Allgemeine Methode zur Berechnung von Doppelstern-Bahnen, von Herrn Dr. *Klinkerfues*.

In № 990 der Astron. Nachr. habe ich eine Methode mitgetheilt, aus drei Positionswinkeln und den zugehörigen Angular-Geschwindigkeiten die Bahn eines Sternpaares ohne Tatonnement zu bestimmen, so oft die Statt gehabte Bewegung eine gewisse Grösse nicht überschreitet. Durch zwei Anwendungen glaube ich ihre practische Brauchbarkeit dargethan zu haben. Oeftere Rechnungen haben mir indessen auch bei dieser Methode die Anwendung von Angulargeschwindigkeiten, selbst wenn sie in so geringer Anzahl, wie hier, gebraucht werden, als misslich erscheinen lassen, so dass ich zum Suchen nach einer allgemeineren Methode, als die bis jetzt bekannten, bei denen die Angulargeschwindigkeiten, d. h. die Derivirten nach der Zeit, als gegebene Grössen explicite oder implicite verlangt werden, veranlasst wurde. Der Erfolg dieser Versuche ist vollständiger gewesen, als ich hoffen durfte; denn die Methode, auf welche ich dabei geführt bin, und die ich mir hier den Astronomen kurz mitzutheilen erlaube, besitzt in jeder Beziehung eine grosse Allgemeinheit. Dass dabei die Zeitintervalle eine beliebige Grösse haben dürfen und die meisten u. die wichtigsten Combinationen von Beobachtungen derselben Methode unterworfen werden können, scheint mir ein bedeutender Vorzug zu sein. Ob sie nicht auch den Vorzug in Rücksicht auf Bequemlichkeit habe, werden diejenigen entscheiden können, welche nach den andern Methoden oft genug gerechnet haben, um zu solchen Vergleichen in den Stand gesetzt zu sein. Nach meiner eigenen Erfahrung halte ich die bei dieser Methode zu überwindende Arbeit meist für geringer als diejenige, welche bei Kometenbahnen den Anschluss einer Parabel an drei geocentrische Beobachtungen verursacht, wenn dies auf bekannte Art durch Hypothesen über die Abstände von der Erde geschieht.

Die für Bahnbestimmungen wichtigsten Combinationen von Beobachtungen sind die folgenden:

- Sechs oder mehr als sechs Positionswinkel,
- Zwei vollständige Beobachtungen und Drei Positionswinkel,
- Drei vollständige Beobachtungen und Ein Positionswinkel,

auf deren Behandlung ich mich hier beschränken will. Die in dem oben erwähnten Aufsätze gewählte Bezeichnung werde ich auch im Folgenden zu Grunde legen, wonach also unter Anderem v , v_1 , v_2 u. s. w. die wahren Anomalien, u , u_1 ,

u_2 u. s. w. die excentrischen, M , M_1 , M_2 u. s. w. die mittleren Anomalien vorstellen, die den Zeiten t , t_1 , t_2 u. s. w., sowie den Positionswinkeln φ , φ_1 , φ_2 u. s. w. entsprechen. An der Stelle des Elementes T , der Zeit des wahren Perihels werde ich hier als Element diejenige mittlere Anomalie einführen, welche einer beliebig gewählten Zeit t_0 entspricht; ich bezeichne sie mit M_0 .

Zur Abkürzung werde ausserdem noch folgende Bezeichnung angewandt; es sei

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{\sin(\varphi_2 - \varphi) \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} = (1025)$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_3 - \varphi_5)}{\sin(\varphi_3 - \varphi) \sin(\varphi_1 - \varphi_5)} = (1035)$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_4 - \varphi_6)}{\sin(\varphi_4 - \varphi) \sin(\varphi_1 - \varphi_6)} = (1045)$$

u. s. w. nach Analogie; ferner sei

$$\frac{\rho}{\rho_1} \frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)_{12}$$

$$\frac{\rho}{\rho_2} \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)_{21}$$

u. s. w. Indem ich bei diesen Symbolen an die Stelle der runden Klammern eckige setze, werde ich damit andeuten, dass man in den vorhergehenden Ausdrücken an die Stelle der Positionswinkel φ , φ_1 , φ_2 u. s. w. die entsprechenden wahren Anomalien, sowie die Radien Vektoren r , r_1 , r_2 an die Stelle der Distanzen ρ , ρ_1 , ρ_2 setzen soll. Es bedeute demnach z. B. das Symbol [1025] den Ausdruck

$$\frac{\sin(v_1 - v) \sin(v_2 - v_3)}{\sin(v_2 - v) \sin(v_1 - v_3)}$$

und $\left[\frac{\rho}{\rho_1}\right]_{12}$ den folgenden:

$$\frac{r}{r_1} \cdot \frac{\sin(v - v_2)}{\sin(v_1 - v_2)}.$$

Dieses vorausgeschickt, werden folgende Gleichungen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} [1025] &= (1025) \\ [1035] &= (1035) \\ [1045] &= (1045) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

welche auf der rechten Seite nur Gegebenes enthalten, wenn die sechs Positionswinkel φ , φ_1 , φ_2 u. s. w. als bekannt angesehen werden dürfen, während die linke Seite bloss die

drei Elemente M_0 , μ und c enthält, von welchen v , v_1 , v_2 u. s. w. abhängen.

Um die Richtigkeit dieser Gleichungen einzusehen, bemerke man, dass offenbar, da die scheinbare Bahn die orthogonale Projection der wahren Bahn ist, die Flächen der einen zu den Flächen der andern in einem constanten Verhältnisse stehen; dies giebt nun sowohl:

$$\frac{\frac{1}{2} r r_1 \sin(v - v_1)}{\frac{1}{2} r_1 r_5 \sin(v_5 - v_1)} = \frac{\frac{1}{2} \rho \rho_1 \sin(\varphi - \varphi_1)}{\frac{1}{2} \rho_1 \rho_5 \sin(\varphi_5 - \varphi_1)}$$

als auch:

$$\frac{\frac{1}{2} r r_2 \sin(v - v_2)}{\frac{1}{2} r_2 r_5 \sin(v_5 - v_2)} = \frac{\frac{1}{2} \rho \rho_2 \sin(\varphi - \varphi_2)}{\frac{1}{2} \rho_2 \rho_5 \sin(\varphi_5 - \varphi_2)}$$

Aus der Division der beiden Gleichungen in einander erhält man

$$\frac{\sin(v_1 - v) \sin(v_2 - v_5)}{\sin(v_2 - v) \sin(v_1 - v_5)} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_2 - \varphi_5)}{\sin(\varphi_2 - \varphi) \sin(\varphi_1 - \varphi_5)}$$

oder, nach der eingeführten Bezeichnung:

$$[1025] = (1025).$$

Die Richtigkeit der andern Gleichungen lässt sich auf dieselbe Weise darthun.

Wenn mehr als sechs Positionswinkel gegeben sind, so werden zu diesen Bedingungen eben so viele von derselben Form hinzukommen, als überschüssige Beobachtungen vorhanden sind. Man hat alsdann nur nöthig, auf das verschiedene Gewicht dieser Gleichungen Rücksicht zu nehmen, um die Elemente M_0 , μ und c nach allen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen. Es wird aber dies Geschäft meist nur bei näherungsweise Kenntniss der Elemente und also mit Hilfe von Differentialformeln ausgeführt werden; es bietet deshalb im Ganzen so wenig Besonderes dar, dass ich dem Falle, wo mehr als sechs Positionswinkel gegeben sind, an diesem Orte keine weitere Aufmerksamkeit schenke.

Für eine andere Combination von Beobachtungen hat man:

$$\begin{aligned} [102] &= (102) \\ [112] &= (112) \end{aligned}$$

und ähnliche Bedingungen. Da die chronologische Ordnung der Indices nicht vorausgesetzt wird, so kann man es stets so einrichten, dass in dem Systeme

$$\left. \begin{aligned} [1024] &= (1024) \\ [1034] &= (1034) \\ [112] &= (112) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

auf der rechten Seite Alles bekannt ist, wenn zwei vollständige Beobachtungen und drei Positionswinkel gegeben sind, so wie sich das folgende:

$$\left. \begin{aligned} [1023] &= (1023) \\ [112] &= (112) \\ [121] &= (121) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

stets für die Combination von drei vollständigen Beobachtungen und einem Positionswinkel passend machen lässt.

Bei der Anwendung dieser Schemata bleibt aber doch noch einige Willkür für die Wahl der Indices; man kann deshalb noch darauf Rücksicht nehmen, es so einzurichten, dass kleine Veränderungen der Elemente möglichst grossen Aenderungen der Ausdrücke auf der linken Seite der obigen Gleichungen entsprechen. Es lässt sich diese Rücksicht immer leicht nehmen; es ist aber in jedem Falle anzurathen, wenigstens dafür zu sorgen, dass sie nicht in hohem Grade verletzt wird, weil sonst die Auflösung der Gleichungen, worauf diese ganze Methode beruht, Schwierigkeiten darbieten würde, welche dabei ausserdem nur dann vorkommen können, wenn sie in der Natur der Sache liegen, mit andern Worten, nur dann, wenn eine Bestimmung der Elemente nicht möglich ist. Daher würde es, um durch ein Beispiel das oben Gesagte zu erläutern, gewöhnlich nicht gut sein, bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen (1) die Anordnung so zu treffen, dass diese mit den folgenden.

$$[1023] = (1023)$$

$$[2134] = (2134)$$

$$[3245] = (3245)$$

identisch würden, sobald man bei diesen letzteren die chronologische Ordnung der Indices wählte.

Auch wenn die Elemente noch ganz unbekannt sind, weiss man doch stets, wenigstens von den beiden Unbekannten M_0 und μ , so viel, als nöthig ist, die Werthe von M_0 , μ und c aus den Gleichungen (1), (2) oder (3) ohne eine grosse Anzahl von Versuchen zu bestimmen. In der That bietet, wie man sich wohl überzeugen wird, die indirecte Auflösung jener Gleichungen niemals erhebliche Schwierigkeiten dar, so oft die zur Bahnbestimmung gewählte Combination weder mit den bekannten Gesetzen der elliptischen Bewegung unvereinbar ist, noch auch diesem Falle durch leichte Aenderungen der Beobachtungen nahe gebracht werden kann. Dass diese Bedingung erfüllt sei, wird bei jeder Bahnbestimmung vorausgesetzt werden müssen. Gewiss ist, dass das folgende Verfahren zur Auflösung obiger Gleichungen, selbst ohne ein die Rechnung so sehr abkürzendes Hilfsmittel, als man unten kennen lernen wird, bei keinem der jetzt untersuchten Sternpaare eine grössere Arbeit verursachen würde, als die Astronomen jetzt für die entsprechenden Untersuchungen bei neu entdeckten Planeten auszuführen gewohnt sind. Der bequemste Weg zur Auflösung scheint der zu sein, dass man über M_0 und μ Hypothesen entwirft und dazu jedesmal c so bestimmt, dass einer der drei Gleichungen genügt wird. Diese Bestimmung von c lässt sich mit Anwendung des gedachten Hilfsmittels immer sehr schnell erledigen. Die bei den zwei andern Gleichun-

gen sich zeigenden Fehler werden zur Prüfung der Hypothese, und dann auch, nachdem über eine zweite und dritte Annahme von M_0 und μ dieselbe Rechnung aufgestellt worden ist, in Verbindung mit den hier sich zeigenden Fehlern dazu dienen, genauere Werthe der Unbekannten abzuleiten. Wenn man in der ersten Hypothese für die (fast immer leicht zu schätzende) Epoche des scheinbaren Perihels $M_0 = 0^\circ$ setzt, während man einen vorläufigen Werth von μ durch Schätzung der Zeit zu gewinnen sucht, welche von der letzten Beobachtung bis zur Rückkehr des Sterns in die zuerst beobachtete Position verfließen wird, so kann darin in allen Fällen ein sicherer Angriffspunkt für die Versuche gesehen werden. Fast ohne Ausnahme (alle jetzt bestimmbaren Bahnen nämlich möchten kaum eine solche darbieten) werden die aus den drei ersten Hypothesen geschlossenen Werthe von M_0 , μ und e genau genug sein, um die Anwendung von Differentialformeln zu gestatten.

Ich werde nun ein Hülfsmittel angeben, welches nicht nur bei Anstellung dieser Versuche, sondern bei Rechnungen über Doppelsterne überhaupt eine grosse Erleichterung gewährt. Es ist dasselbe in einer merkwürdigen Eigenschaft der verkürzten Cycloide enthalten, welche sich am Einfachsten auf folgende Weise möchte aussprechen lassen:

Wenn man einen Kreis vom Radius 1 auf einer Geraden rollen lässt, so dass ein vom Centrum um die Grösse e abstehender Punkt eine verkürzte Cycloide beschreibt, so ist bei passender Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten die Abscisse des bewegten Punktes die mittlere Anomalie, die Ordinate desselben der Radius Vector, während die Abscisse des eine Gerade beschreibenden Centrums die excentrische Anomalie vorstellt, dabei die Excentricität gleich e und die halbe grosse Axe gleich 1 gesetzt. Die rechtwinkligen Coordinaten sind so zu wählen, dass für $x = 0$ $y = 1 - e$ wird.

Dieser Bemerkung zu Folge, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, wird, sobald man die Cycloide für die Excentricität e construirt und die von dem Centrum des Kreises beschriebene Gerade gezogen hat, die excentrische Anomalie für eine gegebene mittlere Anomalie dadurch gefunden, dass man aus dem Punkte der Cycloide, welcher die mittlere Anomalie zur Abscisse hat, als dem Centrum,

mit dem Halbmesser e einen Kreis beschreibt; der Durchschnittspunkt des letzteren mit jener Geraden wird die excentrische Anomalie zur Abscisse haben.

Ein System von Cycloiden, für alle ganzen Zehntel der Excentricität construirt, lässt noch, in einem bequemen Maassstabe, z. B. bei einem Halbmesser des rollenden Kreises von 40 Millimetern, gezeichnet, eine Genauigkeit von einem Bruchtheile eines Grades in der excentrischen Anomalie, und eine der entsprechende im Radius Vector zu. Nur wenn die Anomalien nahe an 0_0 oder 180° fallen, gibt die eben beschriebene Operation nicht unmittelbar diese Genauigkeit für die excentrische Anomalie, obwohl das graphische Verfahren auch dann noch, wenn auch in anderer Weise, wie mir aber nicht nöthig scheint auszuführen, bei Auflösung der *Kepler'schen* Gleichung zu benutzen ist. Dem sich fühlbar machenden Bedürfnisse, wonach es wünschenswerth ist, die vor Anwendung der Differentialformeln anzustellenden Versuche bei einem zulässigen Opfer an Schärfe möglichst abzukürzen, wird durch die Zuziehung der Cycloide Genüge geleistet. Die Anwendung derselben erspart den beschwerlichsten Theil der Rechnung, da der noch übrig bleibende, die Ableitung der wahren Anomalien aus den excentrischen und die Berechnung von [1025], [2035] u. s. w. nur wenig Mühe verursacht.

Ich will hier noch darauf aufmerksam machen, dass durch die Cycloide auch der Differentialquotient $\frac{dM}{du}$ unmittelbar gegeben wird; denn dieser Quotient ist gleich $\frac{r}{a}$. Man erhält somit zugleich ein Mittel, bei der scharfen Auflösung der *Kepler'schen* Gleichung den nöthigen successiven Verbesserungen der excentrischen Anomalie einen hohen Grad von Convergenz zu geben.

Nachdem man die Werthe von M_0 , μ und e näherungsweise bestimmt hat, wird es zweckmässig sein, die noch nöthigen Verbesserungen derselben mit Hülfe von Differentialformeln abzuleiten. Es nehmen die Ausdrücke [1025], [1035], [1045], und überhaupt die auf der linken Seite der Gleichungen (1), (2) und (3) vorkommenden Ausdrücke, bei der Differentiation nach v , v_1 , v_2 u. s. w. und nach r , r_1 , r_2 gleich eine einfache Form an, wenn man die Differentiale aus denen des Logarithmus herleitet. Auf diese Weise wird man aus den Gleichungen (1) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \cotang(v_1 - v)(dv_1 - dv) + \cotang(v_2 - v_5)(dv_2 - dv_5) - \cotang(v_2 - v)(dv_2 - dv) - \cotang(v_1 - v_5)(dv_1 - dv_5) &= \frac{d[1025]}{[1025]} \\ \cotang(v_1 - v)(dv_1 - dv) + \cotang(v_3 - v_5)(dv_3 - dv_5) - \cotang(v_3 - v)(dv_3 - dv) - \cotang(v_1 - v_5)(dv_1 - dv_5) &= \frac{d[1035]}{[1035]} \\ \cotang(v_1 - v)(dv_1 - dv) + \cotang(v_4 - v_5)(dv_4 - dv_5) - \cotang(v_4 - v)(dv_4 - dv) - \cotang(v_1 - v_5)(dv_1 - dv_5) &= \frac{d[1045]}{[1045]} \end{aligned} \right\} \cdot (4)$$

Ferner wird man haben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{r} - \frac{dr_1}{r_2} + \cotang(v-v_2)(dv-dv_2) - \cotang(v_1-v_2)(dv_1-dv_2) &= \frac{d\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \\ \frac{dr}{r} - \frac{dr_2}{r_2} + \cotang(v-v_1)(dv-dv_1) - \cotang(v_2-v_1)(dv_2-dv_1) &= \frac{d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

u. s. w.

Für die Gleichungen (4) ziehe ich vor, so oft nicht die Anzahl der Beobachtungen zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate Veranlassung geben kann, folgende Form zu gebrauchen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(v_1-v_2)\sin(v_2-v_5)}{\sin(v_2-v)} dv + \frac{\sin(v-v_5)\sin(v_2-v_5)}{\sin(v_1-v_5)} dv_1 + \frac{\sin(v_1-v)\sin(v_5-v)}{\sin(v_2-v)} dv_2 + \frac{\sin(v_1-v)\sin(v_2-v_1)}{\sin(v_1-v_5)} dv_5 &= \sin(v_2-v)\sin(v_1-v_5) d[1025] \\ \frac{\sin(v_1-v_3)\sin(v_3-v_5)}{\sin(v_3-v)} dv + \frac{\sin(v-v_5)\sin(v_1-v_5)}{\sin(v_1-v_5)} dv_1 + \frac{\sin(v_1-v)\sin(v_5-v)}{\sin(v_3-v)} dv_3 + \frac{\sin(v_1-v)\sin(v_3-v_1)}{\sin(v_1-v_5)} dv_5 &= \sin(v_3-v)\sin(v_1-v_5) d[1035] \\ \frac{\sin(v_1-v_4)\sin(v_4-v_5)}{\sin(v_4-v)} dv + \frac{\sin(v-v_5)\sin(v_4-v_5)}{\sin(v_1-v_5)} dv_1 + \frac{\sin(v_1-v)\sin(v_5-v)}{\sin(v_4-v)} dv_4 + \frac{\sin(v_1-v)\sin(v_4-v_1)}{\sin(v_1-v_5)} dv_5 &= \sin(v_4-v)\sin(v_1-v_5) d[1045] \end{aligned} \right\} (6)$$

In diesen Gleichungen (4), (5) und (6) müssen nun noch für dv , dv_1 , dv_2 u. s. w., dr , dr_1 , dr_2 deren Ausdrücke substituiert werden, welche die Correctionen dM_0 , $d\mu$ und de oder $d\psi$, wenn ψ durch die Gleichung $e = \sin\psi$ eingeführt wird, enthalten. Man findet

$$\begin{aligned} dv &= \frac{a^2 \cos\psi}{r^2} dM_0 + \frac{a^2 \cos\psi}{r^2} (t-t_0) d\mu + \left(\frac{a}{r} + \frac{a^2 \cos\psi^2}{r^2} \right) \sin u d\psi \\ \frac{dr}{r} &= \frac{a}{r} \tan\psi \sin v dM_0 + \frac{a}{r} \tan\psi \sin v \cdot (t-t_0) d\mu - \frac{a}{r} \cos\psi \cos v d\psi \end{aligned}$$

Die Substitution in die Formeln (4), (5) oder (6) wird nach der numerischen Berechnung der Coefficienten ohne Unbequemlichkeit ausgeführt, da es leicht ist, sich für dieses Geschäft ein übersichtliches Schema aufzustellen.

In dem Vorhergehenden ist Alles, was zur Berechnung der Elemente M_0 , μ und e nöthig ist, enthalten, und ist, um die Methode vollständig zu machen, nur noch zu zeigen, wie nachher die drei übrigen Elemente Ω , $\pi-\Omega$ und i bestimmt werden können. Zuvor jedoch will ich darauf aufmerksam machen, dass man schon aus den drei ersteren Elementen Positionswinkel sowie Distanzen berechnen kann, ohne die anderen Elemente selbst zu kennen, wenn nur dafür drei Positionswinkel gegeben sind. Es seien diese Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , die dazu gehörigen wahren Anomalien und Radien Vektoren beziehungsweise v_1 , v_2 , v_3 , r_1 , r_2 , r_3 , so kann man einen beliebigen Positionswinkel φ , welcher der wahren Anomalie v entsprechen soll, aus der Gleichung:

$$\frac{\sin(\Phi_1-\varphi)}{\sin(\Phi_2-\varphi)} \cdot \frac{\sin(\Phi_2-\Phi_3)}{\sin(\Phi_1-\Phi_3)} = \frac{\sin(v_1-v)}{\sin(v_2-v)} \cdot \frac{\sin(v_2-v_3)}{\sin(v_1-v_3)}$$

finden. Wenn man der Kürze halber:

$$\frac{\sin(v_3-v_2)\sin(\Phi_2-\Phi_1)}{\sin(\Phi_3-\Phi_2)\sin(v_2-v_1)} = k$$

und

$$\frac{\sin(v-v_1)}{\sin(v-v_3)} = \tan\zeta$$

so wird φ aus folgender Formel erhalten werden:

$$\tan\frac{1}{2}(\Phi_1+\Phi_3-2\varphi) = \tan(45^\circ+\zeta)\tan\frac{1}{2}(\Phi_3-\Phi_1).$$

Die hier bleibende Ungewissheit wegen des zu wählenden Quadranten wird sich in den meisten Fällen sehr leicht heben lassen. Um auch das Verhältniss der zu berechnenden Distanz ρ zu einer gegebenen Distanz ρ_2 zu bestimmen, würde die Formel:

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{\sin(\Phi_2-\Phi_1)}{\sin(v_2-v_1)} \cdot \frac{\sin(v-v_1)}{\sin(\Phi-\Phi_1)} \cdot \frac{r}{r_2} \dots \dots \dots (7)$$

zu gebrauchen sein, sobald φ bekannt ist.

Obgleich die Berechnung von Oertern auf die gewöhnliche Art, d. h. mit Benutzung von Ω , $\pi-\Omega$ und i , bequemer ist, so habe ich hier dieser Formeln doch Erwähnung thun wollen, weil ihre Anwendung auf die Bestimmung von Bahnen durch Versuche in einigen Fällen vortheilhaft sein kann.

Zur Bestimmung von Ω , $\pi-\Omega$ und i bieten sich verschiedene Wege dar. Einer derselben lässt die Berechnung aus drei Positionswinkeln z. B. φ , Φ_1 , Φ_2 auf den Fall zurückführen, wo ausser diesen und dem Verhältnisse der drei Radien Vektoren, auch das der Distanzen bekannt ist, während hier zunächst die wahren Anomalien statt dessen gegeben sind. Die Anwendung der Formel (7) gibt das verlangte Verhältniss der Distanzen, und es hat dann keine Schwierigkeiten mehr, Ω und i unter Anwendung der Formeln (4) und (5) des oben erwähnten Aufsatzes zu berechnen. Endlich folgt $\pi-\Omega$ aus einer der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \tan(\varphi-\Omega) &= \cos i \tan(v+\pi-\Omega) \\ \tan(\Phi_1-\Omega) &= \cos i \tan(v_1+\pi-\Omega) \\ \tan(\Phi_2-\Omega) &= \cos i \tan(v_2+\pi-\Omega) \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

Direct und bequemer führt der folgende Weg zur Bestimmung von Ω , $\pi - \Omega$ und i . Geht man von diesen Gleichungen (8) aus, indem man sie in einander dividirt, so ergibt sich nach einer leichten Transformation:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(v_1 + v + 2(\pi - \Omega)) &= \sin(v_1 - v) \sin(\varphi_1 + \varphi - 2\Omega) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi) \sin(v_2 + v + 2(\pi - \Omega)) &= \sin(v_2 - v) \sin(\varphi_2 + \varphi - 2\Omega) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(v_2 + v_1 + 2(\pi - \Omega)) &= \sin(v_2 - v_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\Omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit $\sin(\varphi_2 - \varphi) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(v_1 - v)$, die zweite mit $\sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(v_2 - v)$, die dritte mit $\sin(\varphi_1 - \varphi) \sin(\varphi_2 - \varphi) \sin(v_2 - v_1)$ multiplicirt hat, so wird $\pi - \Omega$ eliminirt, und man findet:

$$\tan 2\Omega = \frac{\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} \cdot \sin(v_1 - v)^2 - \frac{\sin(\varphi_2 + \varphi)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} \cdot \sin(v_2 - v)^2 + \frac{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot \sin(v_2 - v_1)^2}{\frac{\cos(\varphi_1 + \varphi)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} \cdot \sin(v_1 - v)^2 - \frac{\cos(\varphi_2 + \varphi)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} \cdot \sin(v_2 - v)^2 + \frac{\cos(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot \sin(v_2 - v_1)^2} \dots\dots\dots (10)$$

Alsdann wird sich $\pi - \Omega$ aus einer der Gleichungen (9) und endlich i aus (8) sich ergeben, wobei die Uebereinstimmung der aus verschiedenen Gleichungen abgeleiteten Werthe eine Prüfung der Rechnung gewährt.

Diese Art, die Elemente Ω , $\pi - \Omega$ und i zu bestimmen, hat die Unbequemlichkeit, dass etliche Werthe, welche man erhält, ausgeschieden werden müssen. Es sind die, welche auf einen negativen oder einen unmöglichen Werth von $\cos i$ führen. Bei Anwendung dieses Kriteriums bleiben noch zwei Auflösungen für Ω , von denen die eine dem aufsteigenden, die andere dem niedersteigenden Knoten entspricht.

Es erscheint zweckmässig, zum Schlusse die Anwendung der Methode an einem Beispiele zu erläutern; ich wähle dazu die Bestimmung der Bahn von ω Leonis aus sechs Positionswinkeln. Dieses eine Beispiel wird zu dem Zwecke ausreichen, da die Behandlung der übrigen Combinationen von Beobachtungen, wie man gesehen hat, nichts Besonderes darbietet. Da ich die Methode hier nur vorläufig in ihren wesentlichen Theilen gegeben habe, es jedoch meine Absicht ist, einige damit zusammenhängende Untersuchungen weiter zu verfolgen, so wird mir hoffentlich später die Gelegenheit nicht fehlen, noch andere Anwendungen derselben zu geben.

Die Beobachtungen von ω Leonis, welche ich zu Grunde lege, sind:

1782,87	$\varphi = 111^\circ 9'$
1825,21	$\varphi_1 = 154 \ 2$
1832,19	$\varphi_2 = 167 \ 8$
1835,81	$\varphi_3 = 178 \ 53$
1848,25	$\varphi_4 = 338 \ 22$
1853,79	$\varphi_5 = 352 \ 8$

auf den Meridian von 1850 bezogen. Wenn man noch gar Nichts über die Elemente weiss, welchen Fall ich vorzugsweise im Auge habe, so wird man wahrscheinlich die erste Hypothese nahe, wie folgt, entwerfen:

$$M_0 = 0^\circ \text{ für die Epoche } 1842,0, \quad \mu = 2^\circ 6$$

da nach einer leichten Discussion der Beobachtungen die Bewegung, wenigstens scheinbar, gegen das Jahr 1842 die grösste gewesen ist, und es ausserdem scheint, dass man die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher der Stern die Ergänzung des von 1782 bis 1853 zurückgelegten Weges zu einer vollen Revolution durchläuft, zwischen 1° und 2° enthalten sein werde. An dem angenommenen Werthe von M_0 wird im Verlaufe der Rechnung wenig geändert, während sich dabei für μ als Resultat der Werth $1^\circ 581$, entsprechend einer Umlaufszeit von 227,77 Jahren, ergibt. Wenn trotz der Grösse dieser Verbesserung das ganze Verfahren noch seine volle Bequemlichkeit behält, so darf man um so sicherer auf guten Erfolg auch in andern Fällen rechnen.

Die zu erfüllenden Bedingungsgleichungen (1) werden in dieser Anwendung:

$$\begin{aligned} [1025] &= 0,2303 \\ [1035] &= -0,2782 \\ [1045] &= 0,7102 \end{aligned}$$

Mit Hülfe des oben beschriebenen graphischen Verfahrens wird man in sehr kurzer Zeit einen Werth von e finden, welcher die erste dieser Gleichungen nahe befriedigt; ich finde dafür $e = 0,60$. Ich stelle hier einmal die sechs mittleren Anomalien, die auf graphischem Wege gefundenen excentrischen Anomalien und die daraus abzuleitenden wahren zusammen.

M	u	v
$-153^\circ 14$	$-163^\circ 3$	$-171^\circ 42'$
$-43,65$	$-75,9$	$-115 \ 53$
$-25,51$	$-51,5$	$-89 \ 50$
$-16,09$	$-35,3$	$-66 \ 58$
$+16,30$	$+35,7$	$+67 \ 35$
$+30,65$	$+59,2$	$+98 \ 54$

Der Gleichung $[1025] = (1025)$ wird durch obigen Werth von e nahe Genüge geleistet, indem $[1025] = 0,2224$ wird. In Beziehung auf die beiden andern hat man

$$\begin{aligned} [1035] &= -0,3661 \\ [1045] &= 0,8767 \end{aligned}$$

Setzt man in der zweiten Hypothese:

$$M_0 = -3^0 \quad \mu = 2^0 6$$

so wird wieder $e = 0,60$, wobei $[1025] = 0,2413$ und

$$[1035] = -0,2848$$

$$[1045] = 1,1256$$

wird. In der dritten Hypothese habe ich angenommen:

$$M_0 = 0^0 \quad \mu = 3^0 0$$

Hier wird für $e = 0,56$ $[1025] = 0,2212$ und ferner:

$$[1035] = -0,4470$$

$$[1045] = 0,9117.$$

Zieht man aus diesen Hypothesen auf bekannte Weise verbesserte Werthe von M_0 und μ , so findet man dafür

$$M_0 = 1^0 2 \quad \mu = 2^0 2.$$

Verbindet man hiermit den Werth von e , welcher sehr nahe gleich 0,65 mit Hülfe des graphischen Verfahrens sich ergibt, so wird jetzt nach einer scharfen Rechnung

$$[1025] = 0,2354$$

$$[1035] = 0,3189$$

$$[1045] = 0,7385$$

Der hierbei erreichte Grad von Annäherung erlaubt jetzt schon, für die weitere Verbesserung die Anwendung der Differentialformeln (6). Nachdem man darin für die Correctionen dv , dv_1 , dv_2 u. s. w. diejenigen der Elemente substituirt hat, erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$-0,5598 dM_0 + 25,5957 d\mu + 2,9286 d\psi = -0^0 1656$$

$$-1,6583 dM_0 + 43,4249 d\mu + 5,3099 d\psi = +1^0 3483$$

$$+1,6531 dM_0 + 30,0904 d\mu + 3,7406 d\psi = +0^0 8129$$

wonach: $dM_0 = -0^0 141$

$$d\mu = -0,522$$

$$d\psi = +4^0 478$$

also: $M_0 = 1^0 059$

$$\mu = 1,678$$

$$\psi = 45^0 1'$$

Bei diesen Werthen wird

$$[1025] = 0,2007$$

$$[1035] = -0,3382$$

$$[1045] = 0,7543.$$

Obgleich hier die Unterschiede gegen (1025), (1035) und (1045) wieder etwas grösser sind, wie in der vorigen Hypothese, so sind die Elemente doch, wie sich gleich zeigen wird, viel mehr genähert. Es kann dies auf den ersten Blick sonderbar scheinen, doch lässt eine nähere Betrachtung, auf die ich aber hier nicht eingehen will, leicht die Erklärung dazu finden.

Wendet man von Neuem die Differentialformeln an, so erhält man die Bedingungsgleichungen:

$$-0,7166 dM_0 + 30,4807 d\mu + 3,0183 d\psi = 0^0 8805$$

$$-2,0101 dM_0 + 53,4763 d\mu + 5,4983 d\psi = 1,8868$$

$$+2,1083 dM_0 + 38,7310 d\mu + 4,1071 d\psi = 1,0969$$

welche aufgelöst geben:

$$dM_0 = -0^0 119$$

$$d\mu = -0,0970$$

$$d\psi = -1,244$$

Die Elemente selbst werden demnach jetzt:

$$M_0 = 0^0 941$$

$$\mu = 1,5810$$

$$\psi = 46^0 15'6$$

wobei

$$[1025] = 0,2270$$

$$[1035] = -0,2848$$

$$[1045] = 0,7157$$

Die hierbei noch übrig bleibenden Fehler entsprechen so geringen Fehlern in der Darstellung der Beobachtungen, dass jetzt gleich zu dem letzten Geschäft, der Berechnung der Elemente Ω , $\pi - \Omega$ und i übergegangen werden kann. Es wird aber nicht nöthig sein, diese Rechnung hier anzuführen. Man findet für diese Elemente nahe dieselben Werthe, welche drei von den sechs Daten man auch zu deren Bestimmung wählen mag; das folgende System ist das Mittel aus verschiedenen so erhaltenen Resultaten:

$$\Omega = 169^0 12'5$$

$$\pi - \Omega = 84^0 9'5$$

$$i = 60^0 13'3$$

Das Ergebniss der Anwendung der Methode ist also überhaupt, in der gebräuchlichen Form geschrieben:

$$T \dots \dots 1841,405$$

$$\pi - \Omega \dots \dots 84^0 9'5$$

$$\Omega \dots \dots 169^0 12'5$$

$$i \dots \dots 60^0 13'3$$

$$e \dots \dots 0,72248$$

$$\text{Umlaufszeit} \dots \dots 227,77 \text{ Jahre}$$

dessen Uebereinstimmung mit den zu Grunde gelegten Beobachtungen man aus folgender Zusammenstellung sieht:

	Beob.	Rechn.
1782,87	111° 9'	111° 15'
1825,21	154 2	154 3
1832,19	165 8	167 9
1835,81	178 53	178 55
1848,27	338 22	338 17
1853,79	352 8	352 3

In dem Anschlusse an sechs Positionswinkel ist ein im Allgemeinen sicheres Mittel gegeben, den Beobachtungen überhaupt Genüge zu leisten, wenigstens die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate vorzubereiten und damit Al-

les zu thun, was zur Bestimmung der wahren Elemente in unserer Macht steht. Zur Empfehlung der Methode würde es überflüssig sein, wenn es möglich wäre, die hier bei der Anwendung auf einen einzelnen Fall gefundene Bahn als reell nachzuweisen. Doch wegen des Interesses, worauf die Bahnbestimmung von ω Leonis Anspruch machen kann, will ich noch Einiges über die gefundenen Elemente sagen. Die Umlaufszeit ist hier weit grösser, als nach den früheren Rechnungen, von denen übrigens keine mehr den Beobachtungen auch nur nahe entspricht. Die Bahn, welche *Mädler* aus bis zum Jahre 1847 angestellten Messungen bestimmt und in den Untersuchungen über Fixstern-Systeme veröffentlicht hat, gibt schon für 1853 den Positionswinkel um 20° zu gross; was aber die von mir in *N* 990 der A.N. gegebene Bahn anbelangt, so ist bei deren Bestimmung eine Beobachtung für die Epoche 1841,35 benutzt, welche, wie man jetzt sagen kann, verworfen werden muss; dasselbe Urtheil trifft zugleich die Elemente, Folgende Combination von Positionswinkeln:

1782,87	111° 9'
1804,09	131 3
1825,21	154 2
1836,29	179 17
1846,29	329 59
1854,79	355 37

führt auf eine Bahn von nahe eben so grosser Umlaufszeit, als die oben gefundene, und überhaupt nahe auf dieselben Elemente, wonach es wahrscheinlich wird, dass die letzteren nicht mehr viel von den wahren verschieden sind. Die Gefälligkeit des Herrn Staatsraths *Mädler* hat mich in den Stand gesetzt, für die Grundlage der Rechnung Beobachtungen bis zum Jahre 1855 zu benutzen, indem er seine Messungen der Jahre 1854 und 1855, welche im 13. Bande der *Dorpat*er Beobachtungen noch nicht enthalten sind, mir brieflich mittheilte. Die Vergleichung der obigen Elemente mit den Jahresmitteln der beobachteten Positionswinkel ist, wenn man die ausserordentliche Schwierigkeit der Messungen dieses Objects bedenkt, befriedigend. Die Differenz Rechn.—Beob. zeigt sich zwar bei den Beobachtungen der letzten Jahre entschieden positiv; doch weiss man, dass das Kriterium des Zeichenwechsels bei engen Doppelsternen von beschränkter Zulässigkeit ist, was besonders gilt, wenn wie hier, eine grössere Gruppe von Messungen von einem einzelnen Beobachter angestellt sind. Von den Distanzen liegen eigentliche Messungen nur aus dem Jahre 1825 vor, dabei in geringer Zahl; die übrigen Angaben sind durchgehends Schätzungen, deren Vergleichung mit der Rechnung Nichts lehren kann. Deshalb beschränke ich mich darauf, zu zeigen, wie die Positionswinkel dargestellt werden:

	Rechn.	Beob.	Rechn.-Beob.	Beobachter
1782,87	111° 15'	111° 9'	+ 6'	<i>Herschel I.</i>
1804,09	130 14	131 3	— 49	—
1825,21	154 4	154 2	+ 2	<i>Struve</i>
1831,03	165 8	165 4	+ 4	<i>Daves</i>
1832,25	167 18	163 28	+ 230	<i>Struve</i>
1833,29	170 5	172 52	— 167	—
1835,33	177 5	178 21	— 76	—
1836,29	181 5	179 17	+ 108	—
1846,285	332 22	329 59	+ 143	<i>Mädler</i>
1847,237	336 41	338 27	— 104	—
1848,331	340 42	337 3	+ 219	—
1851,238	348 19	342 30	+ 349	—
1852,301	350 28	350 2	+ 26	—
1853,260	352 13	346 30	+ 343	—
1854,307	353 57	351 55	+ 122	—
1855,277	355 26	359 18	— 232	—

Die Positionswinkel sind, wie hier überhaupt, auf den Meridian von 1850,0 bezogen.

Es wird vielleicht nicht unnütz sein, eine Ephemeride von ω Leonis, von 1825 bis zum Jahre 1870 gehend, hier mit aufzuführen. Die Distanzen entsprechen dabei der Annahme $1''307$ für die halbe grosse Axe; zur sicheren Bestimmung dieses Elementes scheinen mir aber die Messungen bis jetzt unzureichend. Ich fürchte nicht, dass die Angaben der Ephemeride, deren Zweck vorzüglich ist, verschiedene Reductionen zu erleichtern, der Unbefangenheit der Beobachter nachtheilig werden können.

Ephemeride für ω Leonis.

	ϕ	ρ		ϕ	ρ
1825,0	153° 45'	0,793	1849,0	342° 47'	0,564
26,0	155 16	0,774	50,0	345 29	0,608
27,0	156 51	0,753	51,0	347 49	0,650
28,0	158 32	0,731	52,0	349 54	0,687
29,0	150 20	0,706	53,0	351 46	0,762
30,0	162 16	0,679	54,0	353 28	0,755
31,0	164 22	0,650	55,0	355 2	0,786
32,0	166 41	0,617	56,0	356 29	0,814
33,0	169 16	0,582	57,0	357 50	0,840
34,0	172 12	0,542	58,0	359 7	0,865
35,0	175 39	0,498	59,0	0 20	0,888
36,0	179 46	0,450	60,0	1 28	0,909
37,0	184 56	0,398	61,0	2 34	0,929
38,0	191 44	0,342	62,0	3 38	0,948
39,0	201 15	0,285	63,0	4 38	0,966
40,0	215 25	0,231	64,0	5 37	0,983
41,0	236 47	0,191	65,0	6 34	0,999
.....			66,0	7 29	1,013
45,0	324 23	0,351	67,0	8 22	1,027
46,0	330 51	0,409	68,0	9 15	1,041
47,0	335 44	0,464	69,0	10 5	1,053
48,0	339 36	0,516	70,0	10 55	1,064

Göttingen 1858 Jan. 30.

W. Klinkerfues.