Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Bd. 81.

No. 1935.

15.

Ueber die Bestimmung des mittleren Fehlers einer in mehreren Theilen doppelt gemessenen Grundlinie.

In No. 1924 der Astron. Nachr. finden sich zwei Aufsätze, der eine von Herrn Professor *Helmert*, der andere von Herrn Professor *Jordan*, welche beide die Genauigkeit der Formeln

$$(1) \dots \mu^2 = \frac{1}{2p} \left[\frac{d^2}{n} \right].$$

und

$$(2) \dots \mu^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{n} \right]$$

einer näheren Betrachtung unterziehen. Die Bezeichnungen dieser Formeln sind hier die schon von Herrn *Helmert* benutzten, nämlich

d die Beobachtungsdifferenzen der Doppelmessungen,

n die Längen der doppelgemessenen Theile, etwa in Messstablängen angegeben,

p die Anzahl dieser Theile,

μ^2 das Quadrat des mittleren zufälligen Fehlers für die Längeneinheit (Messstablänge) oder besser, was die Formel (2) betrifft, der mittlere Werth sämtlicher Quadrate solcher Fehler für die ganze Messung.

Das Resultat beider genannten Aufsätze ist nun, dass im Allgemeinen die Formel (1) eine grössere Genauigkeit als (2) giebt. Wenn dies mit der Note in No. 1901 der Astron. Nachr. nicht übereinstimmt, so darf man doch den Grund der Abweichung nicht in den Entwicklungen selbst, sondern in den Voraussetzungen dieser Entwicklungen suchen.

Die Aufsätze der Herren *Helmert* und *Jordan* setzen nämlich voraus, dass jede Stangenlänge in allen Theilen der Basis mit derselben Genauigkeit gemessen wird, und wenn man diese Voraussetzung festhält, ist auch das Resultat der beiden Herren Verfasser unbestreitbar richtig. Ja dies Resultat würde wohl dann sogar einer Erweiterung zum Vorthail der Formel (1) fähig sein. Die sehr allgemeine Formel

$$(3) \dots \mu^2 = \frac{1}{2[g]} \left\{ g_1 \frac{d_1^2}{n_1} + g_2 \frac{d_2^2}{n_2} + \dots + g_p \frac{d_p^2}{n_p} \right\},$$

welche in sich sowohl (1) (für $g_1 = g_2 = g_3 = \dots = g_p$) als (2) (für $g_1 = n_1, g_2 = n_2, \dots, g_p = n_p$) enthält, hat nämlich den mittleren Fehler

$$(3^*) \dots \mu^2 \sqrt{2 \frac{[g^2]}{[g]^2}} = \mu^2 \sqrt{\frac{2}{p} + \frac{2 [q^2]}{[g]^2}},$$

indem man für ein jedes g_r den Werth $\frac{[g]}{p} + q_r$ substituirt — und folglich ist (1), wo $q_1 = q_2 = \dots = q_p = 0$, nicht bloß genauer als (2), sondern auch genauer als alle übrigen in (3) enthaltenen Formeln.

In der oben erwähnten Note ist nun aber die Sache aus einem andern Gesichtspunkte betrachtet worden. Sie geht nämlich von der weit allgemeineren Voraussetzung aus, dass die Genauigkeit der Messungen variabel und zwar nach einem unbekannten Gesetze veränderlich sei, und hieraus folgt dann wieder, dass die mittleren Fehler der verschiedenen Theile der Grundlinie als verschieden und von einander unabhängig betrachtet werden müssen. Bezeichnet man die mittleren Fehler für die r te Stangenlänge bei den beiden Messungen desselben Basistheiles mit α_r und β_r , so wird offenbar der mittlere Fehler m des arithmetischen Mittels dieser beiden Messungen durch die Formel

$$m^2 = \frac{1}{4} ([\alpha^2] + [\beta^2])$$

bestimmt. — Man hat nun in aller Schärfe

$$d^2 = ([a] - [b])^2,$$

wenn a_r und b_r die wahren Fehler der entsprechenden Stangenlängen bei den beiden Messungen bezeichnen. Nimmt man den mittleren Werth der letzten Gleichung, wird

$$d^2 = [\alpha^2] + [\beta^2] = 4 m^2,$$

und bezeichnet M den mittleren Fehler des endlichen Werthes der ganzen Grundlinie, erhält man

$$M^2 = [m^2] = \frac{1}{4} [d^2].$$

Weil μ^2 durch die Gleichung

$$M^2 = \frac{[n]}{2} \mu^2$$

definiert ist, muss also diese Grösse hier aus der Formel (2) berechnet werden. Dieselbe Formel lässt sich auch unmittelbar aus den mittleren Fehlern der einzelnen Stangenlängen herleiten. Es ist nämlich

$$\mu^2 = \frac{[\alpha^2]_1 + [\alpha^2]_2 + \dots + [\alpha^2]_p + [\beta^2]_1 + [\beta^2]_2 + \dots + [\beta^2]_p}{2 [n]},$$

wo der beigefügte Index den Theil der Basis angiebt, zu welchem die betreffenden mittleren Fehler gehören. Setzt man aber hierin für irgend ein $[\alpha^2] + [\beta^2]$ wie oben entwickelt das entsprechende d^2 , so hat man wieder die Formel (2).

Ob nun die eine oder die andere der oft erwähnten Formeln (1) und (2) als die richtige betrachtet werden muss, hängt somit von dem Standpunkte ab, welchen man zur Frage von der Genauigkeit einer Messung der einzelnen Stangenlänge einnimmt, ob man nämlich diese unbekannte Genauigkeit als konstant oder als variabel betrachten will. Als Beitrag zur Beantwortung dieser Frage werden hier die Werthe von $\mu^2 = \frac{d^2}{\mu}$ angeführt,

welche aus den mir vorliegenden Messungen mit *Bessel's* Basisapparat gezogen werden können. Diese Messungen betreffen die Grundlinien bei Königsberg, Kopenhagen und Berlin, von welchen die erste in zwei, die zweite in drei und die dritte in vier Theilen doppelt gemessen ist,

		n	d	μ^2
Königsberg	I	113	589	1535
	II	354	2691	10228.
Kopenhagen	I	16	24	18
	II	67	134	134
	III	94	540	1551.
Berlin	I	160	1207	4553
	II	134	138	71
	III	160	930	2703
	IV	145	144	72

die Längeneinheit für d und μ ist 0.001 Linie. — Diese Bestimmungen von μ^2 weichen sehr von einander ab. Zwar sind die mittleren Fehler der angeführten Werthe sehr gross, nämlich $\mu^2 \sqrt{2}$, und ausserdem ist die Anzahl dieser Werthe zu klein, um daraus einen zuverlässigen Schluss ziehen zu können, aber es dürfte doch vielleicht nicht zu gewagt sein anzunehmen, dass diese Zahlen besser mit der Voraussetzung einer variablen als mit der einer konstanten Genauigkeit übereinstimmen. — Jene Voraussetzung eines konstanten mittleren Fehlers der einzelnen Stangenlänge scheint mir auch Konsequenzen mit sich zu führen, deren Unrichtigkeit unmittelbar einleuchtet. Denkt man sich nämlich einen Theil der Grundlinie sehr kurz, etwa von der Länge eines Messstabes, so würde man ja durch n wiederholte Messungen dieses Theiles mit wenig Mühe das nothwendige Material erhalten, um μ^2 sehr genau durch die Formel

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}$$

zu bestimmen, indem der mittlere Fehler dieser Bestimmung den Werth $\mu^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ hat. Muss man nun

aber einräumen, dass man doch auf diese Weise nur eine sehr unzuverlässige Vorstellung von der Genauigkeit der Basismessung erhalten würde, so wird man auch gestehen müssen, dass die Voraussetzung von der Unveränderlichkeit des mittleren Fehlers der einzelnen Messung keine durchaus haltbare sein könne.

Es dürfte noch bemerkt werden, dass es mit Rücksicht auf die zuverlässige Berechnung des mittleren Fehlers aus Doppelmessungen vortheilhaft sein würde, die Theile der Grundlinie gleich gross zu machen. Für diesen Fall gehen nämlich die den beiden Annahmen entsprechenden Formeln in einander über.

Kopenhagen 1873, März 29.

G. Zachariae.

Elemente der Antigone (129) und Ephemeride.

Zu einer ersten Bahnbestimmung wurden die folgenden vier Beobachtungen zu Grunde gelegt:

1873	M. Zt. Ham. Coll.	Scheinb. AR.	Scheinb. Decl.	Anzahl d. Vgl.
Febr. 5	15 ^h 21 ^m 52 ^s .5	9 ^h 16 ^m 32 ^s .94	+ 15° 31' 50".8	16
„ 17	9 1 51.2	9 6 41.57	17 2 1.7	10
März 1	8 43 36.2	8 57 55.40	18 24 48.2	14
„ 14	9 38 9.6	8 51 31.56	+ 19 35 55.8	16