

## 17.

# Einige Bemerkungen zum *Eulerschen* Additionstheorem der elliptischen Integrale.

(Vom dem Herrn Dr. *Richelot*, Prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

*Euler* hat bekanntlich das Additionstheorem der elliptischen Integrale auf indirectem Wege, nämlich dadurch gefunden, daß er eine symmetrische ganze rationale Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Variabeln differentiirt und das Resultat auf die Form

$$\frac{dy}{\sqrt{(fy)}} \pm \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} = 0$$

bringt, wo der Kürze wegen

$$\begin{aligned} fx &= A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4, \\ fy &= A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Da die genannte endliche Gleichung sechs und die gefundene Differentialgleichung nur fünf von einander unabhängige Constanten enthält, so erkennt *Euler* in der erstern eine vollständige Integralgleichung, und stellt nun eine kunstreiche Rechnung an, um die ersten sechs Coëfficienten durch die fünf letztern und eine sechste Constante auszudrücken, welche dann die willkürliche Constante der Integralgleichung ist.

In der später von *Lagrange* gefundenen directen Integration der nämlichen separirten Differentialgleichung erscheint die Integralgleichung in der Form, daß die willkürliche Constante abgesondert ist, oder, wie man jetzt zu sagen pflegt, als Integral derselben Differentialgleichung.

Obgleich *Euler* in der Folge dieses Integral, dessen Ableitung von *Lagrange* er so ungemein bewundert, dazu benutzt hat, die obenerwähnte Bestimmung der sechs Coëfficienten auf eine andere Weise auszuführen und dann auf diesem Wege seinen Zusammenhang mit der oben erwähnten Integralgleichung nachzuweisen, so wüßte ich doch nicht, daß man Dasselbe ohne weitläufige Rechnung, direct durch Auflösung der *Eulerschen* Integralgleichung nach einer sechsten Constante entwickelt hätte. Ich werde in den folgenden Zeilen diese einfache Auflösung mittheilen und einige Bemerkungen über den Zusammenhang der *Eulerschen* Bestimmung jener sechs Constanten mit andern bekannten Gegenständen voranschicken.

## §. 1.

Setzt man der Kürze wegen

$$(2.) \quad \begin{cases} a + 2bx + dx^2 = 2X, & a + 2by + dy^2 = 2Y, \\ b + (c+d)x + ex^2 = X_1, & b + (c+d)y + ey^2 = Y_1, \\ d + 2ex + fx^2 = 2X_2, & d + 2ey + fy^2 = 2Y_2, \end{cases}$$

so läßt sich die oben erwähnte ganze rationale symmetrische Gleichung

$$(3.) \quad 0 = a + 2b(x+y) + 2cxy + d(x+y)^2 + 2exy(x+y) + fx^2y^2$$

auf folgende zwei Formen bringen:

$$(4.) \quad \begin{cases} 0 = X + X_1y + X_2y^2, \\ 0 = Y + Y_1x + Y_2x^2, \end{cases}$$

deren Differentiation nach  $x$  und  $y$  folgende Differentialgleichung giebt:

$$(5.) \quad 0 = (X_1 + 2X_2y)dy + (Y_1 + 2Y_2x)dx.$$

Andrerseits geben die beiden Gleichungen (4.) die Formeln

$$(6.) \quad \begin{cases} (X_1 + 2X_2y)^2 = X_1^2 - 4XX_2, \\ (Y_1 + 2Y_2x)^2 = Y_1^2 - 4YY_2. \end{cases}$$

Man erhält daher, je nachdem die Werthe der Gröfsen  $x$  und  $y$  dem Producte

$$(X_1 + 2X_2y)(Y_1 + 2Y_2x)$$

einen positiven oder negativen Werth geben, aus der Differentialgleichung (5.) folgende Gleichung:

$$(7.) \quad \frac{dy}{\sqrt{(Y_1^2 - 4YY_2)}} + \frac{\varepsilon dx}{\sqrt{(X_1^2 - 4XX_2)}} = 0;$$

wo  $\varepsilon = \pm 1$  zu setzen ist und das obere Zeichen für den positiven, das untere für den negativen Werth des Products (6.) gilt.

Vergleicht man nun die Coëfficienten der gleichen Potenzen in den Ausdrücken

$$X_1^2 - 4XX_2 \quad \text{und} \quad fx,$$

so erhält man die Gleichungen:

$$(8.) \quad \begin{cases} A = b^2 - ad, \\ B = bc - ae, \\ C = c^2 - af - 2(be - cd), \\ D = ce - bf, \\ E = e^2 - df, \end{cases}$$

aus denen man, um die gegebene Function  $fx$  durch die Form

$$X_1^2 - 4XX_2$$

darzustellen, die sechs Gröfsen  $a, b, c, d, e, f$  durch die gröfsern fünf Buch-

staben und durch die Formel

$$c^2 - af = M$$

ausdrücken kann. Die Substitution dieser auf eine ähnliche Weise von *Euler* gefundenen Ausdrücke in die Gleichung (3.) führt auf eine quadratische Gleichung in Bezug auf  $M$ , deren Auflösung ein Integral giebt, welches nach einigen Reductionen auf die von *Lagrange* gefundene Form

$$(9.) \quad \left( \frac{\sqrt{(fy)} - \varepsilon \sqrt{(fx)}}{y-x} \right)^2 - 2D(y+x) - E(y+x)^2 = M$$

zurückkommt, welche das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(fy)}} + \frac{\varepsilon dx}{\sqrt{(fx)}} = 0$$

ist.

## §. 2

Zuvörderst die Auflösung der Gleichungen (8.) läßt sich aus einem allgemeineren Gesichtspuncte auffassen und dann aus bekannten Formeln abschreiben. Sieht man nämlich die Größen

$$\begin{aligned} a, d, f, \\ e, c, b \end{aligned}$$

als die Coëfficienten der ternären Form

$$ax'x' + dx''x'' + fx'''x''' + 2ex''x''' + 2cx'''x' + 2bx'x''$$

an, welche durch die Substitution

$$x' = 1, \quad x'' = x + y, \quad x''' = xy$$

in die Seite rechts der Gleichung (3.) übergeht, so sind die den Gleichungen (8.) entsprechenden Werthe der Größen

$$\begin{aligned} E, \quad M, \quad A, \\ -B, \quad -\frac{1}{2}(M-C), \quad -D, \end{aligned}$$

wo  $M = c^2 - af$  gesetzt ist, die Coëfficienten der zu jener gehörigen ternären Form (Forma adiuncta. Disq. arith. No. 267.):

$$Ey'y' + My''y'' + Ay'''y''' - 2By''y''' - (M-C)y'''y' - 2Dy'y''.$$

Dieselbe hat die Eigenschaft, daß sie durch die Substitution

$$y' = z^2, \quad y'' = -z, \quad y''' = 1$$

in die Function  $fz$  übergeht.

Man erhält daher umgekehrt aus den hiezu gehörigen bekannten Formeln, wenn man die Determinanten der beiden Formen durch

$$(10.) \quad \begin{cases} ae^2 + dc^2 + fb^2 - adf - 2bce = \Delta, \\ EB^2 + M \cdot \frac{1}{2}(M-C)^2 + AD^2 - EMA + DB(MC) = D \end{cases}$$

bezeichnet, folgende Ausdrücke für die Coëfficienten der ersten Form:

$$(11.) \quad \begin{cases} D = \Delta A, \\ B^2 - AM = a \cdot \Delta, \quad \frac{1}{2}(M-C)^2 - AE = d \cdot \Delta, \quad A^2 - EM = f \cdot \Delta, \\ BE + D \frac{1}{2}(M-C) = -e \Delta, \quad BD + M \frac{1}{2}(M-C) = -c \Delta, \quad AD + B \frac{1}{2}(M-C) = -b \Delta; \end{cases}$$

welche mit den von *Euler* gefundenen Formeln, *mutatis mutandis*, übereinstimmen.

Setzt man nämlich die erste Form der Kürze wegen

$$= F(x', x'', x''')$$

und führt statt der Variabeln  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$  die durch die Gleichungen

$$(12.) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} F' x' = ax' + bx'' + cx''' = y' \sqrt{(\pm \Delta)}, \\ \frac{1}{2} F' x'' = bx' + dx'' + ex''' = y'' \sqrt{(\pm \Delta)}, \\ \frac{1}{2} F' x''' = cx' + ex'' + fx''' = y''' \sqrt{(\pm \Delta)} \end{cases}$$

bestimmten Gröfsen  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  ein, wo das obere Zeichen für einen *positiven*, das untere für einen *negativen* Werth von  $\Delta$  zu nehmen und der Werth  $\Delta = 0$  auszuschließen ist, so gelangt man zur zweiten Form.

Nun folgt aus der identischen Gleichung

$$F(x', x'', x''') = \frac{1}{2}(x' F' x' + x'' F' x'' + x''' F' x''')$$

folgende:

$$F(x', x'', x''') = \sqrt{(\pm \Delta)}(x' y' + x'' y'' + x''' y'''),$$

welche, mit Benutzung der aus den Gleichungen (12.) folgenden Werthe von  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , mit der zweiten Form verglichen, auf die Gleichungen (8.) führt; und eben so, mit Benutzung der aus diesen Auflösungen der Gleichungen (12.) folgenden Werthe von  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  (ausgedrückt in den grofsen Buchstaben), so wie eines Lehrsatzes aus der Theorie der Determinanten, mit der ersten Form verglichen, die Gleichungen (11.) giebt.

Diese unmittelbar auf Formen von einer beliebigen Anzahl von Variabeln auszudehnende Bestimmungsart der Coëfficienten zusammengehöriger Formen leidet nur eine Ausnahme, wenn die Determinante der ursprünglichen Form, hier als der Ausdruck  $\Delta$ , verschwindet. Schließt man also diesen Fall aus und nimmt die sechs Gröfsen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  von einander unabhängig an, so sind die durch die Gleichungen (8.) bestimmten fünf Functionen derselben, und die Function

$$M = c^2 - af$$

ist die sechste der von einander unabhängigen Functionen dieser sechs Gröfsen.

Daher ist  $Y$  in der Integralgleichung als eine *willkürliche* Constante zu betrachten.

Diese Bemerkung ergibt sich schon daraus, dafs, wenn die sechs Functionen nicht von einander unabhängig wären, die sechs beliebigen Gröfsen  $a, b, c, d, e, f$  mittels der Gleichungen (11.) durch weniger als sechs Gröfsen ausgedrückt werden könnten; was ein Widerspruch ist.

Allein ich will diese Gelegenheit benutzen, um die von *Jacobi* (S. Band 22. Seite 319 dies. Journ.) sogenannte *Functionaldeterminante* dieser sechs Functionen zu bestimmen, von deren Verschwinden oder Nichtverschwinden es bekanntlich abhängt, ob die Functionen von einander abhängig sind, oder nicht.

Man betrachte folgendes System linearer Gleichungen:

$$(13.) \quad \begin{cases} k_a = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial a} x_a + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial b} x_b + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial c} x_c + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial d} x_d + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial e} x_e + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a \partial f} x_f, \\ k_b = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial a} x_a + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial b} x_b + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial c} x_c + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial d} x_d + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial e} x_e + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial b \partial f} x_f, \\ \text{etc.} \\ k_f = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial a} x_a + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial b} x_b + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial c} x_c + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial d} x_d + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial e} x_e + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f \partial f} x_f, \end{cases}$$

deren Coëfficienten die zweiten partiellen Differentialquotienten der Determinante  $\Delta$  nach den sechs Elementen, oder die ersten partiellen Differentialquotienten der sechs Functionen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial a} &= e^2 - df = E, & \frac{\partial \Delta}{\partial b} &= 2(bf - ce) = -2D, & \frac{\partial \Delta}{\partial c} &= 2(cd - be) = -(M - C), \\ \frac{\partial \Delta}{\partial d} &= c^2 - af = M, & \frac{\partial \Delta}{\partial e} &= 2(ae - bc) = -2B, & \frac{\partial \Delta}{\partial f} &= b^2 - ad = A \end{aligned}$$

sind, und in denen die Gröfsen  $x_a, x_b, \text{etc.}$  die Unbekannten und die Gröfsen  $k_a, k_b, \text{etc.}$  beliebige gegebene Werthe bezeichnen. Da die gesuchte Functionaldeterminante mit dem Nenner der sechs Ausdrücke für  $x_a, x_b, \text{etc.}$ , welche diesen Gleichungen Genüge leisten, übereinstimmt, so kommt es darauf an, dieselben aufzulösen.

Zu dem Ende bediene man sich der aus den Eigenschaften der Determinanten geradezu sich ergebenden drei *identischen* Gleichungen

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \Delta}{\partial a} - d \frac{\partial \Delta}{\partial d} - e \frac{\partial \Delta}{\partial e} + f \frac{\partial \Delta}{\partial f} &= -\Delta, \\ a \frac{\partial \Delta}{\partial b} + 2b \frac{\partial \Delta}{\partial a} + c \frac{\partial \Delta}{\partial e} &= 0, \\ a \frac{\partial \Delta}{\partial c} + b \frac{\partial \Delta}{\partial e} + 2c \frac{\partial \Delta}{\partial f} &= 0. \end{aligned}$$

Differentiirt man dieselben nach allen sechs Elementen, so erhält man dreimal sechs identische Gleichungen, mit deren Hülfe aus den vorgeschriebenen sechs Gleichungen (13.) folgende drei folgen:

$$(14.) \quad \begin{cases} -ak_a + dk_d + ek_e + fk_f = 2 \frac{\partial \Delta}{\partial a} x_a + \frac{\partial \Delta}{\partial b} x_b + \frac{\partial \Delta}{\partial c} x_c, \\ -ak_b - 2bk_d - ck_e = \frac{\partial \Delta}{\partial b} x_a + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial d} x_b + \frac{\partial \Delta}{\partial e} x_c, \\ -ak_c - 2bk_e - ck_f = \frac{\partial \Delta}{\partial c} x_a + \frac{\partial \Delta}{\partial e} x_b + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial f} x_c. \end{cases}$$

Vertauscht man hierin überall die sechs Buchstaben

$$a, b, c, d, e, f,$$

respective mit

$$d, e, b, f, c, a,$$

und mit

$$f, c, e, a, b, d,$$

so erhält man zwei ähnliche Systeme von drei Gleichungen. Das eine (15.) enthält die unbekannten Größen

$$x_d, x_e, x_b,$$

das andere (16.) die Größen

$$x_f, x_c, x_e,$$

und in allen drei Systemen ist die aus den neun Coëfficienten gebildete Determinante die Determinante der neun Größen

$$\begin{array}{ccc} 2 \frac{\partial \Delta}{\partial a}, & \frac{\partial \Delta}{\partial b}, & \frac{\partial \Delta}{\partial c}, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial b}, & 2 \frac{\partial \Delta}{\partial d}, & \frac{\partial \Delta}{\partial e}, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial c}, & \frac{\partial \Delta}{\partial e}, & 2 \frac{\partial \Delta}{\partial f}, \end{array}$$

oder, mit Bezug auf die Gleichungen (10.) und (11.):

$$= 8D = 8\Delta\Delta.$$

Da nun diese Determinante der gemeinsame Nenner der sechs aus den drei Systemen von Gleichungen (13, 14 und 15.) sich ergebenden Werthe der Unbekannten ist, so stimmt sie auch mit der Determinante der 36 Coëfficienten der Gleichungen (12.), also mit der gesuchten Functionaldeterminante bis auf einen constanten Zahlenfactor überein, welchen man leicht durch Vergleichung zweier gleichnamigen Glieder findet.

Dies giebt demnach folgenden Satz:

Die Functionaldeterminante der sechs Functionen

$$\begin{aligned} e^2 - df, \quad 2(bf - ce), \quad 2(cd - be), \\ c^2 - af, \quad 2(ae - bc), \quad b^2 - ad, \end{aligned}$$

oder, was Dasselbe ist, die Determinante der 36 partiellen zweiten Differentialquotienten der Determinante  $\Delta$  der Größen

$$\begin{aligned} -a, \quad -b, \quad -c, \\ -b, \quad -d, \quad -e, \\ -c, \quad -e, \quad -f, \end{aligned}$$

stimmt, bis auf einen Zahlenfactor, mit dem Quadrat der letztern Determinante überein, und ist, wenn man die Elemente nach den sechs Größen  $a, b, c, d, e, f$  auf einander folgen läßt, also so wie die Coëfficienten der Gleichung (13.) geordnet sich zeigen:

$$= -16 \Delta \Delta.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man einen analogen Satz für mehrere Elemente, und auch für solche, bei denen die horizontalen Reihen mit den verticalen Reihen nicht übereinstimmen. Ausserdem bestätigt der Satz die obigen Bemerkungen in Bezug auf die Unabhängigkeit der obigen sechs Ausdrücke.

### §. 3.

Ich gehe jetzt zu dem eigentlichen Zweck dieses Aufsatzes über, indem ich das Integral (9.) ohne vorhergehende *Auflösung* der Gleichungen (8.) aus der Integralgleichung (3.) ableiten werde.

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichungen (6.) die Quadratwurzeln und benutzt die daselbst (§. 1.) eingeführte Bezeichnung, so erhält man die Gleichungen

$$(15.) \quad \begin{cases} X_1 + 2X_2y = \pm \varepsilon \sqrt{(X_1^2 - 4XX_2)} = \pm \varepsilon \sqrt{(fx)}, \\ Y_1 + 2Y_2x = \pm \varepsilon \sqrt{(Y_1^2 - 4YY_2)} = \pm \sqrt{(fy)}. \end{cases}$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab und erhebt beide Seiten der resultirenden Gleichung zum Quadrat, so erhält man, mit Benutzung der Formeln (2.), die Gleichung

$$(c + e(y + x) + f \cdot yx)^2 (y - x)^2 = (\sqrt{(fy)} - \varepsilon \sqrt{(fx)})^2.$$

Addirt man hiezu die aus der Gleichung (3.) durch Multiplication mit  $f(y - x)^2$  hervorgehende Gleichung

$$0 = (y - x)^2 (af + 2bf(y + x) + 2cfyx + df(y + x)^2 + 2efyx(y + x) + f^2 y^2 x^2),$$

so erhält man, nach der Division mit  $(y-x)^2$ , die Gleichung

$$c^2 - af + 2(ce - bf)(y+x) + (e^2 - df)(y+x)^2 = \left( \frac{\sqrt{fy} - \varepsilon \sqrt{fx}}{y-x} \right)^2;$$

woraus mit Hinzuziehung der Bezeichnung (8.) folgt, daß der Ausdruck

$$(16.) \quad \left( \frac{\sqrt{fy} - \varepsilon \sqrt{fx}}{y-x} \right)^2 - 2D(y+x) - E(y+x)^2 = c^2 - af,$$

also unabhängig ist von den in der Differentialgleichung

$$(17.) \quad \frac{dy}{\sqrt{fy}} + \frac{\varepsilon dx}{\sqrt{fx}} = 0$$

vorkommenden Variablen und Constanten; d. h. daß die Gleichung (16.) ihr Integral ist, da sie aus der Integralgleichung derselben abgeleitet wurde.

Es folgen hieraus, beiläufig bemerkt, die Formeln (12.) direct und ohne weitläufige Rechnung, dadurch, daß man nach Einführung der Größe  $M = c^2 - af$  die Gleichung

$$\left( \frac{\sqrt{fy} - \varepsilon \sqrt{fx}}{y-x} \right)^2 - 2D(y+x) - E(y+x)^2 - M = 0$$

durch Multiplication mit dem Factor

$$(y-x)^2 \left\{ \left( \frac{\sqrt{fy} - \varepsilon \sqrt{fx}}{y-x} \right)^2 - 2D(y+x) - E(y+x)^2 - M \right\}$$

rational macht, wodurch man folgende Ausdrücke erhält:

$$0 = \left( \frac{fy - fx}{y-x} \right)^2 - 2\{M + 2D(y+x) + E(y+x)^2\}(fy + fx) \\ + \{M + 2D(y+x) + E(y+x)^2\}(y-x)^2.$$

Die Vergleichung derselben mit der Gleichung (3.) giebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4(B^2 - AM) &= aN, \\ 2B(C - M) - 4AD &= bN, \\ 2C(C - M) - 4BD &= cN, \\ (C - M)^2 - 4AE &= dN, \\ 2D(C - M) - 4BE &= eN, \\ 4(D^2 - EM) &= fN; \end{aligned}$$

wo  $N$  ein Factor ist, den man durch die Vergleichung dieser Formeln mit den Gleichungen (8.) findet, wonach

$$N^2 = 4\{AD^2 + EB^2 + M(M - C)^2 - 4AEM - 4BD(C - M)\}$$

ist und also die genaue Übereinstimmung mit den Formeln (11.) Statt findet.



## §. 4.

Aus derselben rationalen Integralgleichung (3.) läßt sich das Integral der Differentialgleichung (17.) in einer andern Form ableiten, welche vor der eben gefundenen einen gewissen Vorzug hat. Zu dem Ende bilde man aus den Gleichungen (15.) folgende:

$$\pm \frac{x\sqrt{(fy)} - \varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x} = \frac{x(Y_1 + 2Y_2x) - y(X_1 + 2X_2y)}{y-x},$$

welche, nach Substitution der Ausdrücke (2.) für  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ , die Form

$$\pm \frac{x\sqrt{(fy)} - \varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x} = b + exy + d(y+x)$$

annimmt. Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung zum Quadrat und subtrahirt davon die aus der Gleichung (3.) folgende Gleichung

$$0 = ad + 2bd(x+y) + 2cd(x+y) + d^2(x+y)^2 + 2dexy(x+y) + dfx^2y^2,$$

so erhält man

$$\left( \frac{x\sqrt{(fy)} - \varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x} \right)^2 = (b^2 - ad) + (e^2 - df)y^2x^2 + 2(be - cd)yx.$$

Hieraus zeigt sich, mit Benutzung der Bezeichnung (8.), daß der Ausdruck:

$$(18.) \quad \frac{1}{yx} \left( \frac{x\sqrt{(fy)} - \varepsilon y\sqrt{(fx)}}{y-x} \right)^2 - \frac{A}{yx} - Eyx = 2(be - cd),$$

also unabhängig von den Variablen und Constanten der Differentialgleichung (17.) ist, d. h. daß die Gleichung (17.), da sie aus der Integralgleichung derselben folgt, ein Integral derselben ist.

Aus der dritten Gleichung (8.) folgt der Zusammenhang zwischen den beiden willkürlichen Constanten der beiden Integrale (16. und 18.), indem die Differenz beider gleich der in der Differentialgleichung vorkommenden Constante  $C$  ist. Es läßt sich daher das letztere Integral auch dadurch aus dem erstern direct ableiten, daß man von demselben die GröÙe  $C$  abzieht und das Resultat einer andern Constante gleich setzt. Dies bestätigt eine leichte Rechnung.

## §. 5.

Setzt man in der Differentialgleichung (17.) und in den Integralen (16. und 18.)

$$x = m - \xi, \quad y = m - v,$$

$$\begin{aligned}
 fm &= A_1, & -f'm &= 2B_1, \\
 \frac{1}{1.2} f''m &= C_1, & -\frac{1}{1.2.3} f'''m &= 2D_1, \\
 \frac{1}{1.2.3.4} f''''m &= E_1 = E,
 \end{aligned}$$

$$f(m-\xi) = A_1 + 2B_1\xi + C_1\xi^2 + 2D_1\xi^3 + E_1\xi^4 = f_1\xi,$$

so erhält man folgenden Satz:

„Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{\sqrt{(f_1v)}} + \frac{\varepsilon d\xi}{\sqrt{(f_1\xi)}} = 0$$

läßt sich auf folgende zwei Formen bringen:

$$\left( \frac{\sqrt{(f_1v)} - \varepsilon(f_1\xi)}{v - \xi} \right)^2 + (2D_1 + 4mE_1)(2m - v - \xi) - E_1(2m - v - \xi)^2 = \text{Const. und}$$

$$\left\{ \frac{(m - \xi)\sqrt{(f_1v)} - \varepsilon(m - v)\sqrt{(f_1\xi)}}{(m - \xi)(m - v)(v - \xi)} \right\}^2 - \frac{f_1m}{(m - \xi)(m - v)} - E_1(m - \xi)(m - v) = \text{Const.},$$

wo  $m$  eine ganz beliebige, von den in der Differentialgleichung vorkommenden Coëfficienten unabhängige Gröfse ist.”

Die letztere dieser beiden Formen, aus welcher nach dem Obigen die erste direct abgeleitet werden kann, stimmt mit derjenigen überein, welche in der dritten Abhandlung 25ten Bandes d. J. für eine Function  $f_1\xi$  vom 2nten Grade durch directe Integration des dazu gehörigen Systems von  $n-1$  Differentialgleichungen, welches ich das *Jacobische System* genannt habe, gefunden ist, und welche aus dem *einen* Integral

$$x_1 x_2 \dots x_n \left\{ \frac{\sqrt{(fx_1)}}{x_1 F'x_1} + \frac{\sqrt{(fx_2)}}{x_2 F'x_2} + \dots + \frac{\sqrt{(fx_n)}}{x_n F'x_n} \right\}^2 - \frac{A_0}{x_1 x_2 \dots x_n} - A_{2n} x_1 x_2 \dots x_n = C,$$

wo

$$fx = A_0 + 2A_1x + A_2x^2 \dots + A_{2n}x^{2n},$$

$$Fx = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

gesetzt ist (S. a. a. O. §. 6.), eben so abgeleitet wird, wie ich das Integral (19.) aus dem Integral (18.) so eben entwickelte.

## §. 6.

Im 32ten Bande d. J. S. 220 hat *Jacobi* durch eine eigenthümliche Benutzung des *Abelschem Theorems* auch eine Form der *rationalen Integralgleichungen* des so eben erwähnten Systems von  $n-1$ , von ihm daselbst *hyperelliptische* genannten Differentialgleichungen angegeben, welche mit der der *Eulerschen Grundgleichung* (3.) die genaueste Analogie hat. Indem er



Weise vollständig lösen, dafs ich die  $n-1$  Integralgleichungen selbst wirklich hinschreibe.

Hat man nämlich die drei genannten Functionen auf die a. a. O. vorgeschriebene Weise mit  $n-1$  von den Coëfficienten

$$A_0, A_1, \dots A_{2n},$$

unabhängigen Coëfficienten bestimmt, so ist das von *Jacobi* durch eine eigenthümliche Behandlung des *Abelschen* Theorems abgeleitete Theorem folgendes:

Die Differentialgleichungen (19.) werden dadurch vollständig integrirt, dafs man für  $x_1, x_2, \dots x_n$  die  $n$  Wurzeln der Gleichung:

$$(22.) \quad Ry^2 + 2Sy + T = 0$$

setzt; wo  $y$  eine ganz beliebige Gröfse ist.

Ich leite hieraus die  $n-1$  Integralgleichungen selbst auf folgende Weise ab.

Die Gleichung (22.), nach  $x$  geordnet, sei folgende:

$$(23.) \quad Y_0 x^n + Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} + \dots + Y_n = 0,$$

wo im Allgemeinen

$$(24.) \quad Y_{n-x} = A_{x,0} + A_{x,1}y + A_{x,2}y^2,$$

gesetzt ist und  $A_{x,0}, A_{x,1}, A_{x,2}$  constante Gröfsen sind. Aus diesem System von  $n+1$  Gleichungen, welche man aus (24.) dadurch erhält, dafs man

$$x = 0, = 1, \dots = n$$

setzt, kann man offenbar durch die Elimination von  $y$ ,  $n-1$  Gleichungen zwischen den Gröfsen

$$\frac{Y_1}{Y_0}, \frac{Y_2}{Y_0}, \dots \frac{Y_n}{Y_0}$$

ableiten. Zu dem Ende setze ich die Determinante der neun Gröfsen

$$\begin{array}{ccc} A_{x,0}, & A_{x,1}, & A_{x,2}, \\ A_{\lambda,0}, & A_{\lambda,1}, & A_{\lambda,2}, \\ A_{\mu,0}, & A_{\mu,1}, & A_{\mu,2}, \end{array}$$

also den Ausdruck

$$(25.) \quad A_{x,0}(A_{\lambda,1}A_{\mu,2} - A_{\lambda,2}A_{\mu,1}) + A_{x,1}(A_{\lambda,2}A_{\mu,0} - A_{\lambda,0}A_{\mu,2}) \\ + A_{x,2}(A_{\lambda,0}A_{\mu,1} - A_{\lambda,1}A_{\mu,0}) = A_{(x,\lambda,\mu)}.$$

Man erhält dann aus den Gleichungen

$$(26.) \quad \begin{cases} Y_{n-x} = A_{x,0} + A_{x,1}y + A_{x,2}y^2, \\ Y_{n-\lambda} = A_{\lambda,0} + A_{\lambda,1}y + A_{\lambda,2}y^2, \\ Y_{n-\mu} = A_{\mu,0} + A_{\mu,1}y + A_{\mu,2}y^2 \end{cases}$$

folgende Formeln:

$$\mathcal{A}_{x,\lambda,\mu} Y^2 = \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{x,2}} Y_{n-x} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\lambda,2}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\mu,2}} Y_{n-\mu},$$

$$\mathcal{A}_{x,\lambda,\mu} Y = \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{x,1}} Y_{n-x} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\lambda,1}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\mu,1}} Y_{n-\mu},$$

$$\mathcal{A}_{x,\lambda,\mu} = \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{x,0}} Y_{n-x} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\lambda,0}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\mu,0}} Y_{n-\mu};$$

wo die partiellen Differentialquotienten von  $\mathcal{A}_{x,\lambda,\mu}$  der Kürze wegen eingeführt sind.

Hieraus erhält man die eine der gesuchten Gleichungsformen durch Elimination von  $y$ , nämlich:

$$(27.) \quad 0 = \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{x,1}} Y_{n-x} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\lambda,1}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\mu,1}} Y_{n-\mu} \right)^2 \\ - \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{x,0}} Y_{n-x} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\lambda,0}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\mu,0}} Y_{n-\mu} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{x,2}} Y_{n-x} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\lambda,2}} Y_{n-\lambda} + \frac{\partial \mathcal{A}_{x\lambda\mu}}{\partial \mathcal{A}_{\mu,2}} Y_{n-\mu} \right).$$

Mit Hinzuziehung einer vierten Gleichung von der Form (24.)

$$Y_{n-q} = \mathcal{A}_{q,0} + \mathcal{A}_{q,1} Y + \mathcal{A}_{q,2} Y^2$$

erhält man die andere gesuchte Gleichungsform

$$(28.) \quad 0 = \mathcal{A}_{x\lambda\mu} \cdot Y_q + \mathcal{A}_{\mu q x} \cdot Y_\lambda - \mathcal{A}_{q x \lambda} \cdot Y_\mu - \mathcal{A}_{\lambda \mu q} \cdot Y_x.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen (27. und 28.)

$$x = 0, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2,$$

$$q = 3, \text{ oder } = 4, \dots = n,$$

so erhält man alle  $n-1$  gesuchten Gleichungen zwischen den Größen

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_n;$$

und hieraus, da aus der Gleichung (23.) folgt, daß

$$-\frac{Y_1}{Y} = x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_1,$$

$$\frac{Y_2}{Y} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = u_2,$$

etc.

$$\pm \frac{Y_n}{Y} = x_1 x_2 \dots x_n = u_n$$

ist, folgen die  $n-1$  gesuchten Integralgleichungen in rationaler Form; nämlich

$$(29.) \quad 0 = \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{0,1}} u_2 - \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{1,1}} u_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{2,1}} \right)^2 \\ - \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{0,0}} u_2 - \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{1,0}} u_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{2,0}} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{0,2}} u_2 - \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{1,2}} u_1 + \frac{\partial \mathcal{A}_{012}}{\partial \mathcal{A}_{2,2}} \right),$$

$$(30.) \quad 0 = \pm \mathcal{A}_{012} \cdot u_q - \mathcal{A}_{2q0} \cdot u_1 - \mathcal{A}_{q01} \cdot u_2 - \mathcal{A}_{12q};$$

wo  $\rho = 3, 4, \dots n$  zu setzen und das obere Zeichen für ein *gerades*, das untere für ein *ungerades*  $\rho$  zu nehmen ist.

Ich werde jetzt im letzten Paragraph den Fall  $n=2$ , welcher in den frühern Paragraphen auf andere Weise behandelt wurde, besonders betrachten und die sich hier ergebenden Resultate mit der *Eulerschen* Gleichung (3.) vergleichen.

### §. 7.

In diesem Fall hat man die Formeln:

$$(31.) \quad \begin{cases} Y_2 = A_{00} + A_{01}y + A_{02}y^2, \\ Y_1 = A_{10} + A_{11}y + A_{12}y^2, \\ Y_0 = A_{20} + A_{21}y + A_{22}y^2, \end{cases}$$

$$(32.) \quad \begin{cases} R = A_{02} + A_{12}x + A_{22}x^2, \\ 2S = A_{01} + A_{11}x + A_{21}x^2, \\ T = A_{00} + A_{10}x + A_{20}x^2, \end{cases}$$

und die Gleichungen (22. und 23.) nehmen hier die Formen

$$(33.) \quad \begin{cases} 0 = Ry^2 + 2Sy + T \text{ und} \\ 0 = Y_0x^2 + Y_1x + Y_2 \end{cases}$$

an.

Man überzeugt sich hier von dem im vorigen Paragraph zum Grunde gelegten Satz sehr leicht auf folgendem directen Wege. Die beiden Wurzeln der zweiten Gleichung (33.) seien  $x_1$  und  $x_2$ , während  $y$  einen und denselben Werth hat. Dann geben die durch die Substitution  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , aus ihr hervorgehenden Gleichungen, nach  $x_1$ ,  $x_2$ , und  $y$  differentiirt, folgende Ausdrücke:

$$(34.) \quad \begin{cases} 2(R_1y + S_1)dy + (2Y_0x_1 + Y_1)dx_1 = 0, \\ 2(R_2y + S_2)dy + (2Y_0x_2 + Y_1)dx_2 = 0; \end{cases}$$

wo  $R_1$  und  $S_1$ ,  $R_2$  und  $S_2$  die Functionen  $R$  und  $S$  nach den Substitutionen bezeichnen.

Andrerseits giebt die Auflösung der Gleichungen (33.) die Formeln

$$2Y_0x_1 + Y_1 = \pm \sqrt{(Y_1^2 - 4YY_2)},$$

$$2Y_0x_2 + Y_1 = \mp \sqrt{(Y_1^2 - 4YY_2)};$$

wo die obern und die untern Zeichen in beiden Gliedern rechts zusammengehören und

$$(35.) \quad \begin{cases} (R_1y + S_1) = \pm \sqrt{(S_1^2 - R_1T_1)}, \\ (R_2y + S_2) = \pm \epsilon \sqrt{(S_2^2 - R_2T_2)}; \end{cases}$$

wo  $\epsilon = \pm 1$  ist, je nachdem das rationale Product

$$(36.) \quad (R_1y + S_1)(R_2y + S_2)$$

positiv oder negativ ist. Man erhält hiernach aus den Gleichungen (34.) folgende:

$$\frac{2 \cdot dy}{\sqrt{(Y_1^2 - 4Y_1Y_2)}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{(S_1^2 - R_1T_1)}},$$

$$- \frac{2 \cdot dy}{\sqrt{(Y_1^2 - 4Y_1Y_2)}} = \pm \frac{\varepsilon dx_2}{\sqrt{(S_2^2 - R_2S_2)}},$$

deren Addition die Differentialgleichung

$$(37.) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{(S_1^2 - R_1T_1)}} + \frac{\varepsilon dx_2}{\sqrt{(S_2^2 - R_2S_2)}} = 0$$

gibt.

Es ist noch zu bemerken, daß sich das Product (36.) als eine rationale Function von  $y$  allein, deren Nenner  $Y_0^2$  ist und deren Zähler den sechsten Grad nicht übersteigt, darstellen läßt. Das Zeichen derselben für jeden angenommenen Werth von  $y$  bestimmt die Gröfse  $\varepsilon$ .

Die zu dieser Differentialgleichung auf diesem Wege bestimmte Integralgleichung erhält man aus der Gleichung (29.), wenn man darin

$$u_1 = x_1 + x_2, \quad u_2 = x_1 x_2$$

setzt und sonst die dortige Bezeichnung beibehält. Sie ist offenbar von derselben Form wie die *Eulersche* (3.) und giebt daher, eben so wie letztere in §. 1. behandelt, die Differentialgleichung (37.). Die Verwicklung, welche bei der Ausführung dieser Rechnung sich zeigt, wird dadurch vermieden, daß man die Function  $fx$ , welche unter dem Quadratwurzelzeichen vorkommt, nach (§. 2.) bestimmt. Man sieht dann leicht, daß dieselbe, bis auf einen constanten Factor, mit der Function

$$S^2 - RT$$

(also mit der angenommenen Function vom 4ten Grade) übereinstimmt und daß man daher zu der Gleichung (37.) gelangt.

In der That: macht man in der Gleichung (29.) die in (§. 2.) vorgeschriebenen Substitutionen

$$u_1 = \frac{x''}{x'}, \quad u_2 = \frac{x'''}{x'},$$

und multiplicirt das Resultat mit  $x'x'$ , so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$(38.) \quad \begin{cases} \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{00}} x''' - \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{10}} x'' + \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{20}} x' = P, \\ \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{01}} x''' - \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{11}} x'' + \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{21}} x' = \Sigma, \\ \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{02}} x''' - \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{12}} x'' + \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{22}} x' = T \end{cases}$$

gesetzt und die Variablen  $y', y'', y'''$  nach Vorschrift der Formeln (12.) eingeführt werden, die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{012}}{\partial A_{02}} P - 2 \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{01}} \Sigma + \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{00}} T &= + P \cdot y', \\ \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{12}} P - 2 \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{11}} \Sigma + \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{10}} T &= - P \cdot y'', \\ \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{22}} P - 2 \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{21}} \Sigma + \frac{\partial A_{012}}{\partial A_{20}} T &= + P \cdot y''',\end{aligned}$$

welche aus der ternären Form

$$\Sigma^2 - PT$$

folgen und deren Auflösung folgende Ausdrücke giebt:

$$(39.) \quad \begin{cases} A_{00} y''' - A_{10} y'' + A_{20} y' = + II \cdot P, \\ A_{01} y''' - A_{11} y'' + A_{21} y' = - 2 II \cdot \Sigma, \\ A_{02} y''' - A_{12} y'' + A_{22} y' = + II \cdot T; \end{cases}$$

wo  $II$ , eben wie vorhin  $P$ , ein constanter Factor ist. Setzt man nun nach (§. 2.) hierin

$$y' = x^2, \quad y'' = -x, \quad y''' = 1,$$

um aus der Form

$$\Sigma^2 - PT$$

die dortige Function  $fx$  abzuleiten, so gelangt man offenbar zu dem Ausdrücke

$$\frac{1}{II^2} \cdot (S^2 - RT);$$

was sich aus den Formeln (32. und 39.) ergibt; w. z. b. w.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, diese letztere Function, also

$$(40.) \quad \frac{1}{4} (A_{01} + A_{11} x + A_{21} x^2)^2 - (A_{00} + A_{10} x + A_{20} x^2) (A_{02} + A_{12} x + A_{22} x^2)$$

auf die gegebene Form

$$A_0 + 2A_1 x + A_2 x^2 + 2A_3 x^3 + A_4 x^4$$

zu bringen. Unter den verschiedenen Arten, diese unbestimmte Aufgabe zu lösen, werde ich diejenige benutzen, welche sich aus den obigen Formeln (§. 2.) von selbst ergibt.

Zu dem Ende setze man



$$(41.) \quad \begin{cases} A_0 = A, & A_1 = B, & A_2 = C, & A_3 = D, & A_4 = E, \\ A_{00} = a & = B^2 - AM, \\ A_{01} = A_{10} = 2b & = -(2AD + B(M - C)), \\ A_{02} = A_{20} = d & = \frac{1}{2}(M - C)^2 - AE, \\ A_{11} = 2(c + d) & = -2(AE + BD) - \frac{1}{2}(M^2 - C^2), \\ A_{12} = A_{21} = 2e & = -(2BE + D(M - C)), \\ A_{22} = f & = A^2 - EM. \end{cases}$$

Dann geht die Function (40.) in folgende über:

$$(b + (c + d)x + ex^2)^2 - (a + 2bx + dx^2)(d + 2ex + fx^2),$$

welche, bis auf einen constanten Factor, mit

$$A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4,$$

wie eben gezeigt, übereinstimmt. Man sieht daher, daß die jetzige Methode in diesem Fall zu der Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{\varepsilon dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} = 0$$

die rationale Integralgleichung giebt, welche aus (29.) durch die Substitutionen (41.) folgt. Sie ist,

$$x_1 + x_2 = u_1, \quad x_1 x_2 = u_2$$

gesetzt, folgende:

$$\begin{aligned} 0 &= ((ed - bf)u_2 + \frac{1}{2}(d^2 - af)u_1 + bd - ae)^2 \\ &- \{((c + d)f - 2e^2)u_2 + (bf - de)u_1 + 2be - d(c + d)\} \\ &\times \{(2be - d(1 + d))u_2 + (ae - bd)u_1 + a(c + d) - 2b^2\}, \end{aligned}$$

wenn man darin die Buchstaben  $A, B$ , etc.  $M$  einführt, und entsteht aus der *Eulerschen*, welche man durch Einführung derselben Buchstaben in die Gleichung (3.) erhält, dadurch, daß man in letzterer an die Stelle von  $M$  eine gehörige Function von  $M$  und von den Buchstaben  $A, B, \dots$  einführt.

Es ist hieraus leicht zu sehen, daß die directe Behandlung der *Eulerschen* Gleichung (3.) auf eine einfachere Weise zum Ziele führt, als die hier vorgetragene.

Die *analoge, directe* Behandlung der auf die Form

$$a + 2bu_1 + 2cu_2 + du_1^2 + 2eu_1u_2 + fu_2^2 = 0,$$

$$u_\varrho = g_\varrho u_1 + h_\varrho u_2 + i_\varrho$$

gebrachten Gleichungen (29. und 30.), mit den  $3n$  willkürlichen Constanten

$$a, b, c, d, e, f; g_\varrho, h_\varrho, i_\varrho,$$

wo  $\varrho = 3, 4, \dots n$  zu setzen ist, und deren Anzahl die  $2n+1$  in dem zugehörigen System Differentialgleichungen (19.) vorkommenden Constanten um  $n-1$  übertrifft, also zur vollständigen Integration hinreicht, werde ich bei einer andern Gelegenheit weiter verfolgen.

Königsberg, den 16. Januar 1852.