CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLE PROPRIETÀ FISICHE DEL CAUCCIÙ

di M. CANTONE e G. CONTINO ¹⁾.

Il presente studio ebbe per iscopo un'analisi particolareggiata delle proprietà elastiche e della dilatazione termica del caucciù con un indirizzo teorico informato a criteri meno arbitrari di quelli che d'ordinario si adottano nelle indagini sopra siffatti argomenti.

Trazione. — Questa arbitrarietà si rivela in ispecie nei lavori relativi alla trazione, poichè nell'esame del comportamento elastico del caucciù deformato si è proceduto per trazioni parziali piuttosto piccole, ma non mai fino al punto da rendersi indifferente la scelta fra le varie espressioni che si possono dare della quantità corrispondente alla dilatazione dei corpi pochissimo deformabili. Ed errori più gravi conseguono nella interpretazione dei risultati dal modo imperfetto di valutare il peso tensore unitario alla stessa guisa che operando coi metalli, attesa la circostanza che nel caucciù varia in maniera apprezzabile la sezione anche con piccoli aumenti del carico; nè si toglie il carattere di arbitrarietà del procedimento teorico se, come fece il Röntgen ²⁾, si esprime la tensione unitaria relativa al passaggio del carico P al carico P' mediante il rapporto fra $P'-P$ e la media delle sezioni s' ed s che corrispondono a P' e P , giacchè allora, se da una parte non si trascura la variazione di s per il sopraccarico, dall'altra se ne tiene conto solo rispetto al peso aggiunto, senza pensare che il peso primitivo P perdurando invariato nella sua azione totale non fornisce col filo deformato la tensione unitaria di prima, e che per conseguenza ricorrendo alla for-

1) Dai lavori pubblicati nel Rendic. del R. Istit. Lomb. di sc. e lett. — M. Cantone, Sulla trazione del caucciù (V. 31, 1898, p. 1521).

M. Cantone e G. Contino, Sulla torsione del caucciù (V. 32, 1899, p. 189) e Sulla dilatazione termica del caucciù (V. 33, 1900 p. 215).

2) Pogg. Ann. 159, p. 601, (1876).

mula del Röntgen s'introduce una causa d'errore tanto più rilevante quanto maggiore è P.

Ad eliminare ogni equivoco basterà tener presente che una deformazione finita può riguardarsi come risultante da una serie di deformazioni infinitesime, per ciascuna delle quali la variazione del peso tensore unitario e la dilatazione sono dati rispettivamente da $d \frac{P}{s}$, $\frac{dL}{L}$, ed il modulo di trazione dal loro rapporto. Si ha così un'equazione differenziale che permette di ricavare il valore medio E del modulo, per una deformazione finita fra i limiti di lunghezza L ed L' mediante la formula

$$(1) \quad E = \frac{\frac{P'}{s'} - \frac{P}{s}}{\log L' - \log L},$$

dove la quantità a denominatore deve essere considerata come la espressione di una dilatazione finita.

Nè minore è il vantaggio che si ha procedendo in questo ordine d'idee, quando si voglia ottenere il coefficiente di Poisson, potendosi anche qui ricavare mercè integrazione il valor medio μ di tale coefficiente per una deformazione finita fra i limiti di spessore D e D' in corrispondenza alle lunghezze L, L'. La formula cui si perviene,

$$\mu = \frac{\log D - \log D'}{\log L' - \log L},$$

ci dice che anco nel caso attuale μ è da considerarsi come il rapporto fra la contrazione trasversale e la dilatazione longitudinale, e che, ove il suo valore si mantenga costante nei vari stadii del processo di deformazione, si è autorizzati a ricavarlo in base ai dati che valgono per lo stiramento totale comunque sieno discosti i limiti fra cui si è operato, il che consente un'approssimazione maggiore di fronte ai valori finora ottenuti. E risulta altresì che, ammessa l'incompressibilità della sostanza, dev'essere

$$\log \frac{L'}{L} + 2 \log \frac{D'}{D} = 0,$$

ossia

$$\frac{\log D - \log D'}{\log L' - \log L} = \mu = \frac{1}{2},$$

donde si vede che al valore di μ caratteristico delle sostanze incompressibili si giunge senza essere obbligati a ricorrere, secondo sarebbe richiesto dai procedimenti ordinari, a deformazioni estremamente piccole.

Le esperienze furono eseguite con quattro lastre, della qualità rossa che fornisce la casa Pirelli, aventi forma rettangolare ($40^{\text{cm}} \times 20^{\text{cm}}$) e gli spessori di cm. 0,400, 0,292, 0,203, 0,092. Poichè, non ostante si fossero usate tutte le precauzioni per ottenere che la forza deformatrice provocasse una semplice trazione nel senso della lunghezza maggiore, non poteva aversi una deformazione omogenea in tutta la lastra a causa dei legami cui essa era assoggettata in alto e in basso, si limitò lo studio alla regione centrale assumendo per L e D i valori dei diametri verticale ed orizzontale di due circonferenze tracciate collo stesso raggio, (5^{cm} circa), sulle due faccie della lastra, affinchè fosse possibile eseguire nello stesso tempo le due misure che erano fatte rispettivamente per mezzo del catetometro e della macchina a dividere.

Per il calcolo di s si partì dall'identità

$$s = s_0 \frac{B C}{B_0 C_0},$$

nella quale l'indice *zero* caratterizza elementi relativi allo stato non deformato, e B, C denotano la larghezza e lo spessore della lastra col carico P . Siccome i corpi in esame furono ottenuti da blocchi di grandi dimensioni, era da ritenere che nel senso della larghezza e dello spessore il comportamento elastico fosse identico; tuttavia si volle accertare la cosa, almeno fin dove lo consentivano i mezzi di misura adoperati e la natura stessa del caucciù, facendo nel corso delle esperienze qualche determinazione di spessore mediante un calibro a vite

micrometrica, e si trovò che entro i limiti di approssimazione accessibili si avea in ogni caso

$$\frac{D}{D_0} = \frac{C}{C_0},$$

per cui, dovendo essere

$$\frac{B}{B_0} = \frac{D}{D_0},$$

poteva porsi

$$s = s_0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^2.$$

Finalmente per ciò che riguarda i valori di P si noterà che questi si ottennero tenendo conto non solo del peso dell'armatura inferiore e del piatto ad essa legato, ma anche di quello della lastra ammettendo che il corpo in esame fornisse un carico tensore uguale a metà del proprio peso.

Nelle esperienze relative a ciascuna lastra si procedette facendo variare la forza in modo ciclico, e con intervalli di tempo da un carico al successivo sufficienti a dare volta per volta configurazioni di equilibrio quasi definitive.

Non potendosi qui riportare i risultati di tutte le serie compiute s'indicheranno negli annessi quadri solo quelli che si riferiscono alle serie terminali, avvertendo che ΔL e ΔD denotano, rispettivamente per i due diametri, le differenze fra i valori di L e D relativi alla P segnata nella stessa riga ed i valori che corrispondono al carico precedente.

LASTRA I.

P	ΔL	ΔD	E	μ
1,04				
2,54	1,69	-0,386	0,120	0,24
4,04	2,45	-0,856	0,088	0,37
5,54	2,72	-1,083	0,085	0,44
7,04	2,92	-1,171	0,086	0,46
8,54	3,25	-1,260	0,084	0,46
10,04	3,33	-1,219	0,088	0,46
11,54	3,77	-1,357	0,086	0,47
10,04	-2,93	0,811	0,104	0,36
8,54	-3,07	1,003	0,094	0,41
7,04	-3,00	1,074	0,093	0,44
5,54	-2,86	1,061	0,090	0,44
4,04	-2,69	1,074	0,089	0,45
2,54	-2,62	1,021	0,085	0,43
1,04	-2,34	0,988	0,090	0,45

LASTRA II.

P	ΔL	ΔD	E	μ
1				
2	2,22	-1,049	0,088	0,50
3	2,47	-1,088	0,083	0,48
4	2,58	-1,123	0,085	0,49
5	2,82	-1,147	0,084	0,48
6	3,00	-1,235	0,086	0,50
7	3,17	-1,181	0,087	0,47
8	3,30	-1,270	0,091	0,51
9	3,63	-1,304	0,091	0,49
10	3,79	-1,287	0,094	0,49
11	4,32	-1,414	0,093	0,49
11	(0,83)*	-(0,287)	...	(0,54)
10	-3,93	1,240	0,094	0,48
9	-3,75	1,283	0,101	0,52
8	-3,50	1,241	0,095	0,50
7	-3,40	1,204	0,088	0,46
6	-3,14	1,252	0,091	0,51
5	-3,07	1,189	0,085	0,48
4	-2,87	1,206	0,085	0,51
3	-2,70	1,140	0,083	0,48
2	-2,60	1,185	0,081	0,50
1	-2,48	1,148	0,079	0,49

LASTRA III.

P	ΔL	ΔD	E	μ
0,96				
1,96	2,89	-1,325	0,097	0,49
2,96	3,19	-1,365	0,096	0,48
3,96	3,36	-1,474	0,100	0,51
4,96	3,73	-1,483	0,099	0,49
5,96	3,98	-1,487	0,102	0,48
6,96	4,29	-1,577	0,106	0,50
7,96	4,60	-1,601	0,110	0,50
8,96	5,22	-1,696	0,109	0,49
9,96	5,32	-1,625	0,118	0,49
10,96	5,62	-1,573	0,124	0,48
10,96	(0,94)*	-(0,305)	...	(0,49)
9,96	-5,70	1,603	0,117	0,48
8,96	-5,37	1,616	0,119	0,49
7,96	-5,09	1,625	0,112	0,49
6,96	-4,68	1,571	0,109	0,48
5,96	-4,29	1,624	0,108	0,52
4,96	-4,04	1,512	0,102	0,49
3,96	-3,77	1,505	0,099	0,49
2,96	-3,51	1,528	0,097	0,51
1,96	-3,24	1,358	0,096	0,47
0,96	-2,95	0,932	0,096	...

LASTRA IV.

P	ΔL	ΔD	E	μ
0,92				
1,42	3,01	-1,321	0,112	0,49
1,92	3,18	-1,329	0,115	0,48
2,42	3,50	-1,400	0,114	0,48
2,92	3,68	-1,469	0,120	0,51
3,42	4,04	-1,524	0,121	0,50
3,92	4,38	-1,459	0,122	0,47
3,42	-4,17	1,358	0,126	0,46
2,92	-3,88	1,481	0,126	0,51
2,42	-3,75	1,449	0,118	0,49
1,92	-3,52	1,336	0,114	0,46
1,42	-3,22	1,402	0,115	0,51
0,92	-3,09	1,426	0,112	0,51

Si fa agire il carico di kg. 11 per un'ora e tre quarti circa. I valori racchiusi dentro parentesi si riferiscono alle sole azioni susseguenti.

Dal complesso dei risultati che si ottennero colle lastre II, III e IV si desume che procedendo per forze crescenti il caucciù rosso ordinario accusa un aumento del modulo, e non una diminuzione quale si avrebbe eseguendo i calcoli colle formule adoperate dal Villari ¹⁾ e dal Röntgen ²⁾. Si verifica dunque in realtà il contrario di ciò che avviene per i metalli; ma bisogna notare che per questi gli scostamenti dalla legge di Hooke dipendono in gran parte dalla loro pastosità, onde non recherà meraviglia che nel caucciù, sostanza pochissimo pastosa non ostante la sua grande cedevolezza alle azioni deformatrici, si abbia un comportamento diverso, il quale per altro potrebbe essere dovuto, più che alle proprietà elastiche del materiale impiegato, a condizioni puramente meccaniche in quanto che crescendo in modo esagerato la lunghezza del corpo non si mantiene costante il rapporto delle forze tendenti a produrre le variazioni di volume e gli scorrimenti.

Cimentando per forze decrescenti i campioni anzidetti si ha in principio quasi sempre un ulteriore aumento del modulo e poi una continua diminuzione fino ad un valore più basso di quello corrispondente all'inizio della prima fase; sicchè non manca il carattere generale dei fenomeni d'isteresi elastica, sebbene qui si tratti di effetti poco marcati, come risulta dall'esame delle ΔL , dalle quali dipende direttamente il lavoro consumato in ogni ciclo.

È poi notevole che, fatta eccezione per la lastra I, non si abbiano variazioni sistematiche del coefficiente di Poisson al variare del peso tensore: si era perciò autorizzati in questo caso a dedurne il valore in base alle deformazioni totali che si ebbero nelle due metà di ciascun ciclo facendo sempre uso delle formole logaritmiche. Eseguiti i calcoli si pervenne ai seguenti risultati:

$$\begin{array}{lll} \text{per la II,} & \mu_1 = 0,489 & \mu_2 = 0,493 \\ \text{per la III,} & \mu_1 = 0,488 & \mu_2 = 0,490 \\ \text{per la IV,} & \mu_1 = 0,487 & \mu_2 = 0,489 . \end{array}$$

I valori di μ così ottenuti sono più vicini ad $\frac{1}{2}$, di quelli ricavati dal Röntgen, e poichè l'attuale metodo, sia dal punto

1) Nuovo Cimento, 2. Serie 1, p. 332, 361 (1869).

2) V. I, c.

di vista teorico che dal lato sperimentale, offre maggiori garanzie viene ancora meglio provata la piccolissima compressibilità del caucciù ordinario. Risulta inoltre che passando dalla prima alla seconda metà del ciclo il coefficiente di Poisson subisce un leggero aumento.

In modo assai diverso si comportò la lastra I, che presentava un leggero appannamento alla superficie dovuto ad un eccesso di zolfo: per essa infatti rispetto ai valori di E si ha l'andamento caratteristico dei metalli, e manca la costanza dei valori di μ ; nè tali anomalie possono essere dipendenti da fenomeni di elasticità di seconda specie, e perchè l'influenza di questi veniva quasi eliminata come avanti si disse, e perchè da un esame apposito delle azioni susseguenti si trovò che esse manifestavansi bensì in grado maggiore nelle lastre più spesse, ma non mai con caratteri così spiccati per la lastra I da avvalorare in qualche modo il dubbio sopra esposto.

Conveniva però mettere in chiaro la variabilità di μ , per questa lastra, con esperienze più decisive, essendovi motivo di credere che con variazioni più gradualì di P dovesse manifestarsi più marcato il distacco fra essa e le altre lastre. Ed allo scopo si riuscì con pieno successo mediante le esperienze che trovansi riassunte nella tabella seguente, la quale contiene i risultati di due serie eseguite coi campioni I e III.

LASTRA I.					LASTRA III.				
P	ΔL	ΔD	E	μ	P	ΔL	ΔD	E	μ
0,48					0,4				
0,68	0,14	-0,006	0,186	0,04	0,6	0,50	-0,255	0,104	0,52
0,88	0,16	-0,015	0,163	0,10	0,8	0,55	-0,266	0,096	0,50
1,08	0,17	-0,026	0,154	0,16	1,0	0,53	-0,270	0,101	0,53
1,28	0,23	-0,032	0,144	0,14	1,2	0,57	-0,254	0,096	0,47
1,48	0,23	-0,044	0,115	0,20	1,4	0,60	-0,256	0,092	0,45
1,28	-0,17	0,007	0,155	0,04	1,2	-0,53	0,235	0,104	0,47
1,08	-0,11	0,022	0,239	0,21	1,0	-0,57	0,245	0,096	0,45
0,88	-0,18	0,017	0,146	0,10	0,8	-0,53	0,264	0,102	0,52
0,68	-0,19	0,025	0,138	0,14	0,6	-0,53	0,274	0,100	0,54
0,48	-0,19	0,023	0,137	0,12	0,4	-0,57	0,279	0,092	0,50

Si vede dai valori riportati che il nuovo processo di deformazione, mentre non porta a deduzioni nuove relativamente alla lastra III, pone in evidenza rispetto all'altra il fatto strano

che si possano avere sostanze per le quali variando il grado di deformazione il coefficiente di Poisson assume tutti i valori da zero ad $\frac{1}{2}$.

Torsione. — Le esperienze sulla torsione furono eseguite con un filo della qualità rossa, avente il diametro di circa 2 cm., e colla disposizione adottata dal Cantone nello studio dell'*attrito interno dei metalli*¹⁾: ma qui non si fece uso del pezzo di guida all'estremo inferiore per impedire gli spostamenti trasversali del filo, poichè adoperandosi per la torsione forze molto piccole, non era opportuno introdurre resistenze di attrito. Del resto, siccome quelle forze non oltrepassarono i 20 gr. ed il carico tensore non andò mai al di sotto di kg. 2,0, gli spostamenti laterali potevano ritenersi trascurabili in specie per i loro effetti sulla torsione.

Non essendo possibile per le ragioni ora esposte una ricerca sulle proprietà elastiche del filo privo di tensione si procurò invece di studiare, oltre alla dipendenza del modulo di rigidità del peso tensore, il comportamento del filo stirato nei cicli di torsione, per apprezzare l'entità dei fenomeni d'isteresi coi diversi carichi tensori, e per accertare, servendosi delle esperienze simultanee col metodo dinamico, se anche per il caucciù nelle oscillazioni di un filo inizialmente contorto la diminuzione di energia potenziale, relativa al decremento di ampiezza in un ciclo dinamico, risulti uguale al lavoro meccanico consumato in un ciclo statico di ampiezza intermedia, come si verifica per i metalli, e di preferenza per quelli molto pastosi.

In questa indagine si procedeva nel seguente modo. Lasciato in principio il filo sotto l'azione del carico tensore minimo, lo si è sottoposto diverse volte ad una serie di cicli fra valori delle forze estreme uguali e di segno opposto, avendo cura di riportare il corpo in esame alla fine di ognuna di queste serie nello stato non deformato facendolo oscillare liberamente a partire dalla massima deformazione. Apposite serie di oscillazioni si producevano inoltre giorno per giorno, l'una prima dei cicli statici e l'altra dopo, per ottenere i valori delle elongazioni nei due sensi. In maniera analoga si operò quando

1) Nuovo Cimento, Serie 4. 1 p. 165 (1895).

il filo fu assoggettato a pesi tensori di Kg. 7,191 e di Kg. 11,474; ma si ebbe l'avvertenza di lasciarlo in riposo per un paio di giorni dopo ogni modificazione del carico, affinché non si avessero condizioni variabili dipendenti dai fenomeni di elasticità di seconda specie, i quali erano piuttosto marcati nel caso della trazione, mentre riuscivano appena apprezzabili nella torsione.

I valori del modulo ν , dati dalla nota relazione

$$\omega = \frac{M L}{\frac{\pi}{2} \nu R^4}.$$

si ricavarono in base agli angoli di torsione estremi (ω_1) dei cicli di massima ampiezza, servendosi dei dati delle serie terminali compiute con ciascun peso tensore, ed ai valori della lunghezza (L) e dello spessore ($2R$) determinati per mezzo di due compassi.

I risultati delle esperienze sui cicli statici mostrarono che per la torsione la sostanza in esame offre analogia coi metalli, con questo di caratteristico che fino ad angoli di 10° sopra una lunghezza di 33 cm. gli scostamenti della legge di Hooke sono poco rilevanti, sicchè nei diagrammi i cappii, sempre di piccola area, vengono formati da due rette sensibilmente parallele congiungentisi agli estremi mediante archi di assai limitata estensione; ragion per cui riferendosi agli assi maggiori delle curve rappresentatrici dei cicli è facile riconoscere che i valori medi del modulo in cicli di ampiezza crescente vanno diminuendo, come si ha d'ordinario nel caso dei metalli, e che le variazioni sono molto piccole e presso a poco della stessa grandezza coi diversi carichi tensori.

Non ostante la esiguità degli effetti d'isteresi si poté accertare che anche rispetto al caucciù si manifesta un'intima relazione fra questi ed i decrementi delle ampiezze nei cicli dinamici, come attesta l'unita tabella, dove sono esposti i risultati delle serie terminali relativi a ciascuno dei pesi tensori (II). In essa per ogni ciclo statico sono indicati i valori della forza torcente massima (P_1) espressa in grammi; dell'angolo (ω_1) di cui ruota la sezione terminale, dedotto dalla media delle deformazioni estreme a destra ed a sinistra ed espresso in minuti primi, e del lavoro (L) fatto dalle forze esterne:

inoltre L'_1 ed L'_2 , valutati al pari di L e di L' in unità assolute del sistema [C. G. S], denotano i decrementi di energia potenziale che si ebbero in corrispondenza all'ampiezza ω_1 nei cicli dinamici eseguiti prima e dopo le esperienze col metodo statico, ed L'' il lavoro che si spenderebbe in ogni ciclo supponendo i fenomeni d'isteresi dovuti ad uno spostamento di fase fra le variazioni della forza torcente e dell'angolo ω , come pare possa ammettersi per i metalli.

P_1	4	6	8	10	12	14	v
	$\Pi = 2\text{kg.}, 914$		$2 R = 1\text{cm.}, 93$		$L = 22\text{cm.}, 51$		
ω_1	91,3	138,6	191,8	242,3	291,6	339,4	0,052
L	30,0	69,9	127,5	196,8	300,4	384,0	
L'_1	28,2	65,5	120,9	188,6	277,5	370,8	
L'_2	28,2	64,6	120,4	187,7	273,7	372,6	
L''	30,4	66,6	116,4	180,2	272,3	368,6	
	$\Pi = 7\text{kg.}, 191$		$2 R = 1\text{cm.}, 78$		$L = 26\text{cm.}, 58$		
ω_1	127,2	192,9	255,6	314,0	385,3	445,9	0,064
L	30,4	67,5	127,9	195,9	290,7	383,6	
L'_1	30,2	70,1	125,9	193,0	279,3	378,1	
L'_2	31,1	69,0	122,6	189,3	280,8	379,2	
L''	30,4	74,8	130,4	188,3	270,0	354,3	
	$\Pi = 11\text{kg.}, 474$		$2 R = 1\text{cm.}, 615$		$L = 32\text{cm.}, 80$		
ω_1	162,7	249,5	331,6	418,2	504,0		0,088
L	28,2	67,1	117,8	191,7	277,5		
L'_1	27,8	64,6	115,6	179,8	267,1		
L'_2							
L''	30,7	74,7	116,2	187,0	255,1		
	$\Pi = 7\text{kg.}, 191$		$2 R = 1\text{cm.}, 77$		$L = 27\text{cm.}, 70$		
ω_1	125,0	195,8	260,2	329,0	394,6	469,4	0,065
L	30,0	65,7	126,2	196,8	290,1	400,4	
L'_1	29,5	69,9	125,7	189,9	285,2	394,6	
L'_2	30,4	70,1	120,9	190,4	277,3	391,1	
L''	44,3	76,9	135,9	204,5	295,1	402,6	
	$\Pi = 2\text{kg.}, 914$		$2 R = 1\text{cm.}, 875$		$L = 23\text{cm.}, 6$		
ω_1	103,0	154,3	207,9	250,7	323,3	374,0	0,055
L	34,4	73,3	135,0	205,8	313,4	410,9	
L'_1	32,6	74,3	133,9	202,7	306,2	432,1	
L'_2	32,6	73,2	132,8	198,3	296,7	426,4	
L''	44,3	87,3	133,3	194,1	282,8	388,0	

È notevole che, pure avendosi al variare del peso tensore una grande deformazione del filo, i valori di L a parità di P si mantengono pressochè immutati; pare dunque che lo stato di tensione del filo non abbia influenza sulle perdite di energia meccanica dovute ai fenomeni d'isteresi, e che questo consumo dipenda in modo esclusivo, oltre che dal volume del corpo, dal momento massimo impiegato nel ciclo.

L'accordo fra le L e le L' conferma pienamente l'idea che sia da considerare lo smorzamento delle oscillazioni elastiche dal punto di vista dei fenomeni d'isteresi, ed avvalorà l'opinione altra volta emessa dal Cantone che i metalli poco pastosi presentano qualche differenza marcata fra i valori di L ed L' non a causa del comportamento più conforme alla legge fondamentale di elasticità, sibbene per condizioni di struttura poco omogenea, giacchè la validità di quella interpretazione sussiste nel caso dei caucciù, sostanza quasi perfettamente elastica e pochissimo pastosa.

E dall'andamento dei valori di L ed L' viene giustificato del pari il concetto che i fenomeni d'isteresi dipendano da uno spostamento di fase fra le variazioni della forza e della deformazione, concetto che a preferenza dovrebbe tenersi presente nello studio delle proprietà elastiche col metodo dinamico perchè ivi forse trova una più esatta applicazione.

I valori di ν riportati nella precedente tabella mostrano quanto grandi sieno le variazioni del modulo di torsione col variare del peso tensore. Vero è che nel caso attuale non si tratta di un corpo isotropo; ma non resta escluso che anche nei corpi meno cedevoli alle forze deformatrici si modifichi in maniera apprezzabile colla tensione il valore del modulo di torsione, e che perciò usando masse addizionali quando si determinano i momenti d'inerzia si faccia intervenire una causa di errore.

Dilatazione termica. — Col materiale cimentato nello studio della trazione e con un metodo di ricerca informato ai medesimi criteri allora seguiti fu presa in esame la dilatazione termica del caucciù. Si è voluto a tale scopo adoperare la disposizione sperimentale indicata nella prima parte di questo

scritto, come quella che offriva sufficienti garanzie per l'attendibilità delle misure, non ostante si fosse costretti a limitare molto l'intervallo di temperatura, poichè questo, attese le dimensioni dell'apparecchio, poteva essere prodotto soltanto per mezzo del riscaldamento artificiale della stanza.

Servi per la ricerca un termometro graduato in decimi e collocato vicinissimo alla lastra: se ne seguiva l'andamento alquanto tempo dopo che si erano raggiunte condizioni termiche pressocchè stazionarie facendo simultaneamente misure dei due diametri tracciati sulla lastra, e si procedeva a quelle definitive solo quando in corrispondenza alle piccole variazioni indicate dal termometro si modificavano le dimensioni dei due tratti in conformità dell'andamento generale del fenomeno.

Poichè l'attuale studio mirava principalmente ad un esame particolareggiato della nota anomalia che si ha nella dilatazione termica del caucciù stirato, si operò con carichi tensori differenti, procurando di evitare l'azione disturbatrice dovuta alla elasticità di seconda specie col dar principio alle serie relative ad ogni carico per lo meno un paio di giorni dopo che si era modificata la tensione della lastra.

I calcoli per ottenere i coefficienti di dilatazione lineare ed il coefficiente di dilatazione cubica si fecero adoperando le formule approssimate

$$\lambda_1 = \frac{2(L_2 - L_1)}{(t_2 - t_1)(L_1 + L_2)}, \quad \lambda_2 = \frac{2(D_2 - D_1)}{(t_2 - t_1)(D_1 + D_2)}, \quad \alpha = \lambda_1 + 2\lambda_2,$$

il cui impiego era legittimo attesa la piccolezza delle dilatazioni termiche.

I risultati dell'esperienze sono esposti nella seguente tabella.

P	T ₀	T ₁	L ₀	L ₁	D ₀	D ₁	10 ³ .λ ₁	10 ³ .λ ₂	10 ³ .α

LASTRA I.

0,9	21,45	33,89	102,133	102,318	99,772	99,912	146	113	372
»	21,44	34,64	102,161	102,356	99,730	99,877	145	112	369
3,9	21,76	34,61	107,580	107,661	97,469	97,619	59	120	299
»	18,93	32,95	107,627	107,707	97,377	97,566	54	124	302
6,9	19,61	31,99	113,818	113,748	94,979	95,182	— 53	173	293
»	20,66	32,97	113,933	113,882	94,947	95,149	— 36	173	310
9,9	21,82	33,42	121,511	121,148	92,161	92,446	— 258	266	274
»	22,83	33,97	121,628	121,286	92,105	92,381	— 252	269	286
6,9	22,08	33,93	114,822	114,704	94,358	94,627	— 87	241	395
»	22,72	34,91	114,808	114,684	94,377	94,647	— 89	235	381
3,9	22,50	34,28	108,698	108,704	96,735	96,975	9	211	431
»	20,20	33,11	108,621	108,672	96,723	96,965	36	194	424
0,9	18,82	32,46	103,138	103,262	99,033	99,267	88	173	434
»	20,15	33,76	103,050	103,201	99,091	99,320	108	170	448

LASTRA II.

0,9	20,56	32,97	103,952	103,134	98,917	99,180	142	214	570
»	20,97	34,04	102,955	103,139	98,917	99,209	137	226	589
4,9	22,14	35,73	113,653	113,431	94,256	94,692	— 144	340	536
»	20,40	34,95	113,814	113,597	94,147	94,612	— 131	340	549
8,9	20,52	34,61	128,196	127,267	88,884	89,523	— 514	510	506
»	21,69	33,69	128,246	127,493	88,904	89,432	— 489	495	501
0,9	24,21	36,18	103,632	103,761	98,382	98,657	104	234	572
»	25,41	36,60	103,543	103,649	98,477	98,711	100	233	566

LASTRA III.

0,4	23,51	34,83	101,460	101,647	99,038	99,256	163	195	553
3,4	25,08	35,69	110,620	110,578	94,885	95,150	— 36	263	490
»	25,54	35,98	110,681	110,610	94,837	95,138	— 56	277	498
»	24,02	36,32	110,725	110,654	94,798	95,108	— 52	266	480
6,4	21,06	32,65	122,637	122,136	90,660	91,077	— 352	397	442
»	21,18	32,49	122,797	122,246	90,606	91,036	— 396	419	442
3,4	20,32	30,78	111,422	111,322	94,976	95,264	— 86	396	506
»	20,01	32,02	111,348	111,245	94,970	95,290	— 84	306	528
0,4	18,75	31,35	101,879	102,047	99,241	99,469	131	182	495
»	20,77	31,45	101,892	102,022	99,316	99,486	120	160	500

Contrariamente a quanto asserisce il Lundal ¹⁾, risulta dai valori di α avanti riportati che questo coefficiente varia col carico nel caso del caucciù, e siccome a deduzioni conformi si perviene con ciascuna delle tre lastre sembra poco probabile che cause accidentali di errore abbiano potuto mascherare in

1) Wied. Ann, 66, (1898).

questa parte dell'indagine il carattere reale del fenomeno. Per ciò che riguarda poi la grandezza delle α non può recar meraviglia che si sieno ottenuti per la lastra I valori notevolmente più piccoli che per le altre, essendosi già accertato che si hanno nei due casi condizioni di struttura interna assai diverse.

I valori di λ e λ' danno più esattamente che non si fosse avuto finora la legge secondo cui in apparenza variano i due coefficienti di dilatazione lineare col variare del carico, perchè entrambi furono dedotti con un metodo diretto; ed è degno di nota che il piccolo carico iniziale, risultante dalle forze di gravità che agiscono sulla lastra e dal peso dell'armatura sottostante col piatto annesso, è bastevole a produrre nel caucciù ordinario una dilatazione termica longitudinale sensibilmente più piccola di quella relativa al tratto trasversale. Anche intorno a questo particolare la lastra I presenta un comportamento opposto.

Per quanto il sig. Lundal sia riuscito a provare che crescendo la temperatura aumenta il modulo del caucciù, deve osservarsi che nello studio dell'anomalia non si sono posti in evidenza tutti i fattori che tenderebbero a renderne meno spiccato il carattere, essendosi trascurato di considerare che la dilatazione termica trasversale fa diminuire il peso tensore unitario, e che effetti apprezzabili ancora di natura elastica si possono avere per il fatto stesso delle variate dimensioni longitudinali.

Il problema può risolversi in modo completo qualora si parta dalla equazione dell'isoterma relativa alla temperatura t , equazione che facilmente si ricava dalla (1):

$$\Delta L_0 = L_0 \left(e^{\frac{P}{sE}} - 1 \right)$$

in cui L_0 denota la lunghezza della lastra priva di carico, ΔL_0 l'aumento di lunghezza che corrisponde al peso tensore P , s la sezione ridotta od attuale del corpo, ed E il modulo medio inerente alla deformazione ΔL_0 .

Per una variazione di temperatura δt si avrà:

$$\delta (\Delta L_0) = \Delta L_0 \frac{\delta L_0}{L_0} - L \log \frac{L}{L_0} \left(\frac{\delta s}{s} + \frac{\delta E}{E} \right),$$

dove $\delta (\Delta L_0)$ denota la quantità di cui si accresce l'allungamento elastico per le variazioni di L_0 , s ed E dovute all'aumento di temperatura, ossia la quantità che si deve detrarre dall'aumento totale di lunghezza, nel passaggio da t a $t + \delta t$, per avere l'effetto puramente termico nel senso longitudinale. E poichè alla dilatazione elastica secondo la lunghezza corrisponde sempre una contrazione trasversale legata alla prima per mezzo del coefficiente di Poisson, si può dedurre l'effetto termico nel senso della larghezza sostituendo al valore di D , che si riferisce alla temperatura finale, il valore ridotto D_1 che si ha dalla relazione:

$$\mu = \frac{\log D - \log D_1}{\log (L + \delta (\Delta L_0)) - \log L}.$$

Si fece applicazione del procedimento teorico per mezzo dei risultati avuti colla lastra III, sia nelle esperienze avanti descritte, sia in quelle che furono compiute in seguito sottoponendo la lastra a parziale detrazione alle temperature di 14°, 20 e 25, 20, e che trovansi riassunte nell'annesso quadro.

P	T	L	D	E'	μ'
8,4	14,20	133,486	86,800	0,1144	0,430
7,9	»	131,120	87,470		
8,4	25,20	132,495	87,290	0,1173	0,460
7,9	»	130,218	87,990		

Le prime bastavano per la determinazione di ΔL_0 , le altre, eseguite appositamente per l'esame del solo effetto termico, permettevano di valutare δs , e coll'aiuto dei dati iniziali δE .

Eseguiti i calcoli si ottenne:

$$\text{per } P = 8,4, \quad \Delta L_0 \frac{\delta L_0}{L_0} = 0,065, \quad \frac{PL}{sE} \cdot \frac{\delta s}{s} = 0,438, \quad \frac{PL}{sE} \cdot \frac{\delta E}{E} = 0,796$$

$$\text{per } P = 7,9, \quad \quad \quad = 0,061, \quad \quad \quad = 0,403, \quad \quad \quad = 0,731;$$

donde, detti λ_1 e λ'_1 , i coefficienti di dilatazione reale che corrispondono a λ e λ' si ricavò:

per $P = 8,4$, $\lambda_1 = 0,000\ 137$, $\lambda'_1 = 0,000\ 163$, $\alpha = 0,000\ 463$

per $P = 7,9$, $\lambda_1 = 0,000\ 114$, $\lambda'_1 = 0,000\ 200$, $\alpha = 0,000\ 516$.

Dai valori dei termini contenenti i fattori $\frac{\delta L_0}{L_0}$, $\frac{\delta s}{s}$ si può argomentare che la deformazione elastica del corpo influisce in modo notevole sul fenomeno in esame, nel senso di attenuare il comportamento anomalo del caucciù dovuto all'aumento del modulo col crescere della temperatura. Questo aumento fu accertato colle esperienze dirette dell'ultima serie eseguita colla lastra III, che diedero per la variazione termica del modulo E' , corrispondente ad una piccola deformazione parziale, risultati dello stesso ordine di grandezza di quelli cui era pervenuto il Lundal.

Atteso il numero esiguo di dati sperimentali di cui si dispone non è possibile dedurre leggi di dipendenza fra i due coefficienti di dilatazione lineare ed il peso tensore; si può notare soltanto che il coefficiente reale di dilatazione cubica risulterebbe non molto discosto dai valori di α avuti nel caso della lastra priva di carico.