Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate.

Von

EDMUND LANDAU in Berlin.

Eine binäre Form mit reellen Koeffizienten, d. h. eine ganze rationale homogene Funktion zweier Variablen $f(x, y)$ mit reellen Koeffizienten heißt definit, wenn für alle reellen Wertepaare x, y .

$$f(x, y) \geq 0$$

ist. Bekanntlich*) läßt sich alsdann $f(x, y)$ als Summe von Quadraten ganzer rationaler homogener Funktionen von x und y mit reellen Koeffizienten darstellen. Denn die Gleichung

$$f(u, 1) = 0$$

hat für definites $f(x, y)$ keine reelle Wurzel in ungerader Vielfachheit; $f(u, 1)$ hat daher nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Gestalt**)

$$c \prod_{\lambda=1}^r (u - \gamma_{\lambda})^2 \prod_{\lambda=1}^s (u - \alpha_{\lambda} - \beta_{\lambda} i) (u - \alpha_{\lambda} + \beta_{\lambda} i) = c \prod_{\lambda=1}^r (u - \gamma_{\lambda})^2 \prod_{\lambda=1}^s ((u - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2),$$

wo die $\alpha_{\lambda}, \beta_{\lambda}, \gamma_{\lambda}$ reell sind und $c > 0$; dies ergibt

$$f(x, y) = (\sqrt{c})^2 y^{2t} \prod_{\lambda=1}^r (x - \gamma_{\lambda} y)^2 \prod_{\lambda=1}^s ((x - \alpha_{\lambda} y)^2 + \beta_{\lambda}^2 y^2),$$

(wo $t \geq 0$), also durch Ausmultiplizieren eine Quadratsumme der verlangten Art:

$$(1) \quad f(x, y) = \sum_{\nu=1}^m F_{\nu}^2(x, y).$$

Bei dieser Darstellung (1) einer definiten binären Form $f(x, y)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, einer definiten ganzen rationalen Funktion $f(x)$ einer Variablen als Quadratsumme sind aber, auch wenn die Koeffizienten von f rationale Zahlen sind, die Koeffizienten in den Basen der

*) Vergl. Hilbert, „Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten“, Mathematische Annalen, Bd. 32, 1888, S. 342.

**) Es kann dabei $r=0$ oder $s=0$, d. h. das entsprechende Produkt $= 1$ sein.

Quadrate im allgemeinen irrational, und es entsteht die Frage, ob eine definite ganze rationale Funktion

$$f(x) = c_0 x^{2k} + c_1 x^{2k-1} + \dots + c_{2k}$$

mit rationalen Koeffizienten durch Quadrate ganzer rationaler Funktionen mit rationalen Koeffizienten darstellbar ist, also in einer Gestalt, welche, ohne das Gebiet der rationalen Zahlen zu verlassen, den definiten Charakter der Funktion in Evidenz setzt.

Diese Frage ist zuerst bei der Untersuchung der Möglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen von Herrn Hilbert*) gestellt und in Angriff genommen worden; er hat auf Grund seiner tiefgehenden Theorie der relativquadratischen Zahlkörper bewiesen, daß tatsächlich $f(x)$ als Quotient zweier Summen von Quadraten der verlangten Art darstellbar ist:

$$f(x) = \frac{\sum_{v=1}^q \varphi_v^2(x)}{\sum_{v=1}^s \psi_v^2(x)}.$$

Dies bildet den ersten Satz über die Darstellung von Formen höherer als zweiter Ordnung durch Quadrate *unter Zugrundelegung eines Körpers*, dem die gegebenen Koeffizienten angehören und die Koeffizienten der gesuchten Funktionen angehören sollen. Weitere Resultate dieser Art liegen noch nicht vor; auch macht Herr Hilbert in seinem auf dem internationalen Mathematikerkongress zu Paris im Jahre 1900 gehaltenen Vortrage**) ausdrücklich auf diese Probleme aufmerksam.

Im Folgenden beschäftige ich mich, nachdem ich im § 1 einen einfachen Hilfssatz vorangeschickt habe, in § 2 mit dem natürlichen Rationalitätsbereich, dem Körper der rationalen Zahlen. Nachdem Herr Hilbert die Darstellbarkeit von $f(x)$ als Quotient zweier Quadratsummen nachgewiesen hat, drängt sich die Frage auf, ob es nicht doch möglich ist, $f(x)$ als Summe von Quadraten darzustellen***); ich werde nachweisen, daß tatsächlich eine solche Darstellung

*) „Grundlagen der Geometrie“, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmales in Göttingen, Leipzig, 1899, S. 82—85.

**) „Mathematische Probleme“, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1900, S. 284—285; Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe, Bd. 1, 1901, S. 224.

***) Daß es überhaupt definite Formen gibt, welche nicht als Quadratsumme darstellbar sind, (sogar unter Zulassung beliebiger reeller Koeffizienten) ist zuerst von Herrn Minkowski vermutet worden (vergl. die erste These am Schlusse seiner Dissertation „Untersuchungen über quadratische Formen“, Königsberg, 1885) und wurde von Herrn Hilbert (l. c. — s. Anm. 1 auf S. 53 — S. 344—350) bei den ternären Formen,

$$(2) \quad f(x) = \sum_{v=1}^m F_v^2(x)$$

mit rationalen Koeffizienten stets existiert.

Im § 3 behandle ich den Fall eines beliebigen reellen Körpers Ω . Damit jede definite Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades $f(x)$ in Ω als Quadratsumme (2) mit Koeffizienten in Ω dargestellt werden kann, ist offenbar notwendig, daß der Satz schon für Funktionen 0^{ten} Grades wahr ist, d. h. der Körper Ω muß so beschaffen sein, daß seine positiven Zahlen als Summe von Quadraten von Zahlen in Ω darstellbar sind. Ich werde nun beweisen, daß dies auch hinreichend ist, d. h. daß für so beschaffene Körper jede definite Funktion $f(x)$ in Ω als Quadratsumme mit Koeffizienten in Ω darstellbar ist; hierin ist der in § 2 für den natürlichen Rationalitätsbereich bewiesene Satz als Spezialfall enthalten. Endlich wird sich für den Fall eines ganz beliebigen reellen Körpers Ω ergeben, daß jede definite Funktion $f(x)$ mit Koeffizienten in Ω in der Gestalt

$$(3) \quad f(x) = \sum_{v=1}^m e_v F_v^2(x)$$

darstellbar ist, wo die Koeffizienten in den F_v Zahlen in Ω und die e_v positive Zahlen in Ω sind. Auch die Darstellung (3) setzt, ohne den Körper zu verlassen, den definiten Charakter der Funktion $f(x)$ in Evidenz.

Übrigens werden zum Nachweise dieser Sätze im Folgenden nur algebraische Hilfsmittel einfachster Art verwendet.

§ 1.

Hilfssatz: Ist

$$h(x) = a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \dots + a_{2k}$$

eine Funktion mit beliebigen reellen Koeffizienten, deren Wert für jedes reelle x positiv*) ausfällt und deren Grad genau der $2k^{\text{te}}$ ist (so daß $a_0 > 0$ angenommen wird), so läßt sich eine positive Größe δ derart finden, daß für alle den Ungleichungen

$$|d_0| < \delta, |d_1| < \delta, \dots, |d_{2k}| < \delta$$

genügenden Systeme reeller Zahlen $d_0, d_1, \dots, d_{2k}$ die Funktion

d. h. den ganzen rationalen Funktionen zweier nicht homogener Variablen nachgewiesen. Später hat Herr Hilbert („Über ternäre definite Formen“, Acta mathematica, Bd. 17, 1893, S. 169—197) gezeigt, daß die definiten ternären Formen als Quotient zweier Quadratsummen (mit reellen Koeffizienten in den Basen) stets darstellbar sind.

*) Wenn $h(x)$ für reelle x des Wertes 0 fähig ist, gilt die Behauptung offenbar nicht.

$$\begin{aligned} H(x) &= h(x) + d_0 x^{2k} + d_1 x^{2k-1} + \dots + d_{2k} \\ &= (a_0 + d_0) x^{2k} + (a_1 + d_1) x^{2k-1} + \dots + (a_{2k} + d_{2k}) \end{aligned}$$

definit ist.

Beweis: Da $h(x)$ für kein reelles x verschwindet, liegt $h(x)$ für alle reellen x oberhalb einer positiven Schranke p ; es bezeichne a den größten der absoluten Beträge

$$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{2k-1}|, |a_{2k}| = a_{2k},$$

und es werde δ gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$\frac{a}{\frac{2a}{a_0} + 1} \quad \text{und} \quad \frac{2a}{a_0} \frac{p}{\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)^{2k+1}}$$

gesetzt; dann ist

$$1) \text{ für } |x| \leq \frac{2a}{a_0} + 1 \quad (x \text{ reell})$$

$$\begin{aligned} H(x) &\geq h(x) - |d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k-1} x + d_{2k}| > p - \delta(|x|^{2k} + \dots + |x| + 1) \\ &\geq p - \delta \left(\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)^{2k} + \dots + \left(\frac{2a}{a_0} + 1\right) + 1 \right) = p - \delta \frac{\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)^{2k+1} - 1}{\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right) - 1} \\ &> p - \delta \frac{\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)^{2k+1}}{\frac{2a}{a_0}} \geq p - \frac{2a}{a_0} \frac{p}{\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)^{2k+1}} \frac{\left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)^{2k+1}}{\frac{2a}{a_0}} \\ &= p - p = 0, \end{aligned}$$

und

$$2) \text{ für } |x| > \frac{2a}{a_0} + 1 \quad (x \text{ reell})$$

$$\begin{aligned} H(x) &\geq h(x) - |d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k-1} x + d_{2k}| \\ &\geq a_0 x^{2k} - |a_1 x^{2k-1} + \dots + a_{2k-1} x + a_{2k}| - |d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k-1} x + d_{2k}| \\ &\geq a_0 x^{2k} - a(|x|^{2k-1} + \dots + |x| + 1) - \delta(|x|^{2k} + \dots + |x| + 1) \\ &= a_0 x^{2k} - a \frac{x^{2k} - 1}{|x| - 1} - \delta \frac{|x|^{2k+1} - 1}{|x| - 1} \\ &> a_0 x^{2k} - a \frac{x^{2k}}{|x| - 1} - \delta \frac{|x|^{2k+1}}{|x| - 1} > a_0 x^{2k} - a \frac{x^{2k}}{\frac{2a}{a_0}} - x^{2k} \frac{\delta |x|}{|x| - 1} \\ &= x^{2k} \left(a_0 - \frac{a_0}{2} - \frac{\delta}{1 - \frac{1}{|x|}} \right) \geq x^{2k} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{\delta}{1 - \frac{1}{\frac{2a}{a_0} + 1}} \right) \\ &= x^{2k} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{\delta \left(\frac{2a}{a_0} + 1\right)}{\frac{2a}{a_0}} \right) \geq x^{2k} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{a}{\frac{2a}{a_0} + 1} \cdot \frac{\frac{2a}{a_0} + 1}{\frac{2a}{a_0}} \right) \\ &= x^{2k} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_0}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Für alle reellen x ist also

$$H(x) > 0.$$

Die Existenz einer Größe δ von der verlangten Beschaffenheit ist einfach so gezeigt worden: erst wurde ein $\xi \left(= \frac{2a}{a_0} + 1 \right)$ bestimmt, sodaß für $|x| > \xi$ die Hälfte des ersten Gliedes in $h(x)$ den absoluten Betrag der Summe der übrigen Glieder überwiegt, und dann wurde δ so gewählt, daß für $|x| > \xi$ die hinzugefügte Funktion

$$d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k}$$

dem absoluten Werte nach auch kleiner als $\frac{1}{2} a_0 x^{2k}$ ist, und daß außerdem für $|x| < \xi$

$$|d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k}| < p < h(x)$$

ist. Stets ist alsdann

$$H(x) = h(x) + d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k} > 0.$$

§ 2.

Eine positive Rationalzahl $\frac{a}{b}$ ist als Quadratsumme darstellbar, z. B. als Summe von ab Quadraten folgendermassen:

$$\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \frac{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{b}\right)^2;$$

übrigens genügen bekanntlich zur Darstellung einer ganzen Zahl, also auch einer rationalen Zahl vier Quadrate, wie zuerst Lagrange bewiesen hat.

Auch eine definite quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a > 0, b^2 - 4ac \leq 0)$$

ist als Quadratsumme im Körper der rationalen Zahlen darstellbar, weil

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

durch Zerlegung der rationalen Zahlen $a > 0$ und $\frac{4ac - b^2}{4a} \geq 0$ in Quadrate eine Darstellung von $f(x)$ als Summe von (höchstens 8) Quadraten ergibt. Daß übrigens auch bei ganzzahligen a, b, c und der Annahme $a = 1$ in den Koeffizienten der Basen der Quadrate Zahlennenner unvermeidlich sind, lehrt schon das einfache Beispiel der definiten Funktion

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2,$$

welche offenbar nicht als Quadratsumme ganzer ganzzahliger Funktionen darstellbar ist.

Es sei schon bewiesen, daß jede definite ganze rationalzahlige Funktion des Grades $0, 2, 4, \dots, 2k$ als Summe von Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen darstellbar ist, und es soll dasselbe für die Funktion $2k + 2^{\text{ten}}$ Grades

$$(4) \quad f(x) = c_0 x^{2k+2} + c_1 x^{2k+1} + \dots + c_{2k+2}$$

bewiesen werden, wo also $c_0 > 0$ angenommen wird.

Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 \left(x^{2k+2} + \frac{c_1}{c_0} x^{2k+1} + \dots + \frac{c_{2k+2}}{c_0} \right) \\ &= c_0 (x^{2k+2} + C_1 x^{2k+1} + \dots + C_{2k+2}). \end{aligned}$$

Da c_0 eine Quadratsumme ist, genügt es, die Behauptung für

$$\frac{f(x)}{c_0} = x^{2k+2} + C_1 x^{2k+1} + \dots + C_{2k+2}$$

nachzuweisen. Setzt man

$$x = y - \frac{C_1}{2k+2},$$

so geht bekanntlich $\frac{f(x)}{c_0}$ in eine ganze rationalzahlige Funktion $2k + 2^{\text{ten}}$ Grades von y ohne zweites Glied über:

$$\frac{f(x)}{c_0} = y^{2k+2} + c'_2 y^{2k} + c'_3 y^{2k-1} + \dots + c'_{2k+1} y + c'_{2k+2} = g(y).$$

Auch $g(y)$ ist definit, da die reellen x den reellen y entsprechen, und es genügt, die Behauptung für $g(y)$ nachzuweisen; denn aus

$$g(y) = \sum_{\nu=1}^m G_{\nu}^2(y)$$

folgt

$$\frac{f(x)}{c_0} = \sum_{\nu=1}^m G_{\nu}^2 \left(x + \frac{C_1}{2k+2} \right) = \sum_{\nu=1}^m F_{\nu}^2(x).$$

Mit anderen Worten: ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in (4)

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0$$

angenommen werden, also $f(x)$ in der Gestalt

$$f(x) = x^{2k+2} + c_2 x^{2k} + c_3 x^{2k-1} + \dots + c_{2k+2}.$$

Dies ist für das Gelingen des folgenden Beweises von wesentlicher Bedeutung.

Es sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn $f(x)$ für reelle x des Wertes 0 fähig ist, also reelle Wurzeln hat, ist jede in gerader Vielfachheit vorhanden; $f(x)$ ist alsdann von der Gestalt

$$(5) \quad f(x) = f_1^2(x) f_2(x),$$

wo $f_2(x)$ von mehrfachen Wurzeln frei ist und geringeren Grad hat als $f(x)$; der hierbei willkürliche konstante Faktor sei so gewählt, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von x in $f_2(x)$ gleich 1 ist; dann haben $f_1(x)$ und $f_2(x)$ rationale Koeffizienten; denn $f_2(x)$ ist das Produkt der (einzeln rationalzahligen) Faktoren von $f(x)$, welche die 1, 3, 5, ...-fachen Nullstellen von $f(x)$ zu einfachen Wurzeln haben, und $f_1(x)$ ist das Produkt ($\nu=1, 2, 3, 4, \dots$) der $\left[\frac{\nu}{2}\right]^{\text{ten}}$ Potenzen der (rationalzahligen) Faktoren, welche beziehlich für die ν -fachen Nullstellen von $f(x)$ von der ersten Ordnung verschwinden. Da $f_2(x)$ definit ist und höchstens den Grad $2k$ hat, so ist

$$f_2(x) = \sum_{\nu=1}^m G_{\nu}^2(x),$$

also

$$f(x) = f_1^2(x) \sum_{\nu=1}^m G_{\nu}^2(x) = \sum_{\nu=1}^m (f_1(x) G_{\nu}(x))^2 = \sum_{\nu=1}^m F_{\nu}^2(x).$$

2) $f(x)$ habe keine reellen Wurzeln; dann hat es $k+1$ Paare konjugierter komplexer Wurzeln*)

$$\alpha_{\lambda} \pm \beta_{\lambda} i \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k+1),$$

wo die $\beta_{\lambda} > 0$ sind; da das Glied mit x^{2k+1} in $f(x)$ fehlt, ist

$$\sum_{\lambda=1}^{k+1} (\alpha_{\lambda} + \beta_{\lambda} i + \alpha_{\lambda} - \beta_{\lambda} i) = 0,$$

$$(6) \quad \sum_{\lambda=1}^{k+1} \alpha_{\lambda} = 0.$$

Nun ist

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} ((x - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2),$$

was ausmultipliziert die bekannte (nicht rationalzahlige!) Darstellung als Quadratsumme ergibt; von den dabei vorkommenden 2^{k+1} Quadraten hat

eines, $\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2$, den Grad $2k+2$; die Summe der übrigen $2^{k+1} - 1$

Quadrate hat den Grad $2k$ und zwar genau diesen Grad, da in

$$(7) \quad f(x) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2 = \prod_{\lambda=1}^{k+1} ((x - \alpha_{\lambda})^2 + \beta_{\lambda}^2) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2 \\ = a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \dots + a_{2k} = h(x)$$

*) Die Annahme, daß keine Paare mehrfacher komplexer Wurzeln vorhanden sind, wird dabei nicht gemacht; sie wäre im Übrigen erlaubt, da andernfalls $f(x)$ von der Gestalt (5) wäre.

x^{2k} den Koeffizienten

$$a_0 = \sum_{\lambda=1}^{k+1} \beta_{\lambda}^2 > 0$$

erhält.

$h(x)$ ist als Summe von Quadraten eine definite Funktion und für reelle x von 0 verschieden, weil einer der Summanden, nämlich $\prod_{\lambda=1}^{k+1} \beta_{\lambda}^2$, > 0 ist. Auf $h(x)$ wende ich den Hilfssatz aus § 1 an: δ ist so bestimmbar, daß für

$$(8) \quad |d_0| < \delta, \dots, |d_{2k}| < \delta$$

$$h(x) + d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k} = f(x) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2 + d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k}$$

definit ist.

Nachdem δ bestimmt ist, wähle ich k rationale Zahlen $A_1, A_2, \dots, A_k$ aus, welche beziehlich so nahe an $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ gelegen sind, daß,

$$A_{k+1} = -A_1 - A_2 - \dots - A_k$$

gesetzt, in

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2 - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_{\lambda})^2 &= (x^{k+1} + b_2 x^{k-1} + \dots + b_{k+1})^2 \\ &\quad - (x^{k+1} + B_2 x^{k-1} + \dots + B_{k+1})^2 \\ &= (x^{2k+2} + 2b_2 x^{2k} + \dots + b_{k+1}^2) - (x^{2k+2} + 2B_2 x^{2k} + \dots + B_{k+1}^2) \\ &= d_0 x^{2k} + d_1 x^{2k-1} + \dots + d_{2k} \end{aligned} \right.$$

die Koeffizienten den Ungleichungen (8) genügen. Daß eine solche Wahl möglich ist, erhellt folgendermaßen: Setzt man zunächst an:

$$A_1 = \alpha_1 + \varepsilon_1, \dots, A_k = \alpha_k + \varepsilon_k$$

und somit unter Berücksichtigung von (6)

$$A_{k+1} = -\alpha_1 - \dots - \alpha_k - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_k = \alpha_{k+1} - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_k,$$

so sind $d_0, d_1, \dots, d_{2k}$ ganze rationale Funktionen von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ ohne konstantes Glied; dieselben verschwinden mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ und können daher durch passend kleine Wahl von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ dem absoluten Werte nach unter δ herabgedrückt werden; obendrein können $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ so gewählt werden, daß $A_1, A_2, \dots, A_k$ rational sind und hiermit auch A_{k+1} .

Aus (7) und (9) ergibt sich nun

$$f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2 + h(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_{\lambda})^2 + h(x) + \left(\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - \alpha_{\lambda})^2 - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_{\lambda})^2 \right),$$

$$(10) \quad f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda)^2 + (h(x) + d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k}).$$

Hierin ist der erste Summand, $\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda)^2$, das Quadrat einer rationalzahligen Funktion; der folgende Klammerausdruck

$$(11) \quad h(x) + d_0 x^{2k} + \dots + d_{2k} = H(x)$$

ist nach dem Hilfssatze eine definite Funktion und nur vom $2k^{\text{ten}}$ Grade; die Koeffizienten $a_0 + d_0, \dots, a_{2k} + d_{2k}$ dieser Funktion

$$H(x) = (a_0 + d_0)x^{2k} + \dots + (a_{2k} + d_{2k})$$

sind aber rationale Zahlen, weil $H(x)$ die Differenz zweier rationalzahliger Funktionen

$$f(x) - \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda)^2$$

ist. Nun wird als bewiesen angenommen, daß alle definiten ganzen rationalzahligen Funktionen $2k^{\text{ten}}$ Grades als Summe von Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen darstellbar sind; also ist

$$(12) \quad H(x) = \sum_{v=1}^{m-1} F_v^2(x);$$

Aus (10), (11) und (12) folgt daher

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{v=1}^{m-1} F_v^2(x) + \left(\prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_\lambda) \right)^2 \\ &= \sum_{v=1}^m F_v^2(x). \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen: *Jede definite ganze rationale Funktion von x mit rationalen Zahlenkoeffizienten läßt sich als Summe von Quadraten darstellen, so daß die sämtlichen Basen dieser Quadrate ganze rationale Funktionen von x mit rationalen Koeffizienten sind.*

Man kann leicht für die Anzahl der hierzu erforderlichen Quadrate eine obere Schranke aufstellen; für den nullten Grad reichen vier, für den zweiten acht Quadrate aus; es sei schon bewiesen, daß für den $2k^{\text{ten}}$ Grad nur $4k + 4$ Quadrate nötig sind; dann läßt sich zeigen, daß für den $2k + 2^{\text{ten}}$ Grad $4k + 8$ Quadrate genügen. In der Tat ist ja eine definite Funktion $2k + 2^{\text{ten}}$ Grades gleich einer Konstanten mal einer Funktion

mit 1 als erstem Koeffizienten, welche, wie aus dem Vorangehenden folgt, entweder selbst ein Quadrat ist oder als Summe eines Quadrates und einer definiten rationalzahligen Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades darstellbar ist; die beliebige definite Funktion $2k + 2^{\text{ten}}$ Grades ist also von der Gestalt

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0(F^2(x) + H_{2k}(x)) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) F^2(x) + c_0 H_{2k}(x) \\ &= (aF(x))^2 + (bF(x))^2 + (cF(x))^2 + (dF(x))^2 + \sum_{\nu=1}^{4k+4} F_{\nu}^2(x) \\ &= \sum_{\nu=1}^{4k+8} F_{\nu}^2(x), \end{aligned}$$

so daß $f(x)$ in $4k + 8$ Quadrate zerlegbar ist.

Es ist übrigens zu bemerken, daß die Zerlegung eines gegebenen $f(x)$ in Quadrate durch eine endliche Anzahl von Schritten ausführbar ist; es kommt ja nur darauf an, die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ mit einer gewissen, aus den Koeffizienten von $f(x)$ von vornherein bestimmbaren Annäherung zu berechnen.

§ 3.

Es sei nun ein beliebiger reeller Körper Ω zu Grunde gelegt, welchem die Koeffizienten von $f(x)$ angehören.

Für die quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a > 0, b^2 - 4ac \leq 0)$$

ergibt sich wie auf S. 57

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= e_1 F^2(x) + e_2 \cdot 1^2, \end{aligned}$$

wo alle auftretenden Koeffizienten zu Ω gehören und insbesondere e_1 und $e_2 \geq 0$ sind.

Es sei schon bewiesen, daß jede definite Funktion in Ω bis zum $2k^{\text{ten}}$ Grade in der Gestalt

$$(13) \quad \sum_{\nu=1}^m e_{\nu} F_{\nu}^2(x)$$

darstellbar ist, wo die Koeffizienten in den Basen $F_{\nu}(x)$ Zahlen in Ω und die e_{ν} positive Zahlen in Ω sind, und es sei dasselbe für eine beliebige definite Funktion $2k + 2^{\text{ten}}$ Grades in Ω

$$f(x) = c_0 x^{2k+2} + c_1 x^{2k+1} + \dots + c_{2k+2}$$

zu beweisen.

Dabei kann man sich wieder auf den Fall $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ beschränken, da die Transformation

$$x = y - \frac{c_1}{(2k+2)c_0}$$

$\frac{f(x)}{c_0}$ in eine definite Funktion in Ω

$$g(y) = y^{2k+2} + c'_2 y^{2k} + c'_3 y^{2k-1} + \dots + c'_{2k+2}$$

überführt, deren Zerlegung

$$g(y) = \sum_{\nu=1}^m E_{\nu} \cdot G_{\nu}^2(y)$$

für $f(x)$ gleichfalls eine Darstellung in Ω

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^m c_0 E_{\nu} \cdot G_{\nu}^2 \left(x + \frac{c_1}{(2k+2)c_0} \right) = \sum_{\nu=1}^m e_{\nu} F_{\nu}^2(x)$$

liefert.

1) Wenn $f(x)$ reelle Wurzeln hat, ist analog wie in § 2

$$(14) \quad f(x) = f_1^2(x) f_2(x),$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Koeffizienten in Ω haben und $f_2(x)$ definit ist und geringeren Grad hat als $f(x)$, sodaß $f_2(x)$ und damit auch $f(x)$ in der verlangten Art darstellbar ist.

2) Wenn die definite Funktion

$$f(x) = x^{2k+2} + c_2 x^{2k} + c_3 x^{2k-1} + \dots + c_{2k+2}$$

keine reellen Wurzeln hat, ist sie nach (10) und (11) in der Gestalt darstellbar

$$(15) \quad f(x) = \prod_{\lambda=1}^{k+1} (x - A_{\lambda})^2 + H(x),$$

wo die A_{λ} rationale Zahlen sind und $H(x)$ eine definite Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades ist; die Koeffizienten von $H(x)$ gehören folglich zum Körper Ω , da $H(x)$ die Differenz einer Funktion in Ω und einer sogar rationalzahligen Funktion ist. Daher ist $H(x)$ und damit auch $f(x)$ in der verlangten Art darstellbar.

Zur Darstellung einer definiten Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades in der Gestalt (13) sind höchstens $k+1$ Quadrate erforderlich, wie sich durch vollständige Induktion ergibt, und in

$$(16) \quad f_{2k}(x) = \sum_{\nu=1}^{k+1} e_{\nu} F_{\nu}^2(x) \quad (e_{\nu} \geq 0)$$

kann wegen (14) bzw. (15) der Grad von $F_{\nu}(x)$ gleich $\nu-1$ angenommen werden:

Eine definite Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades in Ω ist als Summe von $k + 1$ mit Zahlen ≥ 0 in Ω multiplizierten Quadraten von Funktionen in Ω darstellbar, deren Grad beziehlich gleich $0, 1, \dots, k$ ist.

Durch Einführung zweier homogener Variablen x, y an Stelle der einen Variablen x ergibt dieser Satz, daß jede definite binäre Form $2k^{\text{ten}}$ Grades in Ω als Summe von höchstens $k + 1$ mit positiven Zahlen in Ω multiplizierten Quadraten binärer Formen in Ω darstellbar ist.

Wenn der Körper so beschaffen ist, daß jede seiner positiven Zahlen als Summe von Quadraten von Zahlen in ihm darstellbar ist, so gibt es für jede definite Funktion $f(x)$ in Ω eine Darstellung als Summe von Quadraten von Funktionen in Ω .

Berlin, den 7. Juni 1902.