Ueber die Entwicklung einer Function nach Quadraten und Produkten der Fourier-Bessel'schen Functionen. *)

VON CARL NEUMANN in LEIPZIG.

In meiner Schrift über die Bessel'schen Functionen **) ist neben den Bessel'schen *Transcendenten* $J^n(z)$ eine gewisse *neue Function* $O^n(z)$ in die Untersuchung eingeführt worden. Die Function $J^n(z)$ wird bekanntlich definiert durch die unendliche Reihe:

$$(1) \quad J^n(z) = \frac{z^n}{2^n \Pi n} \left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot 2n+2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n+2 \cdot 2n+4} - \dots \right),$$

wo $\Pi n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, und $\Pi 0 = 1$ ist. Andererseits ist unter $O^n(z)$ eine ganze rationale Function von $\frac{1}{z}$ zu verstehen, welche, je nachdem n gerade oder ungerade ist, ihren Ausdruck findet durch eine der beiden (bei einem gewissen Gliede von selber abbrechenden) Formeln:

$$(2) \quad O^n(z) = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{n^2}{z^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{z^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{z^6} + \dots \right)$$

(gerades n),

$$O^n(z) = \frac{n}{z^2} \left(1 + \frac{n^2-1^2}{z^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{z^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{z^6} + \dots \right)$$

(ungerades n).

Eine andere und einfachere Darstellungsart ergibt sich (vgl. die citirte Schrift p. 15) für diese Functionen $O^n(z)$, wenn man die vorstehenden Ausdrücke in *umgekehrter* Weise (nach steigenden statt nach fallenden Potenzen von z) ordnet. Man findet alsdann für *jedes beliebige* n (gleichgültig, ob n gerade oder ungerade ist) die Formel:

$$(3) \quad \varepsilon_n O^n(z) = \frac{2^n \Pi n}{z^n + 1} \left(1 + \frac{z^2}{2 \cdot 2n-2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n-2 \cdot 2n-4} + \dots \text{fin.} \right)$$

wo unter ε_n eine Zahl zu verstehen ist, welche den Werth 1 hat für $n=0$, den Werth 2 für $n>0$. Indessen leidet diese Formel an der

*) Wiederholt aus den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft d. Wiss. Jahrgang 1869, Seite 221.

**) Im Verlag von Teubner, Leipzig 1867.

Unbequemlichkeit, dass sie nicht von selber abbricht, des *Abbruchs aber bedarf* (was angedeutet sein soll durch das zugesetzte *fin.*). Die Function $O^n(x)$ ist nämlich, zufolge ihrer ursprünglichen Definition (2), eine ganze rationale Function von $\frac{1}{x}$, welche verschwindet für $\frac{1}{x} = 0$. Und die Glieder der Formel (3) sind nur so weit fortzusetzen, als es mit diesem Charakter der Function verträglich. Das letzte in die Parenthese jener Formel noch aufzunehmende Glied lautet daher, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder

$$\frac{x^n}{2 \cdot 4 \dots n \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 4 \dots n} \quad (\text{gerades } n),$$

oder:

$$\frac{x^{n-1}}{2 \cdot 4 \dots n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 4 \dots n + 1} \quad (\text{ungerades } n),$$

Mit Bezug auf diese Functionen sind von mir*) folgende Sätze aufgestellt worden:

I. Satz. Sind x, y complexe, der Bedingung $\text{mod } x < \text{mod } y$ unterworfenen Variable, so kann der Bruch $\frac{1}{y-x}$ in folgende Reihe entwickelt werden:

$$(4_a) \quad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(x) O^n(y).$$

Diese Entwicklung nämlich wird jederzeit gültig, d. i. convergent und gleichwerthig mit dem gegebenen Bruche sein, so lange $\text{mod } x < \text{mod } y$ bleibt.

II. Satz. Repräsentirt R eine reelle Constante, und $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig und stetig ist, so lange $\text{mod } z < R$ bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren:

$$(4_b) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^n(z),$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Werth von z . — Die constanten Coefficienten a_n dieser Entwicklung finden ihre Bestimmung durch die Formel:

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z) O^n(z) dz,$$

die Integration positiv hinstreckt längs irgend einer Kreislinie, deren Mittelpunkt bei $z = 0$ liegt, und deren Radius r kleiner als R ist.

In diesen Sätzen ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n = 0$ den Werth 1, hingegen für $n > 0$ den Werth 2 besitzt.

Vor einiger Zeit ist von Lommel**) die Vermuthung ausge-

*) l. c. pag. 32 und 34.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen von Dr. E. Lommel. Verlag von Teubner. Leipzig 1868, Seite 50.

sprochen worden, dass für eine *gerade* Function $f(z)$ wohl auch eine Entwicklung nach den *Quadraten* der Bessel'schen Functionen möglich sein dürfte. Die so angeregte Frage gab Veranlassung zu der nachfolgenden Untersuchung, und wird durch diese Untersuchung dahin beantwortet werden, dass eine solche nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen fortschreitende Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n [J^n(z)]^2$$

jederzeit existiren muss, falls nur die zu entwickelnde Function $f(z)$ innerhalb eines um den Punkt $z=0$ beschriebenen Kreises den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit, und daneben der Bedingung $f(z) = f(-z)$ Genüge leistet. Zugleich auch wird die allgemeine Methode dargelegt werden, nach welcher bei einer derartigen Entwicklung die Coefficienten α_n zu bestimmen sind.

§ 1.

Die Entwicklung einer geraden Potenz.

Ist von einer Function $f(z)$ bekannt, dass sie auf der z -Ebene allenthalben eindeutig und stetig ist, und ferner bekannt, dass sie längs irgend einer (beliebig kurzen) Linie verschwindet, so folgt daraus bekanntlich, dass sie auf der z -Ebene *allenthalben* verschwindet. Den eben genannten Voraussetzungen wird aber entsprochen, wenn man für $f(z)$ folgenden Ausdruck nimmt:

$$f(z) = [J^n(z)]^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin \omega) d\omega.$$

Denn dass diese Function auf der z -Ebene allenthalben eindeutig und stetig ist, folgt aus den Eigenschaften der Bessel'schen Transcendenten; und andererseits ist bekannt (vgl. meine schon citirte Schrift, S. 70), dass sie verschwindet für *reelle* Werthe von z , also verschwindet *längs der reellen Achse*. Somit ergiebt sich, dass diese Function auf der z -Ebene *allenthalben* verschwindet. Also:

III. Satz. Für jeden beliebigen Werth der complexen Variablen z findet die Formel statt:

$$(5) \quad [J^n(z)]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin \omega) d\omega.$$

Dabei ist indessen vorausgesetzt, dass n eine ganze Zahl ist.

Unter Anwendung dieses Satzes wird es nun leicht sein, jede der Potenzen

$$z^0, z^2, z^4, \dots, z^{2p}, \dots$$

nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen zu entwickeln. Wir setzen zuvörderst:

$$(6) \quad z^{2p} = C \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2z \sin \omega)^{2p} d\omega,$$

und erhalten alsdann zur Bestimmung der Constanten C die Gleichung

$$1 = C \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2 \sin \omega)^{2p} d\omega,$$

und hieraus durch Ausführung der Integration:

$$1 = C \cdot \frac{\pi 2^p}{\pi p \cdot \pi p},$$

mithin:

$$C = \frac{\pi p \cdot \pi p}{\pi 2^p},$$

wo (wie schon früher) $\pi n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, und $\pi 0 = 1$ sein soll. Somit geht die Formel (6) über in:

$$(7) \quad z^{2p} = \frac{\pi p \cdot \pi p}{\pi 2^p} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2z \sin \omega)^{2p} d\omega.$$

Versteht man unter ξ eine complexe Variable, so wird ξ^{2p} eine Function von ξ sein, welche auf der ξ -Ebene, mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte, überall eindeutig und stetig ist, und welche also, zufolge eines bereits erwähnten Satzes (4_b), für jeden endlichen Werth von ξ darstellbar ist durch eine nach den Bessel'schen Functionen fortschreitende Entwicklung:

$$\xi^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^n(\xi).$$

Addirt man die beiden Formeln, welche bei Anwendung dieser Entwicklung für $(+\xi)^{2p}$ und $(-\xi)^{2p}$ sich ergeben, und beachtet man, dass die Bessel'sche Function $J^n(\xi)$ gerade oder ungerade ist, je nachdem ihr n gerade oder ungerade, so ergibt sich:

$$(8) \quad \xi^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n} J^{2n}(\xi).$$

Diese Entwicklung ist gültig für jeden endlichen Werth von ξ . Sie kann daher sofort in Anwendung gebracht werden auf den Werth $\xi = 2z \sin \omega$, und liefert alsdann:

$$(2z \sin \omega)^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n} J^{2n}(2z \sin \omega).$$

Hierdurch aber gewinnt die Formel (7) folgende Gestalt:

$$z^{2p} = \frac{\pi p \cdot \pi p}{\pi 2^p} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{2n} J^{2n}(2z \sin \omega) \right\} d\omega,$$

also mit Rücksicht auf (5) folgende:

$$(9) \quad z^{2p} = \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} [J^n(z)]^2.$$

Aus (8) und (9) ergibt sich daher folgendes Resultat:

IV. Satz. *Versteht man unter p eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$, so kann die Potenz z^{2p} in eine nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihe entwickelt werden, welche gültig bleibt für jeden endlichen Werth von z .*

Bezeichnet man die Entwicklung der Potens z^{2p} nach den Bessel'schen Functionen selber mit

$$z^{2p} = a_0 J^0(z) + a_2 J^2(z) + a_4 J^4(z) + \dots$$

so wird ihre nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen fortlaufende Entwicklung folgendermassen lauten:

$$(10) \quad z^{2p} = \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} (a_0 [J^0(z)]^2 + a_2 [J^1(z)]^2 + a_4 [J^2(z)]^2 + \dots).$$

Die Coefficienten der letzteren Entwicklung sind also proportional mit denen der ersteren, nämlich von diesen nur verschieden durch den gemeinschaftlichen Factor $\frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p}$.

Die Entwicklungen von $z^0, z^2, z^4, z^6, \dots$ nach den Bessel'schen Transcendenten wurden bekanntlich schon von Schlömilch aufgestellt. Sie lauten (vgl. meine Schrift über die Bessel'schen Functionen Seite 39) folgendermassen:

$$(10_a) \quad \begin{aligned} 1 &= J^0(z) + 2 \Sigma J^{2q}(z), \\ z^2 &= 2 \Sigma 4 q^2 J^{2q}(z), \\ z^4 &= 2 \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) J^{2q}(z), \\ z^6 &= 2 \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2) J^{2q}(z), \\ z^8 &= 2 \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2) (4 q^2 - 6^2) J^{2q}(z), \\ &\dots \end{aligned}$$

wo die Summationen Σ hinzuerstrecken sind über die Zahlen $q = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty$. Hieraus nun ergeben sich, mit Hülfe des eben erhaltenen Satzes, augenblicklich die Entwicklungen dieser Potenzen nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen. Man findet:

$$(10_b) \quad \begin{aligned} 1 &= [J^0(z)]^2 + 2 \Sigma [J^1(z)]^2, \\ z^2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \Sigma 4 q^2 [J^1(z)]^2, \\ z^4 &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot 2 \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) [J^1(z)]^2, \\ z^6 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 2 \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2) [J^1(z)]^2, \\ z^8 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 2 \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2) (4 q^2 - 6^2) [J^1(z)]^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

wo wiederum $q = 1, 2, 3, 4, \dots \infty$ diejenigen Zahlen sind, über welche die Summationen Σ hinzuerstrecken sind. Alle diese Entwicklungen (10^{a, b}) sind gültig für jeden endlichen Werth von z , gültig für sämtliche Punkte der z -Ebene.

Eine Function $f(z)$, welche innerhalb eines um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreises eindeutig, stetig und gerade bleibt, ist bekanntlich innerhalb dieses Kreises darstellbar durch eine nach den geraden Potenzen von z fortschreitende Reihe. Zufolge des Satzes (10) wird nun jedes Glied dieser Reihe entwickelbar sein nach den $[J^*(z)]^2$; und in solcher Weise wird sich für die Function $f(z)$ eine ebenfalls nach der $[J^*(z)]^2$ fortschreitende Reihe ergeben. Im folgenden Paragraphen werden wir das Gebiet festzustellen suchen, innerhalb dessen eine solche Reihenentwicklung gültig, d. i. convergent und gleichwerthig mit $f(z)$ ist.

§ 2.

Die Entwicklung einer geraden Function.

Auf der z -Ebene sei ein Kreis beschrieben um den Punkt 0 (d. i. $z = 0$), mit dem Radius R ; und $f(z)$ sei eine gegebene Function, welche für alle der Bedingung

$$(11) \quad \text{mod } z < R$$

entsprechenden Werthe von z *eindeutig, stetig und gerade* ist. Das Verhalten der Function in den *Randpunkten* der Kreisfläche (R), d. i. für $\text{mod } z = R$ wird also als unbekannt betrachtet.

Unter den unendlich vielen der Bedingung (11) genügenden Punkten z werde irgend ein *bestimmter* Punkt ausgewählt. Dieser mag mit x und sein Abstand vom Mittelpunkte mit a bezeichnet werden. Ferner mag *dem Punkte x* *entsprechend* ein Hilfskreis construirt werden, der concentrisch ist mit dem gegebenen Kreise und dessen Radius b an den Punkt x , gebunden ist durch die Relation:

$$(12) \quad b = \frac{R + \text{mod } x}{2} = \frac{R + a}{2}.$$

Die auf der Peripherie des Hilfskreises befindlichen Punkte mögen mit y bezeichnet werden; und diesen Bezeichnungen entsprechend mag gesetzt werden:

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= ae^{i\alpha} = a \cos \alpha + ia \sin \alpha, \\ y &= be^{i\beta} = b \cos \beta + ib \sin \beta. \end{aligned}$$

Zufolge eines bekannten Cauchy'schen Theorems kann der Werth der gegebenen Function f in dem betrachteten Punkte x dargestellt werden durch das Integral*)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(b)} \frac{f(y) dy}{y-x},$$

die Integration positiv hinstreckt längs der Peripherie des Hilfskreises (b) . Da $a < b$, d. i. $\text{mod } x < \text{mod } y$, mithin

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \dots$$

ist, so kann die Formel (14) so dargestellt werden:

$$(15) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(b)} \left(\frac{f(y)}{y} + \frac{x f(y)}{y^2} + \frac{x^2 f(y)}{y^3} + \dots \right) dy.$$

Die Function f ist innerhalb des gegebenen Kreises *gerade*; daher hat $f(y)$ an je zwei diametral entgegengesetzten Stellen der Kreislinie (b) einerlei Werth; folglich wird das längs jener Kreislinie (b) hinstreckte Integral:

$$\int_{(b)} \frac{f(y) dy}{y^n}$$

für jedes *gerade* n verschwinden. Auf der rechten Seite der Formel (15) werden daher alle diejenigen Glieder verschwinden, deren Nenner mit *geraden* Potenzen von y behaftet sind. Somit ergibt sich:

$$(16) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(b)} \left(\frac{f(y)}{y} + \frac{x^2 f(y)}{y^3} + \frac{x^4 f(y)}{y^5} + \dots \right) dy,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(17) \quad f(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \dots, \quad C_{2p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(b)} \frac{f(y) dy}{y^{2p+1}}.$$

Diese Reihe (16) oder (17) wird also für den betrachteten Punkt x *gültig*, d. i. *convergent und gleichwerthig mit $f(x)$ sein*.

Wir gehen über zur Untersuchung der dieser Reihe zugehörigen Modulreihe. Zufolge (17) ist:

$$C_{2p} x^{2p} = \frac{x^{2p}}{2\pi i} \int_{(b)} \frac{f(y) dy}{y^{2p+1}},$$

oder, wenn für x, y die Werthe (13) substituirt werden:

*) Die über die gegebene Function $f(z)$ zu Grunde gelegten Voraussetzungen beschränken sich durchweg auf diejenigen Punkte z , für welche $\text{mod } z < R$ ist. Die Beschaffenheit derjenigen Werthe, welche $f(z)$ für $\text{mod } z = R$ besitzt, ist also völlig unbekannt. Eine Verlegung der in (14) vorhandenen Integrationscurve von der Peripherie des Hilfskreises (b) zur Peripherie des gegebenen Kreises (K) würde daher *unzulässig* sein.

$$C_{2p} x^{2p} = \frac{a^{2p}}{2\pi \cdot b^{2p}} e^{2pia} \int_{(b)} f(y) e^{-2pi\beta} d\beta,$$

Da der Modul von e^{2pia} den Werth 1 besitzt, so ergibt sich hieraus sofort:

$$\text{mod } (C_{2p} x^{2p}) = \frac{a^{2p}}{2\pi \cdot b^{2p}} \cdot \text{mod } \left(\int_{(b)} f(y) e^{-2pi\beta} d\beta \right).$$

Mit Hülfe des bekannten Satzes, dass der Modul einer Summe kleiner ist als die Summe der Moduln:

$\text{mod } (u + v + w + \dots) < \text{mod } u + \text{mod } v + \text{mod } w + \dots$,
ergibt sich nun weiter:

$$\text{mod } (C_{2p} x^{2p}) < \frac{a^{2p}}{2\pi b^{2p}} \int_{(b)} \text{mod } (f(y) \cdot e^{-2pi\beta}) d\beta,$$

oder, weil der Modul von $e^{-2pi\beta}$ den Werth 1 hat:

$$\text{mod } (C_{2p} x^{2p}) < \frac{a^{2p}}{2\pi b^{2p}} \int_{(b)} \text{mod } f(y) \cdot d\beta.$$

Versteht man nun unter B eine gewisse, dem Hilfskreise (b) zugehörige Constante, nämlich den grössten Werth, welchen $\text{mod } f(y)$ längs der Peripherie dieses Kreises besitzt, so wird die rechte Seite der vorstehenden Formel, wenn man $\text{mod } f(y)$ durch jene Constante B ersetzt, noch weiter vergrössert werden. Um so mehr also wird:

$$\text{mod } (C_{2p} x^{2p}) < \frac{a^{2p}}{2\pi b^{2p}} \int_{(b)} B d\beta,$$

oder, weil $\int_{(b)} B d\beta = 2\pi B$ ist:

$$\text{mod } (C_{2p} x^{2p}) < B \left(\frac{a}{b} \right)^{2p}.$$

Somit erhalten wir für $p = 0, 1, 2, \dots$ die Formeln:

$$\text{mod } (C_0) < B,$$

$$\text{mod } (C_2 x^2) < B \left(\frac{a}{b} \right)^2,$$

$$\text{mod } (C_4 x^4) < B \left(\frac{a}{b} \right)^4,$$

$$\dots \dots \dots$$

Hieraus aber ergibt sich (weil zufolge der Construction des Hilfskreises $a < b$ ist) augenblicklich, dass die der Reihe (17) zugehörige Modulreihe:

$$(18) \quad \text{mod } (C_0) + \text{mod } (C_2 x^2) + \text{mod } (C_4 x^4) + \dots$$

convergent ist.

Da der Punkt x ein *beliebiger* war unter den unendlich vielen der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Punkten z , so werden die in

Betreff der Reihen (17) und (18) erhaltenen Resultate gültig sein für alle jene Punkte. Sind x, x' irgend zwei von jenen Punkten, und (b), (b') die denselben zugehörigen Hilfskreise, so ergeben sich auf dem hier eingeschlagenen Wege für $f(x)$ und $f(x')$ Entwicklungen, deren Coefficienten scheinbar von einander *verschieden* sind. Denn nach (17) erhalten wir:

$$f(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \dots, \quad C_{2p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(b)} \frac{f(y) dy}{y^{2p+1}},$$

und andererseits:

$$f(x) = C'_0 + C'_2 x^2 + C'_4 x^4 + \dots, \quad C'_{2p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(b')} \frac{f(y) dy}{y^{2p+1}}.$$

Aus den über die gegebene Function $f(z)$ gemachten Voraussetzungen ergibt sich aber leicht, dass der Werth des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z^{2p+1}}$$

ein und derselbe ist, gleichgültig, ob man die Integration über die Peripherie von (b), oder über die von (b'), oder auch über die Peripherie irgend eines anderen um den Punkt $z=0$ beschriebenen Kreises, dessen Radius kleiner als R ist, hinlaufen lässt.

Die gegebene Function $f(z)$ ist also darstellbar durch eine mit gewissen constanten Coefficienten C behaftete Reihenentwicklung:

$$(19) \quad f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p} z^{2p},$$

welche gültig [d. i. convergent und gleichwerthig mit $f(z)$] ist für jeden der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Werth von z . Und die dieser Reihe zugehörige Modulreihe

$$(20) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \text{mod } (C_{2p} z^{2p})$$

ist für jedes der genannten Bedingung entsprechende z ebenfalls convergent.

Wir werden durchweg festhalten an der Voraussetzung:

$$(21) \quad \text{mod } z < R.$$

Wie klein die Differenz zwischen $\text{mod } z$ und R aber auch sein mag, immer wird sich eine positive reelle Grösse ε angeben lassen von solcher Kleinheit, dass der mit $\sqrt{1+\varepsilon}$ multiplicirte $\text{mod } z$ ebenfalls noch kleiner als R ist, also eine Grösse ε , welche der Bedingung genügt:

$$(22) \quad \text{mod } (z\sqrt{1+\varepsilon}) < R.$$

Denkt man sich aber das ε in solcher Weise gewählt, so wird die Reihe (20) convergent bleiben, wenn man in ihr z mit $z\sqrt{1+\varepsilon}$ vertauscht. Mit anderen Worten: Die Reihe

$$\sum_{p=0}^{\infty} \text{mod } \{C_{2p} (z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}\}$$

wird *convergent* sein zufolge der über z und ε gemachten Voraussetzungen (21) und (22). Auch liegt zu Tage, dass die Glieder dieser Reihe durchweg reell und positiv sind. Multiplicirt man aber die Glieder einer derartigen Reihe mit irgend welchen positiven reellen Grössen, welche nicht ins Unendliche anwachsen, so wird bekanntlich die so entstehende neue Reihe wiederum *convergent* sein. Demzufolge wird die Reihe:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda_{2p} \cdot \text{mod } \{C_{2p} (z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}\},$$

d. i.:

$$(23) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \text{mod } \{\lambda_{2p} C_{2p} (z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}\}$$

convergent sein, sobald man unter

$$\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2p}, \dots$$

eine Reihe positiver reeller Grössen versteht, welche durchweg endlich bleiben.

Dieser Anforderung wird entsprochen, wenn man jene Grössen durch die Formel bestimmt:

$$(24) \quad \lambda_{2p} = \frac{2^{2p} \cdot \Pi p \cdot \Pi p}{(1+\varepsilon)^p \cdot \Pi 2p},$$

d. i. durch die Formeln:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{2p} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p} \frac{1}{(1+\varepsilon)^p} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p-1} \frac{1}{(1+\varepsilon)^p},$$

oder, was dasselbe ist, durch die Formeln:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{2p} = \frac{1 + \frac{1}{1+\varepsilon}}{1 + \frac{1}{1+\varepsilon}} \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{1+\varepsilon}} \frac{1 + \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{1+\varepsilon}} \dots \frac{1 + \frac{1}{2p-1}}{1 + \frac{1}{1+\varepsilon}}.$$

Alsdann nämlich wird:

$$\lambda_0 = 1,$$

$$\lambda_2 = \mu_1,$$

$$\lambda_4 = \mu_1 \cdot \mu_3,$$

$$\lambda_6 = \mu_1 \cdot \mu_3 \cdot \mu_5,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_{2p} = \mu_1 \cdot \mu_3 \cdot \mu_5 \dots \mu_{2p-1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{WO: } \mu_{2n-1} = \frac{1 + \frac{1}{2n-1}}{1 + \varepsilon}.$$

Dabei soll unter ε die früher [bei (22)] eingeführte Grösse verstanden werden.

Denkt man sich nämlich eine Zahl p gewählt von solcher Höhe, dass der Bruch $\frac{1}{2p-1}$ noch kleiner als jenes ε ist, so wird die Reihe

$$\mu_1, \mu_3, \mu_5, \dots, \mu_{2p-1}, \dots$$

zu Anfang aus *unächt*en, aber von μ_{2p-1} ab aus lauter *ächt*en Brüchen bestehen. Und demgemäss werden die Grössen

$$\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2p}, \dots$$

zu Anfang *wachsen*, aber von λ_{2p} *fortwährend abnehmen*; sie werden daher *durchweg endlich* bleiben. Die bei Einsetzung dieser Grössen λ_{2p} (24) in die Formel (23) entstehende Reihe

$$\sum_{p=0}^{\infty} \text{mod} \left\{ \frac{2^{2p} \cdot \Pi p \cdot \Pi p}{(1+\varepsilon)^p \cdot \Pi 2p} C_{2p}(z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p} \right\}$$

wird also *convergent* sein. Diese Reihe kann, weil $(1+\varepsilon)^p$ gegen $(\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}$ sich forthebt, einfacher so dargestellt werden:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \text{mod} \left\{ \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p}(2z)^{2p} \right\}.$$

Aus ihrer Convergenz aber folgt sofort, dass die Reihe

$$(25) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p}(2z)^{2p}$$

ebenfalls *convergent* ist. Denn es ist ein bekannter Satz, dass eine gegebene Reihe jederzeit *convergiren* muss, wenn feststeht, dass die ihr entsprechende Modulreihe *convergirt*. — Da das ε in der Reihe (25) nicht mehr enthalten ist, so bestehen die zum Beweise ihrer Convergenz erforderlich gewesen Vorausssetzungen, abgesehen von der früher festgestellten Bedeutung der Coefficienten C_{2p} , lediglich darin, dass $\text{mod } z < R$ ist, oder (was dasselbe ist) darin, dass $\text{mod } (2z) < 2R$ ist. Setzt man also ξ an Stelle von $2z$, so ergibt sich, im Anschluss an die früher in (19) und (20) notirten Ergebnisse, folgendes Resultat:

Ist ξ eine *complexe*, der Bedingung $\text{mod } \xi < 2R$ unterworfen Variable, so wird die Reihe

$$(26) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} \xi^{2p}$$

convergent, ihr Werth also eine stetige Function von ξ sein. — Diese Function mag hinfort mit $\Phi(\xi)$ bezeichnet werden. Aus ihrer Definition durch die vorstehende Reihe erkennt man übrigens sofort, dass sie nicht nur *stetig*, sondern auch *eindeutig* und *gerade* ist.

Aus den eben genannten Eigenschaften der Function

$$(27_*) \quad \Phi(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} \xi^{2p}$$

ergibt sich nun [unter Anwendung eines früher in (4_b) erwähnten Satzes] sofort, dass sie darstellbar ist durch eine nach den Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihe:

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n J_n(\xi),$$

und dass diese Reihe *gültig* ist für sämtliche der Bedingung $\text{mod } \xi < 2R$ entsprechenden Werthe von ξ . Bildet man die zuletzt hingestellte Formel successive für $\Phi(+\xi)$ und $\Phi(-\xi)$, und beachtet man, dass die Function Φ gerade ist und dass andererseits die Function J^n gerade oder ungerade ist, je nachdem ihr n gerade oder ungerade, so ergibt sich durch Addition dieser beiden Formeln sofort:

$$(27_b) \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} J^{2n}(\xi).$$

Der für ξ genannten Bedingung

$$\text{mod } \xi < 2R$$

wird offenbar Genüge geschehen, wenn man $\xi = 2z \sin \omega$ macht, vorausgesetzt, dass man unter ω einen *reellen* Winkel, andererseits unter z die früher betrachtete, der Bedingung

$$\text{mod } z < R$$

unterworfenen complexen Variable versteht. Somit ergeben sich aus (27_a, b) die Formeln:

$$(28_a) \quad \Phi(2z \sin \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\pi p \cdot \pi p}{\pi 2p} C_{2p} (2z \sin \omega)^{2p}$$

$$(28_b) \quad \Phi(2z \sin \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} J^{2n}(2z \sin \omega),$$

gültig für jedes reelle ω und für jedes der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechende z . Hieraus ergeben sich, wenn man mit $d\omega$ multiplicirt, und nach ω zwischen den Grenzen $0 \dots \pi$ integrirt, die weiteren Formeln:

$$(29_a) \quad \int_0^\pi \Phi(2z \sin \omega) d\omega = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{\pi p \cdot \pi p}{\pi 2p} C_{2p} z^{2p} \int_0^\pi (2 \sin \omega)^{2p} d\omega \right\},$$

$$(29_b) \quad \int_0^\pi \Phi(2z \sin \omega) d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ K_{2n} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin \omega) d\omega \right\},$$

wiederum gültig für jedes der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechende z . Beachtet man nun, dass

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2 \sin \omega)^{2p} d\omega = \frac{\pi 2p}{\pi p \cdot \pi p},$$

und ferner, dass nach einem schon früher benutzten Satz (5)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin \omega) d\omega = [J^n(z)]^2$$

ist, so nehmen die Formeln (29_a, b) folgende Gestalt an:

$$(30_a) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(2z \sin \omega) d\omega = \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} z^{2p},$$

$$(30_b) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(2z \sin \omega) d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} [J^n(z)]^2.$$

Hieraus folgt sofort die Gleichung:

$$(31) \quad \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} z^{2p} = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} [J^n(z)]^2,$$

und zwar die Gültigkeit derselben für jedes der Bedingung $\text{mod } z < R$ Genüge leistende z . Diese Gleichung aber endlich gewinnt bei Rückblick auf (19) folgende Gestalt:

$$(32) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} [J^n(z)]^2.$$

Bezeichnen wir schliesslich die Constanten $K_0, K_2, K_4, \dots K_{2n}, \dots$ einfacher mit $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots \kappa_n, \dots$, so können wir das durch die Formel (32) erhaltene Resultat folgendermassen ausdrücken:

V. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, so lange $\text{mod } z < R$ bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren:*

$$(33) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n [J^n(z)]^2,$$

welche gültig ist für alle der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Werthe von z .

Um eine allgemeine Methode zur Bestimmung der constanten Coefficienten κ zu erhalten, werden zunächst einige vorbereitende Untersuchungen erforderlich sein.

§ 3.

Die Darstellung gerader Functionen durch ein gewisses Integral.

Auf der z -Ebene sei um den Punkt $z = 0$ ein Kreis beschrieben mit dem Radius R . Ferner sei $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig und stetig ist, solange

$$\text{mod } z < R$$

bleibt. Das Verhalten der Function in den Randpunkten der Kreisfläche, d. i. für $\text{mod } z = R$, wird also als unbekannt betrachtet.

Ferner sei $z = c$ ein beliebig gewählter fester Punkt innerhalb der Kreisfläche (R), genauer ausgedrückt ein Punkt, welcher der Bedingung Genüge leistet:

$$\text{mod } c < R.$$

Diesem Punkte c entsprechend construiren wir eine zweite Kreisfläche, die mit der gegebenen concentrisch ist, und deren Radius r der Bedingung unterworfen sein soll:

$$\text{mod } c < r < R.$$

Die gegebene Function $f(z)$ wird alsdann eindeutig und stetig sein in *sämmtlichen* zur Kreisfläche (r) gehörigen Punkten. Zugleich wird der feste Punkt c innerhalb dieser Fläche sich befinden, und von ihrem Rande durch irgend welchen (wenn auch beliebig kleinen) Zwischenraum getrennt sein. Nach einem bekannten Cauchy'schen Satz wird sich daher der Werth der gegebenen Function f im Punkte c folgendermassen darstellen lassen:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(z) dz}{z - c}.$$

Die Integration positiv erstreckt über die Peripherie der Kreisfläche (r). Eine Formel, die mit dieser in Bezug auf den Punkt c aufgestellten analog ist, muss offenbar auch gelten für jeden andern innerhalb der Kreisfläche (r), nicht hart am Rande derselben befindlichen Punkt, muss also z. B. auch gelten für den Punkt $-c$. In der That wird:

$$f(-c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(z) dz}{z + c}.$$

Durch Addition dieser beiden Formeln folgt:

$$(34) \quad \frac{f(c) + f(-c)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(z) z dz}{z^2 - c^2}.$$

Lässt man nun zu den über die Function f gemachten Voraussetzungen noch *die* hinzutreten, dass f eine *gerade* Function ist, so wird $f(c) = f(-c)$, folglich die linke Seite der eben erhaltenen Formel identisch mit $f(c)$. Somit ergibt sich der Satz:

VI. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und repräsentirt $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange $\text{mod } z < R$ bleibt, so wird der Werth dieser Function für jedes der Bedingung $\text{mod } c < R$ entsprechende Argument c dargestellt werden können durch folgendes Integral:*

$$(35) \quad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(z) \cdot z dz}{z^2 - c^2},$$

die Integration positiv hinstreckt um irgend eine Kreisperipherie, deren Mittelpunkt in $z = 0$ liegt, und deren Radius r der Bedingung Genüge leistet $\text{mod } c < r < R$.

Es mag noch bemerkt werden, dass man zu der Formel (34) auch durch eine Untersuchung gelangen kann, welche ausgeht von der Betrachtung des Integrales

$$\int \frac{F(z) \cdot dz}{z^2 - c^2}.$$

Wählt man ferner an Stelle dieses Integrales das allgemeinere Integral

$$\int \frac{F(z) dz}{z^n - c^n},$$

so erhält man an Stelle der Formel (34) eine allgemeinere Formel, welche sich auf die n Eckpunkte eines regulären Polygons bezieht, und das arithmetische Mittel derjenigen n Werthe angiebt, welche eine gegebene Function in diesen n Punkten besitzt.

Was nun den eben erhaltenen Satz (35) anbelangt, so wird unsere Aufgabe, eine gerade Function nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen zu entwickeln, durch diesen Satz reducirt auf die Auffindung einer derartigen Entwicklung für den Bruch $\frac{1}{z^2 - c^2}$. Und diese letzte Aufgabe wird den Gegenstand des folgenden Paragraphen ausmachen.

§ 4.

Die Entwicklung des Ausdruckes $(y^2 - x^2)^{-2}$.

Es seien x und y zwei beliebige complexe Grössen; und zwar mag y als *fest*, hingegen x als *veränderlich* betrachtet werden. Der Ausdruck

$$(36) \quad \frac{1}{y^2 - x^2}$$

repräsentirt alsdann eine Function von x , welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange x der Bedingung

$$(37) \quad \text{mod } x < \text{mod } y$$

unterworfen bleibt, und für welche also [zufolge des Satzes (33)] eine Entwicklung existiren muss:

$$(38) \quad \frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_n [J^n(x)]^2,$$

die gültig ist für jedes beliebige der Bedingung (37) entsprechende x . Offenbar werden die Coefficienten κ_n dieser Entwicklung abhängig sein von y ; sie mögen demgemäss bezeichnet werden durch $\varepsilon_n \Omega^n(y)$, wo unter ε_n [ebenso wie früher in (3)] eine Zahl verstanden werden soll, welche für $n = 0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 besitzt. Bei

Anwendung dieser Bezeichnung nimmt die Entwicklung (38) folgende Gestalt an:

$$(39_a) \quad \frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \Omega^n(y) [J^n(x)]^2,$$

oder (was dasselbe ist) folgende Gestalt:

$$(39_b) \quad \frac{1}{y^2 - x^2} = \Omega^0(y) [J^0(x)]^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \Omega^q(y) [J^q(x)]^2,$$

Nachdem in solcher Weise die *Existenz und Gültigkeit* der Entwicklung (38) oder (39_{a, b}) für irgend zwei der Bedingung (37) entsprechende Grössen x, y constatirt ist, handelt es sich nunmehr um die Untersuchung und Bestimmung der in dieser Entwicklung auftretenden unbekannten Functionen $\Omega^n(y)$.

Wir bemerken zuvörderst, dass in Folge der festgesetzten Bedingung (37) die Gleichung stattfindet:

$$(40) \quad \frac{1}{y^2 - x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4} + \frac{x^4}{y^6} + \frac{x^6}{y^8} + \dots,$$

und ferner, dass [zufolge (10_b)] für $x^0, x^2, x^4, x^6, \dots$ folgende Entwicklungen benutzt werden können:

$$\begin{aligned} 1 &= [J^0(x)]^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} [J^q(x)]^2, \\ x^2 &= \frac{1}{2} 2 \sum_{q=1}^{\infty} 4q^2 [J^q(x)]^2, \\ (41) \quad x^4 &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} 2 \sum_{q=1}^{\infty} 4q^2 (4q^2 - 2^2) [J^q(x)]^2, \\ x^6 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} 2 \sum_{q=1}^{\infty} 4q^2 (4q^2 - 2^2) (4q^2 - 4^2) [J^q(x)]^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Formeln (41) der Reihe nach mit $\frac{1}{y^2}, \frac{1}{y^4}, \frac{1}{y^6}, \dots$, und addirt, so erhält man *linker* Hand den Ausdruck (40), d. i. den Bruch $\frac{1}{y^2 - x^2}$, und *rechter* Hand eine nach den Besselschen Functionen fortlaufende Entwicklung. Die in dieser Entwicklung als Coefficienten von $[J^0(x)]^2$ und $[J^q(x)]^2$ auftretenden Ausdrücke sind also die gesuchten Functionen, nämlich diejenigen Functionen, welche in (39_{a, b}) mit $\Omega^0(y)$ und $2\Omega^q(y)$ bezeichnet worden sind. Dabei ist unter q jede Zahl der Reihe 1, 2, 3, 4, $\dots, \infty$, *nicht* aber die Zahl 0 zu verstehen. Somit finden wir:

$$(42) \quad \Omega^0(y) = \frac{1}{y^2}; \text{ — und andererseits für } q = 1, 2, 3, \dots, \infty:$$

$$(43) \quad \Omega^q(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2} \frac{4q^2}{y^4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \frac{4q^2(4q^2 - 2^2)}{y^6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{4q^2(4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2)}{y^8} + \dots$$

Hieraus ergeben sich, um einige Beispiele anzuführen, folgende Formeln (wir vertauschen dabei den Buchstaben y mit z):

$$\begin{aligned}
 \Omega^0(z) &= \frac{1}{z^2}, & &= \frac{1}{z^2}, \\
 \Omega^1(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{4}{z^4}, & &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^4}, \\
 \Omega^2(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{16}{z^4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \frac{16 \cdot 12}{z^6}, & &= \frac{1}{z^2} + \frac{8}{z^4} + \frac{32}{z^6}, \\
 \Omega^3(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{36}{z^4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \frac{36 \cdot 32}{z^6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{36 \cdot 32 \cdot 20}{z^8} = \frac{1}{z^2} + \frac{18}{z^4} + \frac{192}{z^6} + \frac{1152}{z^8}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Die Functionen $\Omega^*(z)$ sind also ganze rationale Functionen von $\frac{1}{z^2}$.

Auch bemerkt man, dass die Formel (42) als specieller Fall schon mitenthaltten ist in der Formel (43), dass also die Functionen $\Omega^*(z)$, alle ohne Ausnahme, ihren Ausdruck finden durch die eine Formel*):

$$\Omega^*(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{4n^2}{z^4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{z^6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{z^8} + \dots\dots\dots,
 \tag{45}$$

wo mithin unter n jede beliebige Zahl der Reihe 0, 1, 2, 3, ... ∞ zu verstehen ist. Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

VII. Satz. *Der aus irgend zwei complexen Grössen x und y gebildete Bruch $\frac{1}{y^2 - x^2}$ kann, unter Anwendung der Bessel'schen Functionen J^* und unter gleichzeitiger Anwendung gewisser anderer Functionen Ω^* , die ihren Ausdruck finden durch die Formeln (44), (45), in folgende Reihe entwickelt werden:*

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \Omega^*(y) [J^*(x)]^2.
 \tag{46}$$

Diese Entwicklung ist gültig für jedes der Bedingung $\text{mod } x < \text{mod } y$ entsprechende Werthsystem von x, y . Dabei ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n=0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 besitzt.

§ 5.

Allgemeine Methode der Coefficienten-Bestimmung.

Auf der z -Ebene sei um den Punkt $z=0$ ein Kreis beschrieben mit dem Radius R . Ferner sei $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange

$$\text{mod } z < R
 \tag{47}$$

*) Das nächstfolgende Glied dieser Formel lautet:

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)(4n^2 - 6^2)}{z^{10}}$$

bleibt. Endlich sei c irgend ein specieller Werth von z , der ebenfalls der Bedingung Genüge leistet:

$$(48) \quad \text{mod } c < R.$$

Geometrisch ausgedrückt wird also c ein Punkt sein, der innerhalb der Kreisfläche (R) liegt, und von ihrem Rande durch irgend welchen (wenn auch beliebig kleinen) Zwischenraum getrennt ist. Diesem Punkte c entsprechend mag ein zweiter Kreis construirt werden, welcher mit dem gegebenen concentrisch ist, und dessen Radius r der Bedingung genügt:

$$(49) \quad \text{mod } c < r < R.$$

Zufolge eines früheren Satzes (35) wird alsdann der Werth der gegebenen Function im Punkte c darstellbar sein durch folgendes Integral:

$$(50) \quad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(z) \cdot z dz}{z^2 - c^2},$$

die Integration positiv hinerstreckt längs der Kreislinie (r).

Der hier unter dem Integral auftretende Bruch $\frac{1}{z^2 - c^2}$ kann nun aber, weil z einen Randpunkt der Kreisfläche (r) repräsentirt, folglich $\text{mod } z = r$, und also [nach (49)] $\text{mod } c < \text{mod } z$ ist, in folgende Reihe entwickelt werden:

$$(51) \quad \frac{1}{z^2 - c^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n [J^n(c)]^2 \Omega^n(z),$$

wie solches aus dem zuletzt gefundenen Satze (46) unmittelbar hervorgeht.

Substituirt man nun die durch (51) dargebotene Entwicklung in die Formel (50), so erhält man:

$$(52) \quad f(c) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n [J^n(c)]^2,$$

wo die Coefficienten ε_n folgende Werthe haben:

$$(53) \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z) \Omega^n(z) z dz,$$

die Integration positiv erstreckt um die Kreisfläche (r).

Dass die Entwicklung (51) unter den hier gemachten Voraussetzungen jederzeit gültig ist, folgt aus unsern früheren Untersuchungen [Satz (46)]; und dass die Gültigkeit jener Entwicklung (51) diejenige von (52) mit Nothwendigkeit nach sich zieht, unterliegt keinem Zweifel.

Es mag schliesslich noch bemerkt werden, dass die Integrationscurve (r) des zur Bestimmung von ε_n dienenden Integrales (53) einer gewissen Deformation fähig ist, ohne dass der Werth des Integrales dabei eine Aenderung erleidet. Aus den über $f(z)$ gemachten Voraus-

setzungen, und aus der Natur der Functionen $\Omega^n(z)$, [vgl. die Formeln (44), (45)] folgt nämlich sofort, dass das Product $f(z) \Omega^n(z)$ stetig und eindeutig ist, solange z der Bedingung entspricht:

$$0 < \text{mod } z < R.$$

Der Werth jenes Integrales (53) wird daher keinerlei Aenderung erleiden, wenn man seine Integrationscurve (r) einer beliebigen Deformation unterwirft, bei welcher ihre Punkte weder mit den Randpunkten der gegebenen Kreisfläche (R) noch mit dem Mittelpunkt dieser Fläche in unmittelbare Berührung gelangen. Der Werth des Integrales wird also z. B. keine Aenderung erfahren, wenn man seine Integrationscurve von der Kreislinie (r) nach irgend einer andern concentrischen Kreislinie verlegt, deren Radius kleiner als R ist.

Somit können die durch (52) und (53) erhaltenen Resultate schliesslich in folgender Weise zusammengefasst werden (der Buchstabe c wird dabei vertauscht werden mit z):

VIII. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange $\text{mod } z < R$ bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren:*

$$(54) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n [J^n(z)]^2,$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Werth von z . — Die constanten Coefficienten α_n dieser Entwicklung finden ihre Bestimmung durch die Formel:

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z) \Omega^n(z) z dz,$$

die Integration positiv hinstreckt längs irgend einer Kreislinie (r), deren Mittelpunkt bei $z = 0$ liegt, und deren Radius r kleiner als R ist. Dabei ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n = 0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 hat.

In analoger Weise wird sich offenbar auch eine Function $f(z)$ behandeln lassen, welche eindeutig, stetig und gerade ist auf einer ringförmigen Fläche, die begrenzt ist von zwei concentrischen um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreisen. Man gelangt dabei, wie leicht zu übersehen ist, zu folgendem Resultat:

IX. Satz. *Sind $R^0 < R$ zwei reelle Constante, und repräsentirt $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange*

$$R^0 < \text{mod } z < R$$

bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren

$$(55) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n [J^n(z)]^2 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n \Omega^n(z),$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung

$$R^0 < \text{mod } z < R$$

entsprechenden Werth von z . — Die constanten Coefficienten μ_n und λ_n dieser Entwicklung finden ihre Bestimmung durch die Formeln:

$$\mu_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z) \Omega^n(z) z dz,$$

$$\lambda_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z) [J^n(z)]^2 z dz,$$

die Integration positiv hinerstreckt längs irgend einer Kreisl Linie (r) , deren Mittelpunkt in $z=0$ liegt, und deren Radius r der Bedingung entspricht: $R^0 < r < R$. Das hier auftretende ε_n ist eine Zahl, welche für $n=0$ den Werth 1, für $n>0$ den Werth 2 besitzt.

§ 6.

Relationen für die Quadrate der Bessel'schen Functionen.

Die Bessel'schen Functionen $J^n(z)$ besitzen bekanntlich folgende Eigenschaften:

$$\frac{dJ^0(z)}{dz} = -J^1(z), \quad 2 \frac{dJ^n(z)}{dz} = J^{n-1}(z) - J^{n+1}(z),$$

$$\frac{2n}{z} J^n(z) = J^{n-1}(z) + J^{n+1}(z),$$

wo n eine der Zahlen 1, 2, 3, . . . ∞ repräsentirt (vergl. meine Schrift über die Bessel'schen Functionen Seite 20 und 22). Aus diesen Formeln ergibt sich durch Multiplication, wie schon Lommel bemerkt hat, die merkwürdige Relation:

$$(56) \quad \frac{2n}{z} \frac{d[J^n(z)]^2}{dz} = [J^{n-1}(z)]^2 - [J^{n+1}(z)]^2,$$

welche, wenn zur Abkürzung Q^n an Stelle von $[J^n(z)]^2$ gesetzt wird, auch so dargestellt werden kann:

$$(57) \quad \frac{2n}{z} \frac{dQ^n}{dz} = Q^{n-1} - Q^{n+1}.$$

Um eine analoge Formel für den hier ausgeschlossenen Fall $n=0$ zu ermitteln, bemerken wir, dass die erste der in (10_b) erhaltenen Entwicklungen, bei Anwendung der eben eingeführten Abkürzung, sich so darstellt:

$$1 = Q^0 + 2Q^1 + 2Q^2 + 2Q^3 + 2Q^4 + \dots$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach z :

$$\frac{1}{z} \frac{dQ^0}{dz} = -\frac{2}{z} \frac{dQ^1}{dz} - \frac{2}{z} \frac{dQ^2}{dz} - \frac{2}{z} \frac{dQ^3}{dz} - \frac{2}{z} \frac{dQ^4}{dz} - \dots$$

und hieraus durch Benutzung der Relation (57):

$$(58) \quad \frac{1}{z} \frac{dQ^0}{dz} = \frac{1}{1} (Q^2 - Q^0) + \frac{1}{3} (Q^4 - Q^2) + \frac{1}{5} (Q^6 - Q^4) + \dots \\ + \frac{1}{2} (Q^3 - Q^1) + \frac{1}{4} (Q^5 - Q^3) + \frac{1}{6} (Q^7 - Q^5) + \dots$$

Diese Gleichung (58), deren rechte Seite leicht etwas besser geordnet werden kann, wird offenbar als diejenige zu betrachten sein, welche im Falle $n=0$ an die Stelle der Gleichung (57) tritt.

Für die zur Abkürzung mit Q^n bezeichneten Functionen $[J^n(z)]^2$ gelten also folgende Formeln:

$$(59_a) \quad \frac{1}{z} \frac{dQ^0}{dz} = -Q^0 + \frac{2}{1 \cdot 3} Q^2 + \frac{2}{3 \cdot 5} Q^4 + \frac{2}{5 \cdot 7} Q^6 + \dots \\ - \frac{1}{2} Q^1 + \frac{2}{2 \cdot 4} Q^3 + \frac{2}{4 \cdot 6} Q^5 + \frac{2}{6 \cdot 8} Q^7 + \dots,$$

$$(59_b) \quad \frac{2n}{z} \frac{dQ^n}{dz} = Q^{n-1} - Q^{n+1},$$

wo in der letztern Formel n eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... ∞ repräsentirt.

§ 7.

Weitere Untersuchung über die Entwicklung des Ausdruckes $(y^2 - x^2)^{-1}$.

Es ist nachgewiesen worden, dass die für diesen Ausdruck gefundene Entwicklung (46) jederzeit gültig ist, falls nur $\text{mod } x < \text{mod } y$ bleibt. Gegenwärtig soll gezeigt werden, dass jene Entwicklung, unbeschadet ihrer Gültigkeit, beliebig oft nach x und y differenzirt werden kann. Um zu diesem Ziele zu gelangen, wird es aber erforderlich sein, die in jener Entwicklung auftretenden Functionen

$$[J^n(z)]^2 \text{ und } \Omega^n(z)$$

zunächst einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Die Functionen $\Omega^n(z)$ besitzen eine gewisse Aehnlichkeit mit den Functionen $O^{2n}(z)$. Setzt man nämlich in der Formel (2) die Zahl $2n$ an Stelle von n , so ergibt sich:

$$(a) \quad z O^{2n}(z) = 1 + \frac{4n^2}{z^2} + \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{z^4} + \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{z^6} + \dots,$$

und andererseits ergibt sich aus (45):

$$(b) \quad z^2 \Omega^n(z) = \vartheta_0 + \vartheta_2 \frac{4n^2}{z^2} + \vartheta_4 \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{z^4} + \vartheta_6 \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{z^6} + \dots,$$

wo zur augenblicklichen Abkürzung ϑ_{2p} gesetzt ist zur Bezeichnung der Grösse:

$$\vartheta_{2p} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{p+1 \cdot p+2 \cdot p+3 \cdots 2p} = \frac{(\Pi p)^2}{\Pi 2p}.$$

Der Ausdruck für $z^2 \Omega^n(z)$ unterscheidet sich also von dem für $z O^{2n}(z)$ nur durch die zu den einzelnen Gliedern, d. i. zu den einzelnen Potenzen von z hinzugetretenen Grössen ϑ .

Nun kann aber der Ausdruck (α) , wie aus (3) hervorgeht, durch eine Umkehrung in der Anordnung seiner Glieder in folgende Form (α') versetzt werden:

$$(\alpha') \quad zO^{\varepsilon_n}(z) = \frac{z^{2n} \Pi 2n}{\varepsilon_{2n} z^{2n}} \left(1 + \frac{z^2}{2 \cdot 4n-2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4n-2 \cdot 4n-4} + \dots \text{fin} \right).$$

Eine *analoge* Form (β') wird daher auch existiren für den Ausdruck (β) . Diese Form (β') kann augenblicklich angegeben werden. Da nämlich (α) in (β) übergeht, sobald man den einzelnen Potenzen z^{-2p} die Factoren ϑ_{2p} beigesellt, so wird durch *dieselbe* Operation auch (α') übergehen müssen in (β') . Somit wird die Form (β') lauten:

$$(\beta') \quad z^2 \Omega^{\varepsilon_n}(z) = \frac{z^{2n} \Pi 2n}{\varepsilon_{2n} z^{2n}} \left(\frac{\vartheta_{2n}}{1} + \frac{\vartheta_{2n-2} \cdot z^2}{2 \cdot 4n-2} + \frac{\vartheta_{2n-4} \cdot z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4n-2 \cdot 4n-4} + \dots \text{fin} \right).$$

In (α') sowohl wie in (β') sind [vergl. die Bemerkungen bei (3)] die Glieder in der Parenthese nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu einer gewissen Stelle hin fortzusetzen. Und zwar ist, bei (α') , wie bei (β') , das *letzte* in die Parenthese noch aufzunehmende Glied dasjenige, welches mit der Potenz z^{2n} behaftet ist.

Da die Zahl ε_{2n} , der ihr beigelegten Bedeutung zufolge, jederzeit identisch ist mit ε_n , so kann die Formel (β') folgendermassen dargestellt werden:

$$\varepsilon_n \Omega^{\varepsilon_n}(z) = \frac{z^{2n} \Pi 2n \cdot \vartheta_{2n}}{z^{2n} + z} \left(1 + \frac{\vartheta_{2n-2}}{2^2 \vartheta_{2n}} \frac{z^2}{1 \cdot 2n-1} + \frac{\vartheta_{2n-4}}{2^4 \vartheta_{2n}} \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n-1 \cdot 2n-2} + \dots \text{fin} \right).$$

Beachtet man daher, dass das *letzte* Glied innerhalb der Parenthese dasjenige ist, welches mit der Potenz z^{2n} behaftet ist, und beachtet man ferner, dass $\vartheta_{2n} = \frac{(\Pi n)^2}{\Pi 2n}$ ist, so ergibt sich schliesslich:

$$(60) \quad \varepsilon_n \Omega^{\varepsilon_n}(z) = \frac{(z^{2n} \Pi n)^2}{z^{2n} + z} \left(1 + \frac{\Theta_2 z^2}{1 \cdot 2n-1} + \frac{\Theta_4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n-1 \cdot 2n-2} + \dots + \frac{\Theta_{2n} z^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \dots n} \right),$$

wo die Coefficienten $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6, \dots, \Theta_{2n}$ folgende Bedeutungen haben:

$$\Theta_2 = \frac{\vartheta_{2n-2}}{2^2 \vartheta_{2n}} = \frac{1}{2^2} \left(\frac{\Pi n-1}{\Pi n} \right)^2 \frac{\Pi 2n}{\Pi 2n-2} = \frac{1}{2^2} \frac{2n \cdot 2n-1}{n^2},$$

$$\Theta_4 = \frac{\vartheta_{2n-4}}{2^4 \vartheta_{2n}} = \frac{1}{2^4} \left(\frac{\Pi n-2}{\Pi n} \right)^2 \frac{\Pi 2n}{\Pi 2n-4} = \frac{1}{2^4} \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{(n \cdot n-1)^2},$$

$$\Theta_6 = \frac{\vartheta_{2n-6}}{2^6 \vartheta_{2n}} = \frac{1}{2^6} \left(\frac{\Pi n-3}{\Pi n} \right)^2 \frac{\Pi 2n}{\Pi 2n-6} = \frac{1}{2^6} \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3 \cdot 2n-4 \cdot 2n-5}{(n \cdot n-1 \cdot n-2)^2},$$

und also einfacher auch so dargestellt werden können:

$$\begin{aligned}
 \Theta_2 &= \frac{2n-1}{2n}, \\
 \Theta_4 &= \frac{2n-1 \cdot 2n-3}{2n \cdot 2n-2}, \\
 \Theta_6 &= \frac{2n-1 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5}{2n \cdot 2n-2 \cdot 2n-4}, \\
 &\dots \\
 \Theta_{2n} &= \frac{2n-1 \cdot 2n-3 \cdot 2n-5 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdot 2n-2 \cdot 2n-4 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}.
 \end{aligned}
 \tag{60a}$$

Hieraus geht sofort hervor, dass die Grössen Θ durchweg *echte* Brüche sind.

Die ganzen rationalen Functionen von $\frac{1}{z}$, welche mit $\Omega^n(z)$ bezeichnet, und durch (45) definit worden sind, nehmen also, wenn man sie nach steigenden, statt nach fallenden Potenzen von z ordnet, die in (60) angegebene Gestalt an, wo unter $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6, \dots, \Theta_{2n}$ die in (60a) angegebenen *echten* Brüche zu verstehen sind, und unter n eine Zahl, welche für $n=0$ den Werth 1, für $n>0$ den Werth 2 besitzt.

Was andererseits die Functionen $[J^n(z)]^2$ anbelangt, so ist nach (5):

$$[J^n(z)]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin \omega) d\omega.$$

Substituirt man hier für $J^{2n}(2z \sin \omega)$ die aus (1) sich ergebende unendliche Reihe:

$$J^{2n}(2z \sin \omega) = \frac{(2z \sin \omega)^{2n}}{2^{2n} \pi 2n} \left(1 - \frac{(2z \sin \omega)^2}{2 \cdot 4n+2} + \frac{(2z \sin \omega)^4}{2 \cdot 4 \cdot 4n+2 \cdot 4n+4} - \dots \right),$$

so lässt sich die Integration nach ω mit Leichtigkeit ausführen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2 \sin \omega)^{2p} d\omega = \frac{\pi 2p}{(\pi p)^2} = \tau_{2p},$$

so ergibt sich:

$$[J^n(z)]^2 = \frac{z^{2n}}{2^{2n} \pi 2n} \left(\tau_{2n} - \tau_{2n+2} \frac{z^2}{2 \cdot 4n+2} + \tau_{2n+4} \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4n+2 \cdot 4n+4} - \dots \right),$$

Hieraus aber folgt nach einfachen Reductionen:

$$(61) [J^n(z)]^2 = \frac{z^{2n}}{(2^n \pi n)^2} \left(1 - \frac{\tau_2 z^2}{1 \cdot 2n+1} + \frac{\tau_4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n+1 \cdot 2n+2} - \dots \right),$$

wo $\tau_2, \tau_4, \tau_6, \dots$ die Werthe besitzen:

$$\begin{aligned}
 \tau_2 &= \frac{2n+1}{2n+2}, \\
 \tau_4 &= \frac{2n+1 \cdot 2n+3}{2n+2 \cdot 2n+4}, \\
 \tau_6 &= \frac{2n+1 \cdot 2n+3 \cdot 2n+5}{2n+2 \cdot 2n+4 \cdot 2n+6}, \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{61a}$$

Zwischen der vorhin für $\Omega^*(z)$ erhaltenen Formel (60), und zwischen der hier für $[J^*(z)]^2$ sich ergebenden Formel (61) findet, obwohl die erstere einen geschlossenen Ausdruck, die letztere aber eine unendliche Reihe darbietet, doch der äusseren Gestaltung nach eine gewisse Ähnlichkeit statt. Ebenso übrigens, wie bei jener Formel $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6, \dots$, ebenso sind auch bei dieser die Coefficienten $T_2, T_4, T_6, \dots$ lauter üchte Brüche.

Sind x und y zwei beliebig gegebene complexe Grössen, also (geometrisch ausgedrückt) irgend zwei Punkte in der z -Ebene, so haben die für diese Grössen gebildeten Functionen $[J^*(x)]^2$ und $\Omega^*(y)$, nach (60) und (61), folgende Werthe:

$$[J^*(x)]^2 = \frac{x^{2n}}{N^2} \left(1 - \frac{T_2 x^2}{1 \cdot 2n+1} + \frac{T_4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n+1 \cdot 2n+2} - \dots \text{inf.} \right),$$

$$\varepsilon_n \Omega^*(y) = \frac{N^2}{y^{2n+2}} \left(1 + \frac{\Theta_2 y^2}{1 \cdot 2n-1} + \frac{\Theta_4 y^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n-1 \cdot 2n-2} + \dots \text{fin.} \right),$$

wo $N = 2^n \Pi n$ ist. Hieraus ergibt sich, weil der Modul einer Summe kleiner als die Summe der Moduln ist:

$$\text{mod } [J^*(x)]^2 < \frac{a^{2n}}{N^2} \left(1 + \frac{T_2 a^2}{1 \cdot 2n+1} + \frac{T_4 a^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n+1 \cdot 2n+2} + \dots \text{inf.} \right),$$

$$\text{mod } \varepsilon_n \Omega^*(y) < \frac{N^2}{b^{2n+2}} \left(1 + \frac{\Theta_2 b^2}{1 \cdot 2n-1} + \frac{\Theta_4 b^4}{1 \cdot 2 \cdot 2n-1 \cdot 2n-2} + \dots \text{fin.} \right),$$

wo $a = \text{mod } x$ und $b = \text{mod } y$ sein soll. Die rechten Seiten dieser Formeln werden, wenn man die in den einzelnen Gliedern vorhandenen Nenner verkleinert, und zugleich die üchten Brüche $T_2, T_4, \dots, \Theta_2, \Theta_4, \dots$ fortlässt, noch weiter vergrössert werden. Um so mehr also wird:

$$\text{mod } [J^*(x)]^2 < \frac{a^{2n}}{N^2} \left(1 + \frac{a^2}{1} + \frac{a^4}{1 \cdot 2} + \frac{a^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{inf.} \right),$$

$$\text{mod } \varepsilon_n \Omega^*(y) < \frac{N^2}{b^{2n+2}} \left(1 + \frac{b^2}{1} + \frac{b^4}{1 \cdot 2} + \frac{b^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{fin.} \right).$$

In der zweiten Formel endlich wird gegenwärtig der Ausdruck rechts noch weiter vergrössert werden, wenn man seine Glieder nicht abbrechen, sondern ins Unendliche fortlaufen lässt. Somit ergibt sich:

$$(62) \quad \text{mod } [J^*(x)]^2 < \frac{a^{2n}}{N^2} e^{aa},$$

$$\text{mod } \varepsilon_n \Omega^*(y) < \frac{N^2}{b^{2n+2}} e^{bb}.$$

Setzt man nun fest, dass die Variablen x, y der Bedingung $a < b$ d. i. $\text{mod } x < \text{mod } y$ unterworfen sein sollen, so lässt sich mit Hilfe dieser Formeln (62) leicht nachweisen (was die nähere Methode dieses Nachweises anbelangt, so verweise ich auf meine Schrift über die Bessel'schen Functionen Seite 27—32], dass die beiden Reihen

$$(63) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n [J^n(x)]^2 \Omega^n(y),$$

$$(64) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{d^n [J^n(x)]^2}{dx^n} \frac{d^n \Omega^n(y)}{dy^n}$$

convergent, ihre Werthe also stetige Functionen von x, y sind. Hieraus folgt dann weiter, dass die letztere dieser beiden stetigen Functionen aus der erstern abgeleitet werden durch $(p+q)$ malige Differentiation.

Die Reihe (63) ist aber, nach (46), identisch mit

$$\frac{1}{y^2 - x^2};$$

folglich muss die Reihe (64) identisch sein mit

$$\frac{d^{p+q}}{dx^p dy^q} \left(\frac{1}{y^2 - x^2} \right).$$

Somit gelangen wir nun zu folgendem Resultat:

X. Satz. Ebenso wie die in (46) gefundene Entwicklung

$$(65) \quad \frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n [J^n(x)]^2 \Omega^n(y)$$

gültig ist für jedes beliebige der Bedingung $\text{mod } x < \text{mod } y$ entsprechende Werthsystem von x, y ; ebenso gilt Gleiches auch von allen denjenigen Entwicklungen, die aus dieser hervorgehen durch (beliebig oft wiederholtes) Differenziren nach x und y .

Hieraus folgt sofort, dass die in (54) und (55) erhaltenen Entwicklungen, ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeit-Gebietes, beliebig oft nach x differenzirt werden können.

Setzt man zur Abkürzung

$$(66) \quad [J^n(x)]^2 = Q^n, \quad \Omega^n(y) = \Omega^n,$$

so lässt sich die Entwicklung (65) folgendermassen darstellen:

$$(67) \quad \frac{1}{y^2 - x^2} = Q^0 \Omega^0 + 2 Q^1 \Omega^1 + 2 Q^2 \Omega^2 + 2 Q^3 \Omega^3 + \dots$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach x :

$$\frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{\Omega^0}{x} \frac{dQ^0}{dx} + \frac{2\Omega^1}{x} \frac{dQ^1}{dx} + \frac{2\Omega^2}{x} \frac{dQ^2}{dx} + \frac{2\Omega^3}{x} \frac{dQ^3}{dx} + \dots,$$

oder, wenn man die hier auftretenden $\frac{dQ}{dx}$ mit Hülfe der Formeln (59a, b) durch die Q selber ausdrückt:

$$(68) \quad \begin{aligned} \frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = & \Omega^0 \left(-Q^0 + \frac{2}{1 \cdot 3} Q^2 + \frac{2}{3 \cdot 5} Q^4 + \frac{2}{5 \cdot 7} Q^6 + \dots \right) \\ & + \Omega^1 \left(-\frac{1}{2} Q^1 + \frac{2}{2 \cdot 4} Q^3 + \frac{2}{4 \cdot 6} Q^5 + \frac{2}{6 \cdot 8} Q^7 + \dots \right) \\ & + \Omega^2 \frac{Q^0 - Q^2}{1} + \Omega^3 \frac{Q^2 - Q^4}{3} + \Omega^5 \frac{Q^4 - Q^6}{5} + \dots \\ & + \Omega^2 \frac{Q^1 - Q^3}{2} + \Omega^4 \frac{Q^3 - Q^5}{4} + \Omega^6 \frac{Q^5 - Q^7}{6} + \dots \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus (67) durch Differentiation nach y :

$$(69) \quad \frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = -\frac{Q^0 d\Omega^0}{y dy} - \frac{2Q^1 d\Omega^1}{y dy} - \frac{2Q^2 d\Omega^2}{y dy} - \frac{2Q^3 d\Omega^3}{y dy} - \dots$$

Aus (68) und (69) aber ergeben sich, weil die in die einzelnen Q multiplicirten Ausdrücke in beiden Formeln *dieselben* sein müssen, folgende Relationen:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} \frac{d\Omega^0}{dy} &= \Omega^1 - \Omega^0 \\ -\frac{2}{y} \frac{d\Omega^1}{dy} &= \frac{\Omega^2}{2} - \frac{\Omega^0}{2}, \\ -\frac{2}{y} \frac{d\Omega^2}{dy} &= \frac{\Omega^3}{3} - \frac{\Omega^1}{1} + \frac{2\Omega^0}{1 \cdot 3}, \\ -\frac{2}{y} \frac{d\Omega^3}{dy} &= \frac{\Omega^4}{4} - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{2\Omega^0}{2 \cdot 4}, \\ &\dots \dots \dots \\ -\frac{2}{y} \frac{d\Omega^n}{dy} &= \frac{\Omega^{n+1}}{n+1} - \frac{\Omega^{n-1}}{n-1} + \frac{2\Omega^0}{n-1 \cdot n+1}. \end{aligned}$$

Diese Relationen können, wie man sieht, mit Ausnahme der beiden ersten, welche isolirt dastehen, zusammengefasst werden durch eine einzige Formel. Substituirt man statt y den Buchstaben z , so ergibt sich also, dass für die Functionen $\Omega^*(z)$ folgende Formeln gelten:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{z} \frac{d\Omega^0(z)}{dz} &= 2\Omega^1(z) - 2\Omega^0(z), \\ (70) \quad -\frac{2}{z} \frac{d\Omega^1(z)}{dz} &= \frac{\Omega^2(z)}{2} - \frac{\Omega^0(z)}{2}, \\ -\frac{2}{z} \frac{d\Omega^n(z)}{dz} &= \frac{\Omega^{n+1}(z)}{n+1} - \frac{\Omega^{n-1}(z)}{n-1} + \frac{2\Omega^0(z)}{(n+1)(n-1)}, \end{aligned}$$

wo in der letzten Formel n eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, ... ∞ repräsentirt.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass das in (54) über die Entwickelbarkeit einer gegebenen Function $f(z)$ nach den $[J^n(z)]^2$ erhaltene Resultat, durch Benutzung des zuletzt gefundenen Satzes (66), bedeutend verallgemeinert werden kann. Denn mit Hilfe dieses Satzes lässt sich offenbar nachweisen, dass jede gerade Function $f(z)$ in demselben Umfange, wie nach den $[J^n(z)]^2$, auch nach den $\frac{d^p[J^n(z)]^2}{dz^p}$ entwickelbar ist, wo p eine beliebig gegebene gerade Zahl sein kann; und dass ferner Gleiches auch gilt von jeder ungeraden Function $f(z)$, nur mit dem Unterschiede, dass in diesem Fall unter p eine beliebig gegebene ungerade Zahl zu verstehen ist.

Denkt man sich, um auf den Specialfall $p = 1$ etwas näher einzugehen, um den Punkt $z = 0$ einen Kreis beschrieben mit dem Radius R , und eine Function $f(z)$ gegeben, welche eindeutig, stetig und ungerade ist, solange $\text{mod } z < R$ bleibt, so wird die Function

$$(71) \quad \varphi(z) = \int_0^z f(z) dz$$

(die Integrationscurve beschränkt gedacht auf das Innere des genannten Kreises) eindeutig, stetig und *gerade* sein, solange $\text{mod } z < R$ bleibt, und folglich entwickelbar sein in eine nach den $[J^n(z)]^2$ fortschreitende Reihe

$$(72) \quad \varphi(z) = \alpha_0 [J^0]^2 + \alpha_1 [J^1]^2 + \alpha_2 [J^2]^2 + \dots$$

Und zwar wird diese Reihe, in welcher zur Abkürzung J^n statt $J^n(z)$ gesetzt ist, gültig sein für jeden der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Werth von z . Diese Entwicklung (72) kann [zufolge des Satzes (66)], unbeschadet ihres Gültigkeit-Gebietes, nach z differenziert werden. Somit erhalten wir die Formel:

$$(73) \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = 2\alpha_0 J^0 \frac{dJ^0}{dz} + 2\alpha_1 J^1 \frac{dJ^1}{dz} + 2\alpha_2 J^2 \frac{dJ^2}{dz} + \dots,$$

welche wiederum gültig ist für jedes der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechende z . Nach (71) ist aber $\frac{d\varphi(z)}{dz} = f(z)$, und andererseits ist nach bekannten Eigenschaften der Bessel'schen Functionen:

$$(73_a) \quad \frac{dJ^0}{dz} = -J^1,$$

$$(73_b) \quad \frac{dJ^n}{dz} = \frac{J^{n-1} + J^{n+1}}{2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

Somit nimmt die Entwicklung (73) folgende Gestalt an:

$$(74) \quad f(z) = -2\alpha_0 J^0 J^1 + \alpha_1 J^1 (J^0 - J^2) + \alpha_2 J^2 (J^3 - J^4) + \dots,$$

oder (was dasselbe ist) folgende:

$$(75) \quad f(z) = (\alpha_1 - 2\alpha_0) J^0 J^1 + (\alpha_2 - \alpha_1) J^1 J^2 + (\alpha_3 - \alpha_2) J^2 J^3 + \dots$$

Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

XL Satz. *Versteht man unter $f(z)$ eine beliebig gegebene Function, welche eindeutig, stetig und ungerade ist, solange $\text{mod } z < R$ bleibt, so wird dieselbe immer darstellbar sein durch eine nach den Producten*

$$(76) \quad J^0(z) J^1(z), \quad J^1(z) J^2(z), \quad J^2(z) J^3(z), \dots$$

fortschreitende Entwicklung; und zwar wird diese Entwicklung gültig sein für jeden der Bedingung $\text{mod } z < R$ entsprechenden Werth von z .

Solche nach den Producten (76) fortschreitende Entwicklungen können z. B. leicht erhalten werden für die ungeraden Potenzen:

$$z, z^3, z^5, z^7, z^9, \dots;$$

und zwar wird man zu denselben am einfachsten dadurch gelangen, dass man die in (10_b) für gerade Potenzen gefundenen Entwicklungen nach z differenziert. Diese Entwicklungen der ungeraden Potenzen sollen sogleich [in (78)] näher angegeben werden.

§ 8.

Die Entwicklung ungerader Functionen.

Um die zuletzt besprochenen Entwicklungen in möglichst übersichtlicher Gestaltung zu erhalten, mag [mit Rücksicht auf die Relationen (73_b)] gesetzt werden:

$$(77) \quad \Pi^q(z) = \frac{d[J^q(z)]^2}{dz} = J^q(z) (J^{q-1}(z) - J^{q+1}(z)),$$

$$q = 1, 2, 3, \dots \infty.$$

Aus den Formeln (10_b) folgt alsdann durch Differentiation nach z und mit Rücksicht auf (73_a) sofort:

$$(78) \quad \begin{aligned} 0 &= -J^0(z) J^1(z) + \Sigma \Pi^q(z), \\ \frac{2}{2} z &= \frac{1}{2} \Sigma 4 q^2 \Pi^q(z), \\ \frac{4}{2} z^3 &= \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) \Pi^q(z), \\ \frac{6}{2} z^5 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2) \Pi^q(z), \\ \frac{8}{2} z^7 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \Sigma 4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2) (4 q^2 - 6^2) \Pi^q(z), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

wo die Summationen Σ hinstreckt sind über $q = 1, 2, 3, \dots \infty$.

Sind nun x, y zwei beliebig gegebene, der Bedingung $\text{mod } x < \text{mod } y$ unterworfenen complexe Variable, so ist identisch:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} = \frac{x}{y^2} + \frac{x^3}{y^4} + \frac{x^5}{y^6} + \frac{x^7}{y^8} + \dots$$

Substituirt man hier auf der rechten Seite für die Potenzen $x, x^3, x^5, x^7, \dots$ die aus (78), bei Umänderung von z in x , sich ergebenden Entwicklungen, so erhält man augenblicklich:

$$(79) \quad \frac{x}{y^2 - x^2} = \sum_{q=1}^{\infty} 2 P^q(y) \Pi^q(x),$$

wo $P^q(y)$ folgende ganze rationale Function von y^{-2} repräsentirt:

$$(80) \quad P^q(y) = \frac{1}{2} \frac{4 q^2}{2 y^2} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} \frac{4 q^2 (4 q^2 - 2^2)}{4 y^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{4 q^2 (4 q^2 - 2^2) (4 q^2 - 4^2)}{6 y^6} + \dots$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von Π^q (77) kann die Entwicklung (79) angesehen werden als eine nach den Produkten

$$J^0(x) J^1(x), \quad J^1(x) J^2(x), \quad J^2(x) J^3(x), \quad \dots$$

fortschreitende Entwicklung. Hieraus aber folgt [Satz (76)] sofort, dass diese Entwicklung gültig ist für sämtliche Werthsysteme von x, y , welche der Bedingung $\text{mod } x < \text{mod } y$ Genüge leisten.

In (35) war für eine gerade Function $f(z)$ die Formel gefunden:

$$(81) \quad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) \cdot z dz}{z^2 - c^2},$$

die Integration positiv hinstreckt über eine um den Punkt $z=0$ beschriebene und den Punkt $z=c$ umschliessende Kreisperipherie.

Eine ähnliche Formel lässt sich mit Leichtigkeit herleiten für eine *ungerade* Function $f(z)$, vorausgesetzt, dass dieselbe im Uebrigen denselben Bedingungen Genüge leistet, welche zur Gültigkeit der Formel (81) erforderlich sind. Man findet nämlich für eine solche Function die Formel:

$$(82) \quad f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) \cdot c dz}{z^2 - c^2}$$

die Integration wiederum positiv hinstreckt über eine um den Punkt $z=0$ beschriebene und den Punkt $z=c$ umschliessende Kreisperipherie. Nun ist nach (79):

$$(83) \quad \frac{c}{z^2 - c^2} = \sum_{q=1}^{q=\infty} 2 P^q(z) \Pi^q(c).$$

Somit folgt aus (82):

$$(84) \quad f(c) = \sum_{q=1}^{q=\infty} \lambda_q \Pi^q(c),$$

wo die Coefficienten λ_q die Werthe besitzen:

$$(85) \quad \lambda_q = \frac{1}{\pi i} \int f(z) P^q(z) dz,$$

die Integration wiederum positiv hinstreckt über die genannte Kreisperipherie.

Durch diese und ähnliche Betrachtungen ergibt sich, dass eine Function, welche auf einer *Kreisfläche* eindeutig, stetig und *ungerade* bleibt, immer entwickelbar ist in eine nach den Functionen Π^q fortschreitende Reihe, und dass andererseits eine Function, welche eindeutig, stetig und *ungerade* bleibt auf einer von zwei concentrischen Kreisen begrenzten *ringförmigen Fläche*, immer entwickelbar ist in eine nach den Π^q und P^q fortschreitende Doppelreihe. Dabei wird immer vorausgesetzt, dass die Mittelpunkte der genannten Kreise in $z=0$ liegen.

Kurz, es ergeben sich für eine *ungerade* Function zwei Sätze, welche vollkommen analog sind mit denjenigen, die früher [in (54) und (55)] für eine *gerade* Function gefunden sind. Und gleichzeitig ergeben sich auch analoge allgemeine Methoden zur Bestimmung der in diesen Entwicklungen einer *ungeraden* Function auftretenden constanten Coefficienten.

Vor etwa einem Jahre hat bekanntlich Heine eine Untersuchung über die Bessel'schen Functionen J^* veröffentlicht (Borchardt's

Journal, Bd. 69, S. 128), welche schon deswegen im höchsten Grade werthvoll ist, weil erst durch sie *der zwischen den J^n und zwischen den Kugelfunctionen P^n stattfindende Zusammenhang* in deutlicher und vollständiger Weise aufgedeckt wurde. Bei dieser Gelegenheit bemerkt Heine mit vollem Recht, dass die Functionen J^n nicht als Bessel'sche, sondern als Fourier-Bessel'sche Functionen, oder auch wohl kürzer als *Cylinderfunctionen* zu bezeichnen sind. Mit Rücksicht hierauf ist die Ueberschrift des vorliegenden Aufsatzes gewählt. Im Texte selber aber habe ich mir erlaubt, an meiner früheren Bezeichnungsweise festzuhalten, um nicht durch Gebrauch des Namens Fourier-Bessel'sche Functionen eine beschwerliche Weitläufigkeit, oder durch Gebrauch des Namens *Cylinderfunctionen* eine unangenehme Discontinuität mit meinen früheren Arbeiten hervorzurufen.

Leipzig, November 1869.