Ueber die Parallaxe des planetarischen Nebels BD. +41°4004.

Von Dr. *J. Wilsing*.

Im Sommer 1892 begann ich auf Anregung von Herrn Professor Vogel am neuen photographischen Refractor des Observatoriums eine Reihe von Aufnahmen des von Webb gefundenen planetarischen Nebels (Astr. Nachr. 2292) BD. +41°4004 zum Zwecke einer Bestimmung seiner Parallaxe.

Die Genauigkeit, mit welcher sich die Parallaxe bestimmen lässt, wird zunächst bedingt durch die Genauigkeit, mit welcher sich die Reduction der auf den verschiedenen Platten mikrometrisch gemessenen Distanzen auf die gleiche Längeneinheit ausführen lässt. Untersuchungen über die Parallaxe von 61 Cygni, über welche ich an anderer Stelle ausführlichere Mittheilungen zu machen gedenke, hatten bezüglich der Sicherheit, mit welcher sich der Bogenwerth der Längeneinheit mit Hilfe eines thermometrischen Coefficienten ermitteln lässt, ein sehr günstiges Ergebniss geliefert, da bei der soliden Bauart des Instruments die Aenderungen der Brennweite wesentlich nur von Temperaturschwankungen abhängen. Indessen habe ich das bisher eingeschlagene Verfahren, den für jede Platte gültigen Bogenwerth aus den gemessenen Distanzen bekannter Sternpaare zu bestimmen, auch hier beibehalten, um die Möglichkeit von Unterbrechungen der Continuität einer längeren Reihe vollkommen auszuschliessen. Durch zweckmässige Wahl dieser Sternpaare und geeignete Verbindung der gemessenen Distanzen mit einander ist es denn auch möglich, die Wirkungen der Aberration und Refraction auf die Messungen zu eliminiren. Der letztere Umstand ist insofern von Bedeutung, als bei länger dauernden Aufnahmen, wie sie bei lichtschwachen Objecten erforderlich sind, die Berechnung der Refraction wenigstens theoretisch mit einiger Unsicherheit verknüpft erscheint. Die photographischen Bilder der Sterne müssen nämlich in Folge der Aenderung der Refraction während der Dauer der Exposition linienförmig deformirt erscheinen, und zwar wird die Entfernung der Mitten der Bilder eines Sternpaars, welche durch die mikrometrische Messung erhalten wird, nur dann dem Mittel von Anfang und Ende der Exposition entsprechen, wenn die Aenderung der Refraction als linear betrachtet werden darf. Es entsteht also bei längeren Expositionszeiten mit Rücksicht auf die Berechnung der Refraction die Schwierigkeit, über die der gemessenen Distanz entsprechende Zeit eine Entscheidung treffen zu müssen. Diese Unsicherheit kann beseitigt werden, wenn das Sternpaar, dessen Entfernung zur Bestimmung des Bogenwerths dient, so gewählt wird, dass der Mittelpunkt der Verbindungslinie beider Sterne mit dem Mittelpunkt

der Verbindungslinie des Sternpaars, dessen Parallaxe bestimmt werden soll, zusammenfällt, und ausserdem die vier Sterne auf demselben grössten Kreis liegen. Bezeichnet man nämlich die mit Refraction behafteten Distanzen mit s und s' , die wahren Distanzen mit b und b' , so ist $\frac{b}{b'} = \frac{\varepsilon s}{\varepsilon_1 s'}$. Da die Grössen ε und ε_1 aber nur von der Richtung und Zenithdistanz des Sternpaars abhängen, so ist im vorliegenden Falle $\varepsilon = \varepsilon_1$, also das Verhältniss der wahren Distanzen in jedem Moment identisch mit dem Verhältniss der gemessenen scheinbaren Distanzen. Doch möge bemerkt werden, dass die theoretisch nothwendig vorhandene Verlängerung der photographischen Bilder sich meistens nicht mit Sicherheit wahrnehmen lässt, da sie sich mit den durch Unruhe der Luft und Unregelmässigkeiten im Gange des Uhrwerks bewirkten Deformationen verbindet. Das Verhältniss der gemessenen Entfernungen ist endlich auch unabhängig von der Aberration, da diese bei gleicher Rectascension und Poldistanz gleichfalls proportional der Entfernung der Sterne wirkt.

An die mikrometrisch gefundenen Distanzen müsste zur Ermittlung der entsprechenden absoluten Winkelwerthe noch eine für geringe Entfernungen der Sterne vom Mittelpunkt der Platte verschwindend kleine Reduction auf die Kugelfläche angebracht werden. Da jedoch Sorge getragen wurde, dass die Bilder auf den verschiedenen Platten stets die gleiche Lage in Bezug auf den Mittelpunkt der Platte hatten, so konnte von der Anbringung der in diesem Falle constanten Verbesserung Abstand genommen werden.

Von Juni 1892 bis Juni 1893 sind 34 Platten mit je drei Aufnahmen von 8 Minuten Dauer angefertigt worden. Die Platten wurden mit dem in Bd. 5 der Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums beschriebenen Repsold'schen Messapparat ausgemessen. Der Ort des Sterns wurde dabei mikrometrisch gegen die nächstliegenden Striche eines in halbe Millimeter getheilten Maassstabes festgelegt, der mit der zu messenden Distanz parallel gestellt war. Wählt man bei Messung der einzelnen Distanzen stets die gleichen Striche, so bedarf es zur Reduction auf ein einheitliches Längenmaass nur der Kenntniss der periodischen Schraubenfehler, deren Betrag hier unmerklich ist. Da der Werth der Schraubenrevolution fast genau 0.1 mm oder im Winkelwerth 6 Bogensekunden beträgt, so liess sich noch ein halbes Hundertstel der Bogensekunde schätzen. Doch hätte es dieser Schärfe der Pointirung nicht bedurft, da der Nebel auf der Platte den Anblick eines mehrere

Secunden grossen, ziemlich verwaschenen Scheibchens mit etwas excentrisch liegender Verdichtung gewährt. Die Form und Schärfe der Begrenzung dieser Verdichtung, auf welche die Einstellungen gemacht wurden, wechselt etwas mit dem Luftzustande, so dass zu dem eigentlichen Einstellungsfehler die Unsicherheit bezüglich der Identität der Punkte, auf welche sich die Messungen beziehen, hinzutritt.

Die Positionen der Vergleichsterne für 1893.0 sind die folgenden:

	α	δ
1	21 ^h 4 ^m 18 ^s	+42° 1'5
2	21 2 19	+41 41.2
3	21 3 32	+41 53.2
4	21 3 32	+41 33.6
5	21 1 37	+42 15.7
6	21 2 35	+42 0.4

Diese Positionen sind durch Anschluss an den Stern

BD. +41°40'16 21^h 4^m 23^s 22 +41° 58' 29".4 (1875.0)

erhalten, dessen Position Herr Prof. Küstner die Gefälligkeit hatte aus den Bonner Zonen mitzuthellen.

Die beiden Abstände des Nebels von den Sternen 3 und 6 sind gemessen worden. Der Bogenwerth der in Einheiten des Maassstabes gefundenen Distanzen ist dann mit Hülfe der Abstände [1, 2] resp. [4, 5] ermittelt worden. Diese Sternpaare erfüllen sehr nahe die oben geforderten Bedingungen, so dass die anzubringende Verbesserung für Refraction bei [N, 3] im Maximum nur wenige Tausendstel der Bogensekunde, bei [N, 6] einige Hunderttheile in Stundenwinkeln über 4^h erreicht. Die Winkelwerthe der Normaldistanzen [1, 2] und [4, 5] sind nicht aus den oben angeführten Coordinaten berechnet, sondern durch Verbindung mit der bereits früher genau bestimmten Entfernung der Sterne BD. +38°43'35 und BD. +37°41'89 gewonnen worden, indem beide Sternpaare zu diesem Zwecke unmittelbar nach einander aufgenommen wurden. Für die Entfernungen [1, 2] und [4, 5] ergaben sich die Werthe 30' 2".8 resp. 47' 12".2.

In der folgenden Tabelle gebe ich die Mittelwerthe der Messungen der drei Aufnahmen und das Mittel der entsprechenden Sternzeiten.

1892	[N, 3]	[N, 6]
Juni 17 17 ^h .4	7' 24".58	13' 9".52
24 19.2	24.67	9.71
27 17.2	24.40	9.97
27 18.7	24.32	9.55
28 17.4	24.66	9.86
Juli 2 18.2	24.25	9.56
3 18.3	24.55	9.64
5 17.7	24.45	9.51
8 17.7	24.46	9.79 Gew. 1/2
11 17.9	24.50 Gew. 1/2	9.54 » 1/2
12 18.4	24.41	9.85
25 19.3	24.33	10.01
26 19.2	24.35	10.06
27 18.7	7 24.39	13 9.80

1) Nur 1 Aufnahme, durch Wolken unterbrochen.

2) Nur 2 Aufnahmen.

3) Matte Bilder.

4) Einstellung unsicher.

1892-93	[N, 3]	[N, 6]
Aug. 5 18 ^h 9	7' 24".50	13' 9".55
12 19.4	24.56	9.56
Sept. 13 21.1	24.30	9.73
16 21.0	24.50	9.62
25 23.5	24.49 Gew. 1/2	9.77 Gew. 1/2
28 23.8	24.57	9.81
29 23.9	24.18 Gew. 1/2	9.68 Gew. 1/2
30 20.8	24.41	9.67
Oct. 3 20.9	24.53	9.62
24 1.9	24.21 1) Gew. 1/4	— 3)
26 23.9	24.46 2) » 1/2	— 4)
28 22.5	24.31 » 1/2	9.59 Gew. 1/2
Nov. 3 22.4	24.06 » 1/2	9.55 » 1/4
16 0.7	24.32	9.61
Dec. 22 3.2	24.36	9.33
Jan. 11 2.1	24.23 Gew. 1/2	9.64 Gew. 1/2
Mai 23 17.0	24.51	9.66
Juni 7 17.9	24.46	9.84
8 16.9	24.58	9.41
14 17.9	7 24.79 Gew. 1/2	13 9.46 Gew. 1/2

Der wahrscheinliche Fehler dieser Mittelwerthe, aus den Messungen der drei Aufnahmen jeder Platte berechnet, wird für [N, 3] ± 0.06 , für [N, 6] ± 0.09 . Der Unterschied beider Werthe hat seinen Grund in der ungleich scharfen Begrenzung des Nebels in den Richtungen [N, 3] und [N, 6], so dass die Messung nicht mit derselben Sicherheit in beiden Richtungen ausgeführt werden kann.

Vorstehende Zahlen wurden nun zu den folgenden Mitteln zusammengezogen.

1892-93	[N, 3]	[N, 6]	Gew.
Juni 25	7' 24".53	13' 9".72	2/3
Juli 13	24.40	9.77	1
Aug. 8	24.53	9.56	1/3
Sept. 23	24.42	9.71	1/3
Oct. 18	24.43	9.61	1
Nov. 10	24.23	9.60	1/3
Jan. 2	24.32	9.43	1/3
Juni 5	7 24.56	13 9.61	1/3

In beiden Reihen ist nur eine geringfügige Schwankung bemerkbar. Sind die angenommenen Distanzen von [N, 3] und [N, 6] für 1892.0 resp. 7' 24".40 und 13' 9".60, ihre Verbesserungen x und x_1 , die relativen jährlichen Eigenbewegungen y und y_1 , und die relativen Parallaxen π und π_1 , so erhält man zur Bestimmung dieser Unbekannten die Normalgleichungen:

aus [N, 3]:

$$\begin{aligned} + 5.0012 x + 3.9222 y - 0.9906 \pi &= +0.1969 \\ + 3.9222 x + 3.5085 y - 0.6864 \pi &= +0.1792 \\ - 0.9906 x - 0.6864 y + 3.0086 \pi &= -0.2650 \end{aligned}$$

aus [N, 6]:

$$\begin{aligned} + 5.0012 x_1 + 3.9222 y_1 - 2.1861 \pi_1 &= +0.2703 \\ + 3.9222 x_1 + 3.5085 y_1 - 1.4470 \pi_1 &= +0.1357 \\ - 2.1861 x_1 - 1.4470 y_1 + 1.4768 \pi_1 &= -0.2296 \end{aligned}$$

und für die Unbekannten selbst:

$$\begin{array}{ll} x = -0.036 \pm 0.053 & x_1 = +0.034 \pm 0.081 \\ y = +0.075 \pm 0.063 & y_1 = -0.070 \pm 0.063 \\ \pi = -0.083 \pm 0.025 & \pi_1 = -0.172 \pm 0.068 \end{array}$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Bedingungsgleichungen ergeben sich die folgenden Abweichungen im Sinne Beobachtung — Rechnung:

(B — R):

$[N, 3]$	$[N, 6]$	$[N, 3]$	$[N, 6]$
+0.05	+0.05	+0.06	-0.05
-0.07	+0.06	-0.13	+0.01
+0.08	-0.11	-0.05	-0.08
+0.02	+0.03	0.00	+0.05

Für die relative Parallaxe folgt also aus beiden Systemen von Bedingungsgleichungen ein negativer Werth, welcher anzeigt, dass die Entfernung des Webb'schen Nebels von der Sonne keineswegs geringer angenommen werden darf, als diejenige der beiden Vergleichsterne 11. Grösse.

Potsdam, Kgl. Observatorium, 1893 August.

J. Wilsing.

Bemerkung zu dem Aufsatz von Herrn Prof. Geelmuyden: „Sur la solution d'équations normales“.

Von Prof. Hammer.

Zu dem genannten Aufsatz in A. N. 3145 mögen folgende Bemerkungen gestattet sein:

Es seien beispielsweise drei Unbekannte x, y, z aus ihrem Normalgleichungs-System, mit den Gauss'schen Bezeichnungen also aus

$$\begin{array}{l} (aa)x + (ab)y + (ac)z = (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z = (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z = (cl) \end{array}$$

zu bestimmen. Nach dem Gauss'schen Algorithmus ist zuerst die am Schluss stehende Unbekannte z zu ermitteln: die erste Eliminationsstufe schafft x fort, indem zur zweiten bzw. dritten Gleichung die mit $-\frac{(ab)}{(aa)}$, bzw. $-\frac{(ac)}{(aa)}$ durchmultiplicirte erste Gleichung addirt wird; auf dieselbe Art wird in der zweiten Eliminationsstufe aus den beiden so sich ergebenden, nur noch y und z enthaltenden Gleichungen y eliminirt, wodurch man z , und zugleich ohne Weiteres im Nenner des Ausdrucks $z = \frac{(cl, 2)}{(cc, 2)}$ das Gewicht von z erhält.

Nach dem Vorschlag von Herrn Geelmuyden wäre es aber, wenn ein Rechenschieber benutzt werden soll, »plus naturel de procéder d'une autre manière qui abrège le calcul«. Man hätte nämlich die erste Gleichung mit (aa) , die zweite mit (ab) , die dritte mit (ac) durchzudividiren, um in den Differenzen der so entstehenden Gleichungen mit 1 als Coefficient von x die zwei reducirten Gleichungen der ersten Stufe zu erhalten u. s. f.

Bedenkt man nun aber, dass jede einzelne der Durchmultiplicationen der zuerst angegebenen Rechenweise nicht

mehr Arbeit darstellt als eine der zweiten Rechnungsart — denn gerade für Ausdrücke von der Form $\frac{m}{n} \cdot t$, wo m und n Constante sind und t eine beliebige Reihe von Werthen annimmt, ist der Rechenschieber, der die Werthe dieses Ausdrucks mit einer Einstellung liefert, überall unersetzlich, wo seine Genauigkeit ausreicht; das Instrument, in all' seiner Einfachheit ganz ohne Zweifel eine der genialsten Erfindungen der practischen Rechenkunst, stellt ja eben nicht eine Tafel dar, sondern unendlich viele, indem jede neue Einstellung der Zunge eine neue Tafel liefert —, während ihre Anzahl beim vorliegenden Beispiel im ersten Fall zwei, im zweiten aber drei beträgt, wobei noch im ersten Fall mehrere Zahlen gar nicht geschrieben zu werden brauchen; und nimmt man ferner hinzu, dass man bei der ersten Rechnungsweise auch die Gewichte der Unbekannten bequemer erhält als bei der zweiten, so wird man zu dem Schluss kommen müssen, dass die die Rechnungen der vorstehenden Art vielfach so ausserordentlich abkürzende und bequemer machende Anwendung des Rechenschiebers keinen Grund abgiebt, den Gauss'schen Algorithmus zu verlassen, ja dass man geradezu das Gegentheil sagen kann.

Es sind bei dieser Gelegenheit vielleicht auch einige Notizen über neuere Formen des Rechenschiebers nebst Angabe der damit erreichbaren Genauigkeiten dem oder jenem Leser willkommen.

Seit Jahrzehnten schon hat man gesucht, sich die Vortheile der Rechenschieber-Rechnung auch für den Fall zu verschaffen, dass die Genauigkeit des gewöhnlichen Schiebers von $2 \times 125^{\text{mm}}$ Theilungslänge nicht ausreicht. Bei diesem Instrument in guter Ausführung (wie sie z. B. die Rechenschieber mit Theilung auf Celluloidplatten von