ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nr. 4122.

Band 172.

18.

Über die Verteilung der Perihellängen und Exzentrizitäten der kleinen Planeten.

Von *Albert von Brunn.*

Die erste Gesetzmäßigkeit in der Verteilung der Elemente der kleinen Planeten, die sich, je mehr solche Himmelskörper entdeckt wurden, um so deutlicher aus dem Rahmen der Zufälligkeit heraushob, war die Erscheinung der Anhäufung der Perihelien der kleinen Planeten in der Nähe desjenigen Jupiters. Bei der Auffassung der Asteroiden als Bruchstücke eines zerstörten größeren Weltkörpers lag eine kosmogonische Erklärung hierfür am nächsten, und auch klimatologische Einflüsse sind als Ursachen des Phänomens herangezogen worden. In der Tat würde für solche Planetoiden die Entdeckungswahrscheinlichkeit am größten sein, deren Perihel in der für die Beobachtung günstigsten Jahreszeit in Opposition mit der Sonne steht, denn es würde im Laufe der Zeit sich immer gelegentlich wiederholen, daß Opposition des Planeten und Periheldurchgang annähernd zusammenfallen. Für Jupiter würde die Opposition des Perihels in den Anfang des Herbstes fallen. Indessen zeigte Herr Newcomb schon 1860,¹⁾ daß die beobachteten Tatsachen rein mechanisch durch die Wirkungen der Säkularstörungen, welche die Asteroiden durch die großen Planeten erleiden, erklärt werden können, und 1862 erbrachte er in den A.N. Nr. 1382 auch den zahlenmäßigen Nachweis, daß die tatsächliche Verteilung der Perihellängen der theoretisch als wahrscheinlichster geforderten annähernd entspricht; auf die Folgerungen, die dort über die Verteilung der Knotenlängen gezogen werden, möchte ich vorläufig nicht eingehen, da hier Theorie und Wirklichkeit in einer weniger befriedigenden Übereinstimmung zu stehen scheinen; es mag das einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Herr Newcomb hebt in seinen genannten Abhandlungen nicht ausdrücklich hervor, daß aus seiner Erklärung der Perihelverteilung noch die andere Tatsache folgt, daß im Mittel die Exzentrizitäten derjenigen Planeten am größten resp. kleinsten sein müssen, deren Perihelien beim Jupiterperihel resp. -aphel liegen. Daß die durchschnittlichen Exzentrizitäten wirklich dieses Verhalten zeigen, scheint bisher noch nicht besonders berücksichtigt worden zu sein.

Ich habe nun Herrn Newcombs Untersuchungen, soweit sie sich auf die Perihelien beziehen, mit dem mehr als siebenmal so umfangreichen statistischen Material, als es Herrn Newcomb damals zur Verfügung stand, welches Herr Mascart im Bulletin astronomique 1899²⁾ liefert, wiederholt und die Diskussion der Exzentrizitäten hinzugefügt, gehe jedoch dabei den umgekehrten Weg, wie Herr Newcomb.

Dieser zeigt, daß unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung einer gewissen Integrationskonstanten, die man Eigenperihellänge nennen kann, über den ganzen Umkreis die ungleichförmige Verteilung der wirklichen Perihellängen allein als eine Wirkung der Säkularstörungen der großen Planeten erscheint. Es ist aber gewiß noch befriedigender, die Untersuchung von allem Hypothetischen zu befreien, indem man sich unter alleiniger Berücksichtigung der Säkularstörungen jene Integrationskonstanten berechnet und zusieht, ob sie gleichmäßig verteilt sind. Denn wenn das der Fall ist, so folgt auch umgekehrt, daß für die Verteilung der wirklichen Perihellängen eben auch nur die Säkularstörungen von bestimmendem Einflusse sein können.

Ich beginne damit, die Resultate der Abzählung aus der Mascartschen Elemententabelle anzugeben. Ich teile den Umkreis, vom Jupiterperihel aus rechtläufig zählend, in 16 gleiche Teile I–XVI. Die erste Kolumne gibt die Winkelräume, die zweite die Zahl der darin liegenden Planetenperihelien, die dritte den Mittelwert der Exzentrizität für die betreffenden Planeten; zum Schluß folgen noch die gleichen Daten für die Halbumkreise von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ zu beiden Seiten vom Jupiterperihel bzw. -aphel.

I	43	0.1550
II	36	0.1466
III	33	0.1457
IV	24	0.1437
V	23	0.1335
VI	18	0.1150
VII	16	0.1361
VIII	12	0.0938
IX	15	0.1377
X	19	0.1301
XI	22	0.1377
XII	22	0.1246
XIII	21	0.1786
XIV	30	0.1667
XV	38	0.1447
XVI	42	0.1612
XIII–IV	267	0.1544
V–XII	147	0.1276

Man sieht hieraus die Abnahme der Häufigkeitszahlen und, wenn auch viel unregelmäßiger, der mittleren Exzentrizitäten vom Jupiterperihel zum -aphel. Ein deutliches Bild von der

¹⁾ S. Newcomb, On the secular variations and mutual relations of the orbits of the asteroids. Vol. VIII No. V der Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences.

²⁾ Les orbites des petites planètes rapportées à l'orbite de Jupiter. Bull. astr. 1899 p. 228.

Rolle, die diese Richtung für die Verteilung der Perihelien und Exzentrizitäten der Asteroiden spielt, geben die beiden letzten Zeilen.

Wir wollen nun den Zusammenhang der angeführten Zahlen mit den Säkularstörungen aufsuchen. Zur Bestimmung der Säkularstörungen der Elemente

$$x_i = e_i \cos \pi_i, \quad y_i = e_i \sin \pi_i$$

der großen Planeten ($i = 1$: Merkur bis $i = 8$: Neptun) dienen bekanntlich 16 simultane Differentialgleichungen erster Ordnung, welche linear werden, wenn man im Säkularteil der Störungsfunktion nur die Quadrate der Exzentrizitäten beibehält. Ihre Integration liefert:

$$x_i = \sum_{r=1}^8 M_i^r \cos(s_r t + \beta_r),$$

$$y_i = \sum_{r=1}^8 M_i^r \sin(s_r t + \beta_r)$$

wo die M_1^r und β_r Integrationskonstanten, s_r die Wurzeln der Säkulardeterminante und $\frac{M_1^r}{M_i^r}$ durch lineare Gleichungen bestimmt sind; die s_r und die Quotienten der M sind Funktionen der Massen und der mittleren Entfernungen der großen Planeten. Bei den späteren Rechnungen bediene ich mich für die M , β , s der von Stockwell¹⁾ gegebenen Werte. Es sei nun für einen kleinen Planeten:

$$\xi = e \cos \varpi, \quad \eta = e \sin \varpi;$$

dann haben, wie man weiß,²⁾ diese Elemente, soweit nur

die Säkularstörungen in Betracht kommen, folgende Form:

$$\xi = A \cos(b t + B) + \sum_{r=1}^8 \frac{E_r}{b - s_r} \cos(s_r t + \beta_r)$$

$$\eta = A \sin(b t + B) + \sum_{r=1}^8 \frac{E_r}{b - s_r} \sin(s_r t + \beta_r).$$

Hier sind A und B Integrationskonstanten, b ist eine Funktion der mittleren Entfernung des kleinen Planeten und die E_r stehen mit den M_i^r in der Beziehung, daß

$$E_r = \sum_{i=1}^8 [\rho \cdot i] M_i^r$$

wo jedes $[\rho \cdot i]$ sich zusammensetzt aus einem Laplaceschen Koeffizienten und einem Faktor, der von der Masse des betreffenden großen und der mittleren Entfernung des kleinen Planeten abhängt; der Laplacesche Koeffizient ist eine Funktion des Verhältnisses der mittleren Entfernungen des kleinen und des jeweiligen großen Planeten. Die Koeffizienten

$\frac{E_r}{b - s_r} = G_r$ sind also Funktionen der mittleren Entfernung des kleinen Planeten. Da ich sie späterhin brauche, so habe ich sie mit Stockwells Werten der M_i^r und den Tafeln für b und $[\rho \cdot i]$, welche die Herren Norén und Raab³⁾ berechnet haben, tabuliert⁴⁾. Unter jeder Zeile ist der Wert von β_r ($t = 0$ für 1850.0) hinzugefügt. Die Bedeutung der Größen X und Y wird unten erwähnt.

a	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	$X(a)$	$Y(a)$
2.0	+0.000102	-0.000322	+0.000891	-0.001929	+0.000003	+0.000968	+0.022713	+0.041414	—	—
2.1	+0.000070	-0.000204	+0.000461	-0.001006	+0.000003	+0.001015	+0.023549	+0.030899	—	—
2.2	+0.000047	-0.000133	+0.000271	-0.000536	+0.000003	+0.001061	+0.024365	+0.025439	+0.037371	-0.008019
2.3	+0.000029	-0.000089	+0.000166	-0.000297	+0.000003	+0.001101	+0.025179	+0.022191	+0.035852	-0.004834
2.4	+0.000020	-0.000064	+0.000108	-0.000183	+0.000004	+0.001140	+0.025980	+0.020086	+0.035137	-0.002652
2.5	+0.000013	-0.000040	+0.000073	-0.000116	+0.000004	+0.001178	+0.026775	+0.018630	+0.034875	-0.001028
2.6	+0.000007	-0.000029	+0.000050	-0.000076	+0.000004	+0.001217	+0.027565	+0.017596	+0.034887	+0.000231
2.7	+0.000004	-0.000019	+0.000035	-0.000049	+0.000004	+0.001255	+0.028346	+0.016845	+0.035078	+0.001256
2.8	+0.000002	-0.000011	+0.000023	-0.000033	+0.000004	+0.001294	+0.029125	+0.016280	+0.035395	+0.002123
2.9	-0.000002	-0.000007	+0.000016	-0.000020	+0.000004	+0.001332	+0.029899	+0.015859	+0.035797	+0.002862
3.0	-0.000003	-0.000003	+0.000010	-0.000014	+0.000004	+0.001368	+0.030668	+0.015542	+0.036264	+0.003516
3.1	-0.000004	0.000000	+0.000007	-0.000011	+0.000005	+0.001404	+0.031433	+0.015307	+0.036784	+0.004100
3.2	-0.000004	+0.000002	+0.000005	-0.000008	+0.000005	+0.001439	+0.032191	+0.015134	+0.037287	+0.004630
3.3	-0.000005	+0.000004	+0.000003	-0.000006	+0.000005	+0.001473	+0.032938	+0.015010	+0.037905	+0.005112
3.4	-0.000006	+0.000005	+0.000002	-0.000004	+0.000005	+0.001509	+0.033679	+0.014926	+0.038495	+0.005566
3.5	-0.000006	+0.000006	+0.000001	-0.000003	+0.000005	+0.001543	+0.034411	+0.014871	+0.039096	+0.005989
3.6	-0.000007	+0.000007	+0.000001	-0.000001	+0.000005	+0.001576	+0.035130	+0.014846	+0.039708	+0.006380
3.7	-0.000007	+0.000007	0.000000	-0.000001	+0.000005	+0.001609	+0.035837	+0.014840	—	—
3.8	-0.000007	+0.000008	0.000000	0.000000	+0.000005	+0.001641	+0.036530	+0.014853	—	—
3.9	-0.000008	+0.000008	0.000000	0.000000	+0.000005	+0.001673	+0.037208	+0.014880	—	—
4.0	-0.000008	+0.000009	0.000000	+0.000001	+0.000006	+0.001703	+0.037869	+0.014920	+0.042135	+0.007738
β_r	88° 0' 38"	20° 50' 19"	335° 11' 31"	137° 6' 37"	67° 56' 35"	105° 3' 53"	28° 8' 46"	307° 56' 50"		

¹⁾ Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. XVIII No. 232.

²⁾ Siehe für das folgende Charlier, Himmelsmechanik I 7. Abschnitt § 11.

³⁾ Meddelanden från Lunds observatorium Serie II No. 2.

⁴⁾ Dadurch gewinnt man allerdings kein homogenes Zahlenmaterial, weil von Stockwell und in den Tafeln von Norén und Raab verschiedene Massenwerte der großen Planeten benutzt werden, jedoch gibt das doch wohl die zuverlässigsten Zahlen.

Als Epoche $t = 0$ wähle ich 1850.0, weil Herr Mascart seine Elemententabelle auf diese Anfangszeit bezieht. Die Verteilung für 1900.0 weicht davon nicht merklich ab, weil sich der unten definierte Vektor $[X(a), Y(a)]$ äußerst langsam ändert.

Die weiteren Überlegungen haben zur Voraussetzung, daß die für die Untersuchung zur Verfügung stehenden Planeten in beliebig großer Anzahl N vorhanden seien; dann

(ξ, η) den Vektor mit den Komponenten ξ und η

(ξ', η') „ „ „ „ „

$[X(a), Y(a)]$ „ „ „ „ „

steht zu erwarten, daß die beobachteten Tatsachen mit den theoretisch geforderten um so besser übereinstimmen, je besser diese Voraussetzung erfüllt ist. Es sei jetzt $\varphi(a)$ die relative Häufigkeit der Planeten mit der mittleren Entfernung a , alsdann ist $N\varphi(a)\Delta a$ die Zahl der Planeten, deren mittlere Entfernung zwischen a und $a + \Delta a$ liegt. Es möge weiter bedeuten

$$\xi' = A \cos(bt + B) \quad \text{und} \quad \eta' = A \sin(bt + B)$$

$$X(a) = k(a) \cos \psi(a) = \sum_{r=1}^8 G_r(a) \cos(s_r t + \beta_r)$$

$$Y(a) = k(a) \sin \psi(a) = \sum_{r=1}^8 G_r(a) \sin(s_r t + \beta_r)$$

Die Komponenten dieses letzten Vektors, bezogen auf das Ekliptikalsystem 1850.0, sind in der obigen Tabelle für alle unter den ersten 417 Planeten überhaupt vorkommenden a gegeben.

Dann ist also, vektoriell geschrieben:

$$(\xi, \eta) = (\xi', \eta') + [X(a), Y(a)].$$

Für sämtliche augenblicklich der Untersuchung unterliegenden $N\varphi(a)\Delta a$ Planeten wird $[X(a), Y(a)]$ dasselbe sein, und die einzelnen Individuen der Zahl unterscheiden sich nur durch die verschiedenen (ξ', η') , d. h. Eigenexzentrizität und Perihellänge.

Man kann nun annehmen, daß die B gleichförmig über den Umkreis verteilt sind. Denn angenommen, die Argumente $bt + B$ seien zu einer sehr weit zurückliegenden Anfangszeit $-T$ irgendwie beliebig verteilt gewesen, so wird sich, da die b infolge des Spielraums der mittleren Entfernung zwischen a und $a + \Delta a$ nicht absolut gleich sind, im Laufe der Zeit T , also zur Zeit $t = 0$, doch die gleichförmige Verteilung hergestellt haben, wenn man nur T groß genug wählen darf, was wir voraussetzen können. In diesem Falle wird eine von B unabhängige relative Häufigkeitsfunktion $h(A)$ existieren derart, daß die Anzahl derjenigen der $N\varphi(a)\Delta a$ Planeten, welche wir betrachten, deren Eigenexzentrizität zwischen A und $A + \Delta A$ liegt, dargestellt ist durch

$$z = N\varphi(a)\Delta a h(A)\Delta A.$$

Wir nehmen an, $h(A)$ sei unabhängig von a . Wir wollen nun die unter den gemachten Voraussetzungen statthabende Verteilung der wirklichen Perihellängen ϖ aufsuchen. Dazu fragen wir nach der Anzahl p derjenigen von den z wirklichen Perihelien, welche zwischen ϖ und $\varpi + \Delta\varpi$ liegen.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $A > k(a)$ (Fig. 1)

II. $A < k(a)$ (Fig. 2)

Fig. 1.

$$CD = k(a) \quad DE = A \quad CE = e$$

Fig. 2.

$$CD = k(a) \quad DE_1 = DE_2 = A \\ CE_1 = e_1 \quad CE_2 = e_2$$

Im ersten Falle sind B und ΔB eindeutige Funktionen von ϖ bzw. $\Delta\varpi$:

$$B = \varpi + \arcsin \left[\frac{k(a)}{A} \sin(\varpi - \psi(a)) \right]$$

$$\Delta B = \Delta\varpi \left[1 + k(a) \frac{\cos(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} \right].$$

Im zweiten Falle dagegen sind B und ΔB zweiwertige Funktionen von ϖ bzw. $\Delta\varpi$:

$$B_{\pm} = \varpi + \arccos \left[\pm \sqrt{1 - \left(\frac{k(a)}{A} \right)^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))} \right]$$

$$\Delta B_{\pm} = \Delta\varpi \left[1 \pm k(a) \frac{\cos(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} \right].$$

Die gesuchte Zahl p wird nun sein

im ersten Falle
$$p = z \frac{\Delta B}{2\pi} = z \frac{\Delta\varpi}{2\pi} \left[1 + k(a) \frac{\cos(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} \right]$$

im zweiten Falle
$$p = z \frac{\Delta B_1 + |\Delta B_2|}{2\pi} = z \frac{\Delta\varpi}{2\pi} 2 k(a) \frac{\cos(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}}.$$

Man findet dann offenbar die Gesamtzahl der Planetenperihelien, die zwischen ϖ_0 und ϖ_1 liegt, durch die folgende Integration:

$$Z(\varpi_0, \varpi_1) = \frac{N}{2\pi} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{A=k(a)}^{A=\infty} \int_{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1} \varphi(a) h(A) \left[1 + k(a) \frac{\cos(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} \right] da dA d\varpi$$

$$+ \frac{N}{2\pi} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{A=k(a)|\sin[\tilde{\omega}-\psi(a)]}^{A=k(a)} \int_{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1} \varphi(a) h(A) 2 k(a) \frac{\cos(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} da dA d\varpi.$$

In dem zweiten dreifachen Integral darf mit Rücksicht darauf, daß wir die beiden Werte des zweiwertigen Integranden vereinigt haben, ϖ nur noch zwischen $\psi(a) - \frac{1}{2}\pi$ und $\psi(a) + \frac{1}{2}\pi$ variieren, d. h. in dem Spielraum, der zu demjenigen Zweige der Integrandenfunktion gehört, welcher durch $\varpi = \psi(a)$ bestimmt wird. Entsprechend wird der Mittelwert $e(\varpi_0, \varpi_1)$ der Exzentrizitäten zwischen $\varpi = \varpi_0$ und $\varpi = \varpi_1$:

$$e(\varpi_0, \varpi_1) = \frac{N}{2\pi Z(\varpi_0, \varpi_1)} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{A=k(a)}^{A=\infty} \int_{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1} \varphi(a) h(A) \frac{[k(a) \cos(\varpi - \psi(a)) + \sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}]^2}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} da dA d\varpi$$

$$+ \frac{N}{2\pi Z(\varpi_0, \varpi_1)} \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{A=k(a)|\sin[\tilde{\omega}-\psi(a)]}^{A=k(a)} \int_{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_1} \varphi(a) h(A) 2 \frac{A^2 - [k(a)]^2 \cos^2(\varpi - \psi(a))}{\sqrt{A^2 - [k(a)]^2 \sin^2(\varpi - \psi(a))}} da dA d\varpi$$

Auch hier darf im zweiten Integral ϖ die Grenzen $\psi(a) - \frac{1}{2}\pi$ und $\psi(a) + \frac{1}{2}\pi$ nicht verlassen, oder anders gesagt: es gibt nur für den Teil des Intervalles $\varpi_1 - \varpi_0$ das zweite Integral einen Anteil, der eben innerhalb jener Grenzen liegt. Obgleich nun $h(A)$ für kleine Werte des Argumentes sehr klein ist — und $A = k(a)$ ist ein relativ kleiner Wert — wird man die zweiten Integrale doch nicht vernachlässigen dürfen, da sie eben einseitig die Häufigkeits- bzw. Mittelzahlen des um $\psi(a)$ (das für die wirklich vorkommenden a nur um 22° variiert) herum liegenden Halbumkreises beeinflußt. Man hätte für numerische Durchführung des gesagten nur noch aus den Elemententabellen die Häufigkeitsfunktionen $\varphi(a)$ und $h(A)$ zu suchen; dann würde die Integration, die natürlich in praxi auf eine dreifache Summation hinausläuft, die gesuchte Verteilung liefern. Herr Newcomb, dessen Gedankengang ich, wenn auch in der

Form etwas allgemeiner und mit Berücksichtigung der Exzentrizitäten, hier wiedergegeben habe, hat l. c. auf Grund des ihm damals zugänglichen ziemlich dürftigen statistischen Materials, das sich auf 56 Planeten bezieht, seine Theorie auch zahlenmäßig durchgeführt. Über das angenommene $\varphi(a)$ ist nichts zu bemerken. Das angenommene $h(A)$ werde ich unten mit dem wahren vergleichen. Die Newcombschen Relativzahlen würden für die beiden Quadranten um das Jupiterperihel, bzw. -aphel unter Berücksichtigung der Planeten (1) bis (417) die zu erwartenden absoluten Häufigkeiten 240 und 174 statt der wahren 267 und 147 geben. Daß jedoch diese Abweichung nicht der Unzulänglichkeit der theoretischen, sondern der statistischen Grundlagen von Herrn Newcombs Überlegung zur Last fällt, wird sich unten ergeben.

Ich gehe nun zu der erwähnten umgekehrten Behand-

lungsart über. Die Hauptvoraussetzung der Newcombschen Theorie ist eine gleichmäßige Verteilung der Eigenperihelien und mittleren Eigenexzentrizitäten auf alle Richtungen. Um die Gültigkeit dieser Voraussetzung direkt zu prüfen, habe ich für jeden einzelnen der 414 Planeten der Mascartschen Tabelle die Eigenexzentrizität und -perihellänge wirklich berechnet und zwar durch ein einfaches graphisches Verfahren, das mit der vierstelligen Genauigkeit, die es ermöglicht, für unsere Zwecke vollständig ausreicht. Ich trage in einem Koordinatensystem in genügend großem Maßstabe die Endpunkte des Vektors (ξ, η) der wirklichen Exzentrizität für jeden Planeten ein; außerdem mit Hilfe der obigen Tabelle die Endpunktskurve des Vektors $[X(a), Y(a)]$ von $a = 2.0$ bis $a = 4.0$. Lasse ich nun ein neues, dem alten paralleles Koordinatensystem mit seinem Anfang auf dieser Kurve entlang gleiten, so kann ich für alle Planeten den Endpunkt des Vektors (ξ', η') der Eigenexzentrizität in das bewegliche Koordinatensystem eintragen. Für diese Eigenexzentrizitäten und -perihellängen habe ich nun die eingangs für die entsprechenden wirklichen Elemente vorgenommenen Abzählungen und Mittelbildungen wiederholt mit dem folgenden Resultat:

I	30	0.1298
II	29	0.1284
III	34	0.1585
IV	22	0.1199
V	28	0.1413
VI	29	0.1352
VII	26	0.1414
VIII	18	0.1152
IX	24	0.1429
X	28	0.1533
XI	25	0.1316
XII	16	0.1459
XIII	25	0.1535
XIV	32	0.1239
XV	20	0.1518
XVI	28	0.1601
XIII-IV	220	0.1409
V-XII	194	0.1390

Diese Zahlen weichen im einzelnen von einem regelmäßigen Verlaufe erheblich ab, jedoch ist eine Gesetzmäßigkeit in diesen Abweichungen nicht zu erkennen. Immerhin aber scheint die Bevorzugung der beiden Quadranten um das Jupiterperihel, die die beiden letzten Zeilen zeigen, reell zu sein, da für diesen Winkelraum auch die mittlere Eigenexzentrizität etwas größer ist. Es fragt sich, ob man berechtigt ist, daraus Schlüsse zu ziehen. Mir scheint es, als ob sich darin doch eine klimatologische Tatsache ausprägte. Zunächst dürfte für die nördliche Hemisphäre das Halbjahr Juli-Dezember für die Beobachtung günstiger sein, als das andere¹⁾; es wird also für die Planeten die Entdeckungswahrscheinlichkeit größer sein, deren Perihel in dieser Zeit in Opposition mit der Sonne steht; diese Forderung ist sehr nahe damit gleichbedeutend, daß es im IV. und I. Quadranten, vom Jupiterperihel gerechnet, liegt. Soll dieses als Erklärung

für die Anhäufung auch der Eigenperihelie in jenen beiden Quadranten dienen, so müßte diese Anhäufung für die sonnen-, also auch erdnächsten Planeten am auffallendsten sein, da für solche die Abhängigkeit der Oppositionshelligkeit von der gleichzeitigen Stellung in der Bahn am größten ist. Das stellt sich aber wirklich als richtig heraus. Denn wenn man sich die kleinen Planeten nach der mittleren Bewegung in drei Gruppen einteilt, und für jede derselben einzeln die Verteilung der Eigenperihelien auf die beiden Halbumkreise feststellt, so ergibt sich das folgende:

	$n \leq 700''$	$700'' < n < 872''$	$n > 872''$
XIII-IV	70	93	57
V-XII	68	85	41

Wir werden also bezüglich der wirklichen Exzentrizitäten und Perihellängen zu dem Schlußresultat geführt, daß die ungleichmäßige Verteilung der Hauptsache nach durch die Säkularstörungen der großen Planeten hervorgerufen wird, daß sich darüber aber im gleichen Sinne, nur viel weniger stark wirkend eine nur scheinbare, auf klimatologischen Ursachen beruhende Ungleichförmigkeit lagert. Jedenfalls wird man die Integrationskonstanten Eigenexzentrizität und -perihellänge als, abgesehen von geringen Unregelmäßigkeiten, gleichmäßig nach allen Richtungen verteilt ansehen müssen.

Es dürfte einiges Interesse bieten, anhangsweise noch das Verhalten der Häufigkeitsfunktion $\varphi(A)$ zu studieren, weil bei der relativ geringen Veränderlichkeit der $k(a)$ und $\psi(a)$ mit a wesentlich durch die geeignete Wahl dieser Funktion φ der Grad der Brauchbarkeit der Resultate in der Newcombschen Behandlungsweise bedingt wird.

Die Werte der Eigenexzentrizitäten A wurden nach der Größe geordnet und in Intervallen von 0.0125 fortschreitend abgezählt. Die unten folgende Tabelle gibt für den in der Mitte des betreffenden Intervalles liegenden Wert A die Anzahl $\varphi(A)$ der auf das Intervall kommenden Exzentrizitätswerte und zwar gleich dividiert durch die Gesamtzahl der benutzten Werte. Es wurde eine analytische Darstellung der Häufigkeitsfunktion versucht durch den Ausdruck:

$$\varphi(A) = C A^\alpha e^{-\beta A^2}.$$

Mit den Konstanten:

$$C = 0.0136 \quad \alpha = 0.9320 \quad \beta = 0.00588$$

ergaben sich die »berechneten« Werte $\varphi(A)_c$, welche die beobachteten befriedigend darstellen.

A	$\varphi(A)$	$\varphi(A)_c$
0.0062	0.0121	0.0071
0.0187	0.0121	0.0196
0.0312	0.0193	0.0308
0.0437	0.0483	0.0407
0.0562	0.0530	0.0491
0.0687	0.0530	0.0558
0.0812	0.0556	0.0607
0.0937	0.0483	0.0639
0.1062	0.0674	0.0654
0.1187	0.0650	0.0654

¹⁾ Siehe Bauschinger, Tabellen zur Geschichte und Statistik der kleinen Planeten. Veröffentlichungen des Königl. Astronomischen Recheninstituts zu Berlin. Nr. 16 S. 6.

A	$\varphi(A)$	$\varphi(A)_c$
0.1312	0.0674	0.0637
0.1437	0.0626	0.0609
0.1562	0.0602	0.0572
0.1687	0.0817	0.0527
0.1812	0.0459	0.0478
0.1937	0.0483	0.0426
0.2062	0.0483	0.0374
0.2187	0.0314	0.0324
0.2312	0.0266	0.0276
0.2437	0.0169	0.0232
0.2562	0.0169	0.0192
0.2687	0.0242	0.0157
0.2812	0.0149	0.0126
0.2937	0.0097	0.0100
0.3062	0.0045	0.0079
0.3187	0.0070	0.0061

Mit diesen Resultaten wollen wir nun noch die Newcombschen Annahmen vergleichen. Herr Newcomb macht über den Verlauf der Funktion $\varphi(A)$ zwei verschiedene numerische Hypothesen. Ich gebe in der folgenden Tabelle für die von Herrn Newcomb gewählten Grenzen die Werte des Integrals

$$\int_{A_0}^{A_1} \varphi(A) dA$$

nach den beiden Newcombschen Hypothesen (N_I und N_{II}), nach dem aus unserem Material sich empirisch ergebenden Verlauf von $\varphi(A)$ (mit W bezeichnet) und nach der analytisch ausgeglichenen Funktion (C):

Heidelberg, Astronomisches Institut, 1906 Juni 18.

¹⁾ Nach Abzählungen, die ich nach der Elemententabelle von Herrn Psilander, Meddelanden från Lunds observatorium Nr. 16, vorgenommen habe.

		$\int_{A_0}^{A_1} \varphi(A) dA$			
A_0	A_1	N_I	N_{II}	(W)	(C)
0.000	0.030	0.0052	0.0357	0.0323	0.0377
0.030	0.055	0.0141	0.0536	0.0830	0.0696
0.055	0.085	0.0692	0.1071	0.1289	0.1337
0.085	0.125	0.2495	0.2142	0.1965	0.2062
0.125	0.175	0.3030	0.2679	0.2714	0.2338
0.175	0.225	0.2138	0.1964	0.1725	0.1594
0.225	0.275	0.1067	0.0894	0.0759	0.0896
0.275	0.325	0.0387	0.0357	0.0395	0.0362

Aus der Tabelle geht unmittelbar hervor, daß beide Newcombschen Hypothesen die Gesamthäufigkeit für die kleinen A zwischen 0.000 und 0.085 zu gering ergeben. Das muß aber, wie man den $Z(\varpi_0, \varpi_1)$ bildenden Integralen leicht ansehen kann, die tatsächlich beobachtete Wirkung haben, daß damit die Häufung der Planetenperihelien beim Jupiterperihel zu gering herauskommt. Die zweite, der Wirklichkeit erheblich näher kommende Hypothese würde in der Tat nach den Relativzahlen, die Herr Newcomb selbst angibt, statt der Verteilung 240, 174 auf die beiden Halbumkreise die bessere 246, 166 ergeben.

Die analoge Untersuchung für die Verteilungen der Knotenlängen und Neigungen durchzuführen dürfte von Interesse sein; denn es scheint, als ob in diesem Falle die Newcombsche Erklärung versagen wird, da die Häufigkeitszahlen der Knotenlängen sowohl in der Jupiterbahn als in der Unveränderlichen Ebene¹⁾ deutlich ausgeprägt je zwei Maxima und Minima, die etwa um 180° auseinanderliegen, aufweisen.

Albert von Brunn.

Osservazioni di cometa 1906 e.

1906	T.m. Roma	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Cf.	Oss.	α app.	$\log p.\Delta$	δ app.	$\log p.\Delta$	Red. ad l. app.	*
Sett. 7	8 ^h 35 ^m 7 ^s	-3 ^m 31 ^s 60	-9' 46".6	15,3	M	22 ^h 37 ^m 48 ^s 82	9.494 _n	+9° 19' 41".5	0.700	+2.61 +17.8	1
7	9 3 32	-3 32.33	-9 56.3	9,2	Z	22 37 48.09	9.422 _n	+9 19 31.8	0.692	+2.61 +17.8	1
9	9 36 25	+0 58.67	+1 50.0	17,3	B	22 36 24.27	9.288 _n	+9 7 29.3	0.685	+2.61 +18.1	2
12	8 49 22	+0 16.42	-3 18.6	17,3	M	22 34 28.75	9.408 _n	+8 48 45.6	0.695	+2.61 +18.4	3

Stelle di confronto.

*	α 1906.0	δ 1906.0	Autorità
1	22 ^h 41 ^m 17 ^s 81	+9° 29' 10".3	AG. Leipzig II 11384
2	22 35 22.99	+9 5 21.2	» » » 11350
3	22 34 9.72	+8 51 45.8	» » » 11340

Sett. 7. Nucleo 12^m. Debole e piccolissima nebulosità. — Sett. 9, 12. L'astro ha nucleo di 13^m e si osserva con molta difficoltà; la piccola e debola nebulosità è dissimetrica rapporto al nucleo; essa è più estesa a est che a ovest del nucleo. — Osservatore: M = *E. Millosevich*, Z = *G. Zappa*, B = *E. Bianchi*.

Roma, R. Osservatorio del Collegio Romano, 1906 Sett. 13.

E. Millosevich.