = \pi_0' - \frac{\pi_0'^3}{3},$$

wobei zu beachten ist, daß π_0' wegen der ersten Gleichung (6) höchstens gleich 1 sein kann, da p höchstens den Wert $\sqrt{\frac{q}{\alpha}}$ annimmt, der bei Abwesenheit von Diffusion gelten würde.

Setzen wir nun noch

$$(17) \quad 4\pi_0^3 - 12\pi_0 - (4\pi_0'^3 - 12\pi_0') = II,$$

so folgt aus (15) und (16)

$$(18) \quad \frac{d\pi_0}{\sqrt{II}} = d\xi.$$

Das Polynom dritten Grades (17) hat bereits die Weierstrasssche Normalform mit den Invarianten

$$(19) \quad g_2 = 12; \quad g_3 = 4\pi_0'^3 - 12\pi_0',$$

die Integration und Umkehrung läßt sich also unmittelbar ausführen. Da π_0 für $\xi = 0$ verschwinden soll, ergibt sich

$$(20) \quad \int_0^{\pi_0} \frac{d\pi_0}{\sqrt{II}} = \xi;$$

setzt man also

$$(21) \quad \int_0^{\infty} \frac{d\pi_0}{\sqrt{II}} = K,$$

so wird

$$(22) \quad \int_{\pi_0}^{\infty} \frac{d\pi_0}{\sqrt{II}} = K - \xi,$$

und

$$(23) \quad \pi_0 = \mathcal{P}(K - \xi) = \mathcal{P}(\xi - K),$$

wo $\mathcal{P}(u)$ die Weierstrasssche elliptische Funktion ist.¹⁾

Die drei Wurzeln des Polynoms (17) sind:

$$(24) \quad e_1 = \sqrt{3 - \frac{3\pi_0'^2}{4} - \frac{\pi_0'}{2}}; \quad e_2 = \pi_0'; \quad e_3 = -\sqrt{3 - \frac{3\pi_0'^2}{4} - \frac{\pi_0'}{2}}.$$

1) Die Bezeichnungen sind hier und im folgenden dem Werke G.H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1886, entlehnt. Für die folgenden Rechnungen sei auf dieses Werk verwiesen.

Demnach bestimmt sich die Konstante K folgendermaßen:

$$(25) \quad K = \int_0^{\infty} \frac{d\pi_0}{\sqrt{H}} = \int_0^{\pi_0'} \frac{d\pi_0}{\sqrt{H}} + \int_{e_2}^{e_1} \frac{d\pi_0}{\sqrt{H}} + \int_{e_1}^{\infty} \frac{d\pi_0}{\sqrt{H}} = \frac{\delta}{2} + \omega + \omega',$$

wo ω und ω' die Werte der Halbperioden sind. $\mathcal{N}(\xi - K)$ verschwindet für $\xi = 0$ vermöge der Definition von K , und verschwindet auch für $\xi = \delta$ wegen

$$(25') \quad \begin{cases} \mathcal{N}(\delta - K) = \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2} - \omega - \omega'\right) = \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2} + \omega + \omega'\right) \\ = \mathcal{N}(K) = \mathcal{N}(-K); \end{cases}$$

$\mathcal{N}(\xi - K)$ genügt also den Bedingungen.

Durch Gleichung (23) ist π_0 in analytisch einfacher Weise als Funktion von ξ , und damit die Ionisationsdichte p als Funktion von x dargestellt. Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Darstellung (23) nur im Interesse der folgenden Rechnungen gewählt wurde; sie kann nicht dazu dienen, etwa π_0' als Funktion von δ numerisch zu berechnen. Es ist zwar nach (23)

$$(26) \quad \pi_0' = \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2} - K\right),$$

und es läßt sich auch (vgl. p. 261) eine Beziehung zwischen π_0' und $\mathcal{N}(\delta/2)$ ableiten, die frei von K ist, aber diese Beziehung kann — außer für sehr kleine und sehr große Werte von δ — nicht zur Bestimmung von π_0' aus δ dienen, weil der Parameter g_3 nach (19) noch diese Unbekannte enthält. Es läßt sich numerisch vielmehr nur δ als Funktion von π_0' auswerten, wie weiter unten ausgeführt werden soll.

Wenden wir uns nunmehr denjenigen Gliedern von (7) zu, welche nach der Substitution von (11) linear in V sind, so ergeben diese die Gleichungen:

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{1}{6} \frac{d^2 \pi_1}{d\xi^2} - \frac{1}{2\epsilon} \frac{d}{d\xi} \eta_1 \pi_0 = \pi_0 \nu_1 + \pi_1 \nu_0, \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 \nu_1}{d\xi^2} + \frac{1}{2\epsilon} \frac{d}{d\xi} \eta_1 \nu_0 = \pi_0 \nu_1 + \pi_1 \nu_0, \\ \frac{d\eta_1}{d\xi} = \pi_1 - \nu_1. \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Gleichheit von π_0 und ν_0 , und führt man die Größe

$$(28) \quad \xi - K = u$$

als neue Variable ein, so folgt aus (27) und (23):

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \pi_1}{du^2} - \frac{3}{\varepsilon} \frac{d}{du} \eta_1 \mathcal{J}(u) = 6 \mathcal{J}(u) (\pi_1 + \nu_1), \\ \frac{d^2 \nu_1}{du^2} + \frac{3}{\varepsilon} \frac{d}{du} \eta_1 \mathcal{J}(u) = 6 \mathcal{J}(u) (\pi_1 + \nu_1), \\ \frac{d \eta_1}{du} = \pi_1 - \nu_1. \end{cases}$$

Addiert man die beiden ersten Gleichungen (29), so ergibt sich

$$(30) \quad \frac{d^2 (\pi_1 + \nu_1)}{du^2} = 12 \mathcal{J}(u) \cdot (\pi_1 + \nu_1);$$

subtrahiert man die zweite von der ersten, integriert dann und eliminiert $\pi_1 - \nu_1$ vermöge der letzten, so wird

$$(31) \quad \frac{d^2 \eta_1}{du^2} = \frac{6}{\varepsilon} \mathcal{J}(u) \eta_1 - \iota_1,$$

wo ι_1 die Bedeutung hat, die sich aus (11) ergibt.

Aus den Gleichungen (30), (31) und der letzten Gleichung (29) bestimmen sich $(\pi_1 + \nu_1)$, η_1 und $(\pi_1 - \nu_1)$; aus den Grenzbedingungen (12) dann ι_1 und die anderen vier Integrationskonstanten. Die Gleichung (30) und die Gleichung (31) ohne rechtes Glied gehören zum Typus der Laméschen Differentialgleichung;¹⁾ diese ist integrabel, wenn der numerische Faktor auf der rechten Seite die Form $n(n+1)$ hat, wo n eine ganze Zahl ist. Demnach ist (30) integrabel, (31) aber nur für spezielle Werte von ε , nämlich $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{10} \dots$

Beschäftigen wir uns zunächst mit (30), so lautet ein partikuläres Integral dieser Gleichung²⁾

$$(32) \quad \pi_1 + \nu_1 = \mathcal{J}'(u),$$

und das allgemeine Integral ist demnach:

$$(33) \quad \pi_1 + \nu_1 = C_1 \mathcal{J}'(u) + C_2 \mathcal{J}'(u) \int \frac{du}{\mathcal{J}'(u)^2},$$

wo C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind. Die Quadratur in (33) läßt sich nach der Methode der Partialbruchzerlegung elliptischer Funktionen³⁾ ausführen, und man findet nach etwas weitläufigen Rechnungen:

1) G. H. Halphen, II. p. 457.

2) G. H. Halphen, II. p. 468.

3) G. H. Halphen, I. Kap. 7.

$$(34) \quad \begin{cases} \pi_1 + v_1 = C_1 \mathcal{J}'(u) + C_2 [9g_3 u \mathcal{J}'(u) - 6g_2 \zeta(u) \mathcal{J}'(u) \\ \quad - 12g_2 \mathcal{J}^2(u) + 18g_3 \mathcal{J}(u) + 2g_2^2] \end{cases}$$

wo

$$\zeta(u) = - \int \mathcal{J}(u) du$$

ist.

Für die Konstantenbestimmung ist zu berücksichtigen, daß für

$$(35) \quad \begin{cases} \xi = 0; \text{ d.h. } u = u_1 = -K, & \mathcal{J}(u_1) = 0; \mathcal{J}'(u_1) = +\sqrt{-g_3}, \\ \quad \text{und für} \\ \xi = \delta; \text{ d.h. } u = u_2 = -K + \delta, & \mathcal{J}(u_2) = 0; \mathcal{J}'(u_2) = -\sqrt{-g_3} \end{cases}$$

wird.

Setzt man diese Bedingungen in (34) ein, so ergibt sich

$$(36) \quad \begin{cases} C_1 = 0; & C_2 = 0, & \text{also} \\ \pi_1 + v_1 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (31) soll nur für einen speziellen Wert von ε behandelt werden, und zwar soll der Wert $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gewählt werden, einerseits, weil sich die Rechnung dann am relativ einfachsten gestaltet, andererseits, weil dieser Fall für Gase bei Atmosphärendruck der Größenordnung nach zutrifft. (Für Luft ist bei Atmosphärendruck $\varepsilon = 0,27$; für Kohlensäure $\varepsilon = 0,51$.)

Unter der Annahme $\varepsilon = 0,5$ ist wieder $\mathcal{J}'(u)$ ein partikuläres Integral der Gleichung (31) ohne rechtes Glied, und das allgemeine Integral lautet demnach:

$$(37) \quad \left\{ \eta_1 = C_3 \mathcal{J}'(u) + \mathcal{J}'(u) \int \frac{C_4 - \iota_1 \mathcal{J}(u)}{\mathcal{J}'^2(u)} du. \right.$$

Die Quadratur läßt sich wieder ausführen, und man findet:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 = C_3 \mathcal{J}'(u) + \frac{1}{A} \bigg[& (C_4 \cdot 9g_3 + \iota_1 \frac{g_2^2}{2}) u \mathcal{J}'(u) - (C_4 6g_2 \\ & + \iota_1 9g_3) \zeta(u) \mathcal{J}'(u) - (C_4 12g_2 + \iota_1 18g_3) \mathcal{J}^2(u) \\ & + (C_4 18g_3 + \iota_1 g_2^2) \mathcal{J}(u) + C_4 2g_2^2 + \iota_1 3g_2 g_3 \bigg]; \end{aligned} \right.$$

dabei ist

$$(39) \quad A = g_2^3 - 27g_3^2$$

gesetzt.

Durch Differentiation ergibt sich aus (38), wenn das Argument u überall fortgelassen wird:

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1' &= \pi_1 - v_1 = C_3 \eta'' + \frac{1}{A} \left[C_4 \{ 27 g_3 \eta' - 6 g_2 \eta'' \zeta \right. \\ &\quad \left. + 9 g_3 u \eta'' - 18 g_2 \eta \eta' \} - \iota_1 \{ 9 g_3 \eta'' \zeta \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} g_2^2 \eta' - \frac{g_2^2}{2} u \eta'' + 27 g_3 \eta \eta' \} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Bedingungen (12) erfordern:

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \eta_1 du &= \int_0^{\delta} \eta_1 d\xi = \frac{\varepsilon}{3} \frac{\bar{k}}{\bar{D}} = \frac{1}{6} \frac{\bar{k}}{\bar{D}} \\ \eta_1(u_1) &= \eta_1(u_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Quadratur $\int \eta_1 du$ läßt sich ausführen. Es ist

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \eta_1 du &= \left[C_3 \eta \right]_{u_1}^{u_2} + \frac{1}{A} \left[C_4 \left\{ \frac{g_2^2}{2} \cdot u - 9 g_3 \zeta - 3 g_2 \eta' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (9 g_3 u - 6 g_2 \zeta) \eta \right\} - \iota_1 \left\{ \frac{g_2^2}{2} \zeta + \frac{9}{2} g_3 \eta' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{4} g_2 g_3 u + (9 g_3 \zeta - \frac{g_2^2}{2} u) \eta \right\} \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned} \right.$$

Berücksichtigt man die Relationen

$$\eta(u_1) = 0; \quad \eta'(u_1) = +\sqrt{-g_3}; \quad \eta''(u_1) = -\frac{g_2}{2};$$

$$\eta(u_2) = 0; \quad \eta'(u_2) = -\sqrt{-g_3}; \quad \eta''(u_2) = -\frac{g_2}{2},$$

so ergeben die Gleichungen (42) und (40) auf Grund der Bedingungen (41) die folgenden Gleichungen:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A}{6} \cdot \frac{\bar{k}}{\bar{D}} &= C_4 \left\{ 9 g_3 Z + 6 g_2 \sqrt{-g_3} + \frac{g_2^2}{2} \delta \right\} \\ &\quad + \iota_1 \left\{ \frac{g_2^2}{2} Z + 9 g_3 \sqrt{-g_3} + \frac{3}{4} g_2 g_3 \delta \right\}, \\ A \frac{g_2}{2} C_3 &= C_4 \left\{ 3 g_2^2 \zeta(u_1) + 27 g_3 \sqrt{-g_3} - \frac{9}{2} g_2 g_3 u_1 \right\} \\ &\quad + \iota_1 \left\{ \frac{9}{2} g_2 g_3 \zeta(u_1) + \frac{3}{2} g_2^2 \sqrt{-g_3} - \frac{g_2^3}{4} \cdot u_1 \right\}, \\ A \frac{g_2}{2} C_3 &= C_4 \left\{ 3 g_2^2 \zeta(u_2) - 27 g_3 \sqrt{-g_3} - \frac{9}{2} g_2 g_3 u_2 \right\} \\ &\quad + \iota_1 \left\{ \frac{9}{2} g_2 g_3 \zeta(u_2) - \frac{3}{2} g_2^2 \sqrt{-g_3} - \frac{g_2^3}{4} u_2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist gesetzt:

$$(44) \quad Z = \zeta(u_1) - \zeta(u_2).$$

Aus den drei Gleichungen (43) bestimmen sich die Konstanten C_3 , C_4 und ι_1 . Für den vorliegenden Zweck ist nur ι_1 von Interesse. Man findet nach einiger Umrechnung:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iota_1 = \frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{D} (-g_3) \frac{\sqrt{-g_3 + \delta} + \frac{8}{g_3} Z}{(\sqrt{-g_3 + \delta})^2 - Z^2}. \end{array} \right.$$

Da nun der reduzierte Strom nach (11) in erster Annäherung durch $\iota_1 V$ gegeben ist, ergibt sich nach (6)

$$(46) \quad i = \sqrt[4]{\frac{\bar{D}^3 q^3}{36 \cdot \alpha}} \iota_1 V,$$

oder, unter Benutzung von (5)

$$(47) \quad i = 2 \bar{k} \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \cdot \frac{V}{a} \Phi(\delta),$$

wobei

$$(48) \quad \Phi(\delta) = \frac{(-g_3) \cdot \delta}{4} \frac{\sqrt{-g_3 + \delta} + \frac{8}{g_3} Z}{(\sqrt{-g_3 + \delta})^2 - Z^2}$$

gesetzt ist. Diese Funktion $\Phi(\delta)$ ist ein positiver echter Bruch, der nun zunächst für kleine und große δ durch Näherungsformeln dargestellt werden soll.

Wir gehen davon aus, daß nach (28) und (25')

$$\mathcal{N}(u_2) = \mathcal{N}(\delta - K) = \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2} - \omega - \omega'\right) = 0$$

ist. Wendet man auf den letzten Ausdruck das Additionstheorem der $\mathcal{N}$ -Funktion an¹⁾, so ergibt sich

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2} - \omega - \omega'\right) = -\mathcal{N}(-\omega - \omega') - \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \quad + \frac{1}{4} \left(\frac{0 - \mathcal{N}'\left(\frac{\delta}{2}\right)}{e_2 - \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

denn es ist $\mathcal{N}'(-\omega - \omega') = 0$ und $\mathcal{N}(-\omega - \omega') = e_2$; ersetzt man $\mathcal{N}'^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ durch

$$4 \mathcal{N}^3\left(\frac{\delta}{2}\right) - g_2 \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2}\right) - g_3,$$

1) G. H. Halphen I. p. 93.

so ergibt sich aus (49) für $\mathcal{N}(\bar{\delta}/2)$ folgende quadratische Gleichung:

$$(50) \quad \mathcal{N}^2\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right) + \mathcal{N}\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)\left(e_2 - \frac{3}{e_2}\right) - (2e_2^2 - 3) = 0.$$

Scheidet man von den beiden Lösungen von (50) diejenige aus, welche für $\bar{\delta}/2 = 0$ nicht ins Unendliche wächst, so erhält man

$$(51) \quad \mathcal{N}\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right) = \frac{3}{e_2} - 2e_2.$$

Da nun nach (24) $e_2 = \pi_0'$ ist, stellt (51) die schon oben (p. 256) erwähnte Beziehung zwischen $\mathcal{N}(\bar{\delta}/2)$ und π_0' dar, die frei von K ist.

Für kleine $\bar{\delta}$ wird auch e_2 klein; ersetzt man $\mathcal{N}(\bar{\delta}/2)$ durch die bekannte Reihe¹⁾ und läßt dann $\bar{\delta}$ hinreichend klein werden, so kann man auf der rechten Seite das zweite Glied vernachlässigen und links bleibt ebenso nur das erste Glied der Entwicklung stehen. Man erhält so für kleine $\bar{\delta}$ die Beziehung

$$(52) \quad \frac{4}{\bar{\delta}^2} = \frac{3}{e_2}; \quad \bar{\delta} \text{ klein},$$

oder

$$(53) \quad e_2 = \pi_0' = \frac{3}{4}\bar{\delta}^2; \quad \bar{\delta} \text{ klein}.$$

Ferner ist nach (19) für kleine $\bar{\delta}$

$$(54) \quad g_3 = -12\pi_0'; \quad \sqrt{-g_3} = 3\bar{\delta}; \quad \bar{\delta} \text{ klein}.$$

Nun muß noch Z für kleine $\bar{\delta}$ bestimmt werden. Nach dem Additionstheorem der ζ -Funktion²⁾ besteht nach (44) für alle Werte von $\bar{\delta}$ folgende Beziehung:

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} Z &= - \left[\zeta\left(-\omega - \omega' + \frac{\bar{\delta}}{2}\right) - \zeta\left(-\omega - \omega' - \frac{\bar{\delta}}{2}\right) \right] \\ &= - \left[2\zeta\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right) - \frac{\mathcal{N}'\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)}{e_2 - \mathcal{N}\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Setzt man hier für e_2 den Wert aus (53) ein, ersetzt die Funktionen $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ und ζ durch ihre bekannten Reihen, so

1) G. H. Halphen, I. p. 93.

2) G. H. Halphen, I. p. 138.

findet man für kleine δ unter Vernachlässigung der höheren Potenzen

$$(56) \quad Z = \frac{\delta^3}{2}; \quad \delta \text{ klein.}$$

Substituiert man nun die gefundenen Ausdrücke (54) und (56) in (48), so ergibt sich

$$(57) \quad \Phi(\delta) = \frac{\delta^2}{2}; \quad \delta \text{ klein,}$$

also nach (47) unter Berücksichtigung von (5)

$$(58) \quad i = 2 \bar{k} \sqrt{\frac{q}{a}} \cdot \frac{V}{a} \cdot \frac{\delta^2}{2} = \frac{1}{6} \frac{\bar{k}}{D} \cdot a \cdot q \cdot V; \quad \delta \text{ klein.}$$

Bezeichnet man den Sättigungsstrom mit i_∞

$$(59) \quad i_\infty = a \cdot q,$$

so wird

$$(60) \quad \frac{i}{i_\infty} = \frac{1}{6} \frac{\bar{k}}{D} \cdot V; \quad \delta \text{ klein,}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Langevin.

Wenn δ groß wird, nähert sich π_0' dem Werte 1, wir setzen also für große δ

$$(61) \quad e_2 = \pi_0' = 1 - \varepsilon_1,$$

wo ε_1 eine kleine Größe sein soll, und suchen den Zusammenhang zwischen ε_1 und δ . Aus (19) folgt, daß unter der gemachten Annahme

$$(62) \quad g_3 = -8$$

wird, bis auf kleine Größen von höherer Ordnung als ε_1 ; demnach verschwindet die Diskriminante (39) des Polynoms (17) und die beiden Wurzeln e_1 und e_2 fallen zusammen. Unter diesen Umständen artet $\mathcal{N}(u)$ zu der folgenden Funktion aus:¹⁾

$$(63) \quad \mathcal{N}(u) = -2 + 3 \left(\frac{e^{u\sqrt{3}} + e^{-u\sqrt{3}}}{e^{u\sqrt{3}} - e^{-u\sqrt{3}}} \right)^2,$$

oder für große Werte von u

$$(64) \quad \mathcal{N}(u) = 1 + 12 e^{-2u\sqrt{3}}.$$

Folglich wird für große δ :

$$(65) \quad \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 + 12 \cdot e^{-\delta\sqrt{3}}; \quad \delta \text{ groß.}$$

1) G. H. Halphen, I. p. 27.

Andererseits ist nach (51) und (61) für kleine ε_1

$$(66) \quad \mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{3}{1-\varepsilon_1} - 2(1-\varepsilon_1) = 1 + 5\varepsilon_1.$$

Der Vergleich von (64) und (66) liefert den gesuchten Zusammenhang

$$12 \cdot e^{-\delta\sqrt{3}} = 5\varepsilon_1; \quad \delta \text{ groß},$$

oder

$$(67) \quad \pi_0' = 1 - \frac{12}{5} e^{-\delta\sqrt{3}}; \quad \delta \text{ groß}.$$

Durch Differentiation von (64) findet man:

$$(68) \quad \mathcal{N}'\left(\frac{\delta}{2}\right) = -24\sqrt{3} e^{-\delta\sqrt{3}}; \quad \delta \text{ groß}.$$

Unter den gleichen Voraussetzungen artet $\zeta(u)$ zu

$$(69) \quad \zeta(u) = -u + \sqrt{3} \left(\frac{e^{u\sqrt{3}} + e^{u-\sqrt{3}}}{e^{u\sqrt{3}} - e^{-u\sqrt{3}}} \right)$$

aus,¹⁾ und daraus ergibt sich

$$(70) \quad \zeta\left(\frac{\delta}{2}\right) = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} e^{-\delta\sqrt{3}}; \quad \delta \text{ groß}.$$

Es bleibt nur noch Z zu berechnen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Formel (55) nicht mehr anwendbar ist. Um das einzusehen, müssen wir auf die Bedeutung von Z zurückgehen; es ist nämlich:

$$Z = \zeta(u_1) - \zeta(u_2) = \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{N}(u) du.$$

Wenn nun die reelle Periode von $\mathcal{N}(u)$ ins Unendliche gerückt ist, stellt die ausgeartete Funktion (63) den Verlauf der Ionisationsdichte nicht mehr zwischen u_1 und $u_1 + \delta$ dar, sondern nur zwischen u_1 und $u_1 + \delta/2$. Da nun die nicht ausgeartete Funktion $\mathcal{N}$ symmetrisch zum Punkte $\mathcal{N}(u_1 + \frac{\delta}{2}) = \mathcal{N}(-\omega - \omega')$ verläuft, kann man das Integral zwischen den Grenzen u_1 und $u_1 + \delta$ ersetzen durch das doppelte Integral zwischen u_1 und $(u_1 + \delta/2)$. Auf diese Weise ergibt sich

$$Z = 2 \int_{u_1}^{u_1 + \frac{\delta}{2}} \mathcal{N}(u) du = -2 \left[\zeta\left(u_1 + \frac{\delta}{2}\right) - \zeta(u_1) \right],$$

1) G. H. Halphen, I. p. 145.

oder, nach Anwendung des Additionstheorems

$$(71) \quad Z = -2 \left[\zeta\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-g_3 - \mathcal{N}'\left(\frac{\delta}{2}\right)}}{\mathcal{N}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right].$$

Diese Formel ist vollständig äquivalent mit (55), solange $\mathcal{N}$ nicht ausgeartet ist; trifft aber letzteres zu, so ist nur (71) anwendbar.

Führen wir also jetzt (62), (64), (68) und (70) in (71) ein, so ergibt sich bis auf keine Größen höherer Ordnung:

$$(72) \quad \begin{cases} Z = \delta - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (20\sqrt{3} - 24\sqrt{2})e^{-\delta\sqrt{3}} \\ \quad = \delta - 0,6356 + 0,700e^{-\delta\sqrt{3}}; \quad \delta \text{ groß.} \end{cases}$$

Wegen (62) wird nun für große δ aus (48):

$$\Phi(\delta) = \frac{2 \cdot \delta}{\sqrt{-g_3 + \delta} + Z}; \quad \delta \text{ groß},$$

also unter Berücksichtigung der beiden ersten Glieder von (72)

$$(73) \quad \Phi(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{1,0964}{\delta}}; \quad \delta \text{ groß}.$$

Diese Formel zeigt zusammen mit (47), wie sich mit wachsendem δ die Leitfähigkeit für unendlich schwache Ströme demjenigen Werte nähert, der bei Vernachlässigung der Diffusion gelten würde.

Wir verlassen nunmehr die Betrachtung des Spezialfalles $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es soll davon abgesehen werden, die Gleichung (31) für andere, spezielle Werte von ε zu behandeln; statt dessen soll eine Betrachtung durchgeführt werden, welche näherungsweise die Abhängigkeit der Grenzleitfähigkeit von δ für alle Werte von ε zu berechnen gestattet. Langevin hat gezeigt, daß für geringe Plattenabstände und unendlich schwache Ströme das Feld als homogen vorausgesetzt werden darf; dasselbe gilt bekanntlich bei Vernachlässigung der Diffusion für beliebigen Plattenabstand. Es liegt also nahe, auch in dem hier behandelten allgemeineren Falle das Feld als homogen voranzusetzen. Setzen wir also (man vgl. (12)):

$$(74) \quad \eta_1 = \eta_0 = \frac{\varepsilon}{3} \frac{\bar{k}}{D} \cdot \frac{1}{\delta},$$

so vereinfachen sich die beiden ersten Gleichungen (29) zu:

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \pi_1}{d u^2} - \frac{3}{\varepsilon} \eta_0 \mathcal{J}'(u) = 6 \mathcal{J}(u)(\pi_1 + \nu_1) \\ \frac{d^2 \nu_1}{d u^2} + \frac{3}{\varepsilon} \eta_0 \mathcal{J}'(u) = 6 \mathcal{J}(u)(\pi_1 + \nu_1), \end{cases}$$

also nach Subtraktion und Integration:

$$(76) \quad \frac{d(\nu_1 - \pi_1)}{d u} + \frac{6}{\varepsilon} \eta_0 \mathcal{J}(u) = \iota_1',$$

wo $\iota_1' V$ den reduzierten Strom unter der gemachten Voraussetzung bedeutet. Nochmalige Integration liefert

$$(77) \quad \nu_1 - \pi_1 - \frac{6}{\varepsilon} \eta_0 \zeta(u) = \iota_1' u + b.$$

Die Konstanten ι_1' und b bestimmen sich aus der Bedingung, daß $\nu_1 - \pi_1$ für $u = u_1$ und für $u = u_1 + \delta$ verschwinden soll. Es ergibt sich so

$$(78) \quad \iota_1' = \frac{6}{\varepsilon} \eta_0 \frac{Z}{\delta},$$

wo Z die Bedeutung (44) hat.

Unter Berücksichtigung von (74), (11) und (5) wird aus (78):

$$(79) \quad \begin{cases} i = 2 \bar{k} \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \frac{V}{a} \cdot \Phi'(\delta) \\ \Phi'(\delta) = \frac{Z}{\delta}. \end{cases}$$

Da $\sqrt{\frac{q}{\alpha}} \cdot \mathcal{J}(u)$ die Ionisationsstärke im Kondensator — bei Abwesenheit eines elektrischen Feldes — darstellt, bedeutet $\sqrt{\frac{q}{\alpha}} \frac{Z}{\delta}$ die mittlere Ionisationsstärke, und (79) sagt aus, daß man die Leitfähigkeit für unendlich schwachen Strom erhält, indem man die mittlere Ionisationsstärke mit der Summe der spezifischen Geschwindigkeiten multipliziert — natürlich unter der Voraussetzung, daß die Inhomogenität des Feldes vernachlässigt werden darf.

Es läßt sich durch eine ganz analoge Rechnung, wie sie hier durchgeführt wurde, zeigen, daß der eben ausgesprochene Satz unter der gleichen Voraussetzung auch noch gilt, wenn q nicht als konstant vorausgesetzt wird. Ist q als beliebige Funktion des Abstandes gegeben, und gelingt es, den statio-

nären Zustand zu berechnen, der sich unter dem Einflusse der Wiedervereinigung und Diffusion ausbildet, so ist die Leitfähigkeit für unendlich schwache Ströme gleich der Summe der Beweglichkeiten der Ionen multipliziert mit der mittleren Gleichgewichtskonzentration — homogenes Feld vorausgesetzt.

Für kleine δ ergibt (79) vermöge (56) dasselbe Resultat (60) wie früher, was nach Langevins Ergebnis zu erwarten war. Für große δ wird wegen (72)

$$(80) \quad \Phi'(\delta) = 1 - \frac{0,6356}{\delta}; \quad \delta \text{ groß.}$$

Der Verlauf von $\Phi(\delta)$ und $\Phi'(\delta)$ ist in Fig. 2 wiedergegeben; über die Berechnungsweise für beliebige δ wird weiter unten das Nötige gesagt werden.

Die Berücksichtigung der höheren Potenzen von V bei der Substitution von (11) in (7) führt immer wieder auf Differentialgleichungen vom Typus

$$(81) \quad \begin{cases} \frac{d^2(\pi_q + \nu_q)}{du^2} = 12 \mathcal{N}(u)(\pi_q + \nu_q) + F_q(u) \\ \frac{d^2 \eta_q}{du^2} = \frac{6}{\varepsilon} \mathcal{N}(u) \eta_q - \iota_q + G_q(u), \end{cases}$$

wo $F_q(u)$, $G_q(u)$ vorhergehend bestimmte Funktionen sind. Die Gleichungen (81) sind stets vom Typus Laméscher Differentialgleichungen mit rechtem Gliede, und können also — für die angegebenen speziellen Werte von ε — auf Quadraturen zurückgeführt werden, doch dürfte deren Auswertung bald auf große Schwierigkeiten stoßen. Es soll nur noch erwähnt werden, daß $\iota_2 = 0$ wird. Berücksichtigt man nämlich die Glieder, die V^2 enthalten, so wird

$$G_2(u) = \frac{3}{\varepsilon} (\pi_1 + \nu_1) \eta_1;$$

also verschwindet G_2 wegen (36), und die Gleichung für η_2 wird identisch mit der Gleichung (31) für η_1 . Die weitere Rechnung gestaltet sich also für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ebenso, wie im Anschluß an (31) und führt wegen der Bedingung

$$\int_{u_1}^{u_2} \eta_2 du = 0$$

zu dem Resultat

$$(82) \quad \iota_2 = 0.$$

Es läßt sich voraussehen, daß dieses Ergebnis unabhängig ist vom Werte von ε . Denn wegen $G_2(u) = 0$ hat die Lösung der Gleichung (81) für η_2 die Form

$$\eta_2 = \alpha \varphi_1(u) + \beta \varphi_2(u) + \iota_2 \varphi_3(u),$$

wo $\varphi_1(u)$ ein partikuläres Integral der Gleichung ohne rechtes Glied bedeutet, und φ_2, φ_3 sich aus φ_1 durch Quadraturen bestimmen. Führt man nun die Bedingungen ein

$$\int_{u_1}^{u_2} \eta_2 du = 0; \quad \eta_2'(u_1) = 0; \quad \eta_2'(u_2) = 0,$$

so ergeben sich für die drei Konstanten α, β, ι_2 drei *homogene*, lineare Gleichungen. Da die Determinante im allgemeinen nicht verschwinden dürfte, folgt dann daraus

$$\eta_2 = 0; \quad \iota_2 = 0.$$

Die gleiche Argumentation ist nicht mehr anwendbar, wenn $G_q(u) \neq 0$ ist, weil dann η_3 Glieder enthält, die frei von den zu bestimmenden Konstanten sind.

Es müssen nun noch einige Worte über die numerische Berechnung der gefundenen Lösungen (48) und (79) gesagt werden. Es wurde schon erwähnt, daß man nicht δ als unabhängigen Parameter bei der Berechnung wählen kann, sondern daß man von π_0' ausgehen muß. Bei wachsendem δ variiert π_0' von 0 bis 1, und für sehr kleine und sehr große Werte von δ sind die expliziten Beziehungen zwischen π_0' und δ schon aufgestellt worden (vgl. (53) und (67)). Im allgemeinen Falle läßt sich δ nach bekannten Methoden berechnen, da durch die Beziehung (51) $p(\delta/2)$ aus $\pi_0' = e_2$ berechenbar ist.¹⁾ Am einfachsten geschieht die Berechnung jedoch mit Hilfe der Formeln, welche Langevin aufgestellt hat, weil sich dann die Tafeln für das elliptische Integral erster Gattung²⁾ benutzen lassen. Die Langevin-

1) G. H. Halphen I. p. 272.

2) Siehe z. B. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, B. G. Teubner, 1909.

sehen Formeln mögen hier nochmals zusammengestellt werden, unter Berücksichtigung des Zusammenhanges (5').

Bezeichnen wir also das elliptische Integral erster Gattung mit

$$F_0(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}},$$

so ist

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \sqrt{\frac{16}{3(4 - \pi_0'^2)}} \left[F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_0(\varphi) \right], \quad \text{mit} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{3\pi_0'^2}{4 - \pi_0'^2}} \right], \quad \text{und} \\ \sin^2 \varphi = \frac{3(2 - \pi_0'^2) - \pi_0' \sqrt{3(4 - \pi_0'^2)}}{6(1 - \pi_0'^2)}. \end{array} \right.$$

Da für die praktischen Anwendungen stets δ bekannt sein wird, muß die Umkehrung der Beziehungen (83) geometrisch vorgenommen werden. In die Tab. I sind einige zusammen-

Fig. 1.

gehörige Werte von π_0' und δ eingetragen und Fig. 1 gibt π_0' als Funktion von δ wieder.

Zur Berechnung von $\Phi(\delta)$ und $\Phi'(\delta)$ ist nun weiter noch die Kenntnis von g_3 und Z erforderlich. Die Invariante g_3

ergibt sich aus (19) und Z läßt sich nach (55) oder (71) berechnen. Die darin auftretenden Funktionen $\mathcal{J}(\delta/2)$, $\mathcal{J}'(\delta/2)$ und $\zeta(\delta/2)$ können für kleine δ aus ihren Reihen berechnet werden, für größere Werte sind die Formeln für Verdoppelung des Arguments zu Hilfe zu nehmen; $\mathcal{J}(\delta/2)$ ist außerdem durch die Relation (51) bekannt.

Einfacher gestaltet sich aber die Berechnung unter Zuhilfenahme von Tafeln für die elliptischen Integrale. Auch hier lassen sich Formeln verwenden, die Langevin¹⁾ angegeben hat. Zwischen Z und den von Langevin eingeführten Größen n , Q , q' besteht nämlich der folgende Zusammenhang:

$$\frac{Z}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{J}(u) du = \sqrt{\frac{a}{q}} \cdot \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} n dx = \sqrt{\frac{a}{q}} \cdot \frac{2}{a} \cdot Q = \sqrt{q'},$$

wo a , wie hier überall, den ganzen Plattenabstand bedeutet, während bei Langevin der gleiche Buchstabe den halben Plattenabstand bezeichnet. Also ergibt sich nach der von Langevin angegebenen Formel

$$(83) \quad \frac{Z}{\delta} = \sqrt{3(4 - \pi_0'^2)} \left(1 - \frac{E_0\left(\frac{\pi}{2}\right) - E_0(\varphi)}{F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_0(\varphi)} \right) - \frac{\pi_0' + \sqrt{3(4 - \pi_0'^2)}}{2}.$$

Dabei ist unter

$$E_0(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}$$

das elliptische Integral zweiter Gattung zu verstehen, und F_0 , $\sin \alpha$ und $\sin \varphi$ haben die unter (83) angegebene Bedeutung.

Die Berechnung von Z , Φ , Φ' ist für eine Reihe von π_0' -Werten durchgeführt worden und das Ergebnis der Rechnung in Tab. I mitgeteilt. Für die kleinsten und größten Werte sind die mit Hilfe der früher angegebenen Näherungsformeln

1) P. Langevin, Journ. de Phys. I. c.

((53), (57), (67), (73) und (80)) berechneten Werte in Klammern beigefügt; es zeigt sich, daß die Näherungsformeln für $\delta < 0,2$ und $\delta > 3$ für praktische Zwecke genügen.

Tabelle I.

π_0'	δ	z	$\Phi(\delta)$	$\Phi'(\delta)$
0,04 {	0,2315 (0,2309)	0,006178	0,0267 (0,0267)	0,0267 (0,0267)
0,1	0,3675	0,02456	0,0668	0,0668
0,2	0,5245	0,07004	0,1334	0,1335
0,3	0,6566	0,1321	0,200	0,201
0,4	0,7785	0,2091	0,267	0,269
0,5	0,9084	0,3059	0,334	0,337
0,6	1,0507	0,4284	0,402	0,408
0,7	1,2199	0,5900	0,469	0,484
0,8090	1,4797	0,8447	0,545	0,571
0,9	1,894	1,2614	0,623	0,666
0,9537	2,290	1,6473	0,674	0,719
0,9885 {	3,091 (3,084)	2,4554	0,737 (0,738)	0,794 (0,794)

In Fig. 2 sind Φ und Φ' in Funktion von δ aufgetragen. Wie man sieht, ist der Verlauf der beiden Funktionen im

Fig. 2.

großen und ganzen der gleiche. Immerhin liegt für mittlere δ die für $\epsilon = 1/2$ streng gültige Kurve nicht unerheblich

niedriger als diejenige Kurve, die näherungsweise für alle Werte von ε gilt. Die größte Abweichung beträgt etwa 7 Proz. (bei $\delta =$ etwa 3,6); bis zu diesem Betrage muß also für Werte von ε , die nicht nahe bei $\frac{1}{2}$ liegen, die Berechnung als unsicher gelten. Vermutlich stellt aber Φ für die meisten Werte von ε eine bessere Approximation dar, als Φ' , weil die Nichtberücksichtigung der Inhomogenität des Feldes die Leitfähigkeit stets zu groß erscheinen läßt. (Man vergleiche die Formeln von Langevin.) Im übrigen dürften beide Formeln in den Fällen ausreichen, in denen es sich nur darum handelt, den Diffusionsfehler abzuschätzen. Es wird sich auch zeigen, daß — schon für Werte von etwa $\delta = 3$ an — die Stromspannungscharakteristik durch den oberen Teil der Kurve und die Kenntnis der Charakteristik bei Vernachlässigung der Diffusion genügend genau festgelegt ist.

Zusatz bei der Korrektur. Im Vorhergehenden wurde die Grenzleitfähigkeit für unendlich schwachen Strom bei großem reduzierten Plattenabstand als Grenzfall des allgemeinen Falles abgeleitet. Infolgedessen haften den erhaltenen Formeln (man vgl. (73) und (80)) die Beschränkungen an, welche zur Behandlung des allgemeinen Falles eingeführt wurden. Die Rechnung läßt sich jedoch auch für beliebige Werte von ε durchführen, wenn man sich von vornherein auf große Werte von δ beschränkt. Man braucht dafür nur in dem System (11) $\pi_0 = \nu_0 = 1$, d. h. also $p_0 = n_0 = \sqrt{q/\alpha}$ zu setzen. Die Grenzbedingungen sind dann dahin abzuändern, daß an beiden Elektroden $\pi_0 + \pi_1 \mathcal{V}$ und $\nu_0 + \nu_1 \mathcal{V}$ verschwinden müssen, außerdem natürlich alle π_κ und ν_κ ($\kappa = 2, 3, \dots$). Die Rechnung gestaltet sich dann genau so wie oben, nur treten an die Stelle der Laméschen Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es ist allerdings zu beachten, daß die Grenzbedingungen jetzt $\mathcal{V}$ enthalten; infolgedessen erniedrigt sich am Schluß der Rechnung der Grad der höheren Glieder in $\mathcal{V}$. Darum ist die Leitfähigkeit für unendlich schwachen Strom nicht mehr durch das erste Glied $i_1 \mathcal{V}$ allein gegeben, sondern es müssen auch noch weitere Glieder berücksichtigt werden.

Führt man die Rechnung bis zu i_3 einschließlich durch,

so ergibt sich bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $e^{-2\sqrt{3}\delta}$:

$$(84) \quad \left\{ i = 2\bar{k} \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \cdot \frac{V}{\alpha} \left[1 - \frac{0,6255}{\delta} - \frac{4\varepsilon - \sqrt{2\varepsilon} - 1}{(2\varepsilon - 1)(1 + \sqrt{2\varepsilon})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}\delta} + \frac{0,3333}{\delta^2} \right] \right.$$

Wie der Verlauf der Rechnung zeigt, würden sich die beiden ersten Glieder allein ergeben, wenn man das Feld als homogen voraussetzen würde; in der Tat stimmt die Formel dann nahezu mit der oben abgeleiteten Formel (80) überein. Die beiden letzten Glieder in (84) stellen den Einfluß der Inhomogenität des Feldes dar; das ausschlaggebende dritte Glied ist für alle Werte von ε negativ. Es bestätigt sich also die oben (p. 271) ausgesprochene Vermutung, daß die Inhomogenität des Feldes die Leitfähigkeit herunterdrückt; und zwar ist das um so stärker der Fall, je kleiner ε ist. Übrigens ergibt sich aus (84), daß der Einfluß des Wertes von ε auf die Leitfähigkeit nur gering ist; für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 0$ beträgt der Unterschied in der Leitfähigkeit bei $\delta = 3$ etwa 4,5 Proz. und mit steigendem δ nimmt der Unterschied dauernd ab.

Für $\varepsilon = 0,5$ nimmt das dritte Glied in (84) unbestimmte Form an, doch ergibt sich sein Wert durch eine einfache Grenzbetrachtung. Es zeigt sich, daß der Wert von (84) für $\varepsilon = 0,5$ nicht vollständig mit der oben abgeleiteten, streng richtigen Formel (73) übereinstimmt. Letztere ergibt im mittleren Teile der Kurve (δ zwischen 4 und 10) etwa 2 Proz. niedrigere Werte. Es folgt daraus, daß die berücksichtigten Glieder i_1 bis i_3 den Einfluß der Inhomogenität des Feldes noch nicht vollständig darstellen. Da aber der geringe Einfluß des Wertes von ε aus der Formel (84) hervorgeht, darf man die oben für $\varepsilon = 0,5$ streng abgeleiteten Formeln als gute Annäherungen für alle Werte von ε ansehen.

In derselben Weise, wie hier der Einfluß von ε berücksichtigt wurde, läßt sich für große Werte von δ auch die verschiedene Beweglichkeit der beiden Ionenarten berücksichtigen (wenigstens für den Fall gleicher Wertigkeit, wenn also $k/k' = D/D'$ ist), aber die Rechnung wird dann sehr weitläufig.

II. Entwicklung für nahezu gesättigte Ströme.

Für die Anwendungen ist die genaue Kenntnis des Einflusses der Diffusion auf den Grad der Sättigung häufig von Wichtigkeit. Es soll darum auch im folgenden auf die Verschiedenheit der Beweglichkeiten der beiden Ionenarten Rücksicht genommen werden.

Wir setzen die Lösung des Systems (1) in der folgenden Form an:

$$(1') \quad \begin{cases} p = p_1 \cdot \frac{1}{V} + p_2 \cdot \frac{1}{V^2} + \dots \\ n = n_1 \cdot \frac{1}{V} + n_2 \cdot \frac{1}{V^2} + \dots \\ h = h_0 V + h_1 \cdot \frac{1}{V} + h_2 \cdot \frac{1}{V^2} + \dots \\ i = i_\infty + i_1 \cdot \frac{1}{V} + i_2 \cdot \frac{1}{V^2} + \dots \end{cases}$$

und gewinnen wieder durch die Substitution von (1') in (1) die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen p_1, p_2, n_1 , usw. Die Bedingungen erfordern, daß alle p_q mindestens an der Stelle $x = 0$, und alle n_q mindestens an der Stelle $x = a$ verschwinden, denn die Diffusion alleine hält die Dichte beider Ionenarten an beiden Elektroden auf 0, und der Strom kann keine positiven Ionen an die Anode und keine negativen an die Kathode führen. Ferner muß

$$(2') \quad \int_0^a h_0 dx = 1; \quad \int_0^a h_q dx = 0; \quad q = 1, 2, 3 \dots$$

sein.

Das einzige Glied, welches nach der Substitution V als Faktor enthält, liefert

$$(3') \quad \frac{d h_0}{d x} = 0,$$

also wegen (2')

$$(4') \quad h_0 = \frac{1}{a}.$$

Die Glieder, welche frei von V sind, liefern

$$(5') \quad \begin{cases} k' \frac{d}{d x} h_0 n_1 = - q \\ - k \frac{d}{d x} h_0 p_1 = - q, \end{cases}$$

oder integriert

$$(6') \quad \begin{cases} k' h_0 n_1 = -q x + C_1 \\ -k h_0 p_1 = -q x + C_2 \end{cases}$$

Da p_1 für $x=0$ und n_1 für $x=a$ verschwinden soll, ergibt sich

$$(7) \quad C_1 = q \cdot a; \quad C_2 = 0$$

also

$$(8') \quad n_1 = \frac{q a}{k'}(a-x); \quad p_1 = \frac{q a}{k} \cdot x.$$

Folglich erhält man für i_∞ nach Formel (6'):

$$(9') \quad i_\infty = C_1 - C_2 = q \cdot a.$$

Da nur die Einheit des Querschnittes betrachtet wird, gibt (9') richtig den Betrag des Sättigungsstromes an. Wir finden also, daß im Falle wahren Sättigungsstromes das Feld homogen ist (Formel 4'). Das ist durchaus nicht im Widerspruch mit den gefundenen Werten für p_1 und n_1 . Denn nach (1') sind die freien Volumladungen in erster Annäherung $p_1 \cdot 1/V$ und $n_1 \cdot 1/V$, verschwinden also mit wachsendem V . Nach Riecke¹⁾ und Starke²⁾ müßte der Verlauf des Feldes bei Sättigungsstrom durch eine Hyperbel gegeben werden; aber Seeliger³⁾ hat schon darauf hingewiesen, daß diese Darstellung wenig präzise ist. Die hier gefundenen Ergebnisse sind dagegen in Übereinstimmung mit Seeligers Ausführungen, und zeigen in der einfachsten Weise, daß die Betrachtungen von Riecke und Starke nur für unvollständig gesättigte Ströme gelten, und daß die von ihnen berechneten freien Volumladungen und die Feldinhomogenität kleine Größen von der Ordnung $1/V$ sind.

Die Glieder, welche nach der Substitution von (1') in (1) den Faktor $1/V$ enthalten, liefern folgende Gleichungen:

$$(10') \quad \begin{cases} D' \frac{d^2 n_1}{dx^2} + k' \frac{d}{dx} (h_0 n_2) = 0, \\ D \frac{d^2 p_1}{dx^2} - k \frac{d}{dx} (h_0 p_2) = 0, \\ \frac{d h_1}{dx} = \frac{4\pi}{K} (p_1 - n_1). \end{cases}$$

1) E. Riecke, l. c.

2) H. Starke, Boltzmann-Festschrift, p. 667. 1904.

3) R. Seeliger, l. c. Anhang.

Die Integration der beiden ersten Gleichungen ergibt:

$$D' \frac{dn_1}{dx} + k' h_0 n_2 = C_3,$$

$$D \frac{dp_1}{dx} - k h_0 p_2 = C_4.$$

Die Konstanten bestimmen sich aus der Bedingung, daß p_2 für $x = 0$ und n_2 für $x = a$ verschwinden soll; also mit Benutzung von (8):

$$C_3 = - \frac{D'}{k'} \cdot q \cdot a; \quad C_4 = \frac{D}{k} \cdot q \cdot a,$$

und demnach

$$(11') \quad \begin{cases} n_2 = p_2 = 0, \\ i_1 = C_3 - C_4 = - \left(\frac{D'}{k'} + \frac{D}{k} \right) \cdot q \cdot a. \end{cases}$$

Für h_1 findet man aus (10') unter Berücksichtigung von (2'):

$$(12') \quad h_1 = \frac{4\pi}{K} \cdot q \cdot a \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{6} \right) - \frac{a}{k'} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right].$$

Die Glieder, welche den Faktor $1/V^2$ enthalten, liefern (wegen (11')):

$$(13') \quad \begin{cases} k' \frac{d}{dx} \left[h_0 n_3 + h_1 n_1 \right] = \alpha p_1 n_1 \\ - k \frac{d}{dx} \left[h_0 p_3 + h_1 p_1 \right] = \alpha p_1 n_1 \\ \frac{dh_2}{dx} = \frac{4\pi}{K} (p_2 - n_2) = 0 \end{cases}$$

oder integriert

$$(14') \quad \begin{cases} k' h_0 n_3 + k' h_1 n_1 = \frac{\alpha q^2 a^3}{k \cdot k'} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_5 \\ - k h_0 p_3 - k h_1 p_1 = \frac{\alpha q^2 a^3}{k \cdot k'} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_6 \\ h_2 = 0 \quad (\text{wegen (2')}). \end{cases}$$

Aus den Bedingungen ergibt sich

$$C_5 = - \frac{\alpha q^2 a^5}{k \cdot k' \cdot 6}; \quad C_6 = 0,$$

und nach Substitution der früher berechneten Größen

$$(15') \quad \begin{cases} p_3 = -\frac{4\pi}{K} \frac{q^2 a^3}{k} \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{6} \right) - \frac{a}{k'} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \cdot x \\ \quad \quad \quad - \frac{\alpha q^2 a^3}{k^2 k'} \left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right), \\ n_3 = -\frac{4\pi}{K} \frac{q^2 a^3}{k'} \left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{6} \right) - \frac{a}{k'} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] (a - x) \\ \quad \quad \quad + \frac{\alpha q^2 a^3}{k \cdot k'^2} \left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{6} \right), \\ i_2 = C_5 - C_6 = -\frac{\alpha q^2}{k \cdot k'} \frac{a^5}{6}. \end{cases}$$

Die Rechnung setzt sich in genau der gleichen Weise fort; die Ausdrücke für die Funktionen werden zwar einigermaßen umständlich, doch treten bei ihrer Berechnung immer nur Quadraturen ganzer rationaler Funktionen auf. Es sollen nur noch die weiterhin sich ergebenden Ausdrücke für i_3 und i_4 mitgeteilt werden.

Man findet

$$(16') \quad \begin{cases} i_3 = \frac{4\pi}{K} q^2 a^5 \left\{ \frac{D'}{k'} \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{6k'} \right) - \frac{D}{k} \left(\frac{1}{6k} - \frac{1}{3k'} \right) \right\}, \\ i_4 = -q^2 a^5 \left\{ \left(\frac{D'}{k'} \right)^2 \left(\frac{4\pi}{K} \cdot \frac{2}{k} - \frac{\alpha}{k \cdot k'} \right) + \left(\frac{D}{k} \right)^2 \left(\frac{4\pi}{K} \cdot \frac{2}{k'} - \frac{\alpha}{k \cdot k'} \right) \right\} \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{180} \frac{4\pi}{K} a \frac{q^3 a^9}{k \cdot k'} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) + \frac{1}{20} \frac{\alpha^2 q^3 a^9}{k^2 k'^2}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich noch etwas, wenn man voraussetzt, daß beide Ionen gleiche Wertigkeit haben, also

$$(17') \quad \frac{k}{D} = \frac{k'}{D'}$$

ist. Machen wir nun im folgenden diese Voraussetzung, so ergibt sich aus der letzten Gleichung (1') nach Substitution von (9'), (11'), (15') und (16') das folgende Resultat:

$$(18') \quad \begin{cases} \frac{i}{i_\infty} = 1 - 2 \frac{D}{k} \cdot \frac{1}{V} - \frac{\alpha}{6} \frac{q a^4}{k \cdot k'} \cdot \frac{1}{V^2} + \frac{1}{6} \frac{4\pi}{K} q a^4 \frac{D}{k} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \cdot \frac{1}{V^3} \\ - q a^4 \left(\frac{D}{k} \right)^2 \left\{ 2 \cdot \frac{4\pi}{K} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) - \frac{2\alpha}{k \cdot k'} \right\} \frac{1}{V^4} - \frac{1}{20} \frac{q^2 a^8 \cdot \alpha}{k \cdot k'} \cdot \frac{1}{9} \frac{4\pi}{K} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \\ - \frac{\alpha}{k \cdot k'} \left\{ \frac{1}{V^4} + \dots \right. \end{cases}$$

Die Glieder mit den Faktoren $1/V$ und $1/V^2$ sind identisch mit denjenigen, die Langevin für große V ab-

geleitet hat; das braucht in der Tat nicht zu verwundern, denn sowohl bei der Entwicklung nach Potenzen von q , wie sie Langevin anwendet, wie auch bei der hier gebrauchten, wird die Linearität der auftretenden Differentialgleichungen dadurch erzielt, daß p_1 und n_1 als kleine Größen angesetzt werden, und darum ihr Produkt aus dem ersten Gleichungssystem (hier (5')) verschwindet. Trotzdem scheint dem Verfasser für die hier behandelte Aufgabe der Ansatz (1') den Vorzug zu verdienen; einerseits wird die Rechnung für die höheren Glieder einfacher, wie es bei der Beschränkung auf große Potentiale selbstverständlich ist; andererseits aber ist bei dem Langevinschen Ansatz nicht zu übersehen, bis zu welcher Potenz von $1/V$ die Rechnung genau ist, wenn sie bis zu einer bestimmten Potenz von q fortgeführt wurde. — Genau wie bei der hier gegebenen Rechnung unter den Gliedern, die V^{-4} enthalten, sich noch eins findet, das q enthält, könnten sich unter den höheren Gliedern der Langevinschen Rechnung noch solche finden, die $1/V^2$ oder $1/V^3$ enthalten.

Es muß nun noch gezeigt werden, in welcher Weise die Formel (18'), und damit die gesuchte Charakteristik, von den in Betracht kommenden Parametern abhängt. Setzt man in (18') alle Glieder, die D enthalten, gleich Null, so bleibt die Sättigungskurve, die für Wiedervereinigung — unter Vernachlässigung der Diffusion — gelten würde. Es ist bekannt, daß diese Kurve unabhängig vom Plattenabstand und von der Ionisierungsstärke q wird, wenn man die Größe

$$f = \frac{V}{R \cdot i_{\infty}}$$

als unabhängige Variable einführt, wobei

$$R = \frac{a}{(k + k') \sqrt{\frac{q}{a}}}$$

der Widerstand für unendlich schwachen Strom ist.¹⁾ Es liegt also nahe, auch hier die „reduzierte Feldstärke“ f :

$$(19') \quad f = \frac{k + k'}{a^2 \sqrt{q \cdot a}} \cdot V$$

1) Man vgl. z. B. H. Seemann, Diss. Königsberg 1912; Ann. d. Phys. 38. p. 781. 1912.

als Parameter einzuführen. Ferner ist das Verhalten gegenüber der Diffusion bestimmt durch den „reduzierten Plattenabstand“ δ :

$$(20') \quad \delta = a \sqrt[4]{\frac{q \cdot \alpha}{36 D^3}}.$$

Führt man diese beiden Größen, sowie die Langevinsche Zahl ε :

$$(21') \quad \varepsilon = \frac{\alpha K}{4 \pi (k + k')},$$

und das Verhältnis der beiden Beweglichkeiten ϱ :

$$(22') \quad \varrho = \frac{k'}{k},$$

in Gleichung (18') ein, so ergibt sich

$$(23') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{i}{i_\infty} &= 1 - \frac{1}{3} (1 + \varrho) \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{1}{f} - \frac{1}{6} (1 + \varrho) \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \cdot \frac{1}{f^2} \\ &+ \frac{1}{36} (1 + \varrho)^2 \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \delta^2} \cdot \frac{1}{f^3} - \frac{1}{18} (1 + \varrho) \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\} \frac{1}{\delta^4} \cdot \frac{1}{f^4} \\ &- \frac{1}{20} (1 + \varrho)^2 \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right)^2 \left\{ \frac{1}{9\varepsilon} - 1 \right\} \frac{1}{f^4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Die Charakteristik hängt also nur von den vier Parametern f , δ , ε und ϱ ab. Die Glieder in (23'), die nur f , aber nicht δ enthalten, hängen nur von der Wiedervereinigung ab; diejenigen Glieder, welche f und δ nur in der Kombination

$$(24') \quad f \cdot \delta^2 = \frac{1}{6} \frac{k + k'}{D} \cdot V = \frac{1 + \varrho}{6} \frac{k}{D} \cdot V$$

enthalten, sind durch die Diffusion allein bedingt. Setzt man $D = 0$, das heißt also $\delta = \infty$, so muß, wie schon erwähnt, die Charakteristik übrig bleiben, welche den Gegenstand der Untersuchung von Mie und Seeliger gebildet hat. Führt man die Berechnung für Luft mit den gleichen Konstanten aus, wie die genannten Autoren, d. h. also

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} k' &= 1,85 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}; \quad k = 1,34 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}, \\ \frac{1}{\varepsilon} &= 3,56, \end{aligned} \right.$$

so zeigt sich in der Tat, daß die Kurve (23') für $\delta = \infty$ von $f = 2$, also ungefähr von $i/i_\infty = 0,86$ an, mit den Kurven von Mie und Seeliger praktisch zusammenfällt.

Nach der Berechnung von Seemann¹⁾ ergibt die Seeligersche strenge Charakteristik

$$\frac{i}{i_{\infty}} = 0,8572 \text{ für } f = 1,9966 \quad \text{und} \quad 0,9370 \text{ für } f = 3,1532;$$

aus (23') findet man

$$\frac{i}{i_{\infty}} = 0,8605 \text{ für } f = 1,9966 \quad 0,9364 \text{ für } f = 3,1532.$$

Mit den Werten (25') der Konstanten lautet (23') für Luft:

$$(26') \left\{ \begin{aligned} \frac{i}{i_{\infty}} &= 1 - 0,79354 \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{1}{f} - 0,68417 \frac{1}{f^2} + 0,96638 \cdot \frac{1}{\delta^2 f^2} \\ &\quad - 3,3087 \cdot \frac{1}{\delta^4 f^4} + 0,50927 \frac{1}{f^4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Da für einigermaßen beträchtliche Werte von δ die Glieder, welche die Störung durch Diffusion darstellen, schneller konvergieren als die Glieder, welche nur f enthalten, so läßt sich die Charakteristik dann unter Benutzung der Mieschen oder Seeligerschen Entwicklung, auch noch für Werte von f , die kleiner sind als 2, berechnen. Bedeutet nämlich $(i/i_{\infty})_a$ den Wert der bekannten Charakteristik für $\delta = \infty$, $(i/i_{\infty})_D$ den Wert der zu berechnenden, so ist die durch Diffusion bedingte Störung Δ gegeben durch:

$$(27') \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{i}{i_{\infty}} \right)_a - \left(\frac{i}{i_{\infty}} \right)_D = \frac{1}{3} (1 + \varrho) \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{1}{f} - \frac{1}{36} (1 + \varrho)^2 \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \delta^2} \cdot \frac{1}{f^3} + \frac{1}{18} (1 + \varrho)^3 \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\delta^4} \cdot \frac{1}{f^4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Im übrigen ergibt sich aus der Berechnung selbst von welchen Werten von f an (23') die Sättigungskurve genügend genau darstellt.

In Fig. 3 ist die Charakteristik für Luft bei verschiedenen Werten des Parameters δ gezeichnet. Die Kurve für $\delta = \infty$ ist nach Mie berechnet und der Arbeit von Seemann entnommen; die Kurve für den kleinsten Wert $\delta = 0,35$ ist nach der Langevinschen Charakteristik berechnet. Dieselbe lautet

$$(28') \quad \frac{i}{i_{\infty}} = \frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{2}{m}$$

1) H. Seemann, l. c.

mit der Bedeutung

$$(29') \quad m = \frac{k}{D} \cdot V = \frac{6}{1 + \varrho} f \delta^2.$$

Der Wert $\delta = 0,35$ ist so gewählt, daß der Fehler bei Benutzung der Formel (28') gerade kleiner als 1 Proz. ist. Für noch kleinere δ stellt (28') den Verlauf der Charakteristik mit noch größerer Genauigkeit dar.

Fig. 3.

Der ausgezogene Teil der übrigen Kurven ist nach (26') berechnet, die Tangenten im Anfangspunkt nach Formel (47). Dabei ist zu beachten, daß der hier benutzte Parameter δ nicht identisch ist mit dem δ der Formel (47). Es ist nämlich

$$\delta = a \sqrt[4]{\frac{q \alpha}{36 D^2}}; \quad \delta = a \sqrt[4]{\frac{q \alpha}{36 \left(\frac{D + D'}{2}\right)^2}},$$

also wird

$$(30') \quad \frac{\delta}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \varrho)}.$$

Die Tangenten im Nullpunkte sind mit eingezeichnet; die interpolierten Teile der Kurven sind punktiert gezeichnet. Wie man sieht werden die Abweichungen von der Kurve für $\delta = \infty$ erst bei etwa $\delta = 3$ beträchtlich; für diesen Wert des Parameters beträgt die Störung durch Diffusion 2 bis 3 Proz. im mittleren Teile der Kurve ($\Delta = 0,0332$ für $f = 2$; $\Delta = 0,0258$ für $f = 3$).

Das ist beachtenswert, weil für $\delta = 3$ die Abweichung in der Nullpunktstangente noch etwa 27 Proz. beträgt. Diese Tatsache hat in dem oben (p. 267) abgeleiteten Verschwinden von ι_3 seinen Grund; das entsprechende Glied in der Entwicklung der Charakteristik für $\delta = \infty$ verschwindet nicht, so daß letztere stärker gekrümmt ist und die hier behandelte Kurve ihr schon für verhältnismäßig niedrige f -Werte nahekommt. Damit hängt es dann zusammen, daß sich auf Grund der Kenntnis des oberen Teiles der Kurven und der Kurve für $\delta = \infty$ die Charakteristiken für große δ auch noch in demjenigen Intervall mit ziemlicher Genauigkeit zeichnen lassen, in dem die aufgestellte Entwicklung versagt.

Es liegen noch keine Beobachtungen vor, die einen Vergleich der gewonnenen Formeln mit der Erfahrung gestatten. Die sehr genauen Messungen von Seemann¹⁾ beziehen sich auf ein Gebiet, in dem die Diffusion zu vernachlässigen ist. Für die Seemannschen Messungen bei Elektrodenabständen von 2 bis 5 cm variiert der reduzierte Plattenabstand von 10,6 bis 36,4. Nun beträgt bei $\delta = 10$ die Störung durch Diffusion im mittleren Teile der Kurve nur etwa 0,0025, also kann die Diffusion nicht für die von Seemann beobachteten systematischen Abweichungen verantwortlich gemacht werden. Nur für den kleinsten Wert des Elektrodenabstandes ($a = 1$ cm), bei dem δ von 5,94 bis 7,24 variiert, bewirkt die Diffusion eine merkliche Störung (im Durchschnitt etwa $\Delta = 0,006$, maximal $\Delta = 0,0078$, im mittleren Teile der Kurve). Demgemäß hat auch die von Seemann durchgeführte Berechnung von a aus der Sättigungskurve für $a = 1$ cm unsichere und im Mittel zu hohe Werte ergeben.

Leipzig, im Oktober 1913.

1) H. Seemann, l. c.

(Eingegangen 30. Oktober 1913.)