5.
Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction.

(Vom Herrn *J. Steiner.*)

1.

In den Elementen der Geometrie (Anmerk. X.) beweiset Legendre den merkwürdigen Satz:

„dafs die Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleichem Flächeninhalte in einem bestimmten kleinen Kreise liegen."

Den Satz hat Lexell zuerst gefunden (*Nova acta Petropolitana*, fünfter Band, erster Theil).

Die künstlichen Ausdrücke, welche für den Radius des genannten Kreises und zur Bestimmung der Lage seines Mittelpuncts gefunden werden, sind nicht geeignet, die eigentliche Lage des Kreises leicht zu erkennen zu geben, noch weniger, denselben danach leicht construiren zu können. Da aber auf diesen Satz mancherlei Untersuchungen gegründet werden können, wie z. B. die Verwandlung und Theilung der sphärischen Figuren, so war eine genauere Bestimmung desselben, so wie ein einfacherer Beweis, sehr wünschenswerth. In der That findet sich, dafs der genannte Ortskreis, ohne Rechnung zu Hülfe zu nehmen, unmittelbar construirt werden kann, und dafs auch der Satz selbst durch eine ganz elementare Betrachtung sich beweisen läfst.

In Folgendem soll daher der Lexell'sche Satz dahin vervollständigt werden:

„dafs der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleichem Flächeninhalt ein bestimmter kleiner Kreis ist, welcher durch die beiden Gegenpuncte der Endpuncte der Grundlinie geht."

Hiernach ist alsdann der Ortskreis leicht zu construiren, und dadurch wird man in den Stand gesetzt, durch Hülfe dieses Satzes eine Reihe von Aufgaben über Verwandlung und Theilung der sphärischen Figuren zu lösen, welche denen bei geradlinigen Figuren in der Ebene analog sind, d. h., man kann alsdann durch bloſse Construction jedes beliebige sphärische Polygon successive in ein Dreieck oder Zweieck, oder auch in ein sphärisches Quadrat verwandeln, desgleichen jedes gegebene sphärische Dreieck (oder Polygon), von einem gegebenen Punct aus, in zwei gleiche Theile, oder nach sonstigen Bedingungen, theilen.

2.

Jeder Kreis auf der Kugelfläche, dessen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel geht, heiſse ein **Hauptkreis**, jeder andere dagegen **Sphärenkreis** oder auch schlechthin **Kreis**. Der Bogen eines Hauptkreises aus dem Pol eines Sphärenkreises, bis an irgend einen Punct der Peripherie des letzteren, heiſse sphärischer Radius desselben. Ein durch 2, 3, 4, ... Hauptkreis-Bogen begrenzter Theil der Kugelfläche heiſse sphärisches Zweieck, Dreieck, Viereck, ... etc., wie gewöhnlich. Ein Hauptkreis, der einen anderen Kreis berührt, heiſse sphärische Tangente an letzteren.

Die Sätze: „daſs die sphärischen Tangenten eines Sphärenkreises auf dem zugehörigen sphärischen Radius senkrecht stehen;" — „daſs der Durchschnittspunct zweier sphärischen Tangenten, die denselben Kreis berühren, gleich weit von beiden Berührungspuncten entfernt ist;" — „und daſs im gleichschenkligen sphärischen Dreieck die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind, und umgekehrt;" sind leicht zu beweisen und aus der Elementargeometrie bekannt.

3.

In einem beliebigen Sphärenkreis, dessen Pol M (Fig. 2.), sei ein sphärisches Viereck $ABCD$ eingeschrieben. Nach den Ecken des Vierecks ziehe man die sphärischen Radien MA, MB, MC, MD, welche, da sie einander gleich sind, mit den Seiten des Vierecks vier gleichschenklige Dreiecke AMB, BMC .... bilden, in denen die Winkel an den Grundlinien einander gleich sind (2.), so daſs

$$\alpha=\beta;\quad \gamma_1=\beta_1;\quad \gamma=\delta;\quad \alpha_1=\delta_1;$$

und folglich:

$$\alpha+\alpha\ +\gamma+\gamma_1=\beta+\beta_1+\delta+\delta_1;$$

oder:

$$A+C=B+D;$$

das heifst: „bei jedem sphärischen Viereck im Kreise sind die Summen der zwei Paare gegenüber liegender Winkel einander gleich." *)

4.

Zieht man in dem sphärischen Viereck *ABCD* (Fig. 3.) im Kreise die sphärische Diagonale *AC*, so hat man, zufolge des vorliegenden Satzes:

$$a + c - B = D - \alpha - \gamma.$$

Ebenso hat man: $a_1 + c_1 - B_1 = D - \alpha - \gamma$, und mithin:

$$a + c - B = a_1 + c_1 - B_1;$$

das heifst: „bei allen sphärischen Dreiecken ABC, AB_1C, ..., welche über der nemlichen sphärischen Sehne *AC* und auf der nämlichen Seite in einen Sphärenkreis beschrieben werden, ist der Unterschied zwischen dem Winkel (B, B_1) an der Spitze und der Summe der Winkel ($a + c$, $a_1 + c_1$) an der Grundlinie constant." Und umgekehrt:

„Der Ort der Scheitel (B, B_1) aller sphärischen Dreiecke ABC, AB_1C, ... über der nemlichen Grundlinie *AC*, und bei welchen der Unterschied zwischen dem Winkel an der Spitze und der Summe der Winkel an der Grundlinie gleich ist einer gegebenen Gröfse, ist ein bestimmter Sphärenkreis, welcher durch die Endpuncte *A*, *C* der Grundlinie geht."

Nimmt man an, die Grundlinie *AC* gehe durch den Pol *M* des Keises, so folgt, vermöge der gleichschenkligen Dreiecke *AMB* und *BMC*, dafs $B = a + c$, d. h.:

„Bei jedem in einen Sphärenkreis beschriebenen sphärischen Dreiecke, das den sphärischen Durchmesser des Kreises zur Grundlinie hat, ist der Winkel an der Spitze gleich der Summe der Winkel an der Grundlinie;" und umgekehrt: „die Scheitel aller sphärischen Dreiecke über der nemlichen Grundlinie, und bei welchen der Winkel an der

*) Dieser Satz ist blofs ein specieller Fall von dem allgemeineren Satze: „Bei jedem sphärischen $2n$Eck im Kreise, ist, wenn man die Winkel der Ordnung nach numerirt, die Summe der Winkel mit geraden Nummern gleich der Summe der übrigen," welcher sich auf gleiche Weise beweisen läfst. Es steht ihm ein anderer Satz: „Bei jedem sphärischen $2n$Eck um den Kreis ist die Summe der Seiten mit geraden Nummern gleich der Summe der übrigen," gegenüber, welcher eben so leicht zu beweisen ist.

Spitze gleich ist der Summe der Winkel an der Grundlinie, ist die Peripherie des Sphärenkreises, welcher die Grundlinie zum sphärischen Durchmesser hat."

5.

Es sei ABC (Fig. 4.) ein beliebiges sphärisches Dreieck. A_1, B_1 sollen die Gegenpuncte von A, B, also die Bogen ACA_1, BCB_1 halbe Hauptkreise sein, so finden zwischen den Winkeln der beiden sphärischen Dreiecke ACB und A_1CB_1 folgende Beziehungen statt: nemlich $c = c_1$; $\alpha = a_1$; $\beta = b_1$, und da $a + \alpha = b + \beta = 2R$ (2 Rechte), so ist auch $a + a_1 = b + b_1 = 2R$, und folglich:

$$a + b + c = c_1 - (a_1 + b_1) + 4R,$$

d. h.: „bleibt die Summe $a + b + c$ constant, so bleibt auch der Unterschied $c_1 - (a_1 + b_1)$ constant."

Nun folgt aus dem bekannten Satze, wonach der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks aus der Summe seiner drei Winkel gefunden wird, dafs für alle sphärische Dreiecke ABC, über derselben Grundlinie AB und von gleichem Flächeninhalt, die Summe der drei Winkel $(a + b + c)$ constant bleibt, daher bleibt auch in den zugehörigen Dreiecken A_1CB_1 der Unterschied $c_1 - (a_1 + b_1)$, d. h. der Unterschied zwischen dem Winkel (c_1) an der Spitze uud der Summe $(a_1 + b_1)$ der Winkel an der Grundlinie, constant, und folglich ist der Ort des Scheitels C die Peripherie eines Sphärenkreises, der durch die Puncte A_1, B_1 geht (4.). Daraus folgt der nachstehende merkwürdige und fruchtbare Satz:

„Der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke ABC, über derselben Grundlinie AB und von gleichem Flächeninhalt, ist die Peripherie eines bestimmten Sphärenkreises, der durch die Gegenpuncte A_1, B_1 der Endpuncte A, B der gemeinschaftlichen Grundlinie geht."

6.

Bleibt also die Grundlinie AB des sphärischen Dreiecks ABC unverändert, und sein Scheitel C bewegt sich in der Peripherie des Kreises A_1CB_1, so bleibt sein Flächeninhalt constant. Nähert sich der Scheitel C einem der beiden Puncte A_1, B_1, z. B. dem Puncte B_1, bis er endlich mit ihm zusammenfällt, so fällt der Bogen AC mit AB_1 zusammen, und da $CB_1 = 0$ wird, so geht BC in den halben Hauptkreis BDB_1 über, welcher den Kreis A_1CB_1 in B_1 berührt. Daher folgt, dafs der Flächencheninhalt des Dreiecks ABC gleich ist dem Flächeninhalt des Zweiecks BAB_1DB oder ABA_1EA, dessen eine Seite BDB_1 oder AEA_1 den Ortskreis A_1CB_1 in B_1 oder A_1 berührt.

Es ist zu bemerken, dafs, wenn die Grundlinie AB und der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks ABC gegeben sind, dafs alsdann eigentlich zwei Ortskreise für den Scheitel C statt finden, indem man sich das Dreieck auf zwei verschiedenen Seiten der Grundlinie vorstellen kann; beide Ortskreise sind aber nothwendiger Weise einander gleich, schneiden einander in den Puncten A_1, B_1, ihre Ebenen bilden mit der Ebene des Hauptkreises ABA_1B_1 gleiche Winkel, und die Gerade, welche ihre Pole verbindet, steht auf der letzteren Ebene senkrecht. In dem besonderen Falle, wo die Summe der Winkel des Dreiecks gleich 4 Rechten, d. h. wo $a+b+c=4R$, ist $c_1=a_1+b_1$ (5.), und daher ist A_1B_1 ein sphärischer Durchmesser für jeden der beiden genannten Ortskreise (4.), folglich fallen beide Ortskreise in einen einzigen zusammen, dessen Ebene zu der Ebene des Hauptkreises ABA_1B_1 senkrecht ist.

7.

Es sei P (Fig. 5.) der Pol des Hauptkreises ABA_1B_1 und EPF derjenige Hauptkreis, welcher die Puncte B, B_1 zu Polen hat. Man ziehe aus B_1 durch den Pol M des Ortskreises A_1CB_1 den Quadranten B_1MG, und beschreibe mit ihm aus dem Pol G den Hauptkreis B_1DB, so hat, da dieser Hauptkreis den Kreis A_1CB_1 in B_1 berührt, weil GMB_1 zu DB_1 senkrecht (2.), das Zweieck BDB_1AB mit dem Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt. Nun ist der Bogen DE das directe Maafs für den Flächeninhalt des Zweiecks BAB_1DB, und da die Quadranten PE und GD einander gleich sind, also auch $DE=PG$ ist, so ist auch der Bogen PG ein directes Maafs für den Flächeninhalt des Zweiecks BAB_1BD oder des Dreiecks ABC; d. h., in demselben Verhältnifs, in welchem sich der Flächeninhalt des Dreiecks ändert, ändert sich auch der ihm zugehörige Bogen, und umgekehrt; so dafs also einem Dreieck von doppeltem Flächeninhalt, ein zweimal so grofser Bogen entspricht. Stehen also z. B. über derselben Grundlinie AB zwei Dreiecke ABC und ABC_1, deren Flächeninhalte sich verhalten wie $n:m$, und entsprechen ihnen respective die Puncte G, G_1, so ist auch $PG:PG_1=n:m$, und umgekehrt.

Kann man also den Bogen PG in G_1 so theilen, daſs $PG:PG_1$ irgend einem gegebenen Verhältniſs $n:m$ gleich ist, so kann man auch ein Dreieck ABC_1 finden, welches mit dem gegebenen Dreieck ABC einerlei Grundlinie und in Hinsicht des Flächeninhalts das nemliche gegebene Verhältniſs hat.

8.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich unter anderen zunächst die Auflösung folgender Aufgaben.

I. Aufgabe. „Ueber der Grundlinie AB eines gegebenen sphärischen Dreiecks ABC ein gleichschenkliges Dreieck zu errichten, welches mit jenem gleichen Flächeninhalt hat."

Man lege durch den Scheitel C des gegebenen Dreiecks und durch die Gegenpuncte A_1, B_1 der Endpuncte seiner Grundlinie den Ortskreis A_1CB_1, und errichte aus der Mitte der Grundlinie zu dieser einen sphärischen Perpendikel, so ist der Durchschnittspunct dieses Perpendikels und jenes Ortskreises, zufolge des Obigen, der Scheitel des zu construirenden gleichschenkligen Dreiecks.

II. Aufgabe. „Ueber der Grundlinie AB eines gegebenen sphärischen Dreiecks ABC ein anderes Dreieck zu errichten, welches mit ihm gleichen Flächeninhalt und entweder 1) an der Grundlinie einen rechten oder irgend einen gegebenen Winkel α, oder 2) eine gegebene Seite hat."

Auflösung und Beweis folgen von selbst. Für den Fall (2.) ist die Aufgabe nicht immer möglich.

III. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu finden, welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC dieselbe Grundlinie AB und gleichen Flächeninhalt hat, und dessen Spitze in einem gegebenen Hauptkreise K liegt."

Man construire den Ortskreis A_1CB_1, so schneidet derselbe den gegebenen Hauptkreis K in denjenigen zwei Puncten, in welchen allein die Spitze des zu construirenden Dreiecks liegen kann; schneidet er ihn nicht, so ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich.

IV. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck ABC in ein Zweieck zu verwandeln, d. h., ein Zweieck zu finden, welches mit dem Dreieck gleichen Flächeninhalt hat."

Man suche den Pol M des Ortskreises A_1CB_1 (Fig. 5.), ziehe den sphärischen Radius MB_1 und errichte B_1DB senkrecht zu MB_1, so ist BDB_1AB das verlangte Zweieck (7.).

V. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu construiren, dessen Grundlinie gegeben ist, und welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC einen Winkel gemein und mit ihm gleichen Flächeninhalt hat."

Es sei AD (Fig. 6.) die gegebene Grundlinie des zu construirenden Dreiecks, und A sei der beiden Dreiecken angehörige Winkel. Man ziehe den Hauptkreis CD, und construire nach (III.) das Dreieck CDE, welches mit dem gegebenen Dreieck CDB gleichen Flächeninhalt und die Grundlinie CD gemein hat, und dessen Scheitel E in dem gegebenen Hauptkreise AC liegt, so ist ADE das gesuchte Dreieck. Denn ist $\triangle CDB = \triangle CDE$, so ist auch $\triangle CFE = \triangle DFB$, und folglich auch $\triangle ABC = \triangle ADE$.

VI. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat, und von dessen Seiten zwei der Gröfse nach gegeben sind."

Diese Aufgabe läfst sich mittelst (II, 2.) auf (V.), und umgekehrt, mittelst (V.) auf (II, 2.) zurückführen. Uebersteigt der genannte Flächeninhalt eine bestimmte Grenze, so findet die Aufgabe nicht Statt.

VII. Aufgabe. „Ein sphärisches Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat, und von welchem eine Seite und ein Winkel der Gröfse nach gegeben sind."

Diese Aufgabe läfst sich, wie die vorige, durch Hülfe von (II, 1.) und (V.) lösen.

VIII. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck in ein sphärisches Dreieck zu verwandeln, d. h., ein Dreieck zu construiren, welches mit dem Viereck eine Seite und einen Winkel gemein, und mit ihm gleichen Flächeninhalt hat."

Es sei $ABCD$ (Fig. 7.) das gegebene Viereck. Man ziehe eine sphärische Diagonale DB, und verlängere an dem einen Endpuncte derselben eine Seite des Vierecks, z. B. in B die Seite AB nach E hin, und construire sodann, nach (III.), das Dreieck DBE, welches mit dem Dreieck DBC über derselben Grundlinie DB steht, gleichen Flächeninhalt hat, und dessen Scheitel E in der Verlängerung der Seite AB liegt, so ist AED das gesuchte Dreieck, welches mit dem Viereck $ABCD$ gleichen Flächeninhalt und den Winkel A und die Seite AD gemein hat.

IX. Aufgabe. „Irgend ein gegebenes sphärisches Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat."

Die Aufgabe wird auf ähnliche Weise gelöst wie die vorige.

Hieraus folgt:

„Dafs man durch blofse Construction jedes gegebene sphärische Vieleck in ein sphärisches Vieleck irgend einer Gattung mit einer kleineren Anzahl Seiten, folglich jedes gegebene sphärische Vieleck in ein Dreieck oder Zweieck verwandeln kann."

9.

Ferner ergiebt sich aus den obigen Betrachtungen die Auflösung folgender Aufgaben.

I. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck durch einen Hauptkreis aus einem seiner Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei ABC (Fig. 8.) das gegebene Dreieck. Man construire den Ortskreis A_1CB_1, dessen Pol M ist. Aus dem Pol B ziehe man den Hauptkreis $EPGF$. Ferner ziehe man den Hauptkreis $DPMD_1$ so, dafs er zu der Grundlinie AB senkrecht ist und sie in D halbirt; alsdann ist P der Pol des Hauptkreises ABA_1B_1. Endlich ziehe man den Quadranten B_1MG, halbire PG in G_1, ziehe den Quadranten $G_1M_1B_1$, welcher den Hauptkreis DPM_1D_1 in M_1 schneidet, und ziehe aus dem Pole M_1 mit dem sphärischen Radius M_1B_1 den Sphärenkreis B_1baA_1, so ist, zufolge (7.), sowohl das sphärische Dreieck ABa, als auch ABb, halb so grofs als das gegebene Dreieck ABC, und folglich leistet jeder der beiden Hauptkreise Aa und Bb der vorgelegten Aufgabe Genüge.

Es sei Cc der dritte Hauptkreis, welcher das gegebene Dreieck ABC, der Aufgabe gemäfs, halbirt, und C_1 sei der Gegenpunct des Scheitels C, so liegen, vermöge der vorstehenden Auflösung, sowohl die vier Puncte A_1, B_1, b, a, als auch B_1, C_1, c, b, so wie auch C_1, A_1, a, c in einem Kreise. Da die Ebenen dieser drei Kreise einander im Allgemeinen in einem Punct O schneiden, so treffen auch die drei Geraden A_1a, B_1b, C_1c, in welchen die nemlichen Ebenen einander schneiden, in demselben

Punct O zusammen, und folglich schneiden die Ebenen der drei Hauptkreise AaA_1, BbB_1, CcC_1 einander in einem und demselben Durchmesser SQO der Kugel, welcher durch den Punct O geht, so daſs folglich die drei Hauptkreise Aa, Bb, Cc einander in einem und demselben Puncte Q schneiden. Daraus folgt der nachstehende merkwürdige Satz:

„Die drei Hauptkreise (Aa, Bb, Cc), von denen jeder durch einen Winkel eines gegebenen sphärischen Dreiecks (ABC) geht und die Fläche desselben halbirt, treffen einander in einem und demseben bestimmten Puncte Q."

Durch irgend zwei der drei Hauptkreise ist demnach der dritte unmittelbar gegeben.

Der vorstehende Satz findet bekanntlich auf analoge Weise beim geradlinigen Dreieck statt, bei welchem der Punct (Q), in welchem die drei Halbirungslinien einander schneiden, zugleich die Eigenschaft hat, daſs er der Schwerpunct der Fläche des Dreiecks ist.

II. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck, von einem beliebigen Punct aus, der in einer seiner Seiten liegt, durch einen Hauptkreis in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei ABC (Fig. 9.) das gegebene Dreieck und D der gegebene Punct. Man theile das Dreieck aus einem Winkel, z. B. aus A, durch den Hauptkreis Aa in zwei gleiche Theile (I.), und verwandele nach (8, III.) das sphärische Dreieck ADa in DaE, so theilt der Hauptkreis DE das gegebene Dreieck in zwei gleiche Theile.

III. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck durch einen Hauptkreis aus einem seiner Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei $ABCD$ (Fig. 10.) das gegebene Viereck. Dasselbe soll z. B. aus dem Winkel A, durch einen Hauptkreis, in zwei gleiche Theile getheilt werden. Man verlängere die Seite BC nach E hin, und mache, nach (8, III.), das Dreieck ACE gleichflächig mit ACD, und theile das Dreieck AEB durch den Hauptkreis AF in zwei gleiche Theile (I.), so ist auch $\triangle AFB =$ Viereck $AFCD$, und folglich leistet der Hauptkreis AF der Aufgabe Genüge. Hätte man statt der Seite BC die Seite DC nach E_1 hin verlängert, und $\triangle ACE_1 = \triangle ACB$ gemacht, und durch den Hauptkreis AF_1 das Dreieck ADE_1 halbirt, so müſste man alsdann noch das Dreieck ACF_1 in ACF verwandeln, um den Hauptkreis AF zu finden, welcher die Forderung der vorgelegten Aufgabe erfüllt.

Hat man erst einen Hauptkreis *AF* gefunden, so lassen sich daraus, mit Hülfe von (8, III.), die drei übrigen Hauptkreise, welche aus den drei übrigen Winkeln *B*, *C*, *D* das Viereck halbiren, leicht finden.

IV. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck durch einen Hauptkreis, welcher durch einen in einer Seite desselben gegebenen Punct geht, in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei *ABCD* (Fig. 11.) das gegebene Viereck und *E* der gegebene Punct. Man theile z. B. aus dem Winkel *A*, durch den Hauptkreis *AF*, das Viereck in zwei gleiche Theile (III.), und verwandele hierauf das Dreieck *EFA* in *EFG*, so theilt der Hauptkreis *EG* das gegebene Viereck in zwei gleiche Theile.

V. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Vieleck durch einen Hauptkreis aus einem seiner Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen."

Es sei z. B. das Fünfeck *ABCDE* (Fig. 12.) gegeben, welches aus dem Winkel *A* durch einen Hauptkreis *AH* in zwei gleiche Theile getheilt werden soll.

Man verwandele das gegebene Fünfeck in das Viereck *AFDE*, theile dieses Viereck durch den Hauptkreis *AG* in zwei gleiche Theile (III.), und verwandele das Dreieck *ADG* in *ADH* (8, III.), so theilt der Hauptkreis *AH* das gegebene Fünfeck in zwei gleiche Theile.

Hat das gegebene Vieleck mehr als fünf Seiten, so verfährt man auf ähnliche Weise.

VI. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Vieleck aus einem Punct, der in einer seiner Seiten gegeben ist, durch einen Hauptkreis in zwei gleiche Theile zu theilen."

Die Aufgabe kann durch Hülfe von (V.) wie die Aufgabe (IV.) durch Hülfe von (III.) gelöst werden.

VII. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck 1) von einem seiner Winkel aus, oder 2) von einem in einer seiner Seiten gegebenen Punct aus, durch Hauptkreise, in 4, 8, 16, ... gleiche Theile zu theilen."

Der Fall (1.) erfordert nur eine wiederholte Anwendung der Aufgabe (I.). Der Fall (2.) dagegen erfordert die Anwendung von (I.) und (III.). Soll z. B. das Dreieck *ABC* (Fig. 9.) aus dem Punct *D* in vier gleiche Theile getheilt werden, so theile man dasselbe zuerst durch den Hauptkreis *DE* in zwei gleiche Theile, und hierauf theile man sowohl das Dreieck *DEC*, als auch das Viereck *DEBA*, von *D* aus, in zwei gleiche Theile (I. und III.), so hat man die Forderung der Aufgabe erfüllt.

Auf dieselbe Weise kann das Viereck u. s. w. getheilt werden.

Da man einen gegebenen Winkel oder einen gegebenen Kreisbogen, durch Construction, nicht in drei gleiche Theile theilen kann, so kann auch das sphärische Dreieck durch bloſse Construction nicht in drei gleiche Theile getheilt werden (7.) und (I.). Wohl aber kann umgekehrt ein gegebenes sphärisches Dreieck, bloſs durch Construction, beliebig vervielfacht werden (7.).

VIII. Aufgabe. „Von einem gegebenen sphärischen Dreieck ein Stück abzuschneiden, welches mit einem anderen gegebenen sphärischen Dreieck gleichen Flächeninhalt hat."

Es soll z. B. von dem Dreieck *ABC* (Fig. 13.) ein Stück abgeschnitten werden, welches mit dem Dreieck *ADE* gleichen Flächeninhalt hat. Man verlängere *AE* nach *F* hin, und verwandele das Dreieck *BED* in *BEF* (8, III.), desgleichen das Dreieck *ABF* in *ABG*, so ist dieses Dreieck *ABG* das verlangte abzuschneidende Stück (vergl. 8, VII.).

Auf ähnliche Weise kann man von einem gegebenen sphärischen Vieleck ein Stück abschneiden, welches einen gegebenen Flächeninhalt hat.

10.

Ein sphärisches Dreieck, oder überhaupt ein sphärisches Vieleck, von einem in der Kugelfläche beliebig liegenden Punct aus, in zwei gleiche Theile zu theilen, sind einige Hülfssätze nöthig, die an einem anderen Orte im Zusammenhange vorgetragen und bewiesen, also hier nur kurz angedeutet werden sollen. Zum leichteren Verständniſs mögen die analogen Betrachtungen bei geradlinigen Figuren in der Ebene vorangehen, weil zwischen beiden Betrachtungen eine auffallende Uebereinstimmung Statt findet.

11.

I. Haben zwei geradlinige Dreiecke *ABC* und *ADE* (Fig. 14.) einen gemeinschaftlichen Winkel *A* und gleichen Flächeninhalt, so ist bekanntlich:

$$AB.AC = AD.AE.$$

Ist das eine Dreieck gleichschenklig, z. B., ist $AD = AE$, so ist alsdann

$$AB.AC = AD^2 = AE^2.$$

Nimmt man $AB_1 = AB$ und zieht irgend einen Kreis M, der durch die Puncte B_1 und C geht, so ist die Potenz dieses Kreises (s. Bd. 1. S. 164. dieses Journals), in Bezug auf den Punct A gleich $AB_1 \times AC = AD^2$; dieselbe Potenz ist aber auch gleich dem Quadrat der aus A an den Kreis gelegten Tangente AT, d. i. $= AT^2$, folglich ist $AF = AD = AE$.

II. Es ist ferner bekannt, dafs die Grundlinien BC, DE, ... aller Dreiecke ABC, ADE, ..., welche einen gemeinschaftlichen Winkel A und gleichen Flächeninhalt haben, von einer bestimmten Hyperbel, welche die Schenkel AD, AC des Winkels A zu Asymptoten hat, berührt werden, und zwar wird jede Grundlinie in ihrer Mitte berührt. Die Hauptaxe der Hyperbel halbirt demnach den Winkel A, und der eine ihrer Scheitel liegt in der Mitte G der Grundlinie DE des gleichschenkligen Dreiecks ADE. Daher folgt ferner, dafs der mit dem Radius $AD = AE = AT$, aus dem Mittelpunct A beschriebene Kreis $DFET$ die Axe AG im Brennpunct F der Hyperbel schneidet. Wenn also das Dreieck ABC gegeben ist, so kann man, durch Hülfe des Kreises M, leicht den Scheitel G und den Brennpunct F derjenigen Hyperbel finden, welche die Grundlinie BC berührt und die Seiten AB, AC zu Asymptoten hat.

12.

Auf den Eigenschaften (11.) gründet sich unter anderen die Auflösung folgender Aufgaben.

I. Aufgabe. „Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck gleichen Flächeninhalt und den Winkel an der Spitze gemein hat."

Die Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich sehr leicht aus (11, I.).

II. Aufgabe. „Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck gleichen Flächeninhalt und den Winkel an der Spitze gemein hat, und dessen Grundlinie durch einen gegebenen Punct geht." Oder, was dasselbe ist:

„Aus einem gegebenen Punct eine Gerade so zu ziehen, dafs sie mit zwei gegebenen Geraden, welche mit dem Punct in einer Ebene liegen, ein Dreieck bilde, dessen Flächeninhalt gegeben ist."

Es

Es sei ABC (Fig. 15.) das gegebene Dreieck und P der gegebene Punct.

Nach (11, II.) folgt, daſs die Aufgabe einerlei ist mit folgender:

„Aus einem gegebenen Puncte P an eine Hyperbel, deren Asymptoten AC, AB, nebst einer Tangente BC, gegeben sind, eine Tangente zu legen."

Die Aufgabe wird demnach, wie folgt, gelöset.

Man mache $AB_1 = AB$, lege durch die Puncte B_1, C, einen beliebigen Kreis B_1TC, an diesen aus A die Tangente AT, und beschreibe mit derselben aus A den Kreis $TEFDF_1$, welcher die Hauptaxe F_1F der Hyperbel in ihren Brennpuncten F, F_1 schneidet, und dessen Sehne DE derselben Axe in ihrem Scheitel G begegnet. Mit der Hauptaxe $G_1G = 2AG$ beschreibe man aus F_1 den Kreis QQ_1Q_2, und aus P den Kreis FQQ_1, verbinde den Durchschnitt Q beider Kreise mit dem Brennpunct F, und fälle auf diese Gerade QF aus P das Perpendikel PO, so ist dieses Perpendikel die gesuchte Tangente, und leistet folglich der obigen Aufgabe Genüge, d. h., sie schneidet ein Dreieck HIA ab, welches mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat. Ebenso ist das aus P auf die Gerade FQ_1 gefällte Perpendikel $PO_1H_1I_1$ eine Tangente an die Hyperbel, und schneidet ein Dreieck AH_1I_1 ab, welches mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat.

III. Aufgabe. „Wenn in einer Ebene ein Dreieck und irgend ein Punct gegeben ist, so soll man aus diesem Puncte eine Gerade so ziehen, daſs sie die Fläche des Dreiecks in zwei gleiche Theile theilt."

Man ziehe aus den Winkeln nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 16.) die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, von denen bekanntlich jede das Dreieck halbirt, und die einander in einem und demselben Puncte S schneiden, und die Ebene in 6 unendliche Winkelräume theilen. Befindet sich nun der gegebene Punct, z. B., in dem Winkelraum ASC_1, wie P, so ziehe man die Gerade PDE so, daſs das Dreieck DEB mit dem Dreieck BCC_1 gleichen Flächeninhalt hat (II.), so ist der vorgelegten Aufgabe Genüge gethan.

Liegt der gegebene Punct P auſserhalb des gegebenen Dreiecks, so läſst die Aufgabe nur eine Auflösung zu; liegt er aber innerhalb desselben, so sind eine, zwei und höchstens drei Auflösungen möglich.

Denn aus (11, II.) folgt, dafs von allen möglichen Geraden, welche das Dreieck halbiren, jede eine von drei bestimmten Hyperbeln berührt, welche die Seiten des Dreiecks zu Asymptoten haben.

IV. Aufgabe. „Aus einem in der Ebene eines gegebenen Dreiecks willkürlich angenommenen Punct eine Gerade so zu ziehen, dafs sie die Fläche des Dreiecks nach einem gegebenen Verhältnifs theilt."

Diese Aufgabe wird, wie die vorige, auf (II.) zurückgeführt.

V. Aufgabe. „Wenn in einer Ebene ein Viereck und irgend ein Punct gegeben ist, so soll man aus dem Punct eine Gerade so ziehen, dafs sie das Viereck 1) halbirt, oder 2) nach irgend einem gegebenen Verhältnifs theilt, oder 3) von demselben ein Stück von gegebener Gröfse abschneidet."

Es sei $ABCD$ (Fig. 17.) das gegebene Viereck und P der gegebene Punct. Für den Fall (1.) halbire man das Viereck durch die Gerade CC_1 aus dessen Winkel C, und ziehe hierauf die Gerade PFG so, dafs das Dreieck FGE mit dem Dreieck C_1CE gleichen Flächeninhalt hat (II.), so genügt sie der Aufgabe. Hätte man das Viereck durch die Gerade AA_1 (statt CC_1) in zwei gleiche Theile getheilt, so müfste man zuerst durch die Gerade PIH ein Dreieck IDH abschneiden, welches mit ADA_1 gleichen Flächeninhalt hätte, und dann noch das Dreieck PCH in das Dreieck PCG verwandeln, wozu man HG mit PC parallel ziehen müfste.

Es ist also nicht gleich bequem, von welchem Winkel aus man das Viereck zuerst theilt. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, und um zum Voraus entscheiden zu können, welchen zwei Seiten des Vierecks die zu ziehende Theilungslinie (PG) begegnen werde, ziehe man zuerst aus den Winkeln des Vierecks die vier Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, von denen jede dasselbe in zwei gleiche Theile theilt, so läfst sich alsdann auf ähnliche Weise, wie (III.), erkennen, welche der vier Theilungen man zu wählen habe, und welchen zwei Seiten die Theilungslinie PG begegnen werde.

Bei den Fällen (2.) und (3.) verfährt man auf ähnliche Weise.

Diese Art von Aufgaben lassen sich auch auf die Vielecke ausdehnen und werden auf ähnliche Weise gelöset.

13.

Die Betrachtungen (11. und 12.), über geradlinige Figuren in der Ebene, finden nun, wie oben bemerkt (10.), auf analoge Weise bei den sphärischen Figuren statt, nemlich wie folgt:

I. Haben zwei sphärische Dreiecke ABC, ADE gleichen Flächeninhalt und einen Winkel A gemein, so ist bekanntlich (Legendre, *élémens de géom.* Anmerk. X.):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AE.$$

Ist das eine Dreieck gleichschenklig, z. B. ist $AD = AE$, so ist:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AE^2.$$

Nimmt man $AB_1 = AB$ (Fig. 14., wo man sich unter jeder Geraden einen Hauptkreis der Kugel denken mufs), und legt durch die Puncte B und C irgend einen Sphärenkreis M, und an diesen aus A die Tangente AT, so ist, — da der Satz von der Potenz bei Kreisen in der Ebene (11, I.) auf ähnliche Weise bei Kreisen auf der Kugelfläche gilt, nemlich, dafs für alle, aus demselben Punct A durch den Kreis M gezogenen sphärischen Secanten AB_1C, das Product $\operatorname{tg}\frac{1}{2}AB_1.\operatorname{tg}\frac{1}{2}AC$ constant bleibt *), welches an einem andern Orte bewiesen werden wird, und leicht zu beweisen ist —:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AB_1.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AC = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AT^2 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AD^2,$$

und folglich

$$AT = AD = AE,$$

das heifst: „die sphärische Tangente AT aus dem Winkel A an den Kreis M ist gleich der Seite AD oder AE des gleichschenkligen Dreiecks ADE, welches mit dem Dreieck ABC gleichen Flächeninhalt hat."

II. Ferner werden wir an einem anderen Orte beweisen, dafs die Grundlinien BC, DE, ... (Fig. 18.) aller sphärischen Dreiecke ABC, ADE, ..., welche gleichen Flächeninhalt und einen Winkel A gemein haben, von einem sphärischen Kegelschnitt (die Durchschnittscurve der Kugelfläche mit der Fläche eines Kegels zweiten Grades, dessen Scheitel im Mittelpunct der Kugel liegt) berührt werden, und zwar, dafs jede Grundlinie in ihrer Mitte berührt wird; dafs ferner die Hauptaxe AG des sphärischen Kegelschnitts den gemeinschaftlichen Winkel

*) Ebenso findet die Eigenschaft zweier Kreise in der Ebene, welche wir ihre **gemeinschaftliche Potenz** genannt haben (I. Band, Seite 175. dieses Journals), auf analoge Weise bei zwei Kreisen auf der Kugel statt.

A halbirt, und einer ihrer Scheitel in der Mitte G der Grundlinie DE des gleichschenkligen Dreiecks ADE liegt; dafs der mit der Seite AD dieses Dreiecks aus A beschriebene Sphärenkreis $DFEF_1$ der Axe in den Brennpuncten F, F_1 des Kegelschnitts begegnet; dafs, wenn f der Gegenpunct von F_1, mithin $A_1f = AF$ ist, der Kegelschnitt, in Bezug auf die beiden Brennpuncte F, F_1, hyperbolische, dagegen, in Bezug auf die beiden Brennpuncte F, f elliptische Eigenschaften hat, d. h., dafs für jeden Peripheriepunct I des Kegelschnitts sowohl der Unterschied der beiden Bogen $IF_1 - IF$, als auch die Summe der beiden Bogen $IF + If$ constant ist, nemlich ersterer $= 2AG = GG_1$, und letztere $= Gg$; dafs endlich die Tangente BIC den Winkel FIF_1 der Leitstrahlen halbirt, und dafs überhaupt das Verfahren, an einen sphärischen Kegelschnitt eine Tangente zu legen, demjenigen bei den ebenen Kegelschnitten ganz und gar analog ist.

Die beiden Hauptkreise ACA_1 und ABA_1 kann man, wegen der Uebereinstimmung ihrer hier angegebenen Eigenschaft, in Bezug auf den sphärischen Kegelschnitt, mit den Asymptoten, in Bezug auf die Hyperbel (11, II.), spärische Asymptoten des sphärischen Kegelschnitts nennen*).

---

*) Wir fügen hier kürzlich noch folgende Resultate hinzu, die mit den obigen Sätzen im Zusammenhange sind, aber aufser dem Zwecke dieser Abhandlung liegen.

I. „Die Polarfigur eines sphärischen Kegelschnitts ist ebenfalls ein sphärischer Kegelschnitt, d. h., zieht man in einem Peripheriepunct I des gegebenen sphärischen Kegelschnitts die sphärische Normale IK, und nimmt IK = einem Quadranten, so ist der Ort des Puncts K ebenfalls die Peripherie eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar ist IK zugleich auch die sphärische Normale auf denselben im Puncte K. Ferner haben die beiden sphärischen Kegelschnitte folgende Beziehungen zu einander: Wenn sie beide als sphärische Ellipsen angesehen werden, so haben sie denselben Mittelpunct S, ihre sphärische Axen liegen in denselben Hauptkreisen ASA_1, LSL_1, und zwar liegt die kleine Axe der einen sphärischen Ellipse mit der grofsen Axe der andern im gleichen Hauptkreise, und die Summe zweier solcher zusammen gehöriger Axen ist einem halben Hauptkreise gleich; und endlich sind die Brennpuncte des einen sphärischen Kegelschnitts die Pole der Asymptoten des andern."

Aus diesem Satze folgt mit andern Worten der folgende:

II. „Fället man aus einem beliebigen Puncte k_1 Lothe auf die Ebenen, welche einen gegebenen Kegel k zweiten Grades berühren, so liegen alle Lothe zusammen in einer andern Kegelfläche K_1 desselben Grades. Sind $2a$ und $2b$ der gröfste und kleinste Winkel am Scheitel des Kegels K (die Axen-Winkel), und $2a_1$, $2b_1$ dasselbe für den Kegel K_1, so ist $2a + 2b_1 = 2a_1 + 2b = 2R$, und sowohl die beiden Axen-Winkel $2a$, $2b_1$ als $2b$, $2a_1$ liegen in einer und derselben Ebene. Werden diese beiden Axen-Ebenen zu Coordinaten-Ebenen genommen, so ist die Gleichung des Kegels K, wenn dessen Scheitel K der Anfangspunct ist:

$$y^2 \operatorname{tg} a^2 + x^2 \operatorname{tg} b^2 = z^2 . \operatorname{tg} a^2 . \operatorname{tg} b^2,$$

14.

Aus diesen angedeuteten Sätzen und Eigenschaften (13.) ergeben sich die Auflösungen vieler sphärischen Aufgaben, z. B. der folgenden:

I. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, welches mit ihm den Winkel an der Spitze gemein hat."

Die Auflösung ergiebt sich aus (13, I.).

II. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches mit ihm den Winkel an der Spitze gemein hat, und dessen Grundlinie durch einen gegebenen Punct geht."

Die Auflösung dieser Aufgabe gründet sich auf (13, II.), und ist mit (12, II.) analog, so dafs letztere für die gegenwärtige Aufgabe wörtlich übertragen werden kann.

III. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Dreieck durch einen Hauptkreis, der von einem auf der Kugel gegebenen Punct ausgeht, in zwei gleiche Theile zu theilen."

Die Auflösung ist analog mit (12, III.), nur dafs beim sphärischen Dreieck die Hauptkreise, welche dasselbe von seinen Winkeln aus halbiren, nicht durch die Mitten der gegenüberliegenden Seiten gehen, wie beim geradlinigen Dreieck, sondern nach (9, I.) construirt werden müssen.

IV. Aufgabe. „Von einem gegebenen sphärischen Dreieck durch einen Hauptkreis, der durch einen gegebenen Punct geht, ein Stück ab-

---

und die Gleichung des Kegels K_1, wenn dessen Scheitel k_1 zum Anfangspunct genommen wird, ist

$$\frac{y^2}{\operatorname{tg} a^2} + \frac{x^2}{\operatorname{tg} b^2} = \frac{z^2}{\operatorname{tg} a^2 . \operatorname{tg} b^2}."$$

Aus dem bekannten Satze (*Correspondance sur l'école polytechnique Tom. I. p.* 179.): „dafs der Ort der Durchschnittslinie zweier Ebenen, die zu einander senkrecht sind und die durch die Schenkel eines fixen Winkels gehen, eine Kegelfläche zweiten Grades ist, die den fixen Winkel zum kleinen Axen-Winkel hat;" oder mit andern Worten: „dafs der Ort der Scheitel aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie, deren Winkel am Scheitel rechte sind, ein sphärischer Kegelschnitt ist, welcher die Grundlinie zur kleinen elliptischen Axe hat," folgt nach (I.) folgender Satz:

III. „Dafs alle Quadranten, wie z. B. BC (Fig. 18.), die man zwischen zwei gegebenen und fixen halben Hauptkreisen ABA_1, ACA_1 ziehen kann, zusammen von einem bestimmten sphärischen Kegelschnitt $GIhgH$ berührt werden;" oder mit andern Worten: „dafs alle mögliche Ebenen, von denen jede durch einen gegebenen Punct K in der Durchschnittslinie zweier gegebenen fixen Ebenen geht und diese so schneidet, dafs die beiden Durchschnittslinien einen rechten Winkel bilden, zusammen einen bestimmten Kegel K zweiten Grades berühren, dessen Scheitel in dem genannten Punct K liegt, und welcher zugleich auch die beiden fixen Ebenen berührt."

zuschneiden, welches mit einem anderen gegebenen sphärischen Dreieck gleichen Flächeninhalt hat."

Die Aufgabe läfst sich, vermöge (8, VII.), auf (II.) zurückführen.

V. Aufgabe. „Ein gegebenes sphärisches Viereck durch einen Hauptkreis, der durch einen gegebenen Punct geht, in zwei gleiche Theile zu theilen."

Die Auflösung ist analog mit (12, V.). U. s. w.

15.

Es mögen hier noch folgende zwei Aufgaben nebst einigen Bemerkungen, die mit (13.) in Beziehung sind, ihren Platz finden.

„Wenn auf der Kugel zwei Hauptkreise ABA_1, ACA_1 (Fig. 18.) und irgend ein Punct I gegeben sind, so soll man denjenigen Bogen BIC finden, 1) für welchen $IB = IC$, oder 2) für welchen das sphärische Dreieck ABC ein Minimum oder das sphärische Dreieck A_1BC ein Maximum ist."

Ein und derselbe Bogen erfüllt zugleich die Forderungen beider Aufgaben. Angenommen, es sei Bogen $AI < A_1I$. Man nehme $IN = IA$, mache Winkel $INC = IAB$, und ziehe aus dem Durchschnitt C der Bogen NC und AC den Bogen CIB, so genügt dieser beiden Aufgaben zugleich. Denn die beiden sphärischen Dreieke AIB und NIC sind, vermöge der gleichen Seiten AI und NI und der daran liegenden gleichen Winkel, congruent, und daher ist $IB = IC$. Dafs ferner jedes andere Dreieck, wie z. B. AB_1C_1, gröfser ist als das sphärische Dreieck ABC, folgt eben so leicht. Denn die beiden sphärischen Dreiecke IBB_1 und ICC_2 sind, vermöge der gleichen Seiten IB und IC und der daran liegenden gleichen Winkel, congruent. Nun aber ist offenbar das sphärische Dreieck $ICC_1 > ICC_2$, also auch das sphärische Dreieck $ICC_1 > IBB_1$, und folglich auch das sphärische $\triangle AB_1C_1 > \triangle ABC$.

Bemerkt man ferner, dafs der gefundene Bogen BC, nach (13, II.), in seiner Mitte I von einem bestimmten sphärischen Kegelschnitt berührt wird, welcher die gegebenen Hauptkreise ABA_1 und ACA_1 zu Asymptoten hat, so folgt: „Dafs die vorliegende Auflösung zugleich lehrt, wie man durch Construction, in einem gegebenen Punct I an einen sphärischen Kegelschnitt eine Tangente BC legen kann, wenn nur die beiden Asymptoten desselben gegeben sind." „Dafs sofort ferner auch die den

Kegelschnitt im Scheitel G berührende Tangente DE, mithin auch dieser Scheitel selbst, so wie endlich auch die Brennpuncte F, F_1 oder f durch blofse Construction zu finden sind (13.)." U. s. w. Dieses alles findet bekanntlich auf analoge Weise bei der Hyperbel in Hinsicht ihrer Asymptoten statt.

Zum Schlusse kann noch bemerkt werden, dafs sich aus dem Obigen der nachstehende bekannte Satz (Legendre, VII. Buch, 26. Satz):

> „dafs nemlich von allen sphärischen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten, dasjenige das gröfste sei, in welchem der Winkel zwischen den gegebenen Seiten so grofs ist, als die Summe der beiden übrigen Winkel,"

leicht beweisen lasse. Denn es seien AB und AC (Fig. 4.) die gegebenen Seiten. Man nehme AB als fixe Grundlinie an, und beschreibe mit AC aus A einen Kreis A, und denke sich ferner durch die Gegenpuncte A_1, B_1 der Endpuncte der Grundlinie den Kreis M, der den Kreis A in C berührt, so ist, wie aus dem Obigen leicht folgt, das Dreieck ABC das gröfstmögliche mit den gegebenen Seiten AB und AC. Da ferner der Berührungspunct C mit den Polen der beiden genannten Kreise A, M, in einem Hauptkreise liegt, so fällt also im gegenwärtigen Falle der Pol M in den Hauptkreis ACA_1, und daher hat man (4.):

$$b_1 = a_1 + c_1 = a_1 + c,$$

und da

$$a + a_1 = b + b_1,$$

so folgt:

$$a = b + c,$$

w. z. b. w.

Berlin, im März 1827.