SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI E SUL NUMERO DEGLI INVARIANTI.

N O T A

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS.

Credo utile tener sott'occhio le tavole delle partizioni dei numeri in parti di dato numero e che non superino un dato limite. Io ne faccio l'applicazione alla determinazione del numero degli invarianti delle forme binarie.

§. 1. *Teorema.* Il numero $B_{\mu}^{(n,p)}$ delle soluzioni delle due equazioni

$$(I) \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = p, \quad n\alpha_n + (n-1)\alpha_{n-1} + \dots + 2\alpha_2 + \alpha_1 = \mu$$

(essendo $\alpha_0, \dots, \alpha_n (n+1)$ incognite suscettibili di ogni valore intero positivo, non escluso lo zero) è uguale al numero $B_{\mu}^{(p,n)}$ delle soluzioni del sistema di equazioni

$$(II) \quad \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_p = n, \quad p\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \dots + 2\beta_2 + \beta_1 = \mu.$$

Infatti ogni soluzione delle (I) consiste nella *partizione* del numero μ in α_n numeri eguali ad n , $\dots$, α_2 numeri eguali a 2, α_1 eguali ad 1, ed α_0 eguali allo zero, essendo p il numero totale delle parti; ed a questa partizione corrisponde come *conjugata* l'altra

$$(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1) + (\alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_2) + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n-1}) + \alpha_n = \mu,$$

nella quale lo stesso numero μ è spartito in tutto al più n parti, ognuna delle quali è uguale o inferiore a p , le quali parti sono quelle indicate con $p, (p-1), \dots, 2, 1$ nella seconda delle (II), i loro numeri essendo $\beta_p, \dots, \beta_2, \beta_1$. Così per esempio alla partizione

$$7.0 + 6.1 + 5.0 + 4.3 + 3.3 + 2.0 + 1.2 = 29$$

(ossia 644433311) del numero 29 corrisponde l'altra partizione

$$9 + 7 + 7 + 4 + 1 + 1 = 29,$$

ossia $9.1 + 8.0 + 7.2 + 6.0 + 5.0 + 4.1 + 3.0 + 2.0 + 1.2 = 29$.

2. *Teorema.* I predetti numeri $B_{\mu}^{(n,p)}$ dipendono gli uni dagli altri mediante le relazioni

$$(2) \quad B_{\mu}^{(n,p)} = B_{\mu}^{(n-1,p)} + B_{\mu-n}^{(n,p-1)}, \quad (3) \quad B_{\mu}^{(n,p)} = B_{\mu}^{(n,p-1)} + B_{\mu-p}^{(n-1,p)};$$

a motivo della (1) $B_{\mu}^{(n,p)} = B_{\mu}^{(p,n)}$ esse sono conseguenze l'una dell'altra: del resto possono ambedue dimostrarsi rispetto al numero $B_{\mu}^{(n,p)}$ delle partizioni di μ in p parti

non superiori ad n . Infatti tali partizioni si separano in due parti, cioè quelle che non contengono il numero n , il cui numero è per conseguenza $B_{\mu}^{(n-1, p)}$, e quelle che contengono il numero n , tolto il quale rimangono le partizioni di $\mu - n$ in $p - 1$ parti, il cui numero è $B_{\mu-n}^{(n, p-1)}$, così resta dimostrata la (2). Per dimostrare la (3) separiamo tutte le $B_{\mu}^{(n, p)}$ in due parti, quelle cioè che contengono almeno uno zero (ossia, il cui numero delle parti non supera $p - 1$) e che sono in numero $B_{\mu}^{n, p-1}$, e quelle che non contengono alcuno zero, e di cui perciò ciascuna parte può diminuirsi d'un'unità, sicchè ne provengono le $B_{\mu-p}^{(n-1, p)}$. Ecco per esempio le 9 partizioni del numero 7 in 5 parti non superiori a 4, separate in due parti in guisa da dimostrare le predette soluzioni, che in tal caso sono

$$9 = 6 + 3, \quad 9 = 7 + 2$$

4 3 0 0 0		3 0 0 0		4 3 0 0
4 2 1 0 0		2 1 0 0		4 2 1 0
4 1 1 1 0		1 1 1 0		4 1 1 1
3 3 1 0 0	3 3 1 0 0			3 3 1 0
3 2 2 0 0	3 2 2 0 0			3 2 2 0
3 2 1 1 0	3 2 1 1 0			3 2 1 1
3 1 1 1 1	3 1 1 1 0			
2 2 2 1 0	2 2 2 1 0			2 0 0 0 0
2 2 1 1 1	2 2 1 1 1			2 2 2 1
				1 1 0 0 0

3. Teorema. È

$$(4) \quad B_{\mu}^{(n, p)} = B_{np-\mu}^{(n, p)}, \quad (5) \quad B_{\mu}^{n, p} = 0 \quad \text{per} \quad \mu > np;$$

sicchè è sufficiente conoscere i valori dei B corrispondenti a μ non superiori a $\frac{np}{2}$.

La (5) è evidente, e la (4) si dimostra supponendo che a ciascuna delle p parti si sostituisca il suo complemento al numero n , nel qual modo la somma μ diventerà $np - \mu$.

4. Problema. In quanti modi il numero N può partirsi in p parti ciascuna delle quali sia uno dei termini della progressione aritmetica $c, c + d, c + 2d \dots c + nd$? Ciascuna delle parti si diminuisca di c poscia si divida per d , in tal modo la loro somma diventerà $\frac{N - cp}{d} = \mu$, e perciò il numero cercato sarà $B_{\mu}^{(n, p)}$. Così le partizioni del numero $N = 15$ in tre numeri dispari non superiori a 9 sono $B_6^{(4, 3)} = 5$; cioè 951, 933, 771, 753, 555, che dipendono dalle 420, 411, 330, 321, 222.

Corollario. Se rimane indeterminato il numero delle parti, bisogna sommare i valori corrispondenti a $p = 1, 2, 3$, ecc. Così per esempio il numero dei modi in cui

N può partirsi nei numeri 2, 3, 4, 5, $(2+n)$ è

$$B_{n-2}^{(n,1)} + B_{n-4}^{(n,2)} + B_{n-6}^{(n,3)} + \text{ecc.}$$

5. *Problema.* In quanti modi il numero N può partirsi in p parti disuguali scelte nella predetta progressione aritmetica $c, c+d, \dots, c+nd$? In ciascuna partizione le parti prese nell'ordine di grandezza crescente si diminuiscano rispettivamente di $c, c+d, c+2d, \dots, c+(p-1)d$, poscia si dividano per d , la loro somma diventerà $\frac{N-cp}{d} - \frac{p(p-1)}{2} = \mu$, ed il numero cercato sarà $B_{\mu}^{(n-p+1, p)}$.

Esempio. Volendo partire $N=19$ in tre numeri dispari non superiori a 13, dalle $B_{\mu}^{(n-p+1, p)} = B_5^{(4, 3)} = 4$ partizioni 410, 320, 311, 221 dedurremo (raddoppiandone i numeri e sommandovi 5, 3, 1) le 13 5 1, 11 7 1, 11 5 3, 9 7 3.

6. Se il numero p delle parti, nelle quali μ dee partirsi, è uguale o maggiore di μ il numero $B_{\mu}^{(n, p)}$ delle partizioni non cangia, noi lo segneremo con $B_{\mu}^{(n)}$. Lo stesso avviene se il numero n è uguale o maggiore di μ ; sicchè porremo $B_{\mu}^{(n, p)} = B_{\mu}^{(\mu+1, p)} = \text{ecc.} = B_{\mu}^{(\mu)}$. Finalmente se hanno luogo ambedue queste circostanze scriveremo B_{μ} in luogo di $B_{\mu}^{(\mu, \mu)}$; questo B_{μ} è dunque il numero delle partizioni di μ in parti comunque scelte tra i numeri interi, ommettendo di menzionare lo 0, giacchè ora il numero delle parti è indeterminato. Così $B_4 = 5$ esprime il numero delle partizioni 4, 3 1, 2 2, 2 1 1, 1 1 1 1.

7. Mediante la precedente relazione

$$(2') \quad B_{\mu}^{(n)} = B_{\mu}^{(n-1)} + B_{\mu-n}^{(n)}$$

e cominciando da

$$(6') \quad B_0^{(n)} = 1, \quad \text{e} \quad (7) \quad B_{\mu}^{(1)} = 1$$

si può calcolare la seguente tavoletta già data dall'Eulero

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu = 1$	1											
2	1	2										
3	1	2	3									
4	1	3	4	5								
5	1	3	5	6	7							
6	1	4	7	9	10	11						
7	1	4	8	11	13	14	15					
8	1	5	10	15	18	20	21	22				
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30			
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42		
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56	
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76	77

in ciascheduna riga s'intenda ripetuto indefinitivamente l'ultimo numero; così per esempio $B_5^{(8)} = 7$; sicchè i numeri della diagonale sono appunto i B_μ .

8. Le altre tavole si calcolano mediante le (2) (3) cominciando da (6) $B_0^{(n,p)} = 1$, e da (8) $B_\mu^{(1,p)} = 1$ finchè μ non supera p , e (5) $B_\mu^{(1,p)} = 0$ quando μ supera p .

	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$n =$	2	2 3	2 3 4	2 3 4 5	2 3 4 5 6
$\mu = 1$	1	1 1	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
2	2.	2 2	2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2 2
3	1	2. 3	2 3 3	2 3 3 3	2 3 3 3 3
4	1	2 3.	3. 4 5	3 4 5 5	3 4 5 5 5
5	0	1 3	2 4 5	3. 5 6 7	3 5 6 7 7
6		1 3	2 5. 7	3 6 8 9	4. 7 9 10 11
7		0 2	1 4 7	2 6. 9 11	3 7 10 12 13
8			1 4 8.	2 6 11 14	3 8 13 16 18
9			0 3 7	1 6 11 16	2 8. 14 19 22
10		0	1 7	1 5 12. 18	2 8 16 23 28
11			1 5	0 4 11 19	1 7 16 25 32
12			0 5	3 11 20	1 7 18. 29 39
13			3	2 9 20	0 5 16 30 42
14			2	1 8 19	4 16 32 48
15			1	1 6 18	3 14 32. 51
16			1	0 5 16	2 13 32 55
17			0	3 14	1 10 30 55
18				2 11	1 9 29 58.

$p = 7$								$p = 8$							
$n =$	2	3	4	5	6	7		2	3	4	5	6	7	8	
$\mu = 7$	4.	8	11	13	14	15		4	8	11	13	14	15	15	
8	4	9	14	17	19	20		5.	10	15	18	20	21	22	
9	3	10	16	21	24	26		4	11	17	22	25	27	28	
10	3	10	19	26	31	34		4	12	21	28	33	36	38	
11	2	10	20	30	37	42		3	12	23	33	40	45	48	
12	2	10	23	35	46	53		3	13.	27	40	51	58	63	
13	1	9	23	39	52	63		2	12	28	45	59	70	77	
14	1	8	24.	43	61	75		2	12	31	52	71	86	97	
15	0	7	23	46	68	87		1	11	31	57	81	101	116	
16		5	23	48	76	100		1	10	33.	63	94	120	141	
17		4	20	49	81	112		0	8	31	66	103	137	154	
18		3	19	49	88	125			7	31	70	116	158	194	
19		2	16	48	90	136			5	28	71	123	176	221	
20		1	14	46	94	146			4	27	73	134	197	255	
21		1	11	43	94.	155			3	33	71	139	214	284	
22		0	9	39	94	162			2	21	70	146	233	319	
23			6	35	88	166			1	17	66	147	247	348	
24			5	30	81	169			1	15	63	151.	263	383	

9. *Problema.* Analogamente al problema del § 6. si dimandi in quanti modi $A_{\mu}^{(n)}$ il numero μ può partirsi in parti disuguali 1, 2, n senza determinare il numero delle parti. Conforme al § 5 diminuiremo le parti ordinatamente di 1, 2, 3 e siccome il numero delle parti può essere 1, 2, 3, 4, così la loro somma verrà a diminuirsi di 1, 3, 6, 10; perciò

$$A_{\mu}^{(n)} = B_{\mu-1}^{(n-1, 1)} + B_{\mu-2}^{(n-2, 2)} + B_{\mu-6}^{(n-3, 3)} + \text{ecc.}$$

mediante la (3) due termini successivi possono sommarsi in uno solo, sicchè

$$A_{\mu}^{(n)} = B_{\mu-1}^{(n-1, 2)} + B_{\mu-6}^{(n-3, 4)} + B_{\mu-15}^{(n-5, 6)} + \text{ecc.}$$

Per esempio

$$A_{21}^{(11)} = B_{20}^{(10, 2)} + B_{15}^{(8, 4)} + B_6^{(6, 6)} = B_0 + B_{15}^{(8, 4)} + B_6 = 1 + 31 + 11 = 43.$$

Questi $A_{\mu}^{(n)}$ sono sottoposti alla relazione $A_{\mu}^{(n)} = A_{\mu}^{(n-1)} + A_{\mu-n}^{(n-1)}$ poco differente dalla (2').

10. *Numero dei peninvarianti.* Io dico *peninvarianti* di grado p e di indice μ una funzione intera P delle quantità $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, tale che ogni termine contenga p quantità, i cui indici abbiano la somma μ , e sia $\Delta P = 0$, dove la ca-

caratteristica Δ indica la derivazione espressa da

$$a_0 D_{a_1} + 2a_1 D_{a_2} \dots + na_{n-1} D_{a_n},$$

ciascuna D designando l'ordinaria derivazione rispetto alla lettera posta abbasso (Veggansi i miei *Cenni elementari sui discriminanti, invarianti e covarianti* negli Atti dell'I. R. Istituto Veneto per Novembre 1858. Tomo IV pag. 65 e 83). Sia per esempio $n = 5$, $p = 4$, $\mu = 6$ il numero dei termini del peninvariante sarà $B_{\mu}^{(n,p)} = 8$, ed esso avrà la forma

$$Aa_5 a_1 a_0^2 + Ba_4 a_2 a_0^2 + Ca_4 a_1^2 a_0 + Da_3^2 a_0^2 + Ea_3 a_2 a_1 a_0 + Fa_3 a_1^3 \\ + Ga_2^3 a_0 + Ha_2^2 a_1^2$$

mentre la $\Delta P = 0$ conterrà $B_{\mu-1}^{(n,p)} = 6$ termini, e sarà

$$\Delta P = Aa_5 a_0^2 + (5A + 2B + 2C)a_4 a_1 a_0^2 + (4B + 6D + E)a_3 a_2 a_0^2 \\ + (4C + 2E + 3F)a_3 a_1^2 a_0 + (3E + 6G + 2H)a_2^2 a_1 a_0 \\ + (3F + 4H)a_2 a_1^3 = 0;$$

sicchè per determinare 8 coefficienti indeterminati abbiamo 6 equazioni, le quali essendo omogenee danno luogo a due soluzioni essenzialmente differenti (non badandosi ai moltiplicatori comuni); le più semplici sono

$$A=0, B=0, C=0, \quad D=1, E=-6, F=4, G=4, \quad H=-3; \\ A=0, B=1, C=-1, D=-1, E=2, F=0, G=-1, H=0.$$

Potrebbe nascer il dubbio che le 6 equazioni fossero riducibili ad un minor numero, sicchè il numero dei peninvarianti fosse maggior di due; nulladimeno io credo poter asserire che: *Il numero dei peninvarianti di grado p e di indice μ formati colle quantità $a_1, a_2, \dots, a_n$ è sempre $B_{\mu}^{(n,p)} - B_{\mu-1}^{(n,p)} = E_{\mu}^{(n,p)}$, e fra di essi ve ne sarà un numero $E_{\mu}^{(n-1,p)}$ che non conterranno a_n , un numero $E_{\mu}^{(n-2,p)}$ senza nè a_n nè a_{n-1} , e così in seguito.* — Nel caso precedente, essendo $E_6^{(5,4)} = 7 - 5 = 2$, tutti due i peninvarianti sono senza a_5 , ed essendo $E_6^{(3,4)} = 5 - 4 = 1$ uno di essi è anche senza a_4 , appunto come abbiamo trovato. — Col mezzo di relazioni identiche alle (2) (3) e delle $E_0^{(n,p)} = 1$, $E_{\mu}^{(n,p)} = E_{np+1-\mu}^{(n,p)}$ si possono facilmente calcolare le tavole dei numeri $E_{\mu}^{(n,p)}$, e le somme delle loro colonne danno i $B_{\mu}^{(n,p)}$: ecco le due tavole corrispondenti a $p=9$ ed a $p=10$.

$n=$	$p=9$								$p=10$									
	2	3	4	5	6	7	8	9	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
$\mu=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
5	0	1	1	2	2	2	2	2	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2
6	1	2	3	3	4	4	4	4	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4
7	0	1	2	3	3	4	4	4	0	1	2	3	3	4	4	4	4	4
8	1	2	4	5	6	6	7	7	1	2	4	5	6	6	7	7	7	7
9	0	2	3	5	6	7	7	8	0	2	3	5	6	7	7	8	8	8
10	0	1	4	6	8	9	10	10	1	2	5	7	9	10	11	11	12	12
11	-1	1	3	6	8	10	11	12	-1	1	3	6	8	10	11	11	12	12
12	0	1	5	8	12	14	16	17	0	2	6	9	13	15	17	18	19	19
13	-1	0	2	7	10	14	16	18	-1	0	3	8	11	15	17	19	20	20
14	0	0	4	8	14	18	22	24	0	1	5	10	16	20	24	26	28	28
15	-1	0	2	8	13	19	23	27	-1	0	3	9	15	21	25	29	31	31
16	0	-1	3	8	16	22	29	33	0	0	5	11	19	26	33	37	41	41
17	-1	-1	0	7	14	23	29	36	-1	-1	1	9	17	26	33	40	44	44
18	0	-1	2	7	18	27	37	44	0	0	4	11	23	33	43	51	58	58
19	-1	-2	-2	5	13	26	36	46	-1	-2	0	8	18	32	43	53	61	61
20	0	-2	0	5	17	29	44	55	0	-1	2	10	24	38	54	66	77	77
21	0	-1	-3	3	13	29	43	59	-1	-2	-2	6	19	37	53	70	81	81
22	0	-2	-2	4	14	29	49	65	0	-2	0	7	23	42	64	82	100	100
23	0	-1	-4	0	9	28	47	69	0	-2	-4	3	17	39	62	86	105	105
24	0	-1	-2	-1	12	29	51	77	0	-1	-1	4	22	45	74	101	127	127

11. Applicando il precedente metodo ai peninvarianti, nei quali si lascia indeterminato e il grado p e il numero n delle quantità (il che è lo stesso come porre $p=n=\mu$) io stabilii nel § 9 della succitata memoria il numero dei peninvarianti di ciascun indice. D'altronde tutti i $B_\mu - B_{\mu-1} = E_\mu$ peninvarianti d'indice μ risultano dai peninvarianti fondamentali $P_2, P_3, P_4, \dots, P_\mu$ (che sono i coefficienti della trasformata priva di secondo termine) uno per ciascun indice cominciando dal 2: il Corollario del § 4 ci dà per questo medesimo numero delle partizioni di μ nei 2, 3, μ un'altra espressione; quindi le differenze nella serie $B_1, B_2, B_3 \dots$ sono date da

$$(9) \quad B_{\mu} - B_{\mu-1} = E_{\mu} = B_{\mu-2}^{(1)} + B_{\mu-4}^{(2)} + B_{\mu-6}^{(3)} + \text{ecc.}$$

12. Forse non è dimostrato, pure può asserirsi con tutta confidenza, che se $\mu = \frac{np}{2}$ la funzione P soddisfacente alla $\Delta P = 0$ è euritmica rispetto alle quantità $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$; e perciò essa è ciò che dicesi un *invariante*. Dunque (§ 10): Il numero degli invarianti di grado p è $B_{\frac{np}{2}}^{(n,p)} - B_{\frac{np}{2}-1}^{(n,p)}$, che per brevità segneremo con $E^{(n,p)}$.

13. Cerchiamo tutti gl'invarianti della forma biquadratica, cioè sia $n=4$. Essendo

$$E^{(4,2)} = B_4^{(4,2)} - B_3^{(4,2)} = 3 - 2 = 1,$$

si ha un invariante di 3 termini, che è il noto $I_4^{(2)} = I$ (Veggasi il § 5. dei *Cenni*), Poscia $E^{(4,3)} = 5 - 4 = 1$ c'indica l'invariante di 5 termini $I_4^{(3)} = J$. Le

$$E^{(4,4)} = 8 - 7 = 1, \quad E^{(4,5)} = 12 - 11 = 1, \quad E^{(4,6)} = 18 - 16 = 2,$$

$$E^{(4,7)} = 24 - 23 = 1, \quad E^{(4,8)} = 33 - 31 = 2, \quad E^{(4,9)} = 2,$$

$$E^{(4,10)} = 2, \quad E^{(4,11)} = 2, \quad E^{(4,12)} = 3, \text{ ecc.}$$

ci mostrano che dev'esservi anche un invariante di 4° grado, uno di 5°, due di 6°, ecc. Ora pel Corollario del § 4. coi due invarianti di 2° e di 3° grado si possono formare $B_{p-2}^{(1,1)} + B_{p-4}^{(1,2)} + B_{p-6}^{(1,3)} + \text{ecc.}$ invarianti di p^{esimo} grado, e questi numeri

$$B_{4-2}^{(1,1)} + B_{4-4}^{(1,2)} = 0 + 1 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$0 + 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 + 1 + 1 = 2, \quad 0 + 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 2, \quad 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 2,$$

$$0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3, \text{ ecc.}$$

sono appunto i precedenti; dunque non vi è alcun altro invariante primitivo oltre i due I, J .

14. Per la forma di 5° ordine. cioè quando $n=5$, le $E^{(5,2)}=0$, $E^{(5,6)}=0$, ecc. indicano l'assenza d'invariante di grado imparamente — pari (il che ha luogo ogni qual volta n sia dispari). Si ha poi

$$E^{(5,4)} = 12 - 11 = 1, \quad E^{(5,8)} = 73 - 71 = 2, \quad E^{(5,12)} = 252 - 249 = 3,$$

il che mostra la presenza dei tre invarianti; l'uno $I_5^{(4)}$ ha appunto 12 termini (Veggasi *Cenni* § 6) l'altro $I_5^{(8)}$, che il Sig. Faà di Bruno disse primitivo (*Annali* 1856, pag. 86) dev'essere corretto come segue:

$$\begin{aligned}
 & a^3cdf^3 - a^2b^2df^3 - 3a^2bc^2f^3 + 5ab^3cf^3 - 2b^5f^3 - a^3ce^2f^2 + a^2b^2e^2f^2 - 3a^3d^2ef^2 + \\
 & + 11a^2bcdef^2 - 5ab^3def^2 + 12a^2c^3ef^2 - 30ab^2c^2ef^2 + 15b^4cef^2 + 12a^2bd^3f^2 - \\
 & - 21a^2c^2d^2f^2 - 34ab^2cd^2f^2 + 22b^4d^2f^2 + 78abc^3df^2 - 48b^3c^2df^2 - 27ac^5f^2 + \\
 & + 18b^2c^4f^2 + 5a^3de^3f - 5a^2bce^3f - 30a^2bd^2e^2f - 34a^2c^2de^2f + 133ab^2cde^2f - \\
 & - 54b^4de^2f - 18abc^3e^2f + 3b^3c^2e^2f + 78a^2cd^3ef - 18ab^2d^3ef - 220abc^2d^2ef + \\
 & + 106b^3cd^2ef + 93ac^4def - 30b^2c^3def - 9bc^5ef - 27a^2d^5f + 93abcd^4f - \\
 & - 38b^3d^4f - 42ac^3d^3f + 8b^4c^2d^3f + 6bc^4d^2f - 2a^3e^5 + 15a^2bde^4 + 22a^2c^2e^4 - \\
 & - 54ab^2ce^4 + 27b^4e^4 - 48a^2cd^2e^3 + 3ab^2d^2e^3 + 106abc^2de^3 - 81b^3cde^3 - \\
 & - 38ac^4e^3 + 38b^2c^3e^3 + 18a^2d^4e^2 - 30abcd^3e^2 + 38b^3d^3e^2 + 8ac^3d^2e^2 + \\
 & + 25b^2c^2d^2e^2 - 57bc^4de^2 + 18c^6e^2 - 9abd^5e + 6ac^2d^4e - 57b^2cd^4e + 74bc^3d^3e - \\
 & - 24c^5d^2e + 18b^2d^5 - 24bc^2d^5 + 8c^4d^4 ;
 \end{aligned}$$

esso è il più comodo da trovarsi, ed ha 68 termini, mentre il discriminante

$$D_5 = (I_5^{(4)})^2 - 128 I_5^{(8)}$$

ne ha soltanto 59. Il $I_5^{(12)}$ calcolato dal predetto autore ha 232 termini, ma non si può garantire l'esattezza.

15. Se $n = 6$ le $E^{(6,1)} = 0$, $E^{(6,3)} = 0$, ecc. mostrano che non vi sono invarianti di grado dispari (ciò vale ogni qual volta n sia impari — pari). Poesia

$$E^{(6,2)} = 4 - 3 = 1, \quad E^{(6,4)} = 18 - 16 = 2, \quad E^{(6,6)} = 58 - 55 = 3,$$

$$E^{(6,8)} = 151 - 147 = 4, \quad E^{(6,10)} = 338 - 332 = 6, \quad E^{(6,12)} = 8, \text{ ec.}$$

gli invarianti primitivi $I_6^{(2)}$ di 4 termini, $I_6^{(4)}$ di 16 termini, e $I_6^{(6)}$ danno i seguenti numeri d'invarianti

$$B_1^{(3)} = 1, \quad B_2^{(3)} = 2, \quad B_3^{(3)} = 3, \quad B_4^{(3)} = 4, \quad B_5^{(3)} = 5, \quad B_6^{(3)} = 7, \text{ ecc.};$$

perciò vi dev'essere un invariante primitivo di 10^{mo} grado, il quale sarà quasi per certo il discriminante D_6 . Ritengo per vero che gli invarianti primitivi sieno tra loro indipendenti anche col mezzo delle loro potenze.

16. Quando $n = 8$ si ha

$$\begin{aligned}
 & E^{(8,2)} = 5 - 4 = 1, \quad E^{(8,3)} = 13 - 12 = 1, \quad E^{(8,4)} = 33 - 31 = 2, \\
 & E^{(8,5)} = 73 - 71 = 2, \quad E^{(8,6)} = 151 - 147 = 4, \quad E^{(8,7)} = 289 - 285 = 4, \\
 & E^{(8,8)} = 526 - 519 = 7, \quad E^{(8,9)} = 910 - 902 = 8, \\
 & E^{(8,10)} = 1514 - 1502 = 12, \quad E^{(8,11)} = 13, \quad E^{(8,12)} = 20,
 \end{aligned}$$

sicchè vi è un invariante primitivo per ciascuno dei gradi 2, 3, ..., 9, 10; infatti (veggasi il Corollario del § 4) $B_{p-2}^{(8,1)} + B_{p-4}^{(8,2)} + B_{p-6}^{(8,3)} + \text{ecc.}$ dà i numeri

$$1, 1, 1 + 1 = 2, 1 + 1 = 2, 1 + 2 + 1 = 4, 1 + 2 + 1 = 4, 1 + 3 + 2 + 1 = 7,$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8, \quad 1 + 4 + 4 + 2 + 1 = 12,$$

$$0 + 4 + 5 + 3 + 1 = 13, \quad 0 + 5 + 7 + 5 + 2 + 1 = 20,$$

che sono appunto i numeri precedenti. Continuando i calcoli si riconosce l'esistenza anche di un invariante primitivo di 14° grado; forse esso sarà il discriminante.

17. *Gli invarianti primitivi* per $n = 7$ sono uno di 4° grado, tre di 8°, ed altri 6 di 12° grado ecc. — Per $n = 9$ sono due di 4° grado, altri 5 di 8°, ecc. — Per $n = 10$ sono uno di 2° grado, uno di 4°, 4 di 6°, 5 di 8°, ecc. — Per $n = 11$ sono due di 4°, 10 di 8°, ecc. — Per $n = 12$ sono uno di 2°, uno di 3°, due di 4°, due di 5°, 5 di 6°, 5 di 7°, 8 di 8°, ec. — Per $n = 13$ sono due di 4°, ecc. — Per $n = 14$ sono uno di 2°, due di 4°, ecc.

18. *Quanti sono i covarianti primitivi della forma cubica?* Se p è il grado e μ l'indice del primo coefficiente $v^{(p,m)}$ del covariante $V^{(m,p)}$ d'ordine m si ha (Cenni ec. § 14) $m = 3p - 2\mu$ e il massimo indice contenuto in $v^{(m,p)}$ è 3. Il numero dei peninvarianti $v^{(p,m)}$ è dato (§ 10) da $E_{\mu}^{(n,p)}$, ora si ha $E_2^{(3,2)} = 1$, e siccome anche $E_2^{(2,2)} = 1$, così il primo covariante è dato da

$$v^{(2,2)} = a_2 a_0 - a_1^2.$$

Poichè $E_3^{(3,3)} = 1$ conduce a trovare

$$v^{(3,3)} = a_3 a_0^2 - 3a_2 a_1 a_0 + 2a_1^3.$$

Similmente $E_4^{(3,4)} = E_4^{(2,4)} = 1$ indica l'esistenza di un $v^{(4,4)}$ senza a_3 , il quale non può essere altro che $(v^{(2,2)})^2$, ed anche il covariante sarà $(V^{(2,2)})^2$, cioè non primitivo. La $E_5^{(3,5)} = 1$ dà un $v^{(5,5)}$ che è il prodotto $v^{(2,2)} \cdot v^{(3,3)}$. Abbiamo $E_6^{(3,6)} = 2$ e perciò due peninvarianti, uno dei quali sarà compreso in $E_6^{(3,5)} = E_6^{(3,4)} = 1$, e l'altro in $E_6^{(2,6)} = 1$, e perciò avremo un $v^{(4,0)}$, che è il discriminante, ed un $v^{(6,6)}$ che è il $(v^{(2,2)})^3$. La $E_7^{(3,7)} = 8 - 7 = 1$ indica il $v^{(7,7)} = (v^{(2,2)})^2 (v^{(3,3)})$. La $E_8^{(3,8)} = 2$ si riduce alle due

$$E_8^{(3,6)} = 8 - 7 = 1, \quad E_8^{(2,8)} = 5 - 4 = 1,$$

che mostrano l'esistenza di un peninvariante

$$v^{(6,2)} = v^{(4,0)} \cdot v^{(2,2)}, \quad \text{e di un} \quad v^{(3,8)} = (v^{(2,2)})^4.$$

Così abbiamo trovato $v^{(2,2)}$, $v^{(3,3)}$ ed il discriminante $v^{(4,0)}$, e credo che tutti gli altri dipendano dai loro prodotti, peraltro noi possiamo moltiplicarli per a_0^i , il che

ne accresce il grado di i e non ne muta l'indice μ ; dunque avremo pel primo coefficiente di ogni covariante della forma cubica le tre formule

$$a_0^i v^{(2,2)} = v^{(2+i, 2+3i)}, \quad a_0^i v^{(3,3)} = v^{(3+i, 3+3i)}, \quad a_0^i v^{(4,0)} = v^{(4+i, 3i)},$$

l'ultima delle quali è esprimibile col mezzo del cubo della prima e del quadrato della seconda.

NOTA

Ad ogni studioso della matematica si mostra la difficoltà ognora crescente di conoscere ciò che fecero gli altri; per supplire in qualche modo alla mancanza di opere generali, ed anche di repertorii od indici dei Giornali e degli Atti delle Accademie, io proporrei uno spediente. Ognuno che tratta un argomento indichi tutti gli Autori, che, per quanto egli ricorda, hanno pubblicato intorno al medesimo; chiunque altro scriva dello stesso oggetto ripeta quelle indicazioni aggiungendo le altre, che avrà potuto raccogliere; così continuando si potrà sperare che si mantenga la memoria di quanto fu trovato su ciascun argomento. Accompagno al consiglio l'esempio riguardo alla partizione dei numeri. — Eulero, *Introd. in anal. infin.* I. § 297. — *N. Comm. Acad. Petropolitanae* T. III. 1750 pag. 15, 125, et T. XIV. 1769 pag. 168. — Paoli, *M. Soc. Italiana* 1784. II. pag. 787. — *Petri Pauli Liburnensis Opusculum* II. — *Brunacci, Matem. subl.* I § 108. *Comp. del Calc. subl.* 1811. § 114. — *Lacroix, Traité Calc. diff. et int.* 1819. III. § 1193. — *Legendre, Th. des Nombres* 1830. II. pag. 128. — *Brianchon, J. Ec. polyt.* 1837. XXV. pag. 166. — *Catalan, J. Liouv.* 1838 III. pag. 111. — *Rodrigues, J. Liouv.* 1839. IV. p. 236. — *Jacob, J. Crelle* 1846. XXXII. p. 164. — *Stern, J. Crelle* 1840 XXI p. 91, 177. — *Sylvester, Ann. Tortol.* 1857. VIII p. 12. — *Quarterly, J.* 1855 p. 141. — *Brioschi, A. Tortol.* 1857. VIII. p. 5. — *Cayley, A. Tortol.* 1858 I. pag. 323.

Padova, Marzo 1859.