

8.

Summation der Reihe $\frac{1}{(b+a)^{1+q}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+q}} + \frac{1}{(b+3a)^{1+q}} + \dots$ für $q = 0$.

(Von Herrn Dr. Heine zu Bonn.)

Einer grossen Anzahl von Aufgaben aus der Zahlentheorie dient die Untersuchung zur Grundlage, auf welche Art die Reihe

$$\frac{1}{(b+a)^{1+q}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+q}} + \frac{1}{(b+3a)^{1+q}} + \dots$$

in's Unendliche wächst, während die positive Grösse q sich der Null nähert. Diese Frage aus der Theorie der Reihen, welche von *Dirichlet* aufgeworfen und beantwortet worden ist, lässt sich auch ohne höheren Calcul erledigen, auf ganz ähnliche Art, wie man untersucht, in welchen Fällen die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \dots$$

convergiert.

Setzt man zur Abkürzung $G_m = \frac{1}{(k+m)^{1+q}}$, $k+m = x$, wo m eine so grosse ganze Zahl bedeutet, dass x positiv und grösser als 1 ist, ist ferner die positive Grösse q kleiner als 1, so wird

$$\frac{G_{m+1}}{G_m} \frac{(1+q+k+m)}{k+m} = \frac{x^{1+q}(x+1+q)}{x(x+1)^{1+q}} = \frac{x^{2+q} + (1+q)x^{1+q}}{x^{2+q} + (1+q)x^{1+q} + \frac{q(q+1)}{2}x^q + \dots}$$

kleiner als 1, indem unter den obigen Voraussetzungen

$$\frac{q(q+1)}{2} x^q \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{3x} + \frac{(q-1)(q-2)}{3 \cdot 4 \cdot x^2} + \dots \right\}$$

positiv ist. In der That ist zuerst die Grösse unter der Parenthese positiv, da die Summe des ersten und zweiten Gliedes d. h. $1 + \frac{(q-1)}{3x}$, des dritten und vierten, allgemein des $(2p-1)$ ten und $2p$ ten positiv ist, und die Reihe convergiert; ebenso ist $\frac{q(q+1)}{2} x^q$, also der ganze Ausdruck positiv.

134 8. Heine, Summation der Reihe $\frac{1}{(b+a)^{1+q}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+q}} + \dots$ für $q = 0$.

Demnach hat man

$$G_{m+1} < G_m \frac{(k+m)}{(k+m+q+1)}$$

$$G_{m+2} < G_{m+1} \frac{(k+m+1)}{(k+m+q+2)} < G_m \frac{(k+m)(k+m+1)}{(k+m+q+1)(k+m+q+2)}$$

also

$$1. \quad G_m + G_{m+1} + G_{m+2} + \dots < G_m \left\{ 1 + \frac{(k+m)}{(k+m+q+1)} + \frac{(k+m)(k+m+1)}{(k+m+q+1)(k+m+q+2)} + \dots \right\}$$

Aehnlich findet man

$$\frac{G_{m+1}}{G_m} \cdot \frac{(k+m+1-q)}{(k+m-2q)} > 1,$$

also

$$2. \quad G_m + G_{m+1} + G_{m+2} + \dots > G_m \left\{ 1 + \frac{(k+m-2q)}{(k+m+1-q)} + \frac{(k+m-2q)(k+m+1-2q)}{(k+m+1-q)(k+m+2-q)} + \dots \right\}.$$

Die Reihen auf der rechten Seite von 1. und 2. lassen sich leicht summiren, indem Gauss in der *Disq. gen. circa ser. inf.* gezeigt hat, dass die Summe

$$3. \quad 1 + \frac{(n-h-1)}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(h+1)} + \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(h+1)(h+2)} + \dots,$$

wenn h eine noch so kleine positive Grösse ist, durch $\frac{n-1}{h}$ ausgedrückt wird.

Er zerlegt dazu 1 in $\frac{n-1}{h} - \frac{n-h-1}{h}$; fügt er das zweite Glied $\frac{n-h-1}{n}$ dazu, so wird

$$1 + \frac{n-h-1}{n} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)}{n+h}.$$

Die Summe der drei ersten Glieder ist dann $\frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)h}$,

allgemein die der p ersten Glieder $\frac{n-1}{h} - \frac{1}{h} \cdot \frac{(n-h-1)(n-h)\dots(n-h+p-2)}{n(n+1)\dots(n+p-2)}$, wo das abzuziehende Glied mit wachsendem p zu Null convergirt.

Setzt man zuerst $n = k+m+q+1$, $n-h-1 = k+m$, so wird $h = q$, also positiv, folglich die rechte Seite von 1.

$$= G_m \frac{k+m+q}{q} = \frac{1}{q(k+m)^q} - \frac{1}{(k+m)^{q+1}}$$

also ist die Summe

$$q \sum_{s=m}^{\infty} \frac{1}{(k+s)^{1+q}}$$

für jeden positiven Werth von $k+m$ und für jedes q , welches zwischen 0

8. Heine, Summation der Reihe $\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \dots$ für $\varrho = 0$. 135

und 1 liegt, kleiner als $\frac{1}{(k+m)^\varrho} + \frac{\varrho}{(k+m)^{\varrho+1}}$ und grösser als $\frac{1}{(k+m)^\varrho} - \frac{\varrho}{(k+m)^{\varrho+1}}$. Es nähert sich also diese Summe, und daher auch

$$\varrho \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(k+s)^{1+\varrho}}$$

mit abnehmendem ϱ der Grenze 1. Setzen, wie in diesem Sinne

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(k+s)^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho},$$

machen darauf $k = \frac{b}{a}$, so entsteht die gesuchte Gleichung:

$$\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(b+3a)^{1+\varrho}} + \dots = \frac{1}{a\varrho}$$

für $\varrho = 0$.

Berlin, den 4. April 1845.