Die geometrische Construction als „Existenzbeweis“ in der antiken Geometrie.

Von

H. G. ZEUTHEN in Kopenhagen.

Die logischen Principien, welche die Mathematik zur exacten Wissenschaft gemacht haben, sind bekanntlich von den alten Griechen aufgestellt worden. Diese Principien waren so vollständig entwickelt, dass man in der Regel durch genauere Untersuchung und durch ein tieferes Eindringen einen vernünftigen Grund auch für dasjenige finden wird, was uns zuerst als eine überflüssige Vorsicht oder eine willkürliche Festsetzung erscheint. So lässt der genauere Infinitesimalbegriff uns in unserem Jahrhundert besser die logische Bedeutung des weitläufigen Exhaustionsbeweises verstehen, als es im vorigen Jahrhundert der Fall war.

Das, was ich hier zu erklären versuchen werde, ist eine andere Seite der antiken Geometrie. Wir haben von den Griechen die geometrische Construction geerbt. Namentlich solche Constructionen, die sich mittels Zirkel und Lineal ausführen lassen, dienen als vortreffliche Uebung in unseren Schulen und sind unentbehrlich für die Practiker. Die Griechen wandten aber die Construction in viel ausgedehnterem Maasse an, als wir zu thun pflegen, namentlich auch da, wo ihr practischer Nutzen ganz hinfällig ist. Was nützt es zum Beispiel mit Hülfe von Kegelschnitten eine Cubikwurzel zu bestimmen oder eine cubische Gleichung zu lösen? Man hat sich darüber gestritten, wie die Griechen solche Constructionen wirklich ausgeführt haben, ob sie sich die Kegelschnitte durch wirkliche Anfertigung von Kegeln oder durch Construction einer gewissen Anzahl von Punkten in der Ebene hergestellt haben. Die erste Methode würde ungeheuerlich sein, die zweite auch ziemlich beschwerlich und ungenau; von der Anwendung dieser Methoden findet sich auch in der That gar nichts in der überlieferten Litteratur. Ich aber glaube, dass man diese Construction mit Hülfe von Kegelschnitten im allgemeinen nicht practisch ausgeführt hat, sondern dass diese vielmehr — wie sie es auch für uns

sein können — ein theoretisches Mittel, ein Mittel zur Erweiterung der Erkenntniss waren. Dieselbe Bedeutung haben auch die einfacheren Constructionen in den streng wissenschaftlichen Werken, wenn man natürlich auch die practische Ausführung da nicht versäumte, wo sie wirklich von Nutzen war.

Um hierüber zur Sicherheit zu gelangen und gleichzeitig zu erfahren, welches denn die theoretische Bedeutung der Constructionen war, muss man sie von ihrem ersten Auftreten in Euclid an verfolgen. Man wird dann bestätigt finden, dass *die Construction mit dem dazu gehörigen Beweise für ihre Richtigkeit dazu diene, die Existenz desjenigen, was construirt werden sollte, sicher zu stellen.*

Die Constructionen werden bei Euclid durch die *Postulate* vorbereitet. In diesen werden die practischen Hülfsmittel, Zirkel und Lineal gar nicht genannt, es wird nur die Bestimmung der Geraden mittels zweier Punkte, des Kreises mittels Centrum und einer beiliegenden Strecke als Radius u. s. w. verlangt, es wird also die Existenz der so bestimmten Figuren gefordert. In den Definitionen wird gesagt, was ein gleichseitiges Dreieck ist; erst in Satz 1 wird mittels der Construction eines solchen bewiesen, dass es wirklich solche giebt. In Satz 2 wird diese Construction dazu benutzt, einen Kreis auch dann zu construiren, wenn der Radius zwar gegeben ist aber nicht vom Mittelpunkt ausgeht. Diese Construction hat kaum einen practischen Zweck haben können. Wenn man wirklich in einem solchen Falle den Kreis zeichnen wollte, benutzte man sicher den Zirkel ganz auf dieselbe Weise wie wir es thun würden. Der Zweck der von Euclid beschriebenen Construction ist nur der gewesen: in den Postulaten möglichst wenig zu fordern.

Die Bedeutung der Construction als Existenzbeweis tritt jedoch erst dann recht hervor, wenn man nicht dasjenige herstellen will, was zum weiteren Construiren nöthig ist, sondern dasjenige, was man nachher nur in Lehrsätzen benutzen will. Es zeigt sich z. B., dass Euclid es nicht wagt, den Mittelpunkt einer Strecke in einem *Beweise* (I, 16) zu benutzen, bevor er die Existenz dieses Punktes durch seine Construction (in I, 10) bewiesen hat.

Man könnte eine solche Vorsicht übertrieben nennen, wenn man nicht eine Erklärung für sie in dem Umstande fände, dass wenigstens in einem ähnlichen Falle eine solche Vorsicht den geometrischen Hülfsmitteln gegenüber durch die damaligen Verhältnisse wohl begründet war. Man führt die Entdeckung der irrationalen und incommensurablen Grössen auf die Pythagoreer zurück. Für die Griechen, die als Zahlen unmittelbar nur ganze Zahlen, indirect auch Brüche als Verhältnisse ganzer Zahlen, anerkannten, war das Verhältniss incommensurabler Grössen ein solches, das sich überhaupt nicht durch Zahlen ausdrücken

lies. Eine Zahl $\sqrt{2}$, die mit sich selbst multiplicirt 2 giebt, existirte für sie einfach gar nicht. Man half sich dadurch, dass man allgemeine Grössen durch Strecken darstellte, eine Darstellungsweise, die nichts über die Commensurabilität voraussetzt. Dies würde jedoch von gar keinem Nutzen sein, wenn man nicht die Existenz derjenigen Strecken bewies, welche die nicht existirenden arithmetischen Grössen vertreten sollten. Einen solchen Beweis hatte man in der Construction von $a\sqrt{2}$ als Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, oder als geometrisches Mittel zwischen a und $2a$.

Eben dieselben Gründe müssten dazu führen auch die Cubikwurzel geometrisch darzustellen und ihre Existenz durch geometrische Construction zu sichern. Da dies nicht durch Kreis und Gerade gelang, musste man andere Constructionen aufsuchen. Warum man dann die Kegelschnitte anderen, in mechanischer Beziehung besseren Constructionsmitteln vorzog, werden wir bald sehen.

Vorläufig gehe ich aber von diesen Constructionen, deren theoretische Bedeutung vor der jetzigen, mehr arithmetischen Grössenauffassung zurücktreten müsste, weiter zu anderen, wo die Bedeutung der Construction als Existenzbeweis der jetzigen Auffassung näher liegt, wie sie auch durch die Form der alten Sätze deutlich hervortritt. Es sind diejenigen Fälle, wo die Construction eine Möglichkeitsbedingung fordert, die zu beweisende Existenz also nur eine begrenzte ist. In solchen Fällen geben wir jetzt gewöhnlich an, wie die Construction auszuführen ist, wenn sie möglich ist, und suchen erst nachher durch eine Discussion zu erfahren, wenn dies der Fall ist. Anders verfahren die Alten, wenigstens in ihren synthetisch geordneten Lehrgebäuden. Es kommt erst ein *Lehrsatz* (Theorem), wo die *Nothwendigkeit* der Bedingung bewiesen wird. Dann kommt ein *Problem*: die Aufgabe, die Figur zu construiren, aber diese Aufgabe wird schon beim Aussprechen begrenzt durch den sogenannten *Diorismus*. Dieser beginnt mit den Worten: „Es muss aber“, und wiederholt dann die ganze Möglichkeitsbedingung, deren Nothwendigkeit schon im Theoreme bewiesen ist. Durch die Ausführung der Construction im so begrenzten Falle und durch den Beweis für ihre Richtigkeit, wird factisch bewiesen, dass die ausgesprochene Möglichkeitsbedingung auch *hinreichend* ist. Dass dies auch die Absicht war, geht daraus hervor, dass man immer schon bei der Stellung der Aufgabe die Begrenzung hinzufügt. Eine ausdrückliche Stellung ohne diese würde eine fehlerhafte Angabe sein, die glauben lassen müsste, dass die Lösung der Aufgabe immer möglich wäre.

Beispiele finden sich schon bei Euclid, der in I, 20 die Nothwendigkeit der Bedingungen beweist, welchen die Seiten eines Dreiecks unterworfen sind, und in I, 22 durch Construction des Dreiecks mit

so gegebenen Seiten beweist, dass dieselben Bedingungen hinreichend sind. Weiter wird im Buche VI durch das Theorem 27 und das Problem 28 auf dieselbe Weise bewiesen, dass die Möglichkeitsbedingung $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b$ für die — geometrisch ausgesprochene — Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ sowohl nothwendig als hinreichend ist. Hierher gehören aber auch die am weitesten gehenden Anwendungen der Kegelschnitte, welche auch in unseren Augen den Constructionen durch Kegelschnitte eine wichtige theoretische Bedeutung geben. Zwar bewundern wir im 5^{ten} Buche des Apollonius die Eleganz der Construction der Normalen von einem Punkte an einen Kegelschnitt mit Hülfe einer gleichseitigen Hyperbel. Ihren grössten Werth erhält diese Construction jedoch durch den Umstand, dass ihr Diorismus Kennzeichen liefert, wodurch sich entscheiden lässt, wie viele Normale von jedem Punkte der Ebene ausgehen. Fast noch wichtiger ist der Diorismus der archimedischen Gleichung

$$x^2 - ax^2 + b^2c = 0,$$

welcher sich in einem von Eutokius gefundenen, vielleicht von Archimedes herrührenden Manuscript findet. In geometrischer Fassung und Beweisführung enthält dieser Diorismus das, was wir jetzt die Discriminante der genannten Gleichung nennen, oder einfacher ausgesprochen, die Bestimmung des Maximums von $x^2(a-x)$. Auch hier dient die Construction zum Beweise dafür, dass die im Diorismus ausgedrückte Bedingung wirklich hinreichend ist. —

Die hier gegebene Erklärung der Bedeutung der geometrischen Construction in der antiken Geometrie wird bestätigt, und gleichzeitig nützlich, dadurch, dass sie uns andere Räthsel löst. Als ein solches Räthsel hat man oft das sogenannte 11^{te} Axiom, oder wie es nach den zuverlässigsten philologischen Untersuchungen heissen soll, *das 5^{te} Postulat Euclids* betrachtet. Früher hat man sich wohl meistens nur über die grosse Vorsicht gewundert, welche Euclid dazu brachte, sich nicht mit einem blossen Anschauungsbeweis zu begnügen, jetzt ist man wohl mehr erstaunt über den Scharfsinn, welchen er gezeigt hat durch die factische Anerkennung einer Nothwendigkeit, die erst den feinsten Köpfen unseres Jahrhunderts völlig klar geworden ist. Die vorhergehenden Betrachtungen werden aber erklären, dass die ausdrückliche Aufstellung der Forderung, und zwar unter den Postulaten, dem Euclid nicht so ausserordentlich fern liegen musste. Um durch Angabe von Constructionen mit Hülfe von Geraden und Kreisen die Existenz der zu construirenden Figuren sicher zu stellen, genügt es nicht, im voraus die Existenz der am einfachsten bestimmten Geraden und Kreise zu postuliren, sondern man muss auch die Existenz solcher Schnittpunkte, die weiter in der Construction zu benutzen sind, sicher

stellen. Für den Kreis geschieht dies dadurch, dass schon in der Definition gesagt ist, dass der Kreis eine Figur, die Kreisl Linie also eine geschlossene Curve ist; daraus entnimmt Euclid (in I, 12 und 22) die Gewissheit, dass sie eine andere Linie schneidet, wenn diese einen ausserhalb liegenden Punkt mit einem inneren verbindet. In einzelnen Fällen kann man auf ähnliche Weise aus dem Umstande, dass eine Gerade durch innere Punkte einer geschlossenen geradlinigen Figur geht, schliessen, dass sie eine Seite dieser Figur schneidet. Dieses benutzt Euclid im Beweise für I, 21. Das gelingt aber offenbar nur in ganz einzelnen Fällen. Es *musste* sich also bald die Nothwendigkeit herausstellen, die Existenz des Schnittpunktes zweier Geraden in anderen Fällen zu postuliren. *Das konnte* Euclid aber nur mit der Begrenzung, welche er und die ganze Menschheit bis auf die Gegenwart als unumgänglich nothwendig betrachtete, wie sie denn auch mit aller bewussten und unbewussten Erfahrung übereinstimmt. So entstand das 5^{te} Postulat, welches die Existenz des Schnittpunktes zweier Geraden fordert, mit der bekannten Begrenzung, welche sich ihm ganz ebenso anschliesst wie der Diorismus einem Problem.

Das andere Räthsel, das ich besprechen möchte, betrifft die ältere Darstellung der Kegelschnitte. Darüber berichtet Geminus, dass die Alten, das heisst die Vorgänger von Apollonius, nur gerade Kegel geschnitten und die Schnitte stets senkrecht zur Seite des Kegels geführt haben. Zu diesem Berichte stimmen durchaus die alten Benennungen der Ellipse, Parabel und Hyperbel als Schnitte des spitzwinkeligen, des rechtwinkeligen und des stumpfwinkeligen Kegels. Man darf ihn also keineswegs verwerfen, selbst dann nicht, wenn er Schwierigkeiten verursachen sollte. Solche Schwierigkeiten entstehen, wenn man ihn so versteht, als ob man überhaupt nicht vor Apollonius gewusst hätte, dass auch anders geführte Schnitte dieselben Curven liefern könnten. Einer solchen Auffassung widersprechen die Arbeiten von Archimedes, die nicht nur seine eigene Bekanntschaft mit anders geführten elliptischen Schnitten unmittelbar zeigen, sondern auch die Haupteigenschaften solcher Schnitte als allgemein bekannt voraussetzen. Die Bemerkungen von Geminus müssten alsdann auf parabolische und hyperbolische Schnitte beschränkt werden; von solchen findet Archimedes nämlich keine Gelegenheit zu sprechen, er zeigt aber auch keine Unkenntniss. Eine solche Begrenzung ist an und für sich misslich, da Geminus keinen solchen Unterschied macht, und ein sehr wesentlicher Theil der Schwierigkeiten würden doch bestehen bleiben. Es könnte zwar denkbar sein, dass man durch irgend einen Zufall anfangs nur die zu einer Seite senkrecht geführten Schnitte untersucht hätte. Dass man sich aber mehr als ein Jahrhundert mit den so hervorgebrachten Curven eingehend beschäftigt haben sollte,

ohne zu entdecken dass diese specielle Lage für die Darstellung der Curven ganz unwesentlich ist, würde ich mir nur dann vorstellen können, wenn sich ein Beweis führen lässt, der wesentlich leichter wird, wenn die Schnitte die genannte specielle Lage haben. Ein solcher Beweis ist, trotz der durch die Aeusserungen von Geminus gegebenen Anregungen, bis jetzt nicht gefunden, und in der überlieferten antiken Litteratur finden sich gar keine Ueberreste einer solchen Beweisführung. Im Gegentheil, alle Bestimmungen von Schnitten an Kegeln und an Flächen zweiter Ordnung, die sich bei Archimedes finden, deuten auf Vertrautheit, selbst auf ziemlich frühe Vertrautheit mit viel allgemeineren Betrachtungsweisen hin.

Ich habe schon früher gezeigt*), wie man die Angaben des Geminus verstehen muss um sie mit diesen Thatsachen in Uebereinstimmung zu bringen. Die vorhergehenden Betrachtungen erlauben mir aber diese Erklärung genauer zu präcisiren.

Die Entdeckung der Kegelschnitte war, wie schon bemerkt, an die Bestimmung der beiden mittleren Proportionalen geknüpft. Um diese Aufgabe geometrisch zu lösen musste man neue Curven ersinnen, da ihre Lösung durch Kreis und Gerade sich als unmöglich erwies. Am nächsten lag es, die Curven zu benutzen, die wir jetzt durch die Gleichungen

$$x^2 = ay, \quad xy = ab, \quad y^2 = bx$$

darstellen, da diese Gleichungen unmittelbar aus den Proportionen

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

hervorgehen. Nun würde man, um die Existenz dieser zwei Arten von Curven festzustellen, zwei neue Postulate brauchen, denn man konnte zwar Punkte solcher Curven construiren; ihre Aufeinanderfolge in einem continuirlichen Curvenzuge war aber ein wirkliches Postulat. Die Einführung eines solchen Postulates zu vermeiden, war also ein mathematisches Verdienst, und dieses erwarb sich Menäechmus, der zeigte, wie man die Curven als Kegelschnitte darstellen konnte. Die Continuität der Curven ward dann eine Folge derjenigen des Kreiskegels, und diese eine Folge derjenigen des Kreises, und letztere hatte man schon postulirt. Ebenso ging es mit Ellipsen und mit anderen Darstellungen der Parabel und Hyperbel als die hier genannten, welche bald zur Lösung anderer Aufgaben benutzt wurden.

Es kam also nicht so sehr darauf an, die verschiedenen Schnitte der Kegel zu finden, als vielmehr darauf, gewisse ebene Curven, die durch ihre Anwendungen eine grosse geometrische Bedeutung bekommen hatten, als Kegelschnitte darzustellen. Für diese Aufgabe konnte

*) Kegelschnitte im Alterthum, im 21. Abschnitte,

es bequem sein eine ganz bestimmte Constructionsmethode zu haben, eine solche, welche es erlaubte aus den Constantenbestimmungen der gegebenen Curve diejenige des dadurch gehenden Kegels unmittelbar zu erhalten. Dass dies eben der Fall ist, wenn man den Kegel als gerade und den Schnitt als senkrecht zur Seite geführt voraussetzt, habe ich am angeführten Orte gezeigt, wie denn auch die archimedische Benennung des halben Parameters als „Stück bis zur Axe“ dazu stimmt.

Auf diese Benutzung der Kegelschnitte, welche für die Griechen ursprünglich die Hauptsache war, passen also die Angaben von Geminus, und man darf deshalb daraus nicht schliessen, dass die Griechen die umgekehrte Aufgabe: verschiedene Schnitte eines gegebenen Kegels zu finden, nur im speciellen Falle, den er erwähnt, gelöst hätten.

Man versteht nun auch, dass man die Kegelschnitte allen anderen Curven vorzog, und dass man sie bei allen mit Hülfe von Kreis und Gerade nicht lösbaren Aufgaben, wo es überhaupt möglich war sie zu brauchen auch gebrauchen musste. Das ist einmal eine Folge von der genaueren Bekanntschaft mit den Kegelschnitten, die man sich nach und nach erworben hatte, zweitens aber auch davon, dass die Einführung der Kegelschnitte nach der Entdeckung des Menächmus kein neues Postulat erforderte.

Die Betrachtungen, die ich hier angestellt habe, finden sich zwar in meinen neuerdings erschienenen Vorlesungen*). Dort sind sie aber über viele Capitel zerstreut wegen der Verschiedenheit der Fragen, auf welche ich sie anwende, und dort werden sie in den verschiedenen Verbindungen betrachtet, in welchen diese Fragen auftreten. Ich habe es also für nützlich gehalten, sie hier zusammenzustellen, um ihre Uebereinstimmung unter sich besser hervortreten zu lassen**).

---

*) Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Kopenhagen, Høst & Sohn, 1895.

**) Dieser Aufsatz war zu einem Vortrage auf der Naturforscherversammlung zu Lübeck bestimmt, konnte aber wegen plötzlicher Erkrankung nicht gehalten werden.