Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.

Von K. Carda in Wien.

Im Nachstehenden sollen einerseits independente Ausdrücke für die Bernoullischen Zahlen, sowie deren Producte und Potenzen als Erweiterung der Kronecker'schen Formel abgeleitet werden, andererseits soll die Fourier'sche Reihe zur Aufstellung einiger bekannter Recursionsformeln für Bernoullische Zahlen benützt werden.

I.

1. Die Ableitung der Formeln wird durch folgenden algebraischen Satz vermittelt:

Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function n -ten Grades ohne mehrfache Factoren, $f(x)$ ihre Derivierte, sind ferner $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und $\varphi(x)$ eine ganze Function von x , deren Grad höchstens gleich $n-2$ ist, so ist

$$(1) \quad \sum_v \frac{\varphi(x_v)}{f'(x_v)} = 0.$$

Nun hat man

$$(2) \quad \begin{aligned} S(x) &= 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \dots + x^{2n} = \\ &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n}}{2} + \binom{2n}{1} \frac{B_1}{2} x^{2n-1} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{2n}{2n-1} \frac{B_n}{2n} x; \dots^1) \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\varphi(x) = \frac{S(x)}{x}$; es seien ferner $a_1, a_2, \dots, a_p$ ganze positive, von einander verschiedene Zahlen und

$$f(x) = x(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_p);$$

hieraus folgt

$$f'(a_v) = a_v(a_v-a_1)\dots(a_v-a_{v-1})(a_v-a_{v+1})\dots(a_v-a_p) = a_v \Pi_v.$$

¹⁾ Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin 1893. p. 4, Formel (14).

Somit erhält man

$$(3) \quad (-1)^n B_n = (-1)^p a_1 a_2 \dots a_p \sum_{\nu=1}^{p=p} \frac{S^{2n}(a_\nu)}{a_\nu^2 \Pi_\nu};$$

dabei ist $p > 2n$; die Größen $a_1, a_2, \dots, a_p$ sind willkürlich angenommene Werte, welche den früheren Bedingungen genügen. Setzt man in (3) ρa_ν an Stelle von a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, p$), so erhält man die bemerkenswerte Gleichung

$$(4) \quad \sum_{\nu} \frac{S^{2n}(\rho a_\nu)}{a_\nu^2 \Pi_\nu} = \rho \sum_{\nu} \frac{S^{2n}(a_\nu)}{a_\nu^2 \Pi_\nu};$$

$$p > 2n.$$

Ferner hat man

$$(5) \quad S(x) = 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + \dots + x^{2n+1} =$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \frac{x^{2n+1}}{2} + \binom{2n+1}{1} \frac{B_1}{2} x^{2n} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{2n+1}{2n-1} \frac{B_n}{2n} x^2;$$

Hieraus erhält man analog wie früher

$$(6) \quad (-1)^n \frac{2n+1}{2} B_n = (-1)^p a_1 a_2 \dots a_p \sum_{\nu=1}^{p=p} \frac{S^{2n+1}(a_\nu)}{a_\nu^3 \Pi_\nu};$$

Setzt man hierin wieder ρa_ν an Stelle von a_ν , so folgt

$$(7) \quad \sum_{\nu} \frac{S^{2n+1}(\rho a_\nu)}{a_\nu^3 \Pi_\nu} = \rho^2 \sum_{\nu} \frac{S^{2n+1}(a_\nu)}{a_\nu^3 \Pi_\nu};$$

$$p > 2n.$$

Vereinfachen wir nun unsere Formeln, indem wir den Größen a_ν spezielle Werte beilegen. Wir setzen

$$a_\nu = \nu; \quad \nu = 1, 2, \dots, p;$$

Somit wird

$$\frac{p!}{f'(a_\nu)} = (-1)^{p-\nu} \binom{p}{\nu};$$

¹⁾ Saalschütz, p. 4, Formel (15).

Man erhält demnach

$$(8) \quad (-1)^{n+1} B_n = \binom{p}{1} \frac{S(1)}{1} - \binom{p}{2} \frac{S(2)}{2} + \binom{p}{3} \frac{S(3)}{3} - \dots + \\ + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} \frac{S(p)}{p};$$

oder da nach 1) $\sum_{\mu=1}^{\mu=p} (-1)^{\mu-1} \binom{p}{\mu} \mu^{2n-1} = 0$ ist,

$$(9) \quad (-1)^n B_n = \binom{p}{2} \frac{S(1)}{2} - \binom{p}{3} \frac{S(2)}{3} + \dots + (-1)^p \binom{p}{p} \frac{S(p-1)}{p};$$

Dies ist die bekannte Kronecker'sche Formel¹⁾; sie gilt für jedes $p > 2n$.

Ebenso folgt aus (6)

$$(10) \quad (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} B_n = \binom{p}{1} \frac{S(1)}{1^2} - \binom{p}{2} \frac{S(2)}{2^2} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} \frac{S(p)}{p^2};$$

oder

$$(11) \quad (-1)^n \frac{2n+1}{2} B_n = \binom{p}{2} \frac{S(1)}{2^2} - \binom{p}{3} \frac{S(2)}{3^2} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} \frac{S(p-1)}{p^2};$$

$p > 2n$.

Aus 4) und 7) erhält man bezüglich

$$(12) \quad \binom{p}{1} \frac{S(p)}{1} - \binom{p}{2} \frac{S(2p)}{2} + \binom{p}{3} \frac{S(3p)}{3} - \dots = \\ = p \left[\binom{p}{1} \frac{S(1)}{1} - \binom{p}{2} \frac{S(2)}{2} + \binom{p}{3} \frac{S(3)}{3} - \dots \right];$$

$$(13) \quad \binom{p}{1} \frac{S(p)}{1^2} - \binom{p}{2} \frac{S(2p)}{2^2} + \binom{p}{3} \frac{S(3p)}{3^2} - \dots = \\ = p^2 \left[\binom{p}{1} \frac{S(1)}{1^2} - \binom{p}{2} \frac{S(2)}{2^2} + \binom{p}{3} \frac{S(3)}{3^2} - \dots \right];$$

$p > 2n$.

¹⁾ Crelle's J. B. 94. p. 268. Saalschütz pag. 101.

Aus Gleichung (9) erhält man leicht

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\mu+\lambda+1} [B_{\mu} + \binom{\lambda}{1} B_{\mu+1} + \binom{\lambda}{2} B_{\mu+2} + \dots + \binom{\lambda}{\lambda} B_{\mu+\lambda}] = \\
 (14) \quad &= \binom{p}{3} \frac{1^{\lambda} \cdot 2^{2\mu} \cdot 3^{\lambda}}{3} - \binom{p}{4} \frac{1^{\lambda} \cdot 2^{2\mu} \cdot 3^{\lambda} + 2^{\lambda} \cdot 3^{2\mu} \cdot 4^{\lambda}}{4} \\
 &+ \binom{p}{5} \frac{1^{\lambda} \cdot 2^{2\mu} \cdot 3^{\lambda} + 2^{\lambda} \cdot 3^{2\mu} \cdot 4^{\lambda} + 3^{\lambda} \cdot 4^{2\mu} \cdot 5^{\lambda}}{5} \dots \\
 &p > 2 (\mu + \lambda).
 \end{aligned}$$

2. Um Formeln für Producte Bernoullischer Zahlen zu erhalten, setze man in 2) $n = p_1, p_2, \dots, p_{\lambda}$ und multipliciere die erhaltenen Gleichungen. Es folgt dann aus 1)

$$\begin{aligned}
 (15) \quad &(-1)^{\sum p_{\lambda} + \lambda - 1} \cdot B_{p_1} B_{p_2} B_{p_3} \dots B_{p_{\lambda}} = \\
 &= \binom{p}{1} \frac{\prod S(1)}{1^{\lambda}} - \binom{p}{2} \frac{\prod S(2)}{2^{\lambda}} + \binom{p}{3} \frac{\prod S(3)}{3^{\lambda}} - \dots + (-1)^{p+1} \binom{p}{p} \frac{\prod S(p)}{p^{\lambda}}; \\
 &p > 2 \sum p_{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus Gleichung 5)

$$\begin{aligned}
 (16) \quad &(-1)^{\sum p_{\lambda} + \lambda - 1} \frac{\prod (2 p_{\lambda} + 1)}{2^{\lambda}} B_{p_1} B_{p_2} \dots B_{p_{\lambda}} = \\
 &= \binom{p}{1} \frac{\prod S(1)}{1^{2\lambda}} - \binom{p}{2} \frac{\prod S(2)}{2^{2\lambda}} + \dots \\
 &p > 2 \sum p_{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Andere Formeln erhält man durch Multiplication der Gleichungen 2) und 5), z. B.

$$\begin{aligned}
 (17) \quad &\frac{2n+1}{2} \cdot B_n^2 = \binom{p}{1} \frac{S(1) S(1)}{1^3} - \binom{p}{2} \frac{S(2) S(2)}{2^3} + \binom{p}{3} \frac{S(3) S(3)}{3^3} - \dots \\
 &p > 4n.
 \end{aligned}$$

Setzt man in 15) $p_1 = p_2 = \dots = p_{\lambda} = p$, so folgt

$$(18) \quad (-1)^{\lambda(p+1)+1} B_p^{\lambda} = \binom{p}{1} \left(\frac{S(1)}{1} \right)^{\lambda} - \binom{p}{2} \left(\frac{S(2)}{2} \right)^{\lambda} + \binom{p}{3} \left(\frac{S(3)}{3} \right)^{\lambda} - \dots$$

3. Zum Schlusse soll noch eine merkwürdige Formel abgeleitet werden, welche mit der Theorie der Bernoullischen Zahlen in einem gewissen Zusammenhange steht. Es sei p eine ganze positive Zahl. Dann hat man die Identität

$$(19) \quad \binom{p}{1}x - \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 - \dots + (-1)^{p+1}\binom{p}{p}x^p = 1 - (1-x)^p;$$

dividiert man durch x und integriert dann zwischen 0 und x , so erhält man ($x = 1 - \xi$)

$$(20) \quad \begin{aligned} \binom{p}{1}\frac{x}{1} - \binom{p}{2}\frac{x^2}{2} + \binom{p}{3}\frac{x^3}{3} - \dots &= \int_0^x \frac{1 - (1-x)^p}{x} dx = \int_{\xi}^1 \frac{1 - \xi^p}{1 - \xi} d\xi \\ &= 1 - \xi + \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{1}{3}(1 - \xi^3) + \dots + \frac{1}{p}(1 - \xi^p); \end{aligned}$$

Hieraus erhält man für $x = 1$, somit für $\xi = 0$

$$(21) \quad \binom{p}{1}\frac{1}{1} - \binom{p}{2}\frac{1}{2} + \binom{p}{3}\frac{1}{3} - \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}; \quad ^1)$$

Aus 20) erhält man analog

$$(22) \quad \begin{aligned} \binom{p}{1}\frac{1}{1^2} - \binom{p}{2}\frac{1}{2^2} + \binom{p}{3}\frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{p+1}\binom{p}{p}\frac{1}{p^2} &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}\right); \end{aligned}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} \binom{p}{1}\frac{1}{1^3} - \binom{p}{2}\frac{1}{2^3} + \binom{p}{3}\frac{1}{3^3} - \dots + (-1)^{p+1}\binom{p}{p}\frac{1}{p^3} &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}\right)\right); \end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz der rechten Seiten in 21), 22), 23) ist klar. Sie enthalten offenbar die Summe der Combinationen mit Wiederholung der ersten p Glieder der harmonischen Reihe, wenn jede Combination als Product der Elemente aufgefasst wird. Bezeichnet man nun die Combination zur k -ten Classe mit Wiederholung

¹⁾ Diese Gleichung findet sich bei Saalschütz, pag. 104, Note 1.

der p Elemente $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{p}$ mit C_k^p , wobei jede Combination als Product betrachtet wird, so schließt man auf die Formel

$$(24) \quad \begin{aligned} & \binom{p}{1} \frac{1}{1^k} - \binom{p}{2} \frac{1}{2^k} + \binom{p}{3} \frac{1}{3^k} - + \dots + (-1)^{p+1} \binom{p}{p} \frac{1}{p^k} = \\ & = \sum C_k^p \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{p} \right). \end{aligned}$$

II.

Es sei n eine ganze positive Zahl. Dann ist

$$(25) \quad x^{2n} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx; \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{\pi^{2n}}{2n+1}; \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^{2n} \cos kx \, dx;$$

$$(26) \quad \begin{aligned} A_k = 2(-1)^k & \left[2n \frac{\pi^{2n-2}}{k^2} - 2n(2n-1)(2n-2) \frac{\pi^{2n-4}}{k^4} + \right. \\ & \left. + 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4) \frac{\pi^{2n-6}}{k^6} - \dots \right]. \end{aligned}$$

A_k lässt sich auch so schreiben

$$\begin{aligned} A_k = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+k+1} (2n)!}{k^{2n+1}} & \left[\pi k - \frac{(\pi k)^3}{3!} + \frac{(\pi k)^5}{5!} - + \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^{n+1} \frac{(\pi k)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right]; \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 0$ erhalten wir somit

$$0 = \frac{\pi^{2n}}{2n+1} + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots;$$

Es ist ferner

$$(27) \quad \frac{1}{1^{2e}} - \frac{1}{2^{2e}} + \frac{1}{3^{2e}} - \dots = \frac{(2^{2e-1} - 1) \pi^{2e}}{(2e)!} \cdot B_e.$$

Wir werden später die Identität der Definitionen der Bernoullischen Zahlen durch die Gl. 2) und 27) nachweisen. Man erhält mit Hilfe von 25)

$$(28) \quad \frac{1}{2} = \binom{2n+1}{2} (2-1) B_1 - \binom{2n+1}{4} (2^3-1) B_2 + \\ + \binom{2n+1}{6} (2^5-1) B_3 - \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{2n} (2^{2n-1}-1) B_n;$$

Diese Formel stimmt mit Formel IX. p. 15 bei Saalschütz überein.

An der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir in 25)

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} = \frac{\pi^{2n}}{2^{n+1}} - A_2 + A_4 - A_6 + A_8 - \dots$$

und hieraus

$$(2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 1 - \left[\binom{2n+1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) B_1 - \binom{2n+1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_2 + \right. \\ (29) \quad \left. + \binom{2n+1}{6} \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) B_3 - + - \dots \right]:$$

An der Stelle $x = \pi$ convergiert die Fourier'sche Reihe bekanntlich nach dem Werte

$$\frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \pi^{2n};$$

demnach ist

$$\pi^{2n} = \frac{1}{2} A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - \dots$$

oder nach einigen Transformationen

$$n = \binom{2n+1}{2} \cdot 2 B_1 - \binom{2n+1}{4} 2^3 B_1 + \binom{2n+1}{6} 2^5 B_3 - \dots + \\ (30) \quad + (-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \binom{2n+1}{2n} B_n;$$

Man vergleiche Saalschütz, p. 12, Formel V. Somit ergibt sich aus den Gleichungen 28) und 30)

$$\frac{1}{2} = n - \binom{2n+1}{2} B_1 + \binom{2n+1}{4} B_2 - \binom{2n+1}{6} B_3 + \dots + \\ (31) \quad + (-1)^n \binom{2n+1}{2n} B_n;$$

Dies ist aber die bekannte Moivre'sche Recursionsformel (Saalschütz, p. 7, Formel I), welche sich auch aus Gleichung 2) ableiten lässt. Hiermit ist die Gleichung 27) verificiert. Zugleich ist bewiesen, dass das Zusammenfassen von Gliedern in obigen Reihen gestattet ist.

Aus 29) und 31) folgt schließlich

$$(32) \quad \binom{2n+1}{2} \frac{B_1}{2} - \binom{2n+1}{4} \frac{B_2}{2^3} + \binom{2n+1}{6} \frac{B_3}{2^5} - \dots + \\ + (-1)^{n+1} \cdot \binom{2n+1}{2n} \frac{B_n}{2^{2n-1}} = (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + n - \frac{3}{2};$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$, so erhält man eine von Meyer herrührende Formel (Saalschütz, pag. 46, Formel XLV).