mittlerer Fehler einer Einstellung

$$\pm \frac{18.5}{\sqrt{2}} = \pm 13^{IV} 1,$$

mittlerer Fehler einer Schrauben- bzw. Skalenkorrektur

$$\pm \frac{18.5}{\sqrt{12}} = \pm 5^{IV} 3.$$

In Tabelle a') (pag. 11–14) sind alle ursprünglichen Messungen durch Zufügung der nach b) ermittelten Schrauben- und Skalenkorrekturen verbessert. Die Abweichungen der Dezimalen von den (im ganzen 22) Serienmitteln sind die eigentlichen Meßfehler v_e , und in Tabelle c) (pag. 15–18) zusammengestellt. Es ergibt sich als

mittlerer Fehler einer Einstellung

$$\pm \sqrt{\frac{[v_e v_e]}{154-44}} = \pm 10^{IV} 9,$$

also ein etwas kleinerer Wert als oben; entsprechend als

mittlerer Fehler eines Resultates $\pm 4^{IV} 5$.

Zur Beurteilung dieser Zahlen vergegenwärtige man sich, daß die vorausgehende, III. Dezimale der Revolution auf der Trommel mit Sicherheit geschätzt werden kann, während die IV. nur eine Rechengröße ist.

Die unter bzw. rechts neben der Tabelle c) hingeschriebenen Summen ergeben die zweite Näherung, d. h. die Verbesserungen der Resultate in der oben unter 3. dargelegten Weise. Man sieht, daß die v sich im allgemeinen aufheben; der stärkste Rest bleibt bei Rev. 80 bzw. bei Strich 11, doch ist auch hier die Verbesserung nur etwa gleich der Hälfte des mittl. Fehlers. Infolgedessen sind weitere Näherungen zwecklos; die verbesserten Resultate können nur um einzelne Einheiten der IV. Dezimale von denen der Methode der kleinsten Quadrate abweichen.

Zum Schluß stelle ich die Resultate der drei Schraubenuntersuchungen zusammen.

Bonn, Sternwarte, 1906 Febr. 28.

Einheit: $0.0001 = \frac{1 \text{ mm}}{40000}$.

Rev.	1903 März (vorl.)	1903 Oktober	1906 Februar
40	0	0	0
50		+ 9	+ 12
60	+ 15	+ 15	+ 11
70		+ 24	+ 9
80	+ 10	+ 23	+ 9
90		+ 20	+ 8
100	+ 8	+ 20	0
110		+ 8	+ 7
120	+ 23	- 15	+ 20
130		- 6	+ 26
140	+ 31	+ 5	+ 27
150		+ 10	+ 22
160	0	0	0
mittl. F.	± 12	± 5	± 5

Wie man sieht, wachsen die fortschreitenden Fehler der Schraube über eine ganze Länge von 120^R in maximo zu nur $0.003 = \frac{1}{40000}$ an; die Schraube kann also wohl als sehr gut bezeichnet werden. Des weiteren erkennt man, daß zwischen den Ergebnissen der drei Untersuchungen verbürgte kleine Differenzen auftreten, aus denen hervorgeht, daß die in den Zwischenzeiten zwischen den Untersuchungen durch fortgesetzte Messungen stark beanspruchte Schraube sich ein wenig geändert hat, und zwar scheint sich zur Zeit eigentümlicherweise der Anfangszustand wiederhergestellt zu haben. Obschon die Fehler selbst und ihre Änderungen nur klein sind, so sieht man hieraus doch wieder, daß eine Schraube, wenigstens wenn größere Strecken damit gemessen werden sollen, bezüglich ihrer fortschreitenden Fehler unter Kontrolle gehalten werden muß. Die oben dargelegten Methoden sollen hierzu bequeme Hilfsmittel darbieten.

W. Zuerhellen.

Zur Theorie der Differentialrefraktion.

Von Östen Bergstrand.

In Astr. Nachr. Bd. 158 S. 85 und Bd. 164 S. 373 hat Herr de Ball eine Formel zur strengen Berechnung der wahren (Δ) aus der beobachteten (Δ') Distanz zweier Sterne mitgeteilt. Unter Anwendung der Bezeichnungen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_m$ für die wahren Zenitdistanzen der beiden Sterne s, σ und des

Mittelpunktes m des Bogens $s\sigma$, $\alpha_1' \operatorname{tg} \zeta_1, \alpha_2' \operatorname{tg} \zeta_2, \alpha_m' \operatorname{tg} \zeta_m$ = Refraktion für s bzw. σ und m , B = Fußpunkt des vom Zenit Z senkrecht zu $s\sigma$ gezogenen größten Kreises, γ_m = Winkel zwischen mZ und $m\sigma$ lautet die erwähnte Formel:

$$\Delta = \Delta' - b \sin^2 2\gamma_m + \left\{ \left[\alpha_m' + \frac{1}{2} \frac{d^2 \alpha_m'}{d\zeta_m^2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 \right] \sin \Delta - \left[\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{6} \frac{d^3 \alpha_m'}{d\zeta_m^3} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 \right] \sin 2Bm \right\} \sec Bs \sec B\sigma. \quad (1)$$

Hierin ist

$$b = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\alpha'' \operatorname{tg}^2 \zeta_m}{2 + \alpha'' \sec^2 \zeta_m} \right)^2 \quad (2)$$

wo α'' aus der Besselschen Tafel für Mikrometerbeobachtungen gefunden wird, ferner

$$\sec Bs \sec B\sigma = \frac{2}{\cos 2Bm + \cos A} \quad (3)$$

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} = -\frac{A}{2} \cos \gamma_m. \quad (4)$$

Die Formel (1) ist indessen nicht als ganz einwandfrei zu betrachten, was ich im folgenden nachweisen will. Herr de Ball leitet diese Formel aus der Gleichung

$$A = A' - b \sin^2 2 \gamma_m + \alpha_1' \operatorname{tg} Bs - \alpha_2' \operatorname{tg} B\sigma$$

ab, indem er statt α_1' und α_2' den Koeffizienten α_m' und dessen Differentialquotienten in bezug auf ζ_m einführt. Die Beziehungen zwischen α_1' und α_2' einerseits und α_m' , $\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m}$, ... andererseits sind aber von Herrn de Ball nicht ganz richtig angesetzt worden. Wenn man nämlich mit α_0' den für die Zenitdistanz $\zeta_0 = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$ gültigen Wert des Refraktionskoeffizienten bezeichnet, hat man offenbar

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_0' - \frac{d\alpha_0'}{d\zeta_0} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha_0'}{d\zeta_0^2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\alpha_0'}{d\zeta_0^3} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 + \dots \\ \alpha_2' &= \alpha_0' + \frac{d\alpha_0'}{d\zeta_0} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha_0'}{d\zeta_0^2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\alpha_0'}{d\zeta_0^3} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Nun darf man nicht ohne weiteres $\alpha_0' = \alpha_m'$ setzen. Man findet nämlich leicht, daß

$$\alpha_0' = \alpha_m' + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \sin^2 \gamma_m \cotg \zeta_m \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

oder

$$\alpha_0' = \alpha_m' + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2$$

ist. Ebenso hat man

$$\frac{d\alpha_0'}{d\zeta_0} = \frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2$$

u. s. f. Es ergeben sich also für α_1' und α_2' die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_m' - \frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \right] \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[3 \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^3\alpha_m'}{d\zeta_m^3} \right] \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 + \dots \\ \alpha_2' &= \alpha_m' + \frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \right] \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[3 \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^3\alpha_m'}{d\zeta_m^3} \right] \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} A - A' &= -b \sin^2 2 \gamma_m + \left[\alpha_m' + \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \right) \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 \right] (\operatorname{tg} Bs - \operatorname{tg} B\sigma) - \\ &\quad - \left[\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(3 \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^3\alpha_m'}{d\zeta_m^3} \right) \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 \right] (\operatorname{tg} Bs + \operatorname{tg} B\sigma) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} A - A' &= -b \sin^2 2 \gamma_m + \left\{ \left[\alpha_m' + \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \right) \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^2 \right] \sin A - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{d\alpha_m'}{d\zeta_m} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(3 \frac{d^2\alpha_m'}{d\zeta_m^2} \operatorname{tg}^2 \gamma_m \cotg \zeta_m + \frac{d^3\alpha_m'}{d\zeta_m^3} \right) \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^3 \right] \sin 2Bm \right\} \sec Bs \sec B\sigma \quad (6) \end{aligned}$$

durch welche Formel (1) zu ersetzen ist.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß, wenn man die Glieder dritter Ordnung in bezug auf A und $\frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ berücksichtigen soll, die Formel (4) nicht ausreicht; sie muß vielmehr durch die folgende ersetzt werden:

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} = -\frac{A}{2} \cos \gamma_m + \frac{1}{6} \left(\frac{A}{2} \right)^3 \sin^2 \gamma_m \cos \gamma_m (1 + 3 \cotg^2 \zeta_m). \quad (7)$$

Der Unterschied zwischen (1) und (6) bezieht sich freilich nur auf Glieder, die in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen zu vernachlässigen sind. Da aber die Formel streng sein soll, und da Herr de Ball durch Ver-

gleichung mit dieser Formel die Genauigkeit seiner vereinfachten Ausdrücke prüft, scheint mir die Sache von einer gewissen Bedeutung zu sein.

Auf anderem Wege habe ich Formeln zur Berechnung der Differentialrefraktion in Positionswinkel und Distanz abgeleitet, worin alle Glieder dritter Ordnung in bezug auf Δ' und zweiter Ordnung in bezug auf α' und dessen Differentialkoeffizienten berücksichtigt worden sind. Keines der von $\alpha'^2 \Delta'^3$, $\alpha' \frac{d\alpha'}{d\zeta} \Delta'^3$, $\left(\frac{d\alpha'}{d\zeta}\right)^2 \Delta'^3$, ... abhängigen Glieder kann indessen, selbst für $\zeta = 80^\circ$ und $\Delta' = 2^\circ$, einen Betrag von mehr als etwa 0,01 erreichen; diese Glieder sind wohl

also stets als verschwindend klein zu betrachten. Ich will hier unter Weglassung der genannten Glieder meine Formeln ohne Beweis mitteilen. Eine vollständige Darlegung derselben nebst den nötigen Hilfstafeln wird in der nächsten Zeit veröffentlicht werden.

Unter Anwendung der Bezeichnungen p , p' für die Positionswinkel im Mittelpunkt des wahren bzw. scheinbaren Bogens zwischen den beiden Sternen, δ , ζ , q = Deklination, Zenitdistanz und parallaktischer Winkel des wahren Mittelpunktes, lauten die erwähnten Formeln, die eine Orientierung nach dem wahren Parallel voraussetzen:

$$\left. \begin{aligned} p - p' &= -\alpha' \operatorname{tg} \zeta \operatorname{tg} \delta \sin q - \frac{1}{2} \left\{ \alpha' \operatorname{tg}^2 \zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta + \frac{1}{2} \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \sec^2 \zeta + \alpha' \frac{d\alpha'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta \sec^2 \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha'}{d\zeta} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \zeta + \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} \Delta'^2 \left[\alpha' \operatorname{tg}^2 \zeta (2 + \operatorname{tg}^2 \zeta) + \frac{d\alpha'}{d\zeta} \left(\operatorname{tg}^3 \zeta + \frac{5}{3} \operatorname{tg} \zeta - \frac{1}{2} \cotg \zeta \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \alpha'}{d\zeta^2} \sec^2 \zeta + \frac{1}{6} \frac{d^3 \alpha'}{d\zeta^3} \operatorname{tg} \zeta \right] \} \times \\ &\quad \times \sin 2(p' - q) + \frac{1}{8} \left\{ \alpha'^2 \operatorname{tg}^4 \zeta + 2 \alpha' \frac{d\alpha'}{d\zeta} \operatorname{tg}^3 \zeta + \left(\frac{d\alpha'}{d\zeta} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \zeta - \frac{1}{4} \Delta'^2 \left[\alpha' \operatorname{tg}^4 \zeta + \right. \right. \\ &\quad + \frac{d\alpha'}{d\zeta} \left(\operatorname{tg}^3 \zeta - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \zeta + \frac{1}{2} \cotg \zeta \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \alpha'}{d\zeta^2} (\operatorname{tg}^2 \zeta - 1) + \frac{1}{6} \frac{d^3 \alpha'}{d\zeta^3} \operatorname{tg} \zeta \left. \right] \} \sin 4(p' - q) - d_1 \\ \frac{\Delta - \Delta'}{\Delta'} &= \alpha' + \alpha'^2 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \zeta \right) + \frac{1}{12} \Delta'^2 \left(\alpha' + \frac{3}{2} \frac{d\alpha'}{d\zeta} \cotg \zeta \right) + \\ &\quad + \left\{ \alpha' \operatorname{tg}^2 \zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta + \frac{3}{2} \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \sec^2 \zeta + \alpha' \frac{d\alpha'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \zeta) + \frac{3}{2} \left(\frac{d\alpha'}{d\zeta} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \zeta + \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} \Delta'^2 \left[\alpha' \operatorname{tg}^2 \zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta} \left(\operatorname{tg} \zeta - \frac{3}{4} \cotg \zeta \right) + \frac{3}{4} \frac{d^2 \alpha'}{d\zeta^2} \right] \} \cos^2(p' - q) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \alpha'^2 \operatorname{tg}^4 \zeta + 2 \alpha' \frac{d\alpha'}{d\zeta} \operatorname{tg}^3 \zeta + \left(\frac{d\alpha'}{d\zeta} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \zeta - \frac{1}{2} \Delta'^2 \left[\alpha' \operatorname{tg}^4 \zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta} \left(\operatorname{tg}^3 \zeta - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \zeta + \frac{1}{2} \cotg \zeta \right) + \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2 \alpha'}{d\zeta^2} (\operatorname{tg}^2 \zeta - 1) + \frac{1}{6} \frac{d^3 \alpha'}{d\zeta^3} \operatorname{tg} \zeta \left. \right] \} \cos^4(p' - q) + d_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die beiden von $\operatorname{tg} \delta$ abhängigen Größen d_1 und d_2 sind kleine Korrekturen, die nur für große Deklinationen und kleine Polhöhen merkbar werden können.

Die Formeln (8) können in folgender Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} p - p' &= -\alpha' \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \zeta \sin q + P_1 \operatorname{tg}^2 \zeta \sin 2(p' - q) + P_2 \operatorname{tg}^4 \zeta \sin 4(p' - q) - d_1 \\ \frac{\Delta - \Delta'}{\Delta'} &= S_0 + S_1 \operatorname{tg}^2 \zeta \cos^2(p' - q) + S_2 \operatorname{tg}^4 \zeta \cos^4(p' - q) + d_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wo die Koeffizienten P und S Funktionen von $\operatorname{tg}^2 \zeta$ sind, die für sehr große Zenitdistanzen auch mit Δ' schwach veränderlich sind; sie lassen sich sehr leicht mit dem Argument ζ tabulieren. Auch die Berücksichtigung der meteorologischen Daten läßt sich ohne Schwierigkeit recht bequem bewerkstelligen.

Upsala, Sternwarte, 1906 April 18.

Östen Bergstrand.

Mesure de l'éclat intrinsèque des surfaces lumineuses

au moyen de photomètre Zöllner.

Le photomètre Zöllner de ma construction est muni de deux oculaires; pour des mesures mentionnées dans le titre de cet article, il faut se servir de l'oculaire latéral en introduisant dans le photomètre des modifications suivantes: au lieu de la plaque réfléchissante, il faut en installer une autre, avec une face dépolie du côté de l'oculaire ordinaire et avec un petit orifice dans le centre, ou un prisme Lummer-

Brodhun, ou bien, comme je l'ai fait, une plaque argentée sur la face tournée vers l'objectif; au centre, cette argenture est enlevée de manière à présenter un petit trou avec un diamètre de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ de mm.

L'oculaire latéral doit être pointé précisément sur les bords de cet orifice.

Un pareil oculaire a été construit pour moi par Zeiß