SOPRA UNA RAPPRESENTAZIONE MECCANICA DI ALCUNI CAMPI DI FORZA.*di C. SOMIGLIANA ¹⁾.*

Il moderno sviluppo della teoria degli elettroni non ha tolto valore alla classica concezione di Faraday e Maxwell riguardo alle azioni a distanza. I fisici continuano infatti a considerare le azioni fra elettroni nello stesso modo con cui Maxwell rappresentava le azioni fra corpi elettrici o magnetici, cioè come trasmettentesi mediante pressioni elastiche attraverso il mezzo ambiente. Non è quindi senza interesse il ritornare su quelle idee che hanno avuta una così decisiva importanza, sia teorica che sperimentale, nella storia recente dell'elettro-magnetismo; e che, anche fuori di questo campo speciale continuano sempre ad attirare la attenzione dei cultori della meccanica per quanto riguarda la quistione generale della possibilità di sostituire azioni fra punti contigui alle azioni a distanza.

Tanto più che intorno al valore meccanico delle teorie di Maxwell fra i fisici si sono diffuse, ed hanno acquistato quasi valore di verità indiscusse, delle opinioni, che non si può dire corrispondano esattamente alla realtà delle cose ed allo stato presente della quistione. In quasi ogni trattato moderno infatti si ripete in forma più o meno varia questo concetto: che non è possibile trovare una rappresentazione meccanica soddisfacente delle idee che Maxwell ha posto a base del suo modo di concepire le azioni a distanza. Talvolta anche questa asserzione è portata come argomento in favore delle nuove vedute atomistiche.

Ora ciò non è sostanzialmente vero, ed ha avuto origine da una estensione non giustificata dei risultati negativi dell'analisi applicata da Beltrami, Brillouin ed altri fisico-ma-

1) Comunicazione fatta alla Sezione di Fisica, nel Congresso tenuto in Firenze nell'1° Ottobre 1908 dalla Società Italiana per il progresso delle Scienze.

tematici alle celebri formole di Maxwell. Quell'analisi infatti ha portato bensì a concludere che quelle tensioni speciali introdotte da Maxwell non possono accordarsi coi principi fondamentali della distribuzione delle tensioni in un mezzo elastico isotropo. Ma non ha affatto escluso che *altre tensioni* compatibili con questi principi, potessero adempiere allo stesso ufficio. Ammettendo invece la insolubilità del problema, come conseguenza dell'analisi sopra ricordata, si venne a dare alle tensioni di Maxwell una importanza assai maggiore di quella che lo stesso Maxwell vi attribuisse. Egli infatti dice esplicitamente che le considera come provvisorie e che una loro eventuale rovina non implicherebbe la caduta delle sue idee intorno al modo di trasmissione delle azioni a distanza. E del resto, anche ad una superficiale osservazione, la deduzione usata dal grande fisico inglese per arrivare alle sue formole si presenta come priva di ogni carattere di necessità.

Convien quindi riprendere da capo la quistione, facendo completa astrazione dalla soluzione maxwelliana, e porre il problema della rappresentazione delle azioni a distanza mediante tensioni elastiche secondo i precetti della teoria dell'elasticità. Ed allora questo, che si può chiamare il *problema di Maxwell*, si presenta, sotto certe condizioni, non solo come un problema perfettamente determinato, ma anche come risolubile in via generale.

La cagione di questo fatto che, trattandosi di un problema di integrazione, può a prima vista sorprendere, consiste in ciò che il problema di Maxwell si riferisce ad un campo infinitamente esteso; e per un tal campo le difficoltà relative alle condizioni al contorno si possono superare.

È ben noto, ad esempio, che un problema analogo a quello di Dirichlet per un campo indefinito si può risolvere, anche quando il campo presenti al finito dei tagli secondo superficie arbitrariamente date.

Io ho mostrato da tempo, in via sommaria, la possibilità della soluzione poc' anzi accennata, e ne ho anche indicato recentemente ¹⁾ una estensione al caso di campi di forza non

1) Atti della R. Accademia dei Lincei, 2^o sem. 1907.

permanenti, caso non considerato da Maxwell. Ma per giudicare del valore della teoria è necessario provarla alla stregua di fatti particolari, studiare cioè quali siano i risultati ai quali essa conduce quando viene applicata alla rappresentazione meccanica di determinati campi di forza. Io mi propongo oggi appunto di esporre questa rappresentazione, prendendo in esame alcuni dei più semplici campi di forza che si possono considerare.

Intorno all'importanza che il fisico può attribuire a queste rappresentazioni è interessante ricordare l'opinione espressa da Galileo Ferraris nel suo mirabile discorso *Sulla trasmissione dell'energia*.

« Le equazioni di Maxwell e di Hertz, egli scrisse, costituiscono da sè una teoria meccanica larga senza una precisa specificazione del meccanismo; una così detta interpretazione di essa non fa che specificare il meccanismo ed ha maggiore probabilità di allontanarla dal vero che non di avvicinarla ad esso ». Ora la teoria di cui ho parlato innanzi non sfugge certamente ad una critica di questo genere. Però siccome di tensioni trasmettentesi nell'etere, o nei dielettrici, si continua a parlare, mi pare sia sempre preferibile riferirsi a qualche cosa di concreto; anzichè ad idee vaghe ed a quantità, di cui si mette in dubbio perfino l'esistenza. E ad ogni modo dal punto di vista generale di una interpretazione delle azioni a distanza è senza alcun dubbio interessante il poter affermare *che rappresentazioni meccaniche conformi alle idee di Faraday e Maxwell, ed in perfetto accordo colle leggi della meccanica, sono effettivamente possibili*.

§. 1.

Sfera che gravita sopra se stessa.

Le espressioni che risolvono quello che ho chiamato il problema statico di Maxwell, ridotte alla loro forma più semplice e considerando il caso di un mezzo indefinito a deformazione continua, annullantesi all'infinito, sono le seguenti ¹⁾. Indichiamo con Σ un campo od un complesso di campi a tre

1) Atti della R. Accademia dei Lincei, I. c.

ed a due dimensioni, tali che sopra ogni loro elemento $d\Sigma$ agisca una forza le cui componenti siano

$$(1) \quad X d\Sigma, \quad Y d\Sigma, \quad Z d\Sigma.$$

Costruiamo poi gli integrali

$$(2) \quad A = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} X r d\Sigma, \quad B = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} Y r d\Sigma, \quad C = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} Z r d\Sigma$$

ove r rappresenta la distanza dell'elemento $d\Sigma$ da un punto qualunque (x, y, z) dello spazio. Indichiamo con Ω la divergenza del vettore (A, B, C) , e consideriamo la deformazione del mezzo (che per semplicità supporremo di densità unitaria) rappresentata in ogni punto dello spazio dallo spostamento

$$(3) \quad (u, v, w) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial (x, y, z)} + \frac{1}{b^2} \Delta (A, B, C)$$

ove a, b , costanti elastiche del mezzo, rappresentano le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali.

Non è difficile verificare che la distribuzione di tensioni prodotta nel mezzo dalla deformazione (3) ha precisamente per effetto di produrre sopra ogni elemento di Σ , un'azione identica alla (1). Di più questa deformazione è continua in tutto lo spazio e diviene evanescente all'infinito, supposti naturalmente finiti i campi Σ . Quando l'elemento $d\Sigma$ sia di superficie, questa azione si deve considerare come la risultante delle due tensioni che si esercitano sulle due faccie di $d\Sigma$.

Gli integrali A, B, C , rappresentano tre potenziali biarmonici. La risoluzione del problema statico di Maxwell è quindi ridotta al calcolo di questi potenziali.

Io mi propongo di applicare le formole precedenti al caso di una sfera omogenea, i cui elementi gravitano fra loro secondo la legge newtoniana. Il campo di forza così generato può considerarsi come il campo di un elettrone isolato ed in quiete.

Indicando con M la massa con R il raggio della sfera, la sua funzione potenziale interna è data da

$$(4) \quad V_i = \frac{M}{2R} \left(3 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right)$$

essendo ρ il raggio vettore spiccato dal centro ; e l' esterna da

$$(4') \quad V_e = \frac{M}{\rho}$$

come è notissimo. Abbiamo quindi in questo caso

$$X = -\frac{Mkx}{R^3} \quad Y = -\frac{Mky}{R^3} \quad Z = -\frac{Mkz}{R^3}$$

dove k è la densità, cioè

$$k = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Indicando con ξ, η, ζ le coordinate del punto corrente d' integrazione si trova

$$A = \frac{k^2}{6} \int_S \xi r dS, \quad B = \frac{k^2}{6} \int_S \eta r dS, \quad C = \frac{k^2}{6} \int_S \zeta r dS.$$

Ora si ha

$$\int_S (\rho^2 - R^2) \frac{\partial r}{\partial \xi} dS = -2 \int_S \xi r dS$$

e formole analoghe relative alle altre due direzioni degli assi. Perciò posto

$$(5) \quad \frac{1}{2} \int_S (\rho^2 - R^2) r dS = W$$

si trova

$$A = \frac{k^2}{6} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad B = \frac{k^2}{6} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad C = \frac{k^2}{6} \frac{\partial W}{\partial z}$$

e sostituendo nelle (3)

$$(6) \quad u = \frac{k^2}{6a^2} \frac{\partial \Delta_2 W}{\partial x} \quad v = \frac{k^2}{6a^2} \frac{\partial \Delta_2 W}{\partial y} \quad w = \frac{k^2}{6a^2} \frac{\partial \Delta_2 W}{\partial z}.$$

Ma dalla (5) si ricava

$$\Delta_2 W = \int_S (\rho^2 - R^2) \frac{dS}{r}.$$

Tutto quindi si riduce a calcolare la funzione potenziale ordinaria di una sfera di densità $\rho^3 - R^3$. Posto

$$U = \int_S \rho^3 \frac{dS}{r} \quad V = \int_S \frac{dS}{r}$$

si ha

$$(7) \quad \Delta_2 W = U - R^3 V$$

e la V ci è data dalle espressioni (4) (4'), per $k=1$, mentre la U si calcola facilmente coi metodi soliti delle caratteristiche delle funzioni potenziali e si trova

$$U_1 = -\frac{\pi}{5} (\rho^5 - 5R^4)$$

$$U_0 = \frac{4\pi}{5} \frac{R^5}{\rho}.$$

Per la V invece abbiamo dalle formole precedenti

$$V_1 = -\frac{2\pi}{3} (\rho^3 - 3R^2)$$

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{\rho}.$$

Sostituendo in (7) troviamo

$$\Delta_2 W_1 = -\pi \left(\frac{1}{5} \rho^5 - \frac{2}{3} R^3 \rho^3 + R^4 \right)$$

$$\Delta_2 W_0 = -\frac{2.4}{3.5} \pi \frac{R^5}{\rho}.$$

Mediante queste espressioni per $\Delta_2 W$ le (6) ci danno subito le formole definitive per la deformazione cercata. Si trova così

$$(8) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\frac{2\pi k^3}{3a^3} \left(\frac{\rho^3}{5} - \frac{R^3}{3} \right) x & u_0 &= \frac{4\pi k^3}{5.9a^3} \frac{R^5}{\rho^3} x \\ v_1 &= -\frac{2\pi k^3}{3a^3} \left(\frac{\rho^3}{5} - \frac{R^3}{3} \right) y & v_0 &= \frac{4\pi k^3}{5.9a^3} \frac{R^5}{\rho^3} y \\ w_1 &= -\frac{2\pi k^3}{3a^3} \left(\frac{\rho^3}{5} - \frac{R^3}{3} \right) z & w_0 &= \frac{4\pi k^3}{5.9a^3} \frac{R^5}{\rho^3} z. \end{aligned}$$

La deformazione risulta quindi da spostamenti radiali s_ρ la cui grandezza all'interno ed all'esterno della sfera è data rispettivamente dalle formole

$$(9) \quad \begin{aligned} s_\rho^{(i)} &= \frac{2 \pi h^2}{3 a^3} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{\rho^3}{5} \right) \rho \\ s_\rho^{(e)} &= \frac{4 \pi h^2}{5.9 a^3} \frac{R^3}{\rho^2} . \end{aligned}$$

Tali spostamenti avvengono quindi all'interno ed all'esterno della sfera nella direzione positiva del raggio poichè $\frac{R^3}{3} - \frac{\rho^3}{5} > 0$ per $\rho < R$. Inoltre $s_\rho^{(e)}$ è sempre decrescente da $\rho = R$ in poi; ma per $s_\rho^{(i)}$ si ha invece

$$\frac{\partial s_\rho^{(i)}}{\partial \rho} = \frac{2 \pi h^2}{3 a^3} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{3 \rho^2}{5} \right) .$$

Questa derivata si annulla per

$$\rho = \frac{\sqrt{5}}{3} R = 0,745 \dots R .$$

Perciò a circa $\frac{3}{4}$ del raggio lo spostamento, che è nullo al centro, ha un massimo. La deformazione è quindi una dilatazione generale, continua del mezzo elastico nel senso dei raggi vettori.

Nella unita figura è rappresentato l'andamento dello spostamento in funzione del raggio, prendendo dei valori numerici speciali per le costanti, e supponendo uguale ad uno il raggio della sfera.

Nello spazio esterno alla sfera la forza unitaria secondo il raggio vettore F è data da

$$F_p = -\frac{4}{3} \pi \frac{R^3 k}{\rho^3}$$

e, come risulta dalle (9), è in valore assoluto proporzionale allo spostamento, come nella teoria di Maxwell.

Si ha cioè

$$s_p = -\frac{R^3 k}{3.5 a^3} F_p.$$

Espressioni generali delle tensioni. — È interessante ora di studiar la distribuzione delle tensioni. Per le sei componenti di deformazione si ha dalle (6)

$$(10) \quad \begin{aligned} x_x &= \frac{k^2}{6 a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial x^2} & y_z &= \frac{k^2}{3 a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial y \partial z} \\ y_y &= \frac{k^2}{6 a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial y^2} & z_x &= \frac{k^2}{3 a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial z \partial x} \\ z_z &= \frac{k^2}{6 a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial z^2} & x_y &= \frac{k^2}{3 a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

quindi per la dilatazione cubica θ si ha

$$\theta = \frac{k^2}{6 a^2} \Delta_z \Delta_z W$$

da cui

$$\theta_1 = \frac{4 \pi k^2}{6 a^3} (R^3 - \rho^3) \quad \theta_0 = 0.$$

Dalle formole generali della teoria dell'elasticità si ha per le componenti delle tensioni colle notazioni solite

$$\begin{aligned} X_x &= (a^2 - 2 b^2) \theta + 2 b^2 x_x \\ Y_z &= b^2 y_z \end{aligned}$$

e formole analoghe per le altre.

Perciò sostituendo i valori (10) delle componenti di deformazione troviamo

$$\begin{aligned}
 X_x &= \frac{k^2}{6a^2} \left\{ (a^2 - 2b^2) \Delta_z \Delta_z W + 2b^2 \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial x^2} \right\} \\
 Y_y &= \frac{k^2}{6a^2} \left\{ (a^2 - 2b^2) \Delta_z \Delta_z W + 2b^2 \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial y^2} \right\} \\
 Z_z &= \frac{k^2}{6a^2} \left\{ (a^2 - 2b^2) \Delta_z \Delta_z W + 2b^2 \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial z^2} \right\} \\
 (11) \quad Y_z &= \frac{k^2 b^2}{3a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial y \partial z} \\
 Z_x &= \frac{k^2 b^2}{3a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial z \partial x} \\
 X_y &= \frac{k^2 b^2}{3a^2} \frac{\partial^2 \Delta_z W}{\partial x \partial y} .
 \end{aligned}$$

Queste formole valgono in tutto lo spazio e per il caso speciale che consideriamo sono quelle che vengono a prendere il posto delle celebri formole maxwelliane.

Nello spazio esterno alla sfera si ha

$$\Delta_z \Delta_z W = 0 .$$

e, ricordando le (10), si vede che si ha allora proporzionalità fra le componenti di tensione e di deformazione.

Tensioni esterne. — Cominciamo a considerare queste tensioni. Indichiamo con ν la normale ad un elemento superficiale qualunque; la corrispondente tensione ha per componenti X_ν , Y_ν , Z_ν e si ha

$$X_\nu = X_x \frac{\partial x}{\partial \nu} + X_y \frac{\partial y}{\partial \nu} + X_z \frac{\partial z}{\partial \nu} , \text{ ecc.},$$

quindi troviamo

$$\begin{aligned}
 X_\nu &= \frac{k^2 b^2}{3a^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \Delta_z W}{\partial x} \right) \\
 Y_\nu &= \frac{k^2 b^2}{3a^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \Delta_z W}{\partial y} \right) \\
 Z_\nu &= \frac{k^2 b^2}{3a^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \Delta_z W}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

con

$$\Delta_2 W = -\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \pi \frac{R^3}{\rho}.$$

Sviluppando si trova

$$\begin{aligned} X_\nu &= H \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial x}{\partial \nu} - \frac{3x}{\rho^5} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \\ Y_\nu &= H \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial y}{\partial \nu} - \frac{3y}{\rho^5} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \\ Z_\nu &= H \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial z}{\partial \nu} - \frac{3z}{\rho^5} \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

dove per semplicità si è posto

$$H = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 9} \pi R^3 \frac{k^2 b^2}{a^3}.$$

Se ν coincide con ρ , avremo per la tensione di elementi superficiali normali al raggio

$$X_\rho = -2 \frac{H}{\rho^4} x \quad Y_\rho = -2 H \frac{y}{\rho^4} \quad Z_\rho = -2 H \frac{z}{\rho^4}$$

la tensione è quindi normale e diretta in senso contrario al raggio. Invece per un elemento superficiale passante per il raggio, pel quale $\frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0$, si ha, indicandone con σ la normale,

$$X_\sigma = \frac{H}{\rho^3} \frac{\partial x}{\partial \sigma} \quad Y_\sigma = \frac{H}{\rho^3} \frac{\partial y}{\partial \sigma} \quad Z_\sigma = \frac{H}{\rho^3} \frac{\partial z}{\partial \sigma}.$$

La tensione è quindi sempre normale anche in questo caso, come è naturale per ragioni di simmetria. Pei valori di queste due tensioni troviamo

$$(13) \quad T_\rho = -2 H \frac{1}{\rho^3} \quad T_\sigma = H \frac{1}{\rho^3}$$

la radiale è quindi doppia della tangenziale.

Nella direzione delle linee di forza all'esterno della sfera abbiamo quindi una pressione; nelle direzioni normali una tensione, che è in grandezza la metà della prima.

La componente della tensione secondo la normale ν relativa ad un elemento superficiale qualsiasi, è

$$T_\nu = H \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)^2 \right)$$

quindi è nulla per tutti gli elementi superficiali appartenenti al cono le cui normali ν soddisfano alla condizione

$$\cos(\rho \nu) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ossia} \quad \operatorname{tg}(\rho \nu) = \sqrt{2}.$$

Questi coni di elementi soggetti a tensione tangenziale hanno quindi un'apertura costante in tutto lo spazio esterno alla sfera.

Tensioni interne. — In questo caso abbiamo

$$X_\nu = \frac{h^2}{6a^3} \left(a^2 - \frac{2b^2}{a^2} \right) \Delta_1 \Delta_2 W_1 \frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{h^2 b^2}{3a^3} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \Delta_2 W_1}{\partial x} \right), \text{ ecc.}$$

ove

$$\Delta_2 W_1 = -\pi \left(\frac{1}{5} \rho^4 - \frac{2}{3} R^2 \rho^2 + R^4 \right).$$

Con qualche semplice riduzione si trova così

$$X_\nu = K \left\{ \left(a^2 - \frac{8}{5} b^2 \right) (R^2 - \rho^2) \frac{\partial x}{\partial \nu} - \frac{2}{5} b^2 x \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} + \frac{4b^2}{3.5} R^2 \frac{\partial x}{\partial \nu} \right\}$$

$$Y_\nu = K \left\{ \left(a^2 - \frac{8}{5} b^2 \right) (R^2 - \rho^2) \frac{\partial y}{\partial \nu} - \frac{2}{5} b^2 y \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} + \frac{4b^2}{3.5} R^2 \frac{\partial y}{\partial \nu} \right\}$$

$$Z_\nu = K \left\{ \left(a^2 - \frac{8}{5} b^2 \right) (R^2 - \rho^2) \frac{\partial z}{\partial \nu} - \frac{2}{5} b^2 z \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} + \frac{4b^2}{3.5} R^2 \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\}$$

dove si è posto

$$K = \frac{2\pi h^2}{3a^3}.$$

Di qui risulta che la tensione per un elemento superficiale qualunque è la risultante di due, l'una diretta secondo la normale, l'altra secondo il raggio vettore, e giace quindi sempre nel piano di queste due rette.

Per elementi normali al raggio troviamo che essi sono soggetti ad una tensione normale

$$(14) \quad T_{\rho} = K \left\{ \left(a^2 - \frac{8}{5} b^2 \right) (R^3 - \rho^3) - \frac{4}{5} b^2 \rho^3 + \frac{4b^2}{3.5} R^3 \right\}$$

Per un elemento superficiale passante pel raggio e di normale σ si ha una tensione parimente normale

$$T_{\sigma} = K \left\{ \left(a^2 - \frac{8}{5} b^2 \right) (R^3 - \rho^3) + \frac{4b^2}{3.5} R^3 \right\}$$

identica naturalmente per tutte le orientazioni di σ . Questa tensione è sempre positiva. Riguardo a T_{ρ} osserviamo invece che al centro, cioè per $\rho = 0$ si ha

$$T_{\rho}^{(0)} = \left(a^2 - \frac{4}{3} b^2 \right) R^3 K$$

e per $\rho = R$

$$T_{\rho}^{(R)} = - \frac{2.4}{3.5} R^3 K .$$

Di qui appare che $T_{\rho}^{(0)}$ è positiva (poichè in generale per ogni mezzo elastico $a^2 - 2b^2 > 0$ e quindi a maggior ragione $a^2 - \frac{4}{3} b^2 > 0$) mentre $T_{\rho}^{(R)}$ è negativa. Esiste quindi una superficie sferica, interna alla sfera, i cui elementi non sono soggetti a tensione normale. Gli elementi delle sfere concentriche interne a questa sono soggetti a tensione, quelli delle sfere esterne a pressione. Il raggio ρ_0 di questa sfera si ottiene uguagliando a zero il valore (14) di T_{ρ} e si trova

$$\rho_0 = R \sqrt{\frac{a^2 - \frac{4}{3} b^2}{a^2 - \frac{4}{5} b^2}} .$$

Queste considerazioni sono sufficienti per dare un'idea della distribuzione delle tensioni nel mezzo.

Valori limiti delle costanti a , b . — Noi non abbiamo fatto finora alcuna ipotesi sulle costanti elastiche del mezzo

a , b e quindi nemmeno sulle sue proprietà fisiche. È interessante ora di vedere come si modifichino i risultati trovati quando a queste costanti si attribuiscono i valori limiti che esse possono avere. Queste costanti sono sempre positive e si deve sempre avere, come è noto dalla teoria generale,

$$0 < b < a.$$

Per $b=0$ si ha la fluidità del mezzo; per $a=\infty$ la rigidità. Nel primo caso il mezzo propaga soltanto onde longitudinali, nell'altro solo onde trasversali, come l'etere cosmico.

Ora è notevole il fatto che le formole da noi trovate per le tensioni del mezzo assumono la stessa forma sia nell'uno che nell'altro di questi due casi estremi.

Ciò risulta evidente quando si osservi che quelle formole dipendono unicamente dal rapporto $\frac{b^2}{a^2}$. Si trova così che nel mezzo esterno, sia nell'uno che nell'altro caso, le tensioni si annullano ed all'interno assumono la forma assai semplice

$$X_x = Y_y = Z_z = \frac{4}{6} \pi k^2 (R^2 - \rho^2)$$

$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Si può anche verificare che con questi valori delle tensioni continuano a sussistere le relazioni

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\frac{4}{3} \pi k^2 x, \text{ ecc.}$$

e che quindi continua ad essere valida la rappresentazione del campo mediante tali tensioni elastiche.

Invece in modo affatto diverso si comportano gli spostamenti nei due casi della fluidità e della rigidità. Come risulta dalle (8) gli spostamenti non dipendono da b^2 , restano inalterati quando si faccia $b=0$. Nell'altro caso invece quello della rigidità, facendo $a=\infty$, gli spostamenti si annullano sia all'interno che all'esterno della sfera, e si presenta questo fatto singolare di un mezzo nel quale si hanno delle tensioni senza che in esso vi sia alcuna deformazione. Convien però no-

tare che l'ipotesi $\alpha = \infty$, non è compatibile colla teoria ordinaria dell'elasticità dei corpi, sebbene per mezzi indefiniti sia ancora suscettibile di un'interpretazione, come ho avuto altra volta occasione di dimostrare ¹⁾.

§. 2.

Sfera uniformemente elettrizzata.

La rappresentazione meccanica mediante le nostre formole del campo elettrostatico prodotto da una sfera conduttrice uniformemente elettrizzata è più semplice di quella trovata nel caso precedente. Per la funzione potenziale si ha in questo caso

$$V_i = \frac{E}{R} \quad V_e = \frac{E}{\rho} .$$

dove E indica la carica totale

$$E = 4 \pi R^2 \epsilon$$

ϵ la densità superficiale elettrica. Si ha inoltre

$$X_i = Y_i = Z_i = 0 .$$

$$X_e = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{E \epsilon}{\rho^3} x, \quad Y_e = \frac{E \epsilon}{\rho^3} y, \quad Z_e = \frac{E \epsilon}{\rho^3} .$$

Perciò si ha in questo caso

$$A = -\frac{E \epsilon}{8 \pi R^2} \int_s \frac{\xi}{R} r d s = -\frac{E \epsilon}{8 \pi R^2} \int_s \frac{\partial r}{\partial \xi} d S$$

ove s indica la superficie della sfera S . Di qui segue

$$A = \frac{E \epsilon}{8 \pi R^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_s r d S$$

$$B = \frac{E \epsilon}{8 \pi R^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_s r d S$$

$$C = \frac{E \epsilon}{8 \pi R^2} \frac{\partial}{\partial z} \int_s r d S .$$

1) V. la memoria già citata in principio.

Quindi tutto viene a dipendere dal potenziale biarmonico della sfera omogenea

$$(15) \quad W = \frac{1}{2} \int_S r \, dS$$

e si ha

$$(A, B, C) = \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial (x, y, z)}$$

da cui per le (3)

$$(16) \quad (u, v, w) = \frac{\varepsilon^2}{a^2} \frac{\partial \Delta_2 W}{\partial (x, y, z)}.$$

Ma dalla (15) risulta che $\Delta_2 W$ non è altro che la funzione potenziale armonica della sfera omogenea di densità unitaria. Perciò

$$\Delta_2 W_1 = \frac{2}{3} \pi R^2 \left(3 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right)$$

$$\Delta_2 W_2 = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{\rho}.$$

Sostituendo nelle (16) abbiamo subito la deformazione cercata. Si trova così

$$u_1 = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} x \quad u_2 = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} \frac{R^3}{\rho^3} x$$

$$v_1 = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} y \quad v_2 = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} \frac{R^3}{\rho^3} y$$

$$w_1 = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} z \quad w_2 = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} \frac{R^3}{\rho^3} z.$$

Gli spostamenti avvengono quindi tutti lungo i raggi vettori e sono diretti verso il centro. Le loro grandezze sono

$$s_{\rho^{(i)}} = -\frac{4\pi\varepsilon^2}{3a^2} \rho$$

$$s_{\rho^{(e)}} = -\frac{4\pi h^2}{3a^2} \frac{R^3}{\rho^2}.$$

Rappresentando graficamente lo spostamento in funzione del raggio troviamo al posto delle due cubiche raccordate del caso precedente una retta nell'interno della sfera, mentre all'esterno la curva ha un andamento assintotico identico. Però in questo caso si ha una contrazione generale del mezzo invece di una dilatazione.

Le componenti di deformazione sono costanti nell'interno della sfera; quindi sono tali anche le componenti di tensione. Si ha

$$\begin{aligned}x^{(i)}_x &= y^{(i)}_y = z^{(i)}_z = -\frac{4\pi\epsilon^2}{3a^2} \\y^{(i)}_z &= z^{(i)}_x = x^{(i)}_y = 0 \\X^{(i)}_x &= Y^{(i)}_y = Z^{(i)}_z = -\frac{4\pi\epsilon^2}{3a^2} \left(a^2 - \frac{4b^2}{3} \right) \\Y^{(i)}_z &= Z^{(i)}_x = X^{(i)}_y = 0.\end{aligned}$$

Perciò le pressioni nell'interno della sfera elettrizzata sono distribuite come in un fluido. All'esterno invece la distribuzione è analoga a quella del caso precedente; soltanto le pressioni sono scambiate colle tensioni a cagione del segno opposto del fattore comune a tutti i termini.

Confronto colle tensioni di Maxwell. — Supposto per semplicità che la costante dielettrica del mezzo sia l'unità, la distribuzione di tensioni rappresentata dalle formole di Maxwell risulta, come è ben noto, da un asse principale di tensione diretto secondo le linee di forza, mentre qualsiasi direzione normale è un asse di pressione. Le grandezze di questa tensione e di questa pressione sono rispettivamente

$$\frac{1}{8\pi} F^2, \quad -\frac{1}{8\pi} F^2$$

se F è la forza unitaria. Nel nostro caso si avrebbe quindi, poichè $F = \frac{E}{\rho^2}$,

$$T_p = \frac{1}{8\pi} \frac{E^2}{\rho^4}, \quad T_\sigma = -\frac{1}{8\pi} \frac{E^2}{\rho^4}.$$

Ora per avere le corrispondenti tensioni nello spazio esterno alla sfera, quali risultano dalla nostra teoria, basta mutare nelle formole (13), relative al caso della sfera che gravita sopra se stessa la costante H nella costante corrispondente al caso attuale che è

$$-2 \cdot 4\pi \epsilon^2 \frac{b^2}{a^2} R^3$$

Ponendo quindi

$$H' = 2 \cdot 4\pi \epsilon^2 \frac{b^2}{a^2} R^3 = \frac{\pi R}{2} \frac{b^2}{a^2} E^2$$

abbiamo

$$T_p = +2 H' \frac{1}{\rho^3} \quad T_\sigma = -\frac{H'}{\rho^3}$$

cioè abbiamo anche nella nostra teoria una tensione normale nella direzione delle linee di forza ed una pressione pure normale nelle direzioni ortogonali, ma questa è la metà della prima. Inoltre queste tensioni variano come l'inversa della *terza* potenza del raggio, mentre nelle formole maxwelliane variano come l'inversa della *quarta* potenza.

Naturalmente la simmetria delle pressioni attorno alle linee di forza dipende nel caso nostro dalla simmetria del campo; non è detto che essa si conservi in ogni caso, come avviene nella teoria di Maxwell.

Concluderò ricordando che anche il Prof. Volterra parecchi anni or sono era arrivato a conclusioni dello stesso ordine di quelle a cui sono informate le considerazioni che ho esposto, sebbene nulla egli abbia pubblicato sull'argomento ed io ne debba la conoscenza ad una sua comunicazione verbale.

Ricorderò infine che anche il Duhem nel 2° volume delle sue *Leçons sur l'électricité et le magnétisme* esprime idee che collimano perfettamente colle nostre. Egli scrive infatti a proposito della teoria delle tensioni di Maxwell: *... pour nous, les difficultés que présente la théorie de Maxwell ne*

sont pas des paradoxes qui doivent tôt ou tard trouver leur explication, mais des contradictions qui en mettent à nu l'inexactitude et la doivent faire rejeter.

Io spero di aver dimostrato come, senza rinunciare alle concezioni maxwelliane fondamentali, si possa costruire una teoria che è al sicuro da qualsiasi contraddizione.