Ueber ein discontinuirliches Integral.

Von

E. GUBLER in Zürich.

Im 75^{ten} Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik hat Herr H. Weber den bekannten discontinuirlichen Integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x} dx$$

und verwandten das Integral

$$\int_0^{\infty} J^1(x) J^0(ax) dx$$

als Analogon an die Seite gestellt. Herr Sonine gab dann im 16. Band der „Mathematischen Annalen“ pag. 38 und pag. 51 allgemeine Formeln, welche das Weber'sche Integral als speciellen Fall enthalten. Zu derjenigen dieser Formeln, welche eine Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe bietet, gelangte auf anderem Wege auch Herr Schafheitlin, Math. Annalen Bd. XXX. Die nachfolgende Arbeit hat keinen so allgemeinen Charakter. Sie hält sich an die Weber'sche Integralform, verallgemeinert aber die Parameter. Eine directe Berechnung des allgemeinen Weber'schen Integrals

$$\int_0^{\infty} J^a(x) J^b(cx) dx$$

habe ich in der mir zugänglichen Litteratur nicht gefunden. Die Anregung zur Untersuchung gab mir vor längerer Zeit mein seither gestorbener verehrter Lehrer Schläfli; ihm verdanke ich auch manchen fördernden Wink.

In Bezug auf die Bezeichnung schicke ich voraus, dass ich dem Integralzeichen $I(a)$ anhänge, wenn der Integrand auf seinen frühern Werth zurückkommt, nachdem die Variable den Pol a umlaufen hat, d. h. wenn der Integrationsweg geschlossen ist. Der Umlauf soll,

wenn nicht das Gegentheil gesagt ist, rechtläufig verstanden sein. Kehrt dagegen der Integrand nicht mehr auf seinen ursprünglichen Werth zurück, nachdem die Variable von einem Punkte b ausgehend den Pol a rechtläufig umkreist hat, ist also der Integrationsweg eine von b aus um a geworfene Schlinge, so füge ich dem Integralzeichen $II(b; a)$ bei.

I.

Das Integral

$$\int_0^{\infty} J^a(x) J^b(cx) dx$$

sei zur Abkürzung mit S bezeichnet. An der unteren Grenze verhält es sich wie

$$\text{const.} \propto \int_0^{\infty} x^{a+b} dx,$$

erfordert also zur Convergenz

$$a + b + 1 > 0.$$

Vermöge der für ein grosses x giltigen Formel

$$J^a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right)$$

ist für die obere Grenze die zu integrierende Function gleich

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi \sqrt{c}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right) \cos \left(cx - \frac{\pi}{2} \left(b + \frac{1}{2} \right) \right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{c}} \left\{ \frac{\cos \left[(1-c)x - \frac{\pi}{2} (a-b) \right]}{x} + \frac{\cos \left[(1+c)x - \frac{\pi}{2} (a+b+1) \right]}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Denkt man sich c positiv, so ist die Convergenz an der obern Grenze gesichert, wenn c von 1 verschieden ist. Das Integral convergirt dann hier wie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\varphi} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\varphi}.$$

Ist $c = 1$, so kommt im Product der beiden Cosinus der nicht oscillirende Term $\frac{1}{2} \cos(a-b) \frac{\pi}{2}$ in Betracht; das Integral divergirt dann wie $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$. Nur wenn $a - b$ eine ungerade positive oder negative Zahl ist, convergirt das Integral auch für $c = 1$.

Wenn $c > 1$, so ersetze man x durch $\frac{x}{c}$, dann ist

$$S = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} J^b(x) J^a\left(\frac{x}{c}\right) dx,$$

wo nun $\frac{1}{c} < 1$ ist. Man braucht also nur den Fall zu betrachten, wo $0 < c < 1$ ist.

II.

Um S zu berechnen, substituirt man

$$J^b(cx) = \frac{1}{2i\pi} \int e^{\frac{1}{2}cx\left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-b-1} dt$$

Weg eine rechteckige Schlinge aus $-N$ um O ; sie gehe durch $-i$ und i , liege westlich ausserhalb, östlich innerhalb des Einheitskreises. Setzt man dann

$$T = \int_0^{\infty} J^a(x) e^{\frac{1}{2}cx\left(t - \frac{1}{t}\right)} dx,$$

so ist

$$S = \frac{1}{2i\pi} \int T t^{-b-1} dt$$

Weg die vorhin beschriebene Schlinge.

Wenn $u = \frac{1}{u} = -c\left(t - \frac{1}{t}\right)$, so dass u in der östlichen Halbebene ausserhalb des Einheitskreises liegt, so ist nach der Formel

$$\int_0^{\infty} J^a(x) e^{-bx} dx = \frac{2h^{1-a}}{h^2 + 1}, \quad \text{wo } b = \frac{1}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)$$

$$T = \frac{2u^{1-a}}{u^2 + 1}.$$

Wenn t im Westpunkt sich befindet, so ist $u = -ct$ im Ostpunkt. Während t vom Westpunkt bis -1 läuft, läuft u vom Ostpunkt bis 1 .

Wenn $t = -e^{i\varphi}$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), so sei $c = \sin \beta$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$); dann wird $u = \frac{1}{u} = 2i \sin \beta \sin \varphi$. Setzt man $\sin \beta \sin \varphi = \sin \chi$, so läuft χ von 0 bis β , $u = e^{i\chi}$ ($0 < \chi < \beta$).

Weil t in der Westhälfte ausserhalb des Einheitskreises bleiben und vom Westpunkte bis nach $-i$, zum Beispiel in der Südhälfte gehen soll, so läuft der entsprechende Theil des u -Weges im nord-östlichen Viertel vom Ostpunkt bis $e^{i\beta}$ ausserhalb des Einheitskreises. In $u = e^{i\beta}$ ($t = -i$) ist $\frac{du}{dt} = 0$, der Punkt $e^{i\beta}$ ist also ein Verzweigungspunkt des u -Feldes. Wenn daher t in gerader Linie durch $-i$ geht,

um in den Einheitskreis einzutreten, so kehrt u vom Punkt $e^{i\beta}$ — in unmittelbarer Nähe gedacht — auf demselben Wege zurück, auf dem es hergekommen ist. Im Augenblick, wo t die positive Axe zwischen 0 und 1 im Punkte $e^{-\epsilon}$, ϵ positiv, erreicht hat, hat auch u die positive Axe in einem östlich von 1 liegenden Punkte e^{σ} , für $\sigma = \sin \beta \cdot \sin \epsilon$, erreicht. Die zweite Hälfte des u -Weges darf man sich zur ersten

in Bezug auf die Realitätslinie symmetrisch denken. Der u -Weg liegt also östlich ausserhalb des Einheitskreises, geht vom Ostpunkt aus in der Nordhälfte nach $e^{i\beta}$, kehrt hier zurück und geht hier in die Südhälfte, um noch ein Mal den Einheitskreis in $e^{-i\beta}$ anzutreffen und kehrt von hier nach dem Ostpunkt zurück.

III.

Die Gleichung zwischen t und u wird

$$u^2 - 1 + c\left(tu - \frac{u}{t}\right) = 0.$$

Man setze daher $tu = p$, $\frac{u}{t} = q$; dann ist $u^2 = pq$ und die Gleichung wird

$$pq - 1 + cp - cq = 0.$$

Sie giebt

$$p = \frac{cq + 1}{q + c}, \quad u^2 = \frac{q(cq + 1)}{q + c}, \quad t^2 = \frac{cq + 1}{q(q + c)}.$$

Diese Substitutionen gestatten, die zu integrierende Function durch die Variable q allein auszudrücken. Die nächste Aufgabe ist, den q -Weg aufzufinden.

In Bezug auf t als Function von q hat die q -Ebene die vier Verzweigungspunkte 0 , ∞ , $-c$, $-\frac{1}{c}$. Um den q -Weg zu finden, wollen wir t von $-N$ bis -1 führen, dann in der Südhälfte des Einheitskreises bis 1 , und erst nachdem wir den entsprechenden q -Weg gefunden haben, die Verschiebung vornehmen, welche macht, dass t

von $-N$ bis $-i$ ausserhalb, von $-i$ bis $+1$ innerhalb des Einheitskreises bleibt,

Wenn $t = -e^{+\lambda}$, wo λ alle positiven Werthe von ∞ bis 0 durchläuft, so sei $\sin \mu = c \cdot \sin \lambda$; dann ist $\mu < \lambda$ und μ durchläuft auch die positiven Werthe von ∞ bis 0. Weil $u = e^\mu$, so ist $q = -e^{-(\lambda-\mu)}$ und geht von $-c$ bis -1 .

Wenn $t = -e^{i\varphi}$, wo φ von 0 bis π läuft, so sei $\sin \chi = \sin \beta \sin \varphi$; dann ist $\chi < \varphi$. χ geht von 0 bis β , wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht und kehrt nach 0 zurück, wenn φ von $\frac{\pi}{2}$ bis π geht. Da $u = e^{i\chi}$ und der Factor -1 in $t = -e^{i\varphi}$ als $e^{i\pi}$ aufzufassen ist, so ist $q = e^{i(\pi+\chi-\varphi)}$ und geht von $e^{i\pi}$ in rückläufiger Richtung dem Rande des Einheitskreises entlang durch den Punkt $e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}$, welcher dem festzuhaltenden Punkt $t = -i$ entspricht, bis ans Ende 1 des nördlichen Halbkreises.

Nimmt man nun mit dem t -Wege die vorhin angezeigte Verschiebung vor, so verschiebt sich auch der q -Weg so, dass er von $-c$ innerhalb des nordwestlichen Quadrants des Einheitskreises nach dem Punkte $e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}$ hingeht, dann aus dem Einheitskreise austritt,

die laterale Axe nördlich von i passiert und ausserhalb des Einheitskreises im nordöstlichen Viertel der Ebene nach einem Punkte der positiven Axe hingeht, der östlich von 1 liegt. Der übrige Theil des

Weges führt durch den Punkt $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\beta)}$ nach $-c$ zurück und liegt in Bezug auf die Realitätslinie symmetrisch zum ersten Theile. Der ganze q -Weg ist also eine vom Pol $-c$ aus um den einzigen Pol 0 gelegte rückläufige Schlinge, welche den Pol $-\frac{1}{c}$ ausschliesst.

IV.

Nach Seite 39

$$S = \frac{1}{2i\pi} \int t^{-b} u^{1-a} \frac{2}{u^2+1} \frac{dt}{t},$$

wo nun

$$t^{-b} = (cq + 1)^{-\frac{b}{2}} q^{\frac{b}{2}} (q + c)^{\frac{b}{2}},$$

$$u^{1-a} = q^{\frac{1-a}{2}} (cq + 1)^{\frac{1-a}{2}} (q + c)^{\frac{a-1}{2}},$$

$$\frac{2}{u^2+1} = \frac{2(q+c)}{c(q^2+1)+2q},$$

$$\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c(q^2+1)+2q}{q(q+c)(cq+1)} dq;$$

also

$$t^{-b} u^{1-a} \frac{2}{u^2+1} \frac{dt}{t} = -q^{\frac{b-a-1}{2}} (q+c)^{\frac{b+a-1}{2}} (cq+1)^{-\frac{a+b+1}{2}} dq.$$

Macht man die Schlinge rechtläufig und multiplicirt daher den letzten Ausdruck mit -1 , so bekommt man

$$S = \frac{1}{2i\pi} \int_{H(-c; 0)} q^{\frac{b-a-1}{2}} (q+c)^{\frac{b+a-1}{2}} (cq+1)^{-\frac{a+b+1}{2}} dq.$$

Setzt man $q = cz$, so kommt

$$S = \frac{c^b}{2i\pi} \int_{H(-1; 0)} z^{\frac{b-a-1}{2}} (1+z)^{\frac{b+a-1}{2}} (1+c^2z)^{-\frac{a+b+1}{2}} dz.$$

Man nehme nun für einen Augenblick $\frac{b-a+1}{2}$ als positiv an, um die Schlinge um 0 zusammenziehen zu dürfen. Wenn das geschehen ist, setze man $z = -t$; auf dem Hinweg ist dann $\log z = \log t - i\pi$, auf dem Herweg $\log z = \log t + i\pi$, im sehr kleinen Kreis um 0 herum verschwindet das Integral. Man erhält dann

$$S = \frac{c^b}{\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{b-a-1}{2}} (1-t)^{\frac{b+a-1}{2}} (1-c^2t)^{-\frac{a+b+1}{2}} dt;$$

also

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(b+1) \Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)} c^b F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}, b+1, c^2\right),$$

wo nun die Bedingung hinsichtlich $\frac{b-a+1}{2}$ wieder wegfällt. Wir haben also das Ergebniss:

Wenn $a + b + 1 > 0$, $0 < c < 1$, so ist

$$(A) \quad \int_0^{\infty} J^a(x) J^b(cx) dx \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(b+1) \Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)} c^b F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}, b+1, c^2\right).$$

Um das Integral für den Fall darzustellen, wo $c > 1$ ist, ersetze man x durch $\frac{x}{c}$, multiplicire mit c und schreibe dann $a, \frac{1}{c}$ resp. statt b, c , so kommt

$$(B) \quad \int_0^{\infty} J^a(x) J^b(cx) dx \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(a+1) \Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)} c^{-a-1} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, a+1, \frac{1}{c^2}\right), \\ a + b + 1 > 0, \quad c > 1.$$

Diese zwei Functionen gelten auch für complexe Werthe von c und haben mit Ausnahme der Pole $c^2 = 0, 1, \infty$ den Charakter ganzer Functionen. Keine geht in die andere über. An der Stelle $c = 1$ tritt also für das Integral ein Functionswechsel ein. Hierauf will ich in einem spätern Paragraphen noch näher eingehen, vorerst aber die Fälle betrachten, wo $a - b$ eine positive oder negative ungerade Zahl ist, und in welchen, wie wir gesehen haben, $c = 1$ werden darf.

V.

Wenn $a - b = -(2n+1)$ eine negative ungerade Zahl ist, so wird $\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right) = \Gamma(-n)$ unendlich gross, der dritte Parameter der hypergeometrischen Reihe in der Formel (A) bleibt positiv, die Reihe behält also einen endlichen Werth. Daher hat man

$$(A) \quad \int_0^{\infty} J^a(x) J^{a+2n+1}(cx) dx = 0, \quad \text{wenn } 0 < c < 1,$$

Wenn $a - b = 2n+1$ eine positive ungerade Zahl ist, so bleiben die Gammafunctionen in der Formel (A) endlich, der zweite Parameter

in der hypergeometrischen Reihe wird $-n$, die Reihe bricht also mit dem $(n+1)$ Term ab. Man hat

$$\int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx = \frac{\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(n+1)} c^b F(b+n+1, -n, b+1, c^2).$$

Diese Formel lässt den Grenzwert, den das Integral erhält, wenn c gegen 1 hinget, nicht erkennen. Die Anwendung der Gauss'schen Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}$$

gibt die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$. Zu einer durchsichtigen Darstellung gelangen wir, wenn wir der allgemeinen Formel (A) zuerst die Gestalt geben

$$\int_0^{\infty} J^{\frac{a}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(x) dx = c^b \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\frac{b-a+1}{2} \dots \left(\lambda + \frac{b-a-1}{2}\right)}{1 \dots \lambda} \cdot \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right) \Gamma(\lambda+b+1)} c^{2\lambda},$$

Setzt man

$$a = b + 2n + 1,$$

so geht sie über in

$$\int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx = c^b \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{n}{\lambda} \binom{\lambda+n+b}{n} (-c^2)^{\lambda}.$$

Nach Cauchy's Formel ist

$$\binom{\lambda+n+b}{n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(0)} (1+t)^{\lambda+n+b} \frac{dt}{t^{n+1}};$$

substituiert man dies in der letzten Gleichung, so kann man unter dem Integrationszeichen summieren, wodurch

$$\int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx = \frac{c^b}{2i\pi} \int \frac{(1+t)^{n+b}}{t^{n+1}} (1-c^2-c^2t)^n dt$$

entsteht, wenn der t -Weg eine geschlossene Curve um 0 ist, welche -1 ausschliesst. Man kann $\{(1-c^2) - c^2t\}^n$ in eine endliche Summe entwickeln und dann die Integration Term für Term vollziehen. Es ergibt sich

$$\int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx = (-1)^n c^{2n+b} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{n}{\lambda} \binom{n+b}{\lambda} \left(-\frac{1-c^2}{c^2}\right)^{\lambda}$$

oder, wenn man wieder zur hypergeometrischen Reihe zurückkehrt

$$(A'') \int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx = (-1)^n c^{2n+b} F\left(-n, -n-b, 1, -\left(\frac{1}{c^2} - 1\right)\right).$$

Auf demselben Wege erhält man aus der Formel (B), wenn

$$a - b = -(2n + 1)$$

$$(B') \int_0^{\infty} J^{\frac{a}{2}}(x) J^{\frac{a+2n+1}{2}}(cx) dx = (-1)^n c^{-2n-a-1} F(-n, -n-a, 1, -(c^2 - 1)),$$

aber wenn $a - b = 2n + 1$

$$(B'') \int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx = 0.$$

Wir haben somit folgende zwei Integrale

$$(I) \begin{cases} \int_0^{\infty} J^{\frac{a}{2}}(x) J^{\frac{a+2n+1}{2}}(cx) dx \\ = (-1)^n c^{-2n-a-1} F(-n, -n-a, 1, -(c^2 - 1)), & \text{wenn } 1 < c, \\ \text{aber} = 0 & \text{wenn } 0 < c < 1, \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \int_0^{\infty} J^{\frac{b+2n+1}{2}}(x) J^{\frac{b}{2}}(cx) dx \\ = (-1)^n c^{2n+b} F\left(-n, -n-b, 1, -\left(\frac{1}{c^2} - 1\right)\right), & \text{wenn } 0 < c < 1, \\ \text{aber} = 0 & \text{wenn } 1 < c. \end{cases}$$

Beide Integrale sagen nicht wesentlich Verschiedenes aus; ihre Herleitung ergibt, dass sie auf dieselbe Art in einander übergeführt werden können, wie die Formel (A) in (B) verwandelt wurde.

Das Integral (I) giebt, wenn c auf 1 herabsinkt, den Grenzwert $(-1)^n$, wenn dagegen c wachsend gegen 1 hingeht, den Grenzwert 0. Beim Integral (II) findet das Umgekehrte statt.

Für $a = 0$, $n = 0$ giebt (I)

$$\int_0^{\infty} J^0(x) J^1(cx) dx = \frac{1}{c}, \quad \text{wenn } c > 1, \\ \text{aber} = 0 \quad \text{wenn } 0 < c < 1.$$

Für $a = -\frac{1}{2}$, $n = 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin cx \cdot \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn } c > 1, \\ \text{aber} = 0, \quad \text{wenn } 0 < c < 1.$$

Für $n = 0$

$$\int_0^{\infty} J_a^a(x) J^{a+1}(cx) dx = \frac{1}{c^{a+1}}, \quad \text{wenn } 1 < c, \\ \text{aber} = 0, \quad \text{wenn } 0 < c < 1.$$

Entsprechende Resultate liefern dieselben Specialisirungen beim Integral (II). Sie stimmen überein mit den von Herrn Weber (a. a. O. pag. 80) und Herrn Sonine (a. a. O. pag. 39) gegebenen Formeln.

VI.

Die hypergeometrischen Reihen in (A) und (B) sind gut definirte Functionen von c . Die rechten Seiten dieser Gleichungen mögen zur Unterscheidung mit $S'(c)$ und $S''(c)$ bezeichnet werden. Die Kummer'sche Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x) \\ + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x)$$

gestattet eine Transformation vom Argument x zum Argument $1 - x$. Um die Gleichung auf unsere Function anwendbar zu machen, müssen wir den Grenzwert der rechten Seite für $\gamma = \alpha + \beta$ bestimmen. Setzt man $\gamma = \alpha + \beta + \varepsilon$, wo ε zum Verschwinden bestimmt ist, und bezeichnet $\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ mit $\Lambda(\alpha)$, so folgt

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = - \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \log(1 - x) F(\alpha, \beta, 1, 1 - x) \\ + \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \lambda) \Gamma(\beta + \lambda)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \lambda! \lambda!} (2\Lambda(1 + \lambda) - \Lambda(\alpha + \lambda) - \Lambda(\beta + \lambda)) (1 - x)^{\lambda}.$$

Man erhält nun, wenn man

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{\pi}{\cos a \pi}$$

berücksichtigt

$$\begin{aligned}
 (A_1) \quad S'(c) = & -\frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^b \log(1-c^2) F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}, 1, 1-c^2\right) \\
 & + \frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^b \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{b-a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right) \lambda! \lambda!} \\
 & \times \left(2\Lambda(\lambda+1) - \Lambda\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right) - \Lambda\left(\lambda + \frac{b-a+1}{2}\right)\right) (1-c^2)^\lambda.
 \end{aligned}$$

Multiplicirt man mit c und schreibt dann $b, a, \frac{1}{c}$ resp. anstatt a, b, c so bekommt man

$$\begin{aligned}
 (B_1) \quad S''(c) = & -\frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^{-a-1} \log \frac{c^2-1}{c^2} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, \frac{c^2-1}{c^2}\right) \\
 & + \frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{a-b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right) \lambda! \lambda!} \\
 & \times \left(2\Lambda(\lambda+1) - \Lambda\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right) - \Lambda\left(\lambda + \frac{a-b+1}{2}\right)\right) \left(\frac{c^2-1}{c^2}\right)^\lambda.
 \end{aligned}$$

Die Formeln (A_1) und (B_1) zeigen, dass das Integral, wenn c gegen 1
 hingeht, unendlich wird wie $-\frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} \log(1-c^2)$.

Um die Vergleichung mit der Formel (A_1) zu ermöglichen, gebrauche man die durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right)$$

dargebotene Verwandlung. Der Logarithmus des Arguments wird $\log \frac{1-c^2}{c^2} - i\pi$ und führt man dann statt $i \cos \frac{(a-b)\pi}{2}$ die reelle
 Componente von $e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(a-b)\pi}{2}\right)}$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 (A_2) \quad S'(c) = & \left(-\frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} \log \frac{1-c^2}{c^2} + \sin(a-b) \frac{\pi}{2}\right) c^{-a-1} \\
 & F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, -\frac{1-c^2}{c^2}\right) \\
 & + \frac{\cos \frac{(a-b)\pi}{2}}{\pi} c^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + \frac{a-b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right) \lambda! \lambda!} \\
 & \times \left(2\Lambda(\lambda+1) - \Lambda\left(\lambda + \frac{a+b+1}{2}\right) - \Lambda\left(\lambda + \frac{a-b+1}{2}\right)\right) \left(-\frac{1-c^2}{c^2}\right)^\lambda.
 \end{aligned}$$

Man führe jetzt in (A_2) die Variable c mittelst eines kleinen rückläufigen Halbkreises aus der Gegend westlich von 1 in die östliche Gegend der positiven Axe hinüber bis zu irgend einem Punkt, wo die Gleichung (B_1) ursprüngliche Geltung hat und ziehe dann $S'(c)$ von $S''(c)$ ab. Es ergibt sich

$$S''(c) - S'(c) = e^{i(b-a-1)\frac{\pi}{2}} c^{-a-1} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, \frac{c^2-1}{c^2}\right)$$

was für $b = a + 2n + 1$ und $c = 1$ in

$$\lim_{(c=1)} \{S''(c) - S'(c)\} = (-1)^n$$

übergeht. Die Discontinuität hat also ihre Ursache in einem Functionswechsel und nicht etwa in der logarithmischen Unstetigkeit.

Zürich, im December 1895.