Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe.

Par

Mr. P. A. NEKRASSOFF à Moscou.

J'ai en vue de présenter dans cet article l'exposition des propriétés du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Je n'expose principalement que mes recherches personnelles en citant, aux places convenantes, les travaux des auteurs qui en parlent, car depuis peu il a paru beaucoup d'articles concernant ce cas de rotation*), qui, entre autre, est caractérisé par le mouvement du centre de gravité d'après les règles du pendule sphérique.

Ce cas de rotation d'un solide autour d'un point fixe a été examiné déjà par Mr. W. Hess dans les *Mathematische Annalen* (volume 37,

*) Nous citons ici le tableau de ces articles russes.

Mr. P. A. Nekrassoff: 1) „Au sujet du problème de la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe“. (Recueil de mathématiques, t. XVI, 3^{ème} livraison, 1892, Moscou).

2) „De la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe“ (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. V, 1893, Moscou).

3) „Complément de l'article concernant la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe“. (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. VI, 1893, Moscou).

4) „Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe“. (Recueil de mathématiques, t. XVIII, 1895, Moscou).

Mr. N. E. Joukovsky: „Pendule loxodromique de Mr. Hess“ (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. V, 1893, Moscou). Cet article est imprimé encore dans „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung“ (III. 1893, p. 62—70).

Mr. B. C. Mlodzeievsky et Mr. P. A. Nekrassoff: „Des conditions de l'existence des mouvements asymptotiques périodiques dans le problème de Hess“ (Mémoires de la section physique de la société impériale des Amis des sciences naturelles, t. VI, 1893, Moscou).

Mr. J. A. Tchaplignin: „Au sujet du pendule loxodromique de Mr. Hess“ (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. VII, 1894, Moscou).

page 178—180). Dans l'ouvrage de Mr. Hess beaucoup de propriétés de ce mouvement sont restées inexplicées; principalement celles qui dépendent des particularités de l'équation plus compliquée de ce problème. Je suis parvenu à réduire l'intégration de cette dernière à celle de l'équation linéaire du deuxième ordre à coefficients uniformes doublement périodiques complexes. Par ce moyen le problème s'éclaircit à un tel point qu'il devient possible de se représenter assez complètement le tableau de la rotation et à réduire les calculs aux séries toujours convergentes et qui ont la simplicité permise par le problème. Ainsi on peut placer ce cas de rotation au nombre de ceux qui ont été examinés avec une attention plus profonde.

Au point de vue purement mathématique le cas de rotation que j'examine présente des particularités différentes. C'est à ces particularités qu'il faut attribuer l'avantage de l'emploi étendu des quantités complexes, dont les qualités géométriques se montrent très utiles dans l'exploration de ce cas, surtout combiné avec l'ainsi nommée *transformation linéaire* qui réduit les lignes droites et les cercles en cercles en conservant la similitude des parties infiniment petites. L'autre particularité du cas considéré consiste en ce que le problème est réduit ici non pas aux fonctions de temps uniformes comme dans les cas du mouvement examinés par Euler, Lagrange et Kovalevsky, mais aux fonctions multiformes.

§ 1.

Equations fondamentales; leurs intégrales algébriques.

En observant les conditions:

- (1) $y_0 = 0$, $A(B-C)x_0^2 = C(A-B)z_0^2$, $A > B > C$,
les équations du mouvement d'un solide pesant autour du point fixe O ,
amenées à la forme*):

$$(2) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = (B-C)qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', & \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\ B \frac{dq}{dt} = (C-A)rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\ C \frac{dr}{dt} = (A-B)pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, & \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma', \end{cases}$$

*) A , B et C sont les moments d'inertie par rapport aux axes principaux de l'inertie, tracés par le point fixe et pris comme axes des coordonnées x , y et z dans le solide; x_0 , y_0 , z_0 sont les coordonnées du centre G de gravité; p , q , r sont les projections de la vitesse de rotation autour d'un axe momentané sur les axes déjà nommés des coordonnées; γ , γ' , γ'' sont les cosinus des angles de ces axes avec la direction de la gravité. En plus on suppose que la masse M du solide et l'accélération g satisfont à la condition $Mg = 1$, ce qui, comme on le sait, ne limite que le choix des unités.

admettent, outre les trois intégrales algébriques:

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = l_0 = 1, \\ Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = l_1, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = l_2, \end{cases}$$

encore une quatrième intégrale de Mr. Hess, algébrique particulière

$$(4) \quad Ax_0p + Cz_0r = 0.$$

Avant de développer les conséquences auxquelles conduit la considération de l'intégrale particulière (4), fixons notre attention pour un instant sur une qualité remarquable des intégrales *générales*, qui est intéressante, entre autre, par ce qu'elle joint les conditions (1) et l'intégrale particulière (4) avec la méthode de Mme. Kovalevsky, exposée dans le § 1 de son mémoire, concernant le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe (*Acta Mathematica*, XII).

Si nous approfondissons avec Mme. Kovalevsky la recherche de tous les cas où les équations différentielles du problème admettent pour les fonctions p, q, r, γ, γ' et γ'' , qu'elles déterminent, des pôles, comme des points singuliers, avec la condition, que les coefficients des développements de ces fonctions en séries dans le domaine des pôles dépendent de *cinq* constantes arbitraires; il se trouvera parmi ces cas celui qui est caractérisé par les conditions (1). Ainsi, en exécutant les conditions (1) on peut satisfaire les équations (2) par des séries de la forme:

$$(5) \quad \begin{cases} p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^{n-1}, & \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^{n-2}, \\ q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^{n-1}, & \gamma' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^{n-2}, \\ r = \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^{n-1}, & \gamma'' = \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^{n-2}, \end{cases}$$

qui convergent dans un domaine de zéro et dont les coefficients contiennent *cinq* constantes arbitraires.

Il s'ensuit que le cas de Mr. Hess aurait pu être trouvé par les procédés de Kovalevsky, puisque ce cas est contenu dans ces équations et n'a été oublié par elle que par inadvertance*).

Renvoyant les lecteurs qui s'intéressent à cette application de la méthode de Kovalevsky aux articles de Mr. H. Appelroth**), qui

*) C'est justement par ce procédé que j'ai trouvé le cas de Mr. Hess et ce ne fut que plus tard que j'appris l'existence de son mémoire.

**) Mr. H. H. Appelroth: 1) „Par rapport au premier paragraphe du mémoire

renferment la démonstration de la propriété déjà nommée des intégrales générales du système (2) avec les conditions (1), je me bornerai à développer dans ce qui suit surtout le cas correspondant à l'intégrale particulière (4).

Malgré le caractère particulier de ce cas, le mouvement qui y correspond ne présente pas un degré de généralité moindre que dans les cas examinés par Euler, Lagrange et Kovalevsky. Effectivement en partant de l'intégrale particulière (4) nous perdons une constante arbitraire, mais à sa place nous gagnons une constante dans les quantités x_0, y_0, z_0, A, B et C , qui, se soumettant aux conditions (1), sont moins limitées que dans les cas de Euler, Lagrange et Kovalevsky.

Quant à la réalisation du cas que j'examine du mouvement d'un solide, il faut remarquer avant tout la possibilité de la construction du solide pour lequel les conditions (1) suffisent. Si l'on cherche dans le premier solide donné les points pour lesquels les moments principaux A, B et C et les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre G de gravité remplissent les conditions (1), nous trouverons une quantité innombrable de points remplissant la place géométrique représentée par deux lignes droites qui passent par le centre de gravité. Ces lignes droites sont perpendiculaires aux sections circulaires d'un ellipsoïde construit pour le centre de gravité. Cet ellipsoïde, rapporté aux axes principaux x', y', z' de l'inertie, est déterminé par l'équation :

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

où

$$a'^2 = \frac{A'}{M}, \quad b'^2 = \frac{B'}{M}, \quad c'^2 = \frac{C'}{M},$$

A', B', C' sont des moments d'inertie correspondant à ces axes. Cette conclusion a été faite par Mr. Tschapliguin. Il suffit de fixer l'un des points de deux droites nommées pour avoir un solide capable de reproduire le mouvement que j'examine. En appropriant ensuite ce corps de façon à pouvoir y exciter un mouvement dont les circonstances initiales correspondent à l'intégrale particulière (4), il faut avoir en vue que l'axe instantané doit se trouver pendant tout le temps de ce mouvement sur le même plan, déterminé par l'équation : $Ax_0x + Cz_0z = 0$. Si par conséquent il fallait donner au solide la forme d'un gyroscope, c'est justement dans ce plan que devrait être placé l'axe du gyroscope auquel on attache le fil pour le faire tourner.

Voici encore un moyen de réaliser le même mouvement du solide

de Sophie Kovalevsky" (Recueil de mathématiques, t. XVI, livraison 3^{ème}, 1892, Moscou). — 2) „Problème concernant la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe" (Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Moscou, section physico-mathématique, liv. 11, 1894).

examiné pour lequel l'intégrale (4) a de la valeur. Il faut ôter le solide donné de la position d'équilibre et le livrer à lui-même sans lui donner aucune vitesse initiale, de sorte qu'au commencement du mouvement $p = q = r = 0$. Avec ces conditions l'intégrale (4) se réalisera absolument. En même temps dans le deuxième des intégrales (3) la constante l_1 devient zéro, et la constante l_2 doit contenir l'inégalité $l_2 < 2q_0$, comme nous nous en convainquons au moyen de la troisième des expressions (3). Par conséquent ce moyen, qui est l'un des plus simples de ceux, qui réalisent le mouvement, appartenant au cas que j'examine, n'embrasse pas ce cas dans toute son étendue.

§ 2.

Réduction du problème à la recherche du mouvement de deux points remarquables.

Supposons que les conditions (1) ont lieu et que les circonstances initiales réalisent en même temps un mouvement pareil autour du point O , auquel correspond l'intégrale particulière (4).

Introduisons les désignations suivantes:

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = \frac{z_0}{q_0} \gamma - \frac{x_0}{q_0} \gamma'', & \eta = \gamma', & \zeta = \frac{x_0}{q_0} \gamma + \frac{z_0}{q_0} \gamma'', \\ v = \xi + \eta i, \\ q_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}, & i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Il est évident que η , ξ et ζ sont les cosinus des angles de la direction OV de la gravité avec les trois lignes suivantes (réciproquement perpendiculaires: 1) à l'axe y de l'inertie, auquel correspond le moment B et qui est représenté sur la figure 1 par la ligne $O\eta$, 2) à la ligne $O\xi$, qui passe par le centre de gravité G , et 3) à la ligne $O\zeta$, perpendiculaire au plan $\eta O\xi$. D'ailleurs la quantité complexe $v = \xi + \eta i$, qui joue dans le problème un rôle principal, est représentée sur le plan $\eta O\xi$ par le point v (figure 1). Ce point coïncide avec la projection sur le plan du point V , qui sépare dans la direction de la gravité le segment OV égal à 1.

Fig. 1.

Si nous représentons la sphère O , décrite du centre O par le rayon 1, et si nous prenons le plan $\xi O \eta$ pour le plan de son équateur, l'amplitude Φ de la quantité v , représentée par l'angle $v O \xi$, sera la longitude du point V , et l'angle $\theta = V O G$, dont le cosinus est ξ , sera le *complément de la latitude* du point V jusqu'à l'angle droit.

Après avoir éliminé des équations (2), (4) et (6) les fonctions r , γ , γ' et γ'' , nous trouverons les équations différentielles suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = \frac{A(C-B)x_0}{Cz_0} p q - z_0 \eta, \\ B \frac{dq}{dt} = \frac{A(A-C)x_0}{Cz_0} p^2 + q_0 \xi, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{(C-A)x_0}{Cq_0} p \eta - q \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{Aq_0}{Bz_0} p \xi - \frac{(C-A)x_0}{Cq_0} p \xi, \\ \frac{d\xi}{dt} = q \xi - \frac{Aq_0}{Bz_0} p \eta. \end{cases}$$

Les trois intégrales connues de ces équations, obtenues par les équations (3), sont :

$$(8) \quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l_0 = 1, \\ \frac{Aq_0}{z_0} p \xi + B q \eta = l_1, \\ \frac{A^2 q_0^2}{B z_0^2} p^2 + B q^2 - 2 q_0 \xi = l_2. \end{cases}$$

Par ces équations nous trouvons :

$$(9) \quad \begin{cases} q = \frac{l_1 \eta + \xi R}{B(1-\xi^2)}, \quad p = \frac{z_0(l_1 \xi - \eta R)}{A q_0(1-\xi^2)}, \\ \eta = \pm \sqrt{1-\xi^2-\zeta^2}, \quad R = \pm \sqrt{B(1-\xi^2)(l_2 + 2 q_0 \xi) - l_1^2}. \end{cases}$$

Après avoir introduit les quantités p , q et η dans la dernière des équations (7), nous obtiendrons l'équation :

$$(10) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{R}{B},$$

qui conduit à la nouvelle intégrale des équations (7) qui dépend des fonctions elliptiques, précisément :

$$(11) \quad t + l_3 = B \int \frac{d\xi}{R}.$$

La troisième et la quatrième des équations (7) sont amenées au moyen des équations (9) à la forme :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{(a\xi - \xi)l_1 \eta - (a\eta^2 + \xi\xi)R}{B(1-\xi^2)}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{(l_1 \xi - \eta R)(\xi - a\xi)}{B(1-\xi^2)}, \end{cases}$$

où

$$(13) \quad a = \frac{B(C-A)x_0 z_0}{AC\varrho_0^2}.$$

A l'aide de la deuxième des conditions (1) le carré de la quantité a est exprimé au moyen des moments A, B et C de la façon suivante:

$$(13') \quad a^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{AC};$$

le signe de la quantité a est opposé au signe du produit $x_0 z_0$.

Après avoir multiplié la deuxième des équations (12) par $i = \sqrt{-1}$ et après avoir additionné ensuite ces équations, nous obtenons:

$$(14) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{(R-l_1 i)(av-2\xi)v}{2B(1-\xi^2)} - \frac{a(l_1 i + R)}{2B},$$

où v est déterminé par l'une des équations (6).

Le mouvement du solide que j'examine est entièrement déterminé par le mouvement de deux points: 1) par le mouvement du centre de gravité G relativement à l'espace immobile et 2) par le mouvement du point v qui détermine à son tour la translation du point V et du segment OV dans leur mouvement relatif dans le solide.

Le mouvement du point G se détermine par le changement de deux angles: 1) par l'angle θ entre la direction de la gravité OV et la ligne OG , 2) par l'angle ψ entre la ligne donnée immobile et horizontale OP et la ligne mobile horizontale ON , située dans le plan $\xi O\eta$ (Fig. 1). Ce mouvement du point G qui s'exprime au moyen des fonctions elliptiques du temps t , déterminées par l'équation (10), se produit d'après les règles du pendule sphériques (voyez l'article de Mr. N. E. Joukovsky).

La détermination du mouvement du point v , représentant une quantité complexe, qui satisfait à l'équation (14), est réduite par une transformation, désignée plus loin, à la recherche de l'équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques uniformes.

§ 3.

Mouvement du centre de gravité G d'après la règle du pendule sphérique.

L'équation (10), qui détermine le cosinus ξ de l'angle $\theta = VOG$, montre que cet angle change dans un ordre qui correspond au mouvement du point pesant G d'après la règle du pendule sphérique avec la tension d'un poids égal à $\varrho_0^2 : B$. Par conséquent la tension réelle du poids

$$g = \frac{1}{M}$$

change par rapport à $M\varrho_0^2 : B$.

Afin que le mouvement que j'examine soit possible, il est nécessaire de satisfaire à quelques conditions. Ce que nous devons considérer avant tout.

La quantité ξ , comme cosinus de l'angle $\theta = \angle OVG$, doit satisfaire les conditions:

$$(15) \quad -1 < \xi < +1,$$

et la quantité dérivée $\frac{d\xi}{dt}$ doit être une quantité réelle et par conséquent l'inégalité

$$(16) \quad R^2 > 0$$

doit avoir lieu.

Supposons

$$f(\xi) = R^2$$

et remarquons que

$$f(-\infty) > 0, \quad f(-1) < 0 \text{ et } f(+1) < 0,$$

nous nous convainquons que les conditions (15) et (16) ne peuvent pas être remplies autrement que si l'équation $f(\xi) = 0$ a trois racines réelles et si l'une d'elles ξ_1 se place entre $-\infty$ et -1 , et les deux autres ξ_2 et ξ_3 se placent entre -1 et $+1$. Les inégalités:

$$(17) \quad \xi_0 < -1 \text{ et } \Delta > 0$$

doivent exister pour que l'exécution de ces conditions soit possible. Dans ces inégalités

$$(18) \quad \begin{cases} \xi_0 = -\frac{l_2}{2\varrho_0}, & \Delta = g_2^3 - 27g_3^2, \\ g_2 = \left(\frac{12\varrho_0^2 + l_2^2}{3\varrho_0}\right) \sqrt[3]{\frac{B^2}{4\varrho_0}}, \\ g_3 = l_1^2 - \frac{2l_2B}{3} + \frac{l_2^3B}{54\varrho_0^2}. \end{cases}$$

Supposons que les conditions (17) sont remplies de sorte que les trois racines ξ_1, ξ_2, ξ_3 du polynome $f(\xi) = R^2$ soient réelles et se placent d'après la quantité dans l'ordre suivant:

$$(19) \quad \xi_1 < -1 < \xi_2 < \xi_3 < +1.$$

En même temps les inégalités suivantes

$$(20) \quad \xi_1 < \xi_0 < \xi_2$$

auront lieu et la quantité ξ varie entre les limites:

$$(21) \quad \xi_2 \leq \xi \leq \xi_3.$$

Choisissons le commencement du temps t de façon que pour $t=0$ la quantité ξ coïncide avec ξ_2 . Au moyen de cette condition nous trouvons d'après l'équation (10) que:

$$(22) \quad t = B \int_{\xi_2}^{\xi} \frac{d\xi}{R}.$$

Comme pendant la croissance de t en partant de zéro la quantité ξ doit grandir en partant de ξ_2 , le radical R doit être pris avec le signe $+$, tant que ξ n'atteint pas sa plus grande valeur ξ_3 .

Transformons ensuite les variables ξ et t dans le but d'exprimer la quantité ξ et les autres quantités, qui y sont liées, au moyen des formes normales des fonctions elliptiques. Nous supposons que:

$$(23) \quad \xi = -y \sqrt[3]{\frac{2}{B e_0}} - \frac{l_2}{6 e_0}, \quad t = B \tau \sqrt[3]{\frac{2}{B e_0}}.$$

Après la transformation nous aurons:

$$(24) \quad \tau = \int_y^{e_2} \frac{dy}{R}.$$

$$(25) \quad R = \sqrt[4]{4y^3 - g_2 y - g_3} = \sqrt[4]{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}.$$

Ici les quantités g_2 et g_3 sont déterminées par les expressions (18). Les quantités e_0, e_1, e_2 et e_3 sont liées aux quantités déjà nommées ξ_0, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 par les équations

$$\xi_k = -e_k \sqrt[3]{\frac{2}{B e_0}} - \frac{l_2}{6 e_0}, \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

Il s'ensuit d'après cette forme et d'après les inégalités (19), (20) et (21) que:

$$(26) \quad e_1 > e_0 > e_2 \geq y \geq e_3.$$

Supposons

$$(27) \quad T = \int_y^{\infty} \frac{dy}{R},$$

et suivons les indications, adoptées dans le livre de Halphen «Traité des fonctions elliptiques». Nous obtiendrons:

$$(28) \quad y = \wp T, \quad R = -\wp' T.$$

La période réelle et la période imaginaire de ces fonctions seront:

$$(29) \quad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dy}{R} \quad \text{où} \quad \omega' = \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dy}{R}$$

et en même temps:

$$(30) \quad \int_{e_2}^{\infty} \frac{dy}{R} \equiv \omega + \omega'^*.$$

*) Les quantités, liées par le signe $\equiv$, ne peuvent différer les unes des autres que par des nombres entiers des périodes 2ω et $2\omega'$.

Il s'ensuit de cette formule et des inégalités (24) et (27), que
(31) $T \equiv \tau + \omega + \omega'$

et que

$$(32) \quad y = \wp(\tau + \omega + \omega') \quad \text{et} \quad R = -\wp'(\tau + \omega + \omega').$$

Malgré la présence de la quantité imaginaire ω' dans ces expressions, les fonctions y et R restent des quantités réelles et s'expriment par les formules suivantes, qui ne contiennent pas de quantités imaginaires*):

$$(33) \quad \begin{cases} y = \wp T = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{(\wp \tau - e_2)}, \\ R = -\wp' T = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)\wp' \tau}{(\wp \tau - e_2)^2}. \end{cases}$$

En outre nous avons les formules suivantes*):

$$(34) \quad \wp(\omega + \omega') = e_2, \quad \wp \omega' = e_3.$$

Ces expressions ainsi que celles de (32) montrent, qu'avec le changement du temps τ de 0 jusqu'à ω la quantité y diminue de e_2 jusqu'à e_3 (en même temps la quantité ξ augmente de ξ_2 jusqu'à ξ_3 et $R > 0$); avec la variation ultérieure du temps τ de ω jusqu'à 2ω la quantité y va croissant de e_3 jusqu'à e_2 (en même temps la quantité ξ va diminuant de ξ_3 jusqu'à ξ_2 et $R < 0$).

Ainsi la fonction y passe dans les moments $2m\omega$ et $(2m+1)\omega$, où m est un nombre entier, par le maximum e_2 et le minimum e_3 ; la quantité dérivée $\frac{dy}{d\tau}$ passe dans les mêmes moments par zéro (car $\wp'(\omega + \omega') = 0$ et $\wp' \omega' = 0$) et change de signe.

En passant à la définition de l'angle ψ qui se trouve entre la ligne horizontale immobile OP (Fig. 1) et la ligne horizontale mobile ON , située dans le plan $\xi O \eta$, nous déterminerons d'abord les composantes Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 de la vitesse de rotation du solide autour de l'axe instantané sur les axes $O\xi$, $O\eta$ et $O\xi$. Ces composantes seront évidemment:

$$(35) \quad \Omega_1 = \frac{z_0}{e_0} p - \frac{x_0}{e_0} r, \quad \Omega_2 = q, \quad \Omega_3 = \frac{x_0}{e_0} p + \frac{z_0}{e_0} r.$$

L'équation (4) est réduite, après l'élimination de p et de r , à la forme suivante,

$$(36) \quad \Omega_3 - a\Omega_1 = 0.$$

Si nous nous entendons par Φ l'angle $\nu O\xi$, qui représente la longitude du point V (ou, autrement, une signification de l'amplitude de la quantité $\nu = \xi + i\eta$) et qui complète l'angle $NO\xi$ à l'angle droit, nous obtiendrons:

*) Halphen, t. I, p. 37.

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \sin \theta \cos \Phi \cdot \frac{d\psi}{dt} + \sin \Phi \cdot \frac{d\theta}{dt}, \\ \Omega_2 &= \sin \theta \sin \Phi \cdot \frac{d\psi}{dt} - \cos \Phi \cdot \frac{d\theta}{dt}, \\ \Omega_3 &= \cos \theta \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\Phi}{dt}.\end{aligned}$$

Après avoir rectifié les expressions Ω_1 et Ω_3 dans l'équation (36), nous trouvons :

$$(37) \quad (\cos \theta - a \sin \theta \cdot \cos \Phi) \frac{d\psi}{dt} - a \cdot \sin \Phi \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Nous savons que les cosinus des angles des axes mobiles $O\xi$, $O\eta$ et $O\xi$ avec les axes immobiles OP , OQ , OV s'expriment (au moyen des formules connues de Euler) par trois angles Φ , ψ et θ , nous trouvons pour les cosinus ξ , η et ζ les expressions suivantes :

$$(38) \quad \begin{cases} \xi = \cos \Phi \cdot \sin \theta, \\ \eta = \sin \Phi \cdot \sin \theta, \\ \zeta = \cos \theta. \end{cases}$$

Ces expressions ne renferment pas du tout l'angle ψ . Après les avoir substituées dans la première des équations (12) nous trouvons :

$$(39) \quad -\sin \theta \frac{d\Phi}{dt} = \frac{l_1(a \sin \theta \cdot \cos \Phi - \cos \theta)}{B \sin \theta} + a \sin \theta \cdot \sin \Phi \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Cette équation équivaut à l'équation (14).

En éliminant des équations (37) et (39) la dérivée $\frac{d\Phi}{dt}$, nous trouvons :

$$(40) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{l_1}{B \sin \theta} = \frac{l_1}{B(1-\xi^2)}.$$

L'expression (40) montre que l'angle ψ change aussi avec le mouvement du point G d'après la loi du pendule sphérique. Comme cette loi a été suffisamment étudiée par d'autres auteurs nous ne retiendrons pas plus longtemps l'attention du lecteur sur le mouvement du point G .

§ 4.

Propriétés de rotation du point v , caractérisées par les changements périodiques de ξ . Equation linéaire différentielle aux coefficients doublement périodiques uniformes, déterminant le mouvement du point v .

Ses intégrales multiformes.

Dans la détermination de rotation d'un solide un rôle important est joué non seulement par le point G , mais aussi par le point v , qui représente la quantité $v = \xi + i\eta$, déterminée par l'expression (14).

La position du point v sur le plan $\xi O \eta$ détermine la position correspondante du point V , qui est projeté sur le plan $\xi O \eta$ dans le point v , retranchant dans la direction de la gravité le segment $OV = 1$. Quand le point v se mouve dans le plan $\xi O \eta$, le point correspondant V se mouve relativement au solide examiné dans la sphère O , décrite du centre O par un rayon égal à 1.

Voilà pourquoi nous prendrons le point V pour représenter la quantité complexe $v = \xi + i\eta$ sur cette sphère O .

Le module de $v = \xi + i\eta$ s'exprime ainsi:

$$|v| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Par conséquent le point v , représentant sur le plan $\xi O \eta$ la quantité $v = \xi + i\eta$, doit se trouver sur la circonférence E , décrite du centre O par le rayon

$$r = \sqrt{1 - \zeta^2},$$

et le point correspondant V , représentant la même quantité sur la sphère O , doit être situé sur la circonférence F , qui se trouve dans l'intersection de cette sphère avec un plan parallèle au plan $\xi O \eta$ et à la distance de ζ du point O .

Comme ζ est une fonction périodique avec la période 2ω relativement au temps τ et en plus *paire*, le point V doit prendre place sur la même circonférence F non seulement au moment τ , mais aussi à chacun des moments:

$$\pm \tau \pm 2m\omega,$$

où m est un nombre entier. Le point v correspondant doit aux mêmes moments prendre place sur la même circonférence E .

Examinons les limites dans lesquelles se déplace la circonférence F , pendant le changement continu de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. La fonction ζ étant paire, les déplacements de la circonférence F dans les intervalles depuis $-\omega$ jusqu'à 0 et de 0 jusqu'à $+\omega$ se produisent d'après la même loi, mais dans un ordre inverse, de sorte qu'il suffit d'examiner le mouvement de la circonférence F dans l'intervalle de 0 jusqu'à $+\omega$. Dans cet intervalle la circonférence F passe sans interruption de la position la plus élevée F_2 , qui se trouve à la distance de ξ_2 du point O , à la position la plus basse F_3 , qui se trouve à la distance de ξ_3 du point O^*). Ainsi avec le changement du temps τ la circonférence F change périodiquement de place à l'intérieur de la zone sphérique, enfermée dans les cercles parallèles F_2 et F_3 .

*) Dans le solide donné le haut et le bas sont déterminés comme les directions positive et négative de l'axe $O\xi$ (Fig. 1).

Puisque la circonférence E est la projection de la circonférence F sur le plan $\xi O\eta$, les translations de la circonférence E sont faciles à reconnaître par les déplacements de la circonférence F , et vice-versa. Il faut faire cependant quelques remarques par rapport à la position et à la translation de la circonférence E .

Si $l_1^2 < Bl_2$, nous aurons: $\xi_2 < 0 < \xi_3$. Dans ce cas les cercles parallèles F_2 et F_3 sont disposés de côtés différents de l'équateur E_0 (section de la sphère O par le plan $\xi O\eta$). Afin de distinguer dans ce cas pour les deux positions différentes de la circonférence F , situées à une distance égale du centre O , les positions correspondantes coïncidentes de la circonférence E , nous distinguerons *deux côtés* du plan $\xi O\eta$: le côté de *l'endroit* et de *l'envers* et nous dessinerons sur ce plan la circonférence E du côté où est située la circonférence F correspondante. De cette façon la circonférence E seule, dessinée du côté correspondant du plan $\xi O\eta$, correspondra à la position donnée de la circonférence F , et vice-versa. Quand, avec le changement du temps τ , la circonférence F passe par l'équateur E_0 d'un hémisphère à l'autre, la circonférence E passe par la même circonférence E_0 d'un côté du plan $\xi O\eta$ à l'autre.

Si $l_1^2 \geq Bl_2$, nous avons: $0 < \xi_2 < \xi_3$. Dans ce cas les sections F_2 et F_3 se trouvent à un seul et même côté de l'équateur E_0 , et par conséquent il n'y a aucune nécessité d'examiner la translation de la circonférence E d'un côté du plan $\xi O\eta$ sur l'autre (sur l'inverse).

Ainsi la circonférence E balance toujours périodiquement dans une surface plane à forme d'anneau [de deux côtés (avec $l_1^2 < Bl_2$) ou d'un côté (avec $l_1^2 \geq Bl_2$)], enfermée entre les circonférences E_2 et E_3 . On doit toujours prendre la position initiale du point v (avec $\tau = 0$) sur la circonférence E_2 . Puis avec le cours du temps τ le point v doit se mouvoir dans la surface à forme d'anneau désignée, se trouvant sur la circonférence E .

Remarquons encore qu'il dérive des corrélations $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi_0$ et des inégalités (20) que $\xi_2 + \xi_3 > 0$. Donc dans tous les cas $\xi_2^2 < \xi_3^2$, c. à d. que la section F_2 est toujours plus rapprochée du centre O que la section F_3 .

Convenons de donner le nom de *pôles* de la sphère O à ses points d'intersection avec l'axe OZ . Il n'est pas difficile de remarquer que la zone sphérique, enfermée entre les circonférences F_2 et F_3 , n'atteint les pôles de la sphère O que suivant la condition $l_1 = 0$, quand l'équation $R^2 = 0$ a les racines $+1$ et -1 . Dans les autres cas cette zone sphérique n'atteint jamais les pôles de la sphère O .

Passant à l'équation (14), remplaçons y et t par les variables déjà nommées η et τ , pour lesquelles les expressions (23), (32) et (33) ont lieu, et ensuite transformons cette équation (14) en supposant que:

$$(41) \quad v = \frac{-1}{2a} \sqrt[3]{\frac{2}{B e_0}} \left(\frac{\wp' T - e_0}{\wp T - e_0} \right) \frac{d \lg w}{d \tau} \\ = \frac{-1}{2a} \sqrt[3]{\frac{4}{B^2 e_0^2}} \left(\frac{R + l_1 i}{\xi - \xi_0} \right) \frac{d \lg w}{d \tau},$$

où

$$e_0' = + l_1 i$$

et

$$(41') \quad T = \tau + \omega + \omega'.$$

Nous obtiendrons après la transformation l'équation linéaire:

$$(42) \quad \frac{d^2 w}{d \tau^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\wp' T - e_0}{\wp T - e_0} \right) \frac{dw}{d \tau} + a^2 (\wp T - e_0) w = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques, renfermant la quantité imaginaire e_0' .

Remarquons que les quantités e_0 et e_0' peuvent être désignées ainsi:

$$(43) \quad e_0 = \wp T_0 \quad \text{et} \quad e_0' = \wp' T_0,$$

où

$$(43') \quad T_0 = \omega + \omega' + \tau_0 = \omega + \omega' + \sqrt{-1} \int_{e_0}^{\infty} \frac{dy}{V \pm (e_1 - y)(y - e_2)(y - e_3)}.$$

En considérant les points singuliers des intégrales de l'équation (42), nous voyons que ces coefficients se transforment en quantités infinies dans deux cas: 1) quand $\tau \equiv -\tau_0$ et 2) quand $\tau \equiv -\omega - \omega'$. Par suite d'un examen plus minutieux nous voyons que les points singuliers des intégrales de l'équation (42) ne coïncident qu'avec les points de la deuxième catégorie, c. à. d. avec les points $\tau \equiv -\omega - \omega'$; dans le domaine de chaque point $\tau \equiv -\tau_0$ les intégrales restent des quantités finies, continues et uniformes.

Les points singuliers des intégrales de l'équation (42) représentent sur le plan du variable τ les quantités de la forme:

$$2m\omega + 2m'\omega' - \omega - \omega',$$

où m et m' sont des nombres entiers. Ces points sont situés aux sommets des angles droits, formés par deux systèmes de lignes parallèles: le premier système est formé par les lignes parallèles à l'axe de l'ordonnée qui passent par les points:

$$\omega + 2m\omega, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

le second système est formé par les lignes parallèles à l'axe des abscisses (à l'axe de quantités réelles) qui passent par les points:

$$\omega' + 2m'\omega', \quad (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Cette régularité géométrique dans la disposition des points singuliers des intégrales de l'équation (42) présente l'une des propriétés essentielles de l'équation (42) et conduit elle même à des conclusions importantes.

Si nous supposons sur le plan du variable τ un cercle, décrit autour d'une rectangle, par les sommets duquel sont représentées les quantités:

$$\omega + \omega', -\omega + \omega', -\omega - \omega', \omega - \omega'$$

(Fig. 2), dans l'intérieur de ce cercle il n'y aura pas de points singuliers des intégrales de l'équation (42). Par conséquent les intégrales de l'équation (42) doivent se développer par degrés entiers et positifs de τ en séries qui convergent dans le domaine de ce cercle.

Les formes fondamentales de ces séries sont examinées plus bas. Maintenant nous remarquerons seulement que ces séries peuvent servir pour le calcul des résolutions de l'équation (42) quand le temps τ varie entre les limites de convergence

$$-\sqrt{\omega^2 + (\omega' i)^2} \text{ et } +\sqrt{\omega^2 + (\omega' i)^2}.$$

Fig. 2.

Ces limites de convergence satisfont au-delà des traitons du problème de mécanique que nous examinons. Effectivement il suffit pour étudier le mouvement, que nous explorons, de savoir calculer les résolutions des équations (42) au moyen des séries désignées avec le changement de τ seulement dans les limites moins larges, c. à d. $-\omega$ et $+\omega$; car on peut toujours réduire les calculs à ces limites à l'aide des *substitutions linéaires* correspondantes aux suppléments des périodes entières 2ω .

Nous trouvons nécessaire de donner des à présent la forme générale des substitutions linéaires de ce genre, qui jouent un rôle essentiel dans le problème*).

Si $w_1\tau$ et $w_2\tau$ présentent deux résolutions diverses particulières de l'équation (42), $w_1(\tau + 2\omega)$ et $w_2(\tau + 2\omega)$ doivent posséder la même propriété et par conséquent il doit exister les corrélations:

$$(44) \quad \begin{cases} w_1(\tau + 2\omega) = \kappa w_1\tau + \lambda w_2\tau, \\ w_2(\tau + 2\omega) = \mu w_1\tau + \nu w_2\tau, \end{cases}$$

où κ , λ , μ et ν sont des coefficients constants. Pour faire le calcul de ces coefficients nous pouvons admettre dans les expressions (44) et dans le résultat de leur différentiation que $\tau = -\omega$ et nous obtiendrons alors le système suivant des équations:

*) Dans l'article présent nous ne parlons pas des substitutions qui correspondent aux suppléments de la période imaginaire $2\omega'$; ces substitutions peuvent avoir une signification grave dans la théorie générale de l'équation (42), mais elles n'ont pas de rapport immédiat avec le problème mécanique.

$$(45) \begin{cases} w_1 \omega = \kappa w_1(-\omega) + \lambda w_2(-\omega), & w_2 \omega = \mu w_1(-\omega) + \nu w_2(-\omega), \\ w_1' \omega = \kappa w_1'(-\omega) + \lambda w_2'(-\omega), & w_2' \omega = \mu w_1'(-\omega) + \nu w_2'(-\omega). \end{cases}$$

Puisque les développements des fonctions $w_1 \tau$ et $w_2 \tau$ par les degrés de τ doivent se converger avec $\tau = \pm \omega$, les quantités $w_1(\pm \omega)$, $w_1'(\pm \omega)$, $w_2(\pm \omega)$ et $w_2'(\pm \omega)$, faisant partie des équations (45), peuvent être calculées à l'aide de ces développements; puis les coefficients κ , λ , μ et ν peuvent être déterminés d'après les équations (45).

Plus bas nous aurons lieu d'examiner de différents côtés les propriétés des coefficients κ , λ , μ et ν de la substitution, déterminée par les expressions (44) et qui donne la possibilité de calculer les fonctions $w_1(\tau + 2m\omega)$ et $w_2(\tau + 2m\omega)$ avec un nombre m entier quelconque, si les fonctions $w_1 \tau$ et $w_2 \tau$ avec le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$ sont connues.

Terminons ce paragraphe par l'explication d'une propriété analytique des intégrales *générales* des équations (2) d'après les conditions (1), laquelle propriété se trouve liée au développement des intégrales de l'équation (42) en séries infinies, convergente dans le domaine des points singuliers que nous avons nommés plus haut.

Ayant remarqué que

$$\wp T = \frac{1}{T^2} + \frac{g_2}{20} T^2 + \frac{g_3}{28} T^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} T^6 + \frac{3g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} T^8 + \dots,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\wp' T - \wp' T_0}{\wp T - \wp T_0} \right) = \xi(T + T_0) - \xi T_0 - \xi T,$$

$$\xi T = \frac{1}{T} + \int_0^T \left(\frac{1}{T^2} - \wp T \right) dT$$

(Halphen, «Traité des fonctions elliptiques» t. I, p. 136—138), nous obtenons dans le domaine du point singulier $\tau = -\omega - \omega'$ les développements suivants de deux intégrales indépendantes particulières de l'équation (42):

$$(46) \quad \begin{cases} w_1 = T^{+ai}(1 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3 + \dots), \\ w_2 = T^{-ai}(1 + c_1' T + c_2' T^2 + c_3' T^3 + \dots), \end{cases}$$

où

$$T = \tau + \omega + \omega',$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{-ai\wp T_0}{4}, \quad c_3 = \frac{-ai\wp' T_0}{6(3+2ai)} + \dots,$$

$$c_1' = 0, \quad c_2' = \frac{+ai\wp T_0}{4}, \quad c_3' = \frac{+ai\wp' T_0}{6(3-2ai)} + \dots$$

On obtient les développements qui sont convergents dans le domaine du point singulier $\tau = 2m\omega + 2m'\omega' - \omega - \omega'$, en remplaçant la quantité T dans les formules (46) par la quantité

$$T - 2m\omega - 2m'\omega'.$$

Comme a est une quantité réelle, différente de zéro, nous voyons des expressions (46) que les intégrales de l'équation (42) doivent être des fonctions *multiformes* du variable τ . D'ailleurs d'après l'expression (41), dans laquelle on doit supposer que :

$$w = w_1 + l_4 w_2,$$

où l_4 est une constante, nous voyons que la fonction v et, par conséquent, les fonctions p, q, r, γ, γ' et γ'' , ayant l'arbitraire l_4 , sont aussi des fonctions multiformes du variable τ ou du temps t .

Si partant de l'intégrale particulière (4) nous sommes parvenus à des fonctions multiformes, les intégrales *générales* des équations (2) suivant les conditions (1) conduiront à plus forte raison aux fonctions multiformes p, q, r, γ, γ' et γ'' du temps t . Ce résultat est conforme au résultat de Mme. Kovalevsky, qui affirme que les cas examinés par Euler, par Lagrange et par elle même sont les *uniques*, dans lesquels les quantités p, q, r, γ, γ' et γ'' , déterminées au moyen des intégrales *générales* des équations (2), sont exprimées par des fonctions de temps uniformes, n'ayant, dans l'étendue finie du variable t , d'autres points singuliers que les pôles.

La forme (5) des intégrales générales des équations (2) suivant les conditions (1) montre que les fonctions multiformes p, q, r, γ, γ' et γ'' ont aussi, entre autre, en qualité de points singuliers, les pôles. Il reste à savoir ces pôles quand l'intégrale (4) a lieu. Il est facile de voir que ces pôles coïncident avec les points de la forme: $\tau \equiv -\tau_0$, où τ_0 est déterminé par l'expression (43'). Effectivement ces points sont les pôles de l'expression

$$\frac{\varphi' T - e_0'}{\varphi T - e_0},$$

qui est le multiplicateur de la seconde partie de l'expression (41). Cette expression détermine la quantité $v = \xi + i\eta$. En plus, les pôles de la fonction v correspondent au zéro de la fonction w .

§ 5.

Intégrales fondamentales particulières de l'équation (42). Intégrales canoniques et propriétés caractéristiques de la quantité h . Trois cas de rotation du solide.

Nous nommerons intégrales fondamentales particulières de l'équation (42) les résolutions $w_1\tau$ et $w_2\tau$, qui satisfont les conditions :

$$(47) \quad \begin{cases} w_1 0 = 1, & w_1' 0 = 0, \\ w_2 0 = 0, & w_2' 0 = i, \end{cases}$$

considérant $\tau=0$. Fixons notre attention sur la forme de ces résolutions.

Si nous exprimons l'intégrale générale des équations (42) par la forme

$$(48) \quad w = f\tau + iF\tau,$$

où $f\tau$ et $F\tau$ sont des fonctions réelles, l'expression imaginaire conjuguée

$$(48') \quad w = f\tau - iF\tau$$

sera l'intégrale générale d'une autre équation

$$(49) \quad \frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \left(\wp' T + e_0' \right) \frac{dw}{d\tau} + a' (\wp T - e_0) w = 0,$$

obtenue par l'équation (42) si nous remplaçons le coefficient imaginaire e_0' par une quantité conjuguée $-e_0'$. Mais l'équation (49) se transforme en équation (42) après le remplacement de τ par $-\tau$; c'est pourquoi, après avoir subi le même changement, l'expression (48') se transforme de la façon suivante:

$$(48'') \quad w = f(-\tau) - iF(-\tau),$$

qui présente sous une autre forme l'intégrale générale de l'équation (42). En combinant les expressions (48) et (48''), nous pouvons aussi présenter l'intégrale générale de l'équation (42) sous la forme suivante:

$$(50) \quad w = f\tau + f(-\tau) + i\{F\tau - F(-\tau)\}.$$

Cette dernière forme de l'intégrale générale de l'équation (42) montre qu'il doit exister deux intégrales semblables particulières indépendantes de la même forme (50), c. à. d. qu'elles ont dans leurs parties réelle et imaginaire les fonctions correspondantes *paire* et *impaire*. Si nous imposons à ces deux intégrales particulières les conditions (47), elles coïncideront avec les résolutions fondamentales. Par conséquent les intégrales fondamentales particulières de l'équation (42) se développent en séries suivantes:

$$(51) \quad \begin{cases} w_1\tau = 1 + \alpha_2\tau^2 + \alpha_4\tau^4 + \alpha_6\tau^6 + \dots \\ \quad \quad \quad + i(\alpha_3\tau^3 + \alpha_5\tau^5 + \alpha_7\tau^7 + \dots), \\ w_2\tau = \beta_2\tau^2 + \beta_4\tau^4 + \beta_6\tau^6 + \dots \\ \quad \quad \quad + i(\tau + \beta_3\tau^3 + \beta_5\tau^5 + \beta_7\tau^7 + \dots), \end{cases}$$

où $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_2, \beta_3, \dots$ sont des quantités réelles.

Le calcul successif des coefficients du développement (51) sera montré plus loin (dans le § 10).

Constituons les expressions des coefficients κ, λ, μ et ν de la substitution (44), en supposant que $w_1\tau$ et $w_2\tau$ sont des résolutions fondamentales, c. à. d. les résolutions, déterminées par les expressions (51). Avec cette supposition nous aurons:

$$\begin{aligned} w_1(-\omega) &= \bar{w}_1\omega, & w_1'(-\omega) &= -\bar{w}_1'\omega, \\ w_2(-\omega) &= \bar{w}_2\omega, & w_2'(-\omega) &= -\bar{w}_2'\omega, \end{aligned}$$

où on sousentend en général par $\bar{w}$ une quantité conjuguée à w . Il s'ensuit de ceci et des équations (45) que:

$$(52) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{1}{\delta} (w_1 \omega \cdot \bar{w}_2' \omega + \bar{w}_2 \omega \cdot w_1' \omega), & \lambda = -\frac{1}{\delta} (\bar{w}_1 \omega \cdot w_1' \omega + w_1 \omega \cdot \bar{w}_1' \omega), \\ \mu = \frac{1}{\delta} (w_2 \omega \cdot \bar{w}_2' \omega + \bar{w}_2 \omega \cdot w_2' \omega), & \nu = -\frac{1}{\delta} (\bar{w}_1 \omega \cdot w_2' \omega + w_2 \omega \cdot \bar{w}_1' \omega), \end{cases}$$

où

$$(52') \quad \delta = \bar{w}_1 \omega \bar{w}_2' \omega - \bar{w}_2 \omega \bar{w}_1' \omega.$$

Il est facile de voir au moyen des expressions (52) et (52') que les quantités κ , λ , μ et ν et celles, qui y sont conjuguées, satisfont aux corrélations:

$$(53) \quad \bar{\kappa} \delta = -\nu \delta, \quad \bar{\nu} \delta = -\kappa \delta, \quad \bar{\mu} \delta = \mu \delta, \quad \bar{\lambda} \delta = \lambda \delta.$$

La quantité δ , qui se trouve dans les expressions précédentes et déterminée par l'expression (52'), a une expression plus simple que l'on obtient de la manière suivante. Les résolutions particulières $w_1 \tau$ et $w_2 \tau$, déterminées par l'expression (51), doivent d'après Liouville satisfaire à la condition:

$$(53') \quad w_1 \tau \cdot w_2' \tau - w_2 \tau \cdot w_1' \tau = i \sqrt{\frac{e_0 - \wp T}{e_0 - e_2}} e^{i\chi \tau},$$

où $\chi \tau$ est une fonction réelle, déterminée par l'expression:

$$(53'') \quad \chi \tau = \frac{e_0'}{2i} \int_0^\tau \frac{dT}{e_0 - \wp T}.$$

En supposant dans l'expression (53') $\tau = \omega$, nous obtiendrons, en passant aux quantités conjuguées, l'expression cherchée de la quantité δ :

$$(53''') \quad \delta = -i \sqrt{\frac{e_0 - e_2}{e_0 - e_2}} \cdot e^{-i\chi \omega}.$$

En même temps nous pouvons représenter les relations (53) ainsi:

$$(53^{IV}) \quad \begin{cases} \bar{\kappa} \cdot e^{i\chi \omega} = \nu, & \bar{\nu} \cdot e^{i\chi \omega} = \kappa, \\ \bar{\mu} \cdot e^{i\chi \omega} = -\mu, & \bar{\lambda} \cdot e^{i\chi \omega} = -\lambda. \end{cases}$$

Connaissant les quantités κ , λ , μ et ν , nous pouvons passer des résolutions fondamentales particulières de l'équation (42) à ses intégrales canoniques, qui sont souvent employées dans la théorie des équations linéaires aux coefficients uniformes périodiques*) et qui mènent notre problème à des conclusions importantes.

*) Voir Floquet, «Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques» (Annales de l'Ecole normale supérieure, t. 13. 1883).

En définissant les résolutions canoniques $W\tau$ de l'équation (42), pour lesquelles la condition

$$(54) \quad W(\tau + 2\omega) = sW\tau$$

a lieu, nous présenterons ce genre de résolution ainsi:

$$(55) \quad W\tau = p'w_1\tau + q'w_2\tau.$$

Ayant introduit cette expression $W\tau$ dans l'expression (54) et ayant recours au remplacement (44), nous obtenons une relation, d'où il s'ensuit que p' et q' satisfont aux équations

$$(56) \quad \begin{cases} (x-s)p' + \mu q' = 0, \\ \lambda p' + (v-s)q' = 0. \end{cases}$$

Pour la compatibilité de ces équations la quantité s doit satisfaire à l'équation carrée:

$$(57) \quad s^2 - (x+v)s + xv - \lambda\mu = 0,$$

qui a en général deux racines. Ainsi il existe en général deux résolutions de l'équation (42), satisfaisant la condition (54). Dans un cas particulier, quand les deux racines de l'équation (57) deviennent égales, ces deux résolutions de l'équation (42) deviennent coïncidentes. Si nous rejetons pour le moment ce dernier cas et si nous désignons par s_1 et s_2 les racines de l'équation (57) et par $W_1\tau$ et $W_2\tau$ les résolutions canoniques correspondantes de l'équation (42), nous avons les équations:

$$(58) \quad \begin{cases} W_1(\tau + 2\omega) = s_1 W_1\tau, \\ W_2(\tau + 2\omega) = s_2 W_2\tau, \end{cases}$$

$$W_1\tau = p_1w_1\tau + q_1w_2\tau,$$

$$W_2\tau = p_2w_2\tau + q_2w_2\tau,$$

$$q_1 = \frac{s_1 - x}{\mu} p_1 = \frac{\lambda}{s_1 - v} p_1, \quad q_2 = \frac{s_2 - x}{\mu} p_2 = \frac{\lambda}{s_2 - v} p_2,$$

dans lesquelles les quantités p_1 et p_2 peuvent être choisies arbitrairement. Nous supposons que $p_1 = p_2 = 1$; de sorte que nous aurons:

$$(58') \quad \begin{cases} W_1\tau = w_1\tau + q_1w_2\tau, \\ W_2\tau = w_1\tau + q_2w_2\tau, \end{cases}$$

où

$$(58'') \quad q_1 = \frac{s_1 - x}{\mu} = \frac{\lambda}{s_1 - v}, \quad q_2 = \frac{s_2 - x}{\mu} = \frac{\lambda}{s_2 - v}.$$

Ayant remarqué que

$$(59) \quad xv - \lambda\mu = -\frac{\delta}{\delta} = e^{2i\chi\omega},$$

où $\chi\omega$ est déterminé par l'expression (53'') considérant $\tau = \omega$, nous nous convainquons que les racines s_1 et s_2 de l'expression (57) peuvent être exprimées ainsi:

$$(60) \quad s_1 = \frac{x+v}{1+h^2}, \quad s_2 = \frac{(x+v)h^2}{1+h^2},$$

où

$$(61) \quad h = \pm N \pm \sqrt{N^2 - 1},$$

$$(61') \quad N = \frac{x+v}{2} \cdot e^{-i\chi\omega}.$$

A l'aide des expressions (53^{iv}) nous nous convainquons que la quantité N , déterminée par l'égalité (61'), et la quantité, qui y est conjuguée, sont égales, c. à. d.

$$\bar{N} = N.$$

Par là il s'ensuit que la quantité N est *réelle*. En même temps la quantité h , déterminée par l'expression (61), doit être ou réelle (si $N^2 > 1$), ou (si $N^2 < 1$) imaginaire avec le module égal à 1.

Par le choix voulu des signes dans la seconde partie de l'expression (61), qui détermine *quatre* significations de h , nous pouvons obtenir qu'avec $N^2 > 1$ l'inégalité

$$(62) \quad h > 1$$

ait lieu et qu'avec $N^2 < 1$ l'expression

$$h = e^{\varphi i}$$

ait lieu à condition que:

$$(63) \quad 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

La quantité h , choisie d'après la condition (62) considérant $N^2 > 1$ et d'après les conditions (63) considérant $N^2 < 1$, sera nommée *caractéristique*.

La quantité caractéristique h , déterminée de cette façon, joue dans la suite un rôle essentiel soit comme constante avec le mouvement donné, soit comme la fonction des quantités l_1 , l_2 et a , pendant le changement continu d'un mouvement à l'autre.

Disons dès maintenant, que la quantité caractéristique h , en qualité de fonction des variables l_1 , l_2 et a , est continue dans les limites des changements, permis par les conditions du problème de mécanique que nous examinons, à part le cas où $\omega = \infty$, ce qui n'arrive que quand $l_1 = 0$ et $\xi_0 = -1$. Effectivement les quantités x , λ , μ et v , déterminées par les expressions (52) et (53'''), sont des fonctions finies et continues des quantités l_1 , l_2 et a . De même que la quantité N , déterminée par l'expression (61'), doit être finie et continue; de là la continuité de la quantité caractéristique h suivant les conditions désignées.

Si la quantité caractéristique h est imaginaire, son amplitude φ , en qualité de fonction des quantités l_1 , l_2 et a , conserve la continuité ainsi que h .

D'après les conditions (63) elle ne surpasse pas la limite $\frac{\pi}{2}$, de sorte que cette limite est le *maximum* de l'amplitude φ . C'est ce *maximum* qu'atteint successivement l'amplitude φ croissante pendant les changements continus de l_1 , l_2 et a , seulement N devient zéro. Avec les changements ultérieurs de l_1 , l_2 et a qui occasionnent des changements la quantité h , l'amplitude φ doit diminuer.

Pendant sa décroissance, l'amplitude φ de la quantité imaginaire caractéristique h peut s'approcher autant que l'on veut de zéro; quand φ atteint zéro, la quantité h devient 1, les racines s_1 et s_2 deviennent égales. Avec les changements ultérieurs des quantités l_1 , l_2 et a , qui exigent des changements dans h , cette quantité h doit ou passer dans le domaine des significations réelles, croissant à partir d'1, ou retourner dans le domaine des significations imaginaires. Dans ce dernier cas l'amplitude φ , ayant atteint zéro en décroissant, doit croître sans interruption partant de zéro, comme de son *minimum*.

Nous voyons de précédant, que le passage de la quantité caractéristique h d'une signification réelle à une signification imaginaire (ainsi que d'une signification imaginaire à une réelle) est possible pendant les changements continus des quantités l_1 , l_2 et a . L'un ou l'autre des passages est produit toujours par $h = 1$ et est suivi du cas d'égalité des racines s_1 et s_2 que nous examinons plus bas.

Remarquons qu'au moyen des égalités (60) nous obtenons l'égalité

$$(64) \quad h^2 = \frac{s_2}{s_1}.$$

En exprimant l'intégrale générale de l'équation (42) à l'aide des résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$, nous aurons:

$$w = C_1 W_1\tau + C_2 W_2\tau,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Ayant inclus cette expression w dans l'équation (41), nous trouvons:

$$(65) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c W_2'\tau}{W_1\tau + c W_2\tau}$$

où

$$c = C_1 : C_2$$

et

$$(66) \quad P\tau = \frac{-1}{2a} \sqrt{\frac{2}{B\varrho_0}} \left(\wp'T - e_0' \right) = \frac{-1}{2a} \sqrt{\frac{4}{B^2\varrho_0^2}} \left(\frac{B + l_1 i}{\xi - \xi_0} \right).$$

La constante c est choisie selon la dépendance de la position initiale du point v , qui, suivant $\tau = 0$, doit absolument se trouver sur la circonférence E_2 (voyez le § 4).

Supposons que le temps τ reçoive un accroissement égal au nombre entier m des périodes 2ω et admettons que la fonction v acquière

la signification v_m dans le moment $\tau + 2m\omega$. Comme en vertu des expressions (58)

$$(66') \quad \begin{cases} W_1(\tau + 2m\omega) = s_1^m W_1\tau, \\ W_2(\tau + 2m\omega) = s_2^m W_2\tau, \end{cases}$$

nous aurons

$$(67) \quad v_m = P\tau, \frac{W_1'\tau + ch^{2m}W_2'\tau}{W_1\tau + ch^{2m}W_2\tau},$$

où h est la quantité caractéristique qui vient d'être désignée. L'équation (67) détermine le mouvement du point v dans la phase du temps $\tau + 2m\omega$ et conduit à beaucoup de conséquences importantes.

Avant tout il faut remarquer que l'équation (67) constitue entre les quantités $Z = v_m$ et $z = h^{2m}$ une relation représentée par l'expression

$$(68) \quad Z = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + czW_2'\tau}{W_1\tau + czW_2\tau}$$

et connue sous le nom de *transformation linéaire*. Cette relation possède beaucoup de propriétés remarquables qui reçoivent une expression géométrique simple, si l'on désigne les quantités Z et z par des points sur le plan des coordonnées angulaires. La propriété géométrique fondamentale de la transformation (68) consiste en ce qui suit: pendant le mouvement d'un des points Z et z sur la circonférence, l'autre point aussi doit se mouvoir sur une circonférence. Quelque fois l'une des deux circonférences peut se développer en ligne droite, qui peut être considérée comme une circonférence dont le centre est éloigné à l'infini.

Choisissons parmi les propriétés de la transformation linéaire (68) celle que nous nommerons *similitude* de la disposition des points Z et z , qui représentent les quantités Z et z , liées par la coordonnée (68). Si le point z décrit la ligne courbe l , le point Z en décrira une autre L . Nous nommerons ces lignes l et L lignes correspondantes. Admettons que les deux lignes courbes L et l sont finies et continues. La similitude de la disposition des points correspondants Z et z s'exprime par la conservation d'une *successivité égale* dans la disposition de ces points sur l'étendue des courbes correspondantes L et l . Ou, autrement dit, si l'on prend sur la courbe l les points $z_1, z_2, z_3, \dots$, qui se disposent sur son étendue d'après la succession des index, les points correspondants $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ se disposeront le long de la courbe L d'après la même succession des index. Cette propriété de la transformation (68) est le résultat d'une autre propriété, qui appartient à cette transformation ainsi qu'à beaucoup d'autres, et elle est connue sous le nom de *similitude des parties infiniment petites*.

Dans les paragraphes suivants ces propriétés nous serviront de base pour beaucoup de déductions.

Ecrivons l'équation (67) ainsi:

$$v_m(W_1\tau + ch^{2m}W_2\tau) - P\tau(W_1'\tau + ch^{2m}W_2'\tau) = 0$$

et donnons au nombre m quatre significations: m, m', m'' et m''' . Nous aurons quatre relations, qui seront linéaires et homogènes relativement aux quatre quantités:

$$W_1\tau, W_2\tau, W_1'\tau, W_2'\tau.$$

Par conséquent le déterminant de ces corrélations linéaires doit être zéro, c. à d.

$$(68') \quad \begin{vmatrix} v_m & v_m h^{2m} & 1 & h^{2m} \\ v_{m'} & v_{m'} h^{2m'} & 1 & h^{2m'} \\ v_{m''} & v_{m''} h^{2m''} & 1 & h^{2m''} \\ v_{m'''} & v_{m'''} h^{2m'''} & 1 & h^{2m'''} \end{vmatrix} = 0.$$

Au moyen de quoi il est facile d'exprimer v_m par les quantités $v_{m'}$, $v_{m''}$, $v_{m'''}$ et h^2 . Il est aisé de voir que l'on peut exécuter la construction du point v_m avec une règle et un compas, si ce tableau des quatre quantités: $v_{m'}$, $v_{m''}$, $v_{m'''}$ et h^2 nous est donné.

La relation (68') prend une forme plus simple, si les nombres entiers m, m', m'' et m''' sont successifs. Arrêtons notre attention sur ce cas et supposons que:

$$m''' = m'' + 1 = m' + 2 = m - 1.$$

Suivant ces conditions la corrélation (68') est réduite à la forme

$$(68'') \quad \frac{(v_m - v_{m-2})(v_{m-1} - v_{m-3})}{(v_m - v_{m-1})(v_{m-2} - v_{m-3})} = \frac{(1 + h^2)^2}{h^2}.$$

Prenant cette relation comme base, si nous connaissons h^2 et trois significations successives de v_m (par exemple v_0, v_1, v_2), nous obtiendrons tous les points successifs

$$\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots$$

Si h^2 n'est pas donnée immédiatement, il suffit de savoir quatre positions du point v_m pour l'obtenir. Ainsi s'il nous est donné la position des points v_0, v_1, v_2 et v_3 , en supposant dans la corrélation (68'') $m = 3$, nous aurons l'expression

$$\frac{(v_3 - v_1)(v_2 - v_0)}{(v_3 - v_2)(v_1 - v_0)} = \left(h + \frac{1}{h}\right)^2.$$

par laquelle il est facile d'obtenir h^2 . Ainsi on peut juger de la quantité caractéristique de h , en prenant pour base l'observation d'un mouvement pendant un intervalle égal à 6ω .

Passons maintenant au cas des racines égales de l'équation (57) ($s_1 = s_2 = s$), c. à d. au cas pour lequel la condition

$$(69) \quad (\kappa + \nu)^2 - 4(\kappa\nu - \lambda\mu) = 0$$

a lieu, ou, autrement dit, quand $N^2 = 1$. La quantité caractéristique h se change en 1. Les résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$ caractérisées par ce qu'elles satisfont aux conditions (54) cessent d'être différentes, c. à d. que dans le cas que j'examine il n'y a que la seule résolution $W_1\tau = W_2\tau = W\tau$; qui satisfasse la condition (54). La seconde résolution, qui manque, est remplacée dans ce cas par la résolution de $W_3\tau$, qui satisfait la condition

$$(70) \quad W_3(\tau + 2m\omega) = s^m [W_3\tau + 2m\omega W_1\tau],$$

où s est la racine de l'équation (57) et m est un nombre entier. Afin d'obtenir la résolution exigée $W_3\tau$, on peut se servir de son expression faite à l'aide des résolutions fondamentales $w_1\tau$ et $w_2\tau$, justement:

$$(71) \quad W_3\tau = p_3w_1\tau + q_3w_2\tau.$$

Ayant introduit cette expression $W_3\tau$ et l'expression $W_1\tau$, déterminée par la première des équations (58), dans l'expression (70), prise avec $m = 1$, et nous servant ensuite des relations (44), nous obtiendrons une identité, d'où nous pourrions déduire que:

$$(72) \quad \begin{cases} (x-s)p_3 + \mu q_3 = 2\omega s, \\ \lambda p_3 + (v-s)q_3 = 2\omega s q_1, \end{cases}$$

où

$$(72') \quad s = \frac{x+v}{\mu} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{v-x}{\mu}.$$

Les équations (72) ne diffèrent l'une de l'autre que par le multiplicateur commun; c'est pourquoi une des quantités p_3 et q_3 reste arbitraire. Supposons que $p_3 = 0$, de sorte que nous aurons:

$$(71') \quad W_3\tau = q_3w_2\tau,$$

où

$$(72'') \quad q_3 = \frac{2\omega s}{\mu} = \frac{2\omega s q_1}{v-s}.$$

Après avoir choisi ainsi $W_3\tau$, nous obtiendrons pour la détermination de la quantité v l'expression:

$$(73) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + cW_3'\tau}{W_1\tau + cW_3\tau},$$

où c est une constante, déterminée par la position initiale du point v sur la circonférence E_2 (dans le moment $\tau = 0$). Si τ reçoit l'accroissement de $2m\omega$, où m est un nombre entier, la quantité v se change en v_m , quantité, qui, suivant l'expression (70) et l'expression

$$(73') \quad W_1(\tau + 2m\omega) = s^m W_1\tau,$$

s'exprimera de la façon suivante:

$$(74) \quad v_m = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c(W_3'\tau + 2m\omega W_1'\tau)}{W_1\tau + c(W_3\tau + 2m\omega W_1\tau)}.$$

Il résulte des remarques précédentes trois cas: 1) quand la quantité caractéristique h est une quantité réelle, satisfaisante à la condition (62), 2) quand h est une quantité imaginaire de la forme: e^{pi} , satisfaisante aux conditions (63), et 3) quand $h = 1$. Dans les deux premiers cas le mouvement du point v est déterminé au moyen de l'expression (65) et dans le troisième cas, qu'on doit considérer comme cas transitoire par rapport aux deux premiers, le mouvement du point v se détermine par l'expression (73).

Le tableau de rotation présente dans chacun de ces cas des particularités, qui se trouvent en relation avec la question concernant la possibilité ou l'impossibilité de l'existence des mouvements périodiques, produits par le point v , avec la période 2ω ; mouvements, déterminés par la formule (65), l'un d'après $c = 0$ et l'autre d'après $c = \infty$. Nous avons pour le premier de ces mouvements périodiques:

$$(75) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1' \tau}{W_1 \tau},$$

pour le second mouvement nous avons:

$$(76) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_2' \tau}{W_2 \tau}.$$

Examinons les trois cas que nous avons énoncés précédemment.

§ 6.

Rotation du solide dans le cas, où le corps pesant est capable de produire deux mouvements asymptotiques périodiques avec la période 2ω .

Arrêtons notre attention sur le cas où les racines s_1 et s_2 de l'équation (57) ne sont pas égales et où h est une quantité réelle, qui satisfait la condition (62).

Supposons que la constante c de l'expression (65), déterminée par la position initiale du point v , soit une quantité finie et différente de zéro. En examinant le mouvement du point v dans la phase du temps, pendant lequel τ change en $\tau + 2m\omega$, nous devons avoir recours à la formule (67), qui détermine la position correspondante v_m du point v . Cette formule nous démontre ce qui suit.

Si le nombre entier m tend à $-\infty$, la quantité h^{2m} tend à zéro et le point v_m tend à la position, pour laquelle nous avons

$$(77) \quad v_{-\infty} = P\tau \frac{W_1' \tau}{W_1 \tau}.$$

Par conséquent le mouvement du point v , n'étant pas périodique pour le temps fini τ , tend avec la décroissance infinie du temps τ au mouvement périodique avec la période 2ω , lequel mouvement est déterminé au

moyen de l'expression (75). Nommons ce mouvement périodique du point v et du point V correspondant sur la sphère O mouvement *asymptotique* périodique de *premier* genre.

Si le nombre m tend à $+\infty$, la quantité h^{2m} tend à $+\infty$ et le point v_m tend à la position, pour laquelle nous avons

$$(78) \quad v_{+\infty} = P\tau \frac{W_2'\tau}{W_2\tau}.$$

Par conséquent le mouvement du point v , n'étant pas périodique pour le temps fini τ , tend avec la croissance infinie du temps τ au mouvement périodique avec la période 2ω , lequel mouvement est déterminé au moyen de l'expression (76). Nommons ce mouvement périodique du point v et du point correspondant V sur la sphère O mouvement *asymptotique* périodique de *second* genre.

Ainsi, quand le temps τ tend à $\pm\infty$, l'impériodicité du mouvement des points v et V se perd successivement et ce mouvement devient périodique de tel ou tel genre dans les limites.

Il s'ensuit, en outre, que les rotations périodiques (75) et (76) sont possibles avec h réelle et qu'on peut choisir les circonstances initiales de façon que chacune de ces rotations puisse se réaliser immédiatement.

Il est facile de découvrir que le mouvement périodique du point v , déterminé par l'expression (75), n'est pas stable par rapport au temps τ croissant infiniment, et que le mouvement périodique du point v , déterminé par l'expression (76), n'est pas stable par rapport au temps τ décroissant infiniment. Effectivement, par exemple, le mouvement périodique de *premier* genre, déterminé par l'expression (65) avec $c=0$, devient, prenant c aussi petite que l'on veut, un mouvement agité impériodique, qui se développe en un mouvement périodique de *deuxième* genre avec le temps τ croissant sans limites, et par conséquent s'éloigne beaucoup de la rotation périodique de *premier* genre.

La relation entre les quantités:

$$(79) \quad z = h^{2m} \text{ et } Z = v_m,$$

représentée par l'expression (67), appartient évidemment à la transformation linéaire (68). En même temps les quantités correspondantes z et Z , déterminées par les expressions (79), sont disposées l'une sur l'axe $O\xi$, l'autre sur la circonférence E (voyez § 4). Pour cette raison et en vue de la propriété générale de la transformation (68), le point Z doit se mouvoir sans interruption sur la circonférence E , pendant que le point z change sa place sans interruption sur l'axe $O\xi$ des abscisses ou, pour mieux dire, la quantité z change en gardant ses significations *réelles*.

Par là on remarque, en outre, que les mouvements mécaniques

possibles du solide, que nous examinons, ne différant que par les positions initiales du point v sur la circonférence E_2 (dans le moment $\tau = 0$), se déterminent, ayant les autres circonstances initiales pareilles, par l'expression de la forme:

$$(80) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1' \tau + cz W_2' \tau}{W_1 \tau + cz W_2 \tau},$$

où z est une quantité arbitraire constante *réelle*. Effectivement, si la quantité z de la formule (80) n'était pas réelle, les positions du point correspondant v ne se seraient pas placés sur la circonférence E dans les phases du temps $\tau + 2m\omega$, ce qui aurait contredit les propriétés du module v , montrées au commencement du § 4.

Si dans l'expression (68) z change sans interruption de 0 à $+\infty$, le point Z ne décrit sans interruption qu'une partie de la circonférence E , représentée par l'arc $v_{-\infty} v_0 v_{+\infty}$. Comme on le voit d'après la similitude de la disposition des points Z et z , déterminés par les expressions (79), les points v_m doivent être disposés sur cet arc et ils doivent y être disposés successivement dans l'ordre de la croissance de l'index m (car les points correspondants, qui représentent les quantités h^{2m} , se disposent sur l'axe $O\xi$ dans l'ordre de la croissance de l'exposant m). Les points correspondants V_m de la sphère O se disposent de la même façon sur l'arc $V_{-\infty} V_0 V_{+\infty}$ de la circonférence F .

Le point v ne se serait engagé sur l'arc, qui complète $v_{-\infty} v_0 v_{+\infty}$ jusqu'à la circonférence entière E , qu'après avoir eu une autre position initiale, avec laquelle le signe de la constante arbitraire c aurait changé (car le point Z décrit cet arc complémentaire, quand z change de 0 jusqu'à $-\infty$, c. à. d. quand z a une signification négative).

Il n'est pas difficile de remarquer ce qui suit; quand le nombre m tend à $-\infty$, le point v_m tend au point $v_{-\infty}$ de sorte, que ses positions successives v_m et v_{m+1} se rapprochent de plus en plus, formant dans la limite sur l'arc $v_{-\infty} v_0 v_{+\infty}$, près de $v_{-\infty}$, une ligne pointillée, composée d'une rangée de points infiniment rapprochés les uns des autres. Il y a le même rapprochement des points v_m près des points $v_{+\infty}$ dans le cas où la quantité m tend à $+\infty$. Les points V_m forment des lignes pointillées auprès des points $V_{-\infty}$ et $V_{+\infty}$ sur l'arc $V_{-\infty} V_0 V_{+\infty}$ de la circonférence F .

Si nous supposons que le temps τ change sans interruption depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$, les points v_m décriront dans le plan $\xi O \eta$ des courbes S_m , et les points correspondants V_m de la sphère O décriront les courbes Σ_m . Nous n'arrêterons principalement notre attention que sur les courbes Σ_m , d'après lesquelles il est facile de se représenter la position et les propriétés des courbes S_m .

Chaque courbe Σ_m commence au point U_m de la circonférence F_3 , où

se trouve le point V_m au moment $\tau = -\omega$; puis la courbe Σ_m , allant en haut, passe par l'intérieur de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 , en atteignant les circonférences F_2 dans le point, où se trouve le point mobile V_m au moment $\tau = 0$; puis la courbe Σ_m retourne dans le domaine de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 et, baissant successivement, atteint au moment $\tau = +\omega$ la circonférence F_3 au point U_{m+1} , qui sert de commencement à la courbe Σ_{m+1} .

Les Σ_m représentent, avec différentes valeurs de m , des morceaux d'une seule et même courbe sans interruption et ouverte Σ . Ces morceaux se relient sur la circonférence F_3 de sorte, que la fin du morceau Σ_m soit le commencement du morceau Σ_{m+1} .

Sousentendons par K_m et L_m les parties de la courbe Σ_m , décrites par le point V_m , l'une d'elles dans l'intervalle τ de $-\omega$ jusqu'à 0 et l'autre de 0 jusqu'à $+\omega$. Comme les points V_m de la circonférence F ne peuvent pas coïncider les uns avec les autres, les courbes

$$\dots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \dots$$

ne peuvent pas s'entrecroiser. De même que

$$\dots, L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, L_2, \dots$$

ne peuvent pas s'entrecroiser. Mais les courbes K peuvent se croiser avec quelques unes des courbes L .

Si les courbes L_m et K_m se croisent au point α , les points V_m et V_m' doivent prendre la position α dans des moments égaux par leur quantité absolue et contraire par leur signe (car les points V_m et V_m' peuvent entrer sur la même circonférence F seulement dans les moments $\pm\tau$, pendant le changement de τ de $-\omega$ jusqu'à $+\omega$). C'est pourquoi le temps de l'introduction du point V_m dans la position α est déterminé par l'équation:

$$(80') \quad v_m \tau = v_m'(-\tau), \quad 0 < \tau < +\omega,$$

où, en général, $v_m \tau$ est la désignation abrégée de la fonction, qui se trouve dans la deuxième partie de l'expression (67).

Les courbes des limites $K_{-\infty}$ et $K_{+\infty}$ partagent la zone sphérique, renfermée entre les circonférences F_2 et F_3 , en deux parties; dans l'une de ces parties se placent toutes les courbes K_m , se suivant dans l'ordre de l'accroissement de l'index m . L'autre partie de cette zone sphérique ne renferme pas de courbes K_m . Ces conclusions dérivent de la disposition des points V_m sur l'arc $V_{-\infty} V_0 V_{+\infty}$ de la circonférence F . Il résulte encore de l'examen de cette disposition, que les courbes successives K_m et K_{m+1} se rapprochent de plus en plus les unes des autres, à mesure qu'elles s'approchent de chacune des positions de la

limite $K_{-\infty}$ et $K_{+\infty}$, et forment près des courbes $K_{-\infty}$ et $K_{+\infty}$ une multitude de lignes serrées infiniment.

C'est de la même façon que se disposent successivement les courbes L_m toutes dans une seule partie de la zone sphérique, séparée en deux par les courbes $L_{-\infty}$ et $L_{+\infty}$.

Les lignes L_m et K_m forment un filet par leur croisements réciproques dans les parties de la zone sphérique, qu'elles remplissent; ce filet a différentes épaisseurs dans différents endroits; il sera d'une épaisseur infinie près des points, où les courbes $K_{-\infty}$ et $L_{-\infty}$ et de même où les courbes $K_{+\infty}$ et $L_{+\infty}$ se relient.

La courbe Σ , qui est composée des morceaux Σ_m ou, autrement, des courbes K_m et L_m , est décrite entièrement par le point V de la sphère O avec le changement de τ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Quant aux morceaux de la limite $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ de la courbe Σ , chacun d'eux représente une ligne *fermée* et est décrit d'une manière correspondante par le point V dans la période du temps 2ω , si l'on peut toutefois admettre un des mouvements correspondants asymptotiques périodiques du premier ou du deuxième genre, déterminés par les expressions (75) et (76).

Passons à présent à l'examen d'un nombre remarquable, qui caractérise les trajectoires Σ , $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$; caractérise les accroissements de la longitude Φ du point V , qui s'acquièrent pendant que le point V décrit les arcs donnés.

Représentons sur la sphère O une courbe fermée quelconque σ , qui ne passe pas par les pôles, c. à d. les points du croisement de cette sphère avec l'axe $O\xi$. Supposons, que le point mobile V fasse le tour de cette courbe fermée dans la direction donnée jusqu'à son retour au point de sortie. Pendant ce mouvement la longitude Φ du point V ou, autrement, l'amplitude Φ de la quantité v , représentée sur la sphère O par le point V , changera sans interruption. L'accroissement de cette amplitude Φ sera exprimé, après que le point mobile V ait produit le tour, par le nombre entier j des circonférences 2π , c. à d. que cet accroissement sera égal à $2j\pi$. Ce nombre j exprimera en même temps le nombre des tours produits par la courbe fermée σ autour de l'axe $O\xi$; le signe du nombre j montrera la direction dans laquelle se produisent ces tours. Autrement dit, j exprime le nombre des tours, faits autour de l'axe $O\xi$ par le segment OV , pendant que le point V fait le tour désigné de la courbe fermée σ .

Montrons dès à présent la propriété fondamentale suivante de ce nombre j . Le nombre j des tours, faits par la courbe fermée σ autour de l'axe $O\xi$, ne change pas, si nous déformons cette courbe en faisant changer la place ses parties sur la surface de la sphère O , admettant, avec cela, le changement de la longueur de cette courbe (l'élasticité),

mais n'admettant pas la rupture de ses parties et son passage par les pôles de la sphère O . On peut, pour plus de clarté, se présenter la courbe σ , pendant ses déplacements, sous la forme d'un fil flexible, élastique et fermé, qui permet un déplacement libre par toute la surface de la sphère O , excepté par ses pôles, où le fil rencontre un obstacle à son déplacement. On peut se représenter cet obstacle sous la forme d'une tige dure cylindrique infinie coïncidant avec l'axe $O\xi$; cette tige dure ne laisse pas passer un fil flexible par les pôles. Avec ces conditions le déplacement arbitraire sur la sphère O du fil fermé σ , que nous examinons, présente la déformation de la courbe σ , avec laquelle les nombres des tours, qu'elle produits autour de l'axe OZ , ne peut changer.

Nous nommerons le déplacement de la courbe σ suivant toutes ces conditions sa *déformation continue*. D'après la constance des nombres des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par le fil fermé, qui est déformé continuellement, on peut déduire, que deux courbes fermées produisent le même nombre de tours autour de l'axe $O\xi$, si elles peuvent être amenées à leur coïncidence par des déformations continues ou si elles peuvent être amenées à coïncider chacune séparément avec une troisième courbe fermée, soumise à une déformation continue.

Plus loin nous examinerons plusieurs courbes fermées, qui se composent des parties de la trajectoire Σ et des arcs de la circonférence F dans ses différentes positions. Voilà pourquoi il est indispensable d'établir relativement aux arcs de la circonférence F les indications uniformes suivantes.

Considérant les nombres m' et m'' comme des nombres entiers, supposons que τ reste invariable dans la deuxième partie de l'expression (80), et que z change continuellement de $h^{2m'}$ jusqu'à $h^{2m''}$. Sous ces conditions le point v , représentant la quantité déterminée par l'expression (80), décrira l'arc de la circonférence E , enfermée dans les points $v_{m'}$ et $v_{m''}$. Nous désignons justement l'arc correspondant de la circonférence F sur la sphère O par $V_{m'} V_{m''}$, et par $U_{m'} U_{m''}$ nous désignerons l'arc de la circonférence F_3 , avec laquelle coïncide l'arc $V_{m'} V_{m''}$ dans le mouvement $\tau = -\omega$.

N'oublions pas ces indications et imaginons nous la courbe Σ_m , formant le morceau nommé de la trajectoire Σ , et l'arc $U_{m+1} U_m$ de la circonférence F_3 . Ces deux courbes, prises ensemble, forment une courbe fermée que nous désignerons par σ_m . Donnant à m des significations différentes entières, nous obtiendrons un groupe de courbes fermées de ce genre. Ces courbes joueront un rôle important dans notre théorie.

Si l_1 n'est pas un zéro, la zone sphérique, enfermée dans les circonférences F_2 et F_3 , ne peut pas s'étendre jusqu'aux pôles de la sphère O (comme il est démontré dans le § 4), et par conséquent les

courbes fermées σ_m ne peuvent pas passer par ces pôles. Au contraire ayant $l_1 = 0$, la zone sphérique désignée s'étend au moins jusqu'à un des pôles de la sphère O et chaque courbe fermée σ_m passe tout au moins par un pôle. A cause de cela nous écarterons le cas $l_1 = 0$, en supposant que l_1 est différent de zéro, de sorte qu'aucune des courbes fermées σ_m ne passera par les pôles de la sphère O .

Démontrons ensuite, que les courbes fermées

$$(81) \quad \dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$$

font chacune le même nombre de tours autour de l'axe $O\xi$.

Disposons les courbes σ_m de la déformation continue dans l'ordre suivant. Examinons une autre trajectoire, ayant pris, pour déterminer le mouvement du point V , l'expression (80), qui correspond à une autre position initiale du point v sur la circonférence E_2 , et non pas l'expression (65). Le caractère de cette trajectoire reste le même et on peut supposer pour cette trajectoire des courbes fermées $\sigma_m(z)$, qui ont leur construction analogique aux courbes σ_m ; mais à présent ces courbes $\sigma_m(z)$ dépendent de z ; elles se déplaceront pendant le changement continu de z , satisfaisant à toutes les exigences de la déformation continue, que nous avons nommée, et elles coïncideront avec les courbes précédentes σ_m ayant $z = 1$. Supposons que z croisse continuellement de 1 jusqu'à h^2 . Il est évident qu'avec ce changement la courbe $\sigma_m(z)$, que nous déformons, conservera le nombre des tours autour de l'axe $O\xi$ et passera avec cela de sa position initiale σ_m (ayant $z = 1$) à la position finale (ayant $z = h^2$), qu'a occupée au commencement la courbe σ_{m+1} . On voit par là que les courbes σ_m et σ_{m+1} font le même nombre de tours autour de l'axe $O\xi$.

Après avoir montré ainsi la constance du nombre des tours, produits par chaque courbe fermée σ_m autour de l'axe $O\xi$, désignons ce nombre constant par J et nommons le le «index» du mouvement, que nous examinons.

Quand $m = \pm \infty$ l'arc $U_m U_{m+1}$ tend à zéro. C'est pourquoi la courbe $\sigma_{+\infty}$ change en courbe $\Sigma_{+\infty}$ et la courbe $\sigma_{-\infty}$ en $\Sigma_{-\infty}$. Il s'ensuit que les courbes fermées $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ produisent chacune un nombre de tours autour de l'axe $O\xi$ égal à l'index J . Autrement dit, si un des mouvements périodiques, déterminés par les expressions (75) et (76), a lieu, la ligne verticale OV fait pendant ce mouvement et dans le période du temps 2ω le nombre J de tours autour de l'axe $O\xi$.

Étendons la notion du nombre des tours, produits par la courbe autour de l'axe $O\xi$, jusqu'aux courbes *ouvertes*, tracées sur la sphère O . Déterminons, pour la courbe donnée de ce genre, le nombre j des tours, qu'elle produit autour de l'axe $O\xi$, de la manière suivante:

$$j = \frac{\Phi_1 - \Phi}{2\pi},$$

où $(\Phi_1 - \Phi)$ est l'accroissement de l'amplitude Φ de la quantité v ; cet accroissement s'acquiert pendant que le point V , représentant la quantité v de la sphère O , décrit la courbe donnée.

Ensuite supposons que le mouvement impériodique du point V , déterminé par l'expression (65), puisse être admis. Examinons le nombre j_k des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la partie de la trajectoire Σ , qui est décrite par le point mobile V dans un nombre entier k de périodes 2ω .

Démontrons que ce nombre j_k peut toujours être représenté ainsi:

$$(82) \quad j_k = J \cdot k + \alpha,$$

où $-1 < \alpha < +1$. Représentons le moment, à partir duquel commence l'intervalle $2k\omega$, par la forme: $\tau = \tau' + 2m\omega$, où m est un nombre entier et $-\omega \leq \tau' \leq +\omega$. Représentons ensuite les morceaux

$$\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_{m+1}, \dots, \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ , décrits par les points

$$V_m, V_{m+1}, \dots, V_{m+k-1}$$

pendant le changement du temps τ depuis τ' jusqu'à $\tau' + 2\omega$. Ce sont juste ces morceaux, qui sont décrits successivement par le point V dans l'intervalle de $2k\omega$, si l'on prend pour commencement le moment $\tau' + 2m\omega$. Nous entendons par

$$V'_m, V'_{m+1}, \dots, V'_{m+k}$$

les positions des points

$$V_m, V_{m+1}, \dots, V_{m+k}$$

dans le moment $\tau = \tau'$; les morceaux désignés

$$\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_{m+1}, \dots, \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ se transforment en courbes fermées

$$\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_{m+1}, \dots, \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

par la jonction des arcs correspondants

$$V'_m V'_{m+1}, V'_{m+1} V'_{m+2}, \dots, V'_{m+k-1} V_{m+k},$$

qui sont décrits dans la direction *opposée*. Ces courbes fermées sont conduites, par la déformation continue de leurs parties, à la coïncidence avec les courbes correspondentes

$$\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_{m+1}, \dots, \mathfrak{S}_{m+k-1}.$$

Telle est la déformation continue, que ces courbes subissent pendant le changement continu de la quantité τ' jusqu'à $-\omega$. A cause de cela chacune des courbes fermées

$$\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_{m+1}, \dots, \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

fait le nombre J de tours autour de l'axe $O\xi$; prises ensemble elles

produisent $J.k$ de tours. Pour obtenir à présent le nombre j_k , il ne reste, qu'à ajouter au nombre $J.k$ le nombre α des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la jonction des arcs

$$V'_m V'_{m+1}, \dots, V'_{m+k-1} V'_{m+k},$$

ou, autrement dit, par l'arc $V'_m V'_{m+k}$. Ainsi nous obtiendrons la formule (82), dans laquelle le nombre α des tour, produits autours de l'axe $O\xi$ par l'arc $V'_m V'_{m+k}$, doit être plus petit que 1 par sa quantité absolue (car l'arc $V'_m V'_{m+k}$ ne peut faire qu'une partie d'un tour entier autour de l'arc $O\xi$, puisqu'il ne compose qu'une partie de l'arc $V'_{-\infty} V'_0 V'_{+\infty}$ de la circonférence F'). Le signe du nombre $k.\alpha$ n'est pas changé, quelque soit le k , pour la trajectoire donnée, et ne dépend que de la position initiale du point v .

Le nombre α , que nous venons d'examiner, tend à zéro, quand, le nombre fini k existant, le nombre m tend à $\pm\infty$, car dans ce cas l'arc $V'_m V'_{m+k}$, proportionné au nombre α , tend à zéro.

La formule (82) montre, que l'index J a une signification essentielle dans la détermination de la partie entière du nombre des tours, produits dans l'intervalle $2k\omega$ par le point V . On peut dire la même chose des tours qui sont produits par la ligne verticale OV autour de l'axe $O\xi$, dirigée vers le centre de gravité G . En plus la détermination de tout un nombre de circonférences entières 2π , qui se trouvent dans l'accroissement relative de l'amplitude de Φ de la quantité v , dépend aussi de l'index J . En vue de cela il est important de pouvoir déterminer le nombre par lequel s'exprime l'index J du mouvement que nous examinons.

Répondons à l'instant, que l'index J du mouvement, que nous examinons, égale zéro. Cependant nous ne pouvons donner la preuve entière de cette thèse que plus loin (voyez le § 9). Pour préparer les bases de la démonstration de cette supposition, remarquons ce qui suit.

On voit par l'examen de la déformation des courbes $\sigma_m(z)$, que nous avons étudiée, que l'index J reste constant, si nous passons d'un mouvement à un autre en changeant la constante réelle z de la formule (80) qui détermine le mouvement, c. à. d. si nous déplaçons la position initiale du point v sur la circonférence E_2 . D'ailleurs il n'est pas difficile de démontrer, que l'index J reste constant encore, quand les quantités constantes l_1 , l_2 et a changent continuellement pendant le passage d'un mouvement à un autre, pourvu que la quantité caractéristique h reste réelle, on observeles conditions (17) et l_1 ne devient pas zéro. Effectivement des changements continuels de ce genre occasionnent des changements *continus* dans la quantité h et dans les fonctions, qui déterminent la dosition du point v . Ces changements n'occasionnent que le déplacement de la courbe σ_m sans la rupture de ses parties et sans que ces parties passent par l'axe $O\xi$.

Ces déformations continues ne changent pas le nombre des tours de la courbe σ_m autour de l'axe $O\xi$ et par conséquent elles ne changent pas l'index J du mouvement.

Plus tard nous nous servirons de ces remarques pour base de la preuve du théorème, par lequel l'index J du mouvement est toujours zéro (voyez le § 9).

Supposons que $J=0$, et fixons notre attention sur quelques conséquences de cette supposition, lesquelles forment la particularité essentielle du cas, où la quantité caractéristique h est une quantité réelle.

Si $J=0$, les courbes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ ne font pas de tours autour de l'axe $O\xi$ et leurs projections $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$ se disposent sur le plan $\xi O\eta$ d'une manière, présentée dans la figure 3, où les courbes $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$ sont représentées schématiquement par des lignes fermées $u u_1 u_2 u_3$ et $u' u'_1 u'_2 u'_3$. Pendant le mouvement du point v le long de chacune de ces courbes, l'amplitude de la quantité correspondante v , déterminée par l'angle $\xi O v$, ne peut jamais sortir hors les limites finies. Par conséquent, pendant la croissance illimitée du temps τ , l'amplitude Φ de la quantité v , déterminée par chacune des expressions (75) et (76), doit toujours varier dans les limites finies et doit garder une valeur finie ayant $\tau = \infty$.

Cette conclusion s'étend jusqu'au mouvement impériodique du point v , déterminé par l'expression (65). Effectivement si $J=0$, le nombre j_k , proportionnel à l'accroissement de l'amplitude correspondante Φ de la quantité v obtenu dans l'intervalle $2k\omega$, s'exprime, comme l'expression (82) le montre, ainsi:

$$j_k = \alpha, \quad -1 < \alpha < +1.$$

Ce nombre j_k reste fini avec n'importe quelle nombre de k ; c'est pourquoi l'amplitude Φ de la quantité v , déterminée par l'expression (65), doit toujours varier dans les limites finies pendant la croissance illimitée du temps τ et doit garder une valeur finie quand $\tau = \infty$.

Nous nous servirons de ces remarques dans le § 9 après avoir démontré le théorème, par lequel $J=0$. Ces remarques, entre autre, sont essentiellement importantes pour la déduction du postulat de Mr. B. Mlodzievsky.

Après avoir examiné les positions relatives des trajectoires des points v et V , qui correspondent à différentes positions initiales du point v sur la circonférence E_2 , remarquons, qu'avec les conditions, que nous considérons, les racines s_1 et s_2 de l'équation (57), exprimées

Fig. 3.

par les expressions (60), et les conjuguées $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_2$ sont liées par les relations :

$$(83) \quad \bar{s}_1 \bar{\delta} = -s_1 \delta, \quad \bar{s}_2 \bar{\delta} = -s_2 \delta.$$

Au moyen de ces relations et de celles de (53) nous nous convainquons, que les quantités q_1 et q_2 , déterminées par les expressions (58''), et les quantités conjuguées remplissent les conditions :

$$(83') \quad \bar{q}_1 = q_2, \quad \bar{q}_2 = q_1,$$

c. à. d. que les q_1 et q_2 sont des *quantités imaginaires conjuguées*. Les expressions (58') et (83') montrent que :

$$(84) \quad W_1(-\tau) = \bar{W}_2 \tau, \quad W_2(-\tau) = \bar{W}_1 \tau.$$

En dérivant ces relations, nous trouvons :

$$(84') \quad W_1'(-\tau) = -\bar{W}_2' \tau, \quad W_2'(-\tau) = -\bar{W}_1' \tau.$$

Les expressions (84) et (84') mènent à toute une suite de conclusions, concernant les trajectoires du point v suivant des conditions différentes.

Après avoir remarqué que suivant l'expression (66)

$$(85) \quad \bar{P} \tau = -P(-\tau),$$

nous trouverons d'abord les expressions :

$$(85') \quad \begin{cases} P(-\tau) \cdot \frac{W_1'(-\tau)}{W_1(-\tau)} = \bar{P} \tau \cdot \frac{\bar{W}_2' \tau}{\bar{W}_2 \tau}, \\ P(-\tau) \cdot \frac{W_2'(-\tau)}{W_2(-\tau)} = \bar{P} \tau \cdot \frac{\bar{W}_1' \tau}{\bar{W}_1 \tau}. \end{cases}$$

Ces expressions démontrent que les trajectoires $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$, qui correspondent aux deux mouvements asymptotiques du point v , déterminés par les expressions (75) et (76), sont disposées symétriquement par rapport à $O\xi$; la position du point v dans le moment τ sur la première trajectoire est symétrique avec la position du point v dans le moment $-\tau$ sur la deuxième trajectoire. Les trajectoires correspondantes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ du point V de la sphère O sont disposées symétriquement par rapport au plan $\xi O\xi$.

Examinons en second lieu les trajectoires du point v , pour lesquelles sa position initiale (dans le moment $\tau = 0$) coïncide avec l'un des deux points du croisement de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$. Nous avons pour ces positions: $v = \pm \sqrt{1 - \xi_2^2}$. Par conséquent on choisit la constante c pour les deux trajectoires, que nous examinons, à condition que

$$\pm \sqrt{1 - \xi_2^2} = P0 \cdot \frac{W_1'0 + c W_2'0}{W_1 0 + c W_2 0}.$$

Cette équation est réduite à la forme :

$$(86) \quad \pm \gamma_2 = \frac{q_1 + c q_2}{1 + c},$$

où

$$(86') \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{1 - \xi_2^2}}{i P_0} = \frac{2a}{l_1} \cdot \sqrt{\frac{B^2 e_0^2}{4}} \cdot (\xi_2 - \xi_0) \cdot \sqrt{1 - \xi_2^2}.$$

La quantité γ_2 se détermine aussi par

$$(86'') \quad \gamma_2 = a \varepsilon' \sqrt{e_0 - e_2},$$

où $\varepsilon' = \pm 1$, $l_1 \varepsilon' > 0$. L'expression (86) conduit à deux valeurs de c , savoir:

$$(87) \quad c' = -\frac{q_1 - \gamma_2}{q_2 - \gamma_2}, \quad c'' = -\frac{q_1 + \gamma_2}{q_2 + \gamma_2}.$$

Au moyen des expressions (83') nous nous convainquons que ces quantités c' et c'' , ainsi que celles qui y sont conjuguées, satisfont les conditions $c' \bar{c}' = 1$, $c'' \bar{c}'' = 1$. Par conséquent le module de chacune des quantités c' et c'' est 1. Comme en plus les deux rotations, que nous étudions, font partie du cas général exprimé par l'expression (80), nous avons: $c' = c z'$, $c'' = c z''$ et de là $c' = c'' z$, où z est une quantité réelle, égale à $z' : z''$. Dans le cas donné la quantité z doit coïncider avec -1 ; car dans le cas contraire les modules des quantités inégales c' et c'' ne pourraient pas coïncider chacun séparément avec 1. Ainsi $z = -1$, autrement $c' = -c''$. A cause de quoi

$$\frac{q_1 + \gamma_2}{q_2 + \gamma_2} = -\frac{q_1 - \gamma_2}{q_2 - \gamma_2},$$

d'où il s'ensuit que

$$(87') \quad q_1 q_2 = \gamma_2^2.$$

Comme d'après les expressions (83') les quantités q_1 et q_2 sont conjuguées, il en résulte des expressions (87') que γ_2^2 est le carré du module de chacune d'elles. C'est pourquoi on peut admettre:

$$(88) \quad \begin{cases} q_1 = \gamma_2 e^{\beta i}, \\ q_2 = \gamma_2 e^{-\beta i}, \end{cases}$$

Nous aurons en même temps:

$$(88') \quad c' = -c'' = e^{\beta i}.$$

Par conséquent les deux mouvements, que nous examinons, se déterminent ainsi:

$$(89) \quad v = P \tau \frac{W_1' \tau \pm e^{\beta i} W_2' \tau}{W_1 \tau \pm e^{\beta i} W_2 \tau}.$$

Au moyen des expressions (84), (84') et (85) nous nous convainquons que la quantité v , déterminée par l'expression (89), change en une quantité conjuguée $\bar{v}$, en remplaçant τ par $-\tau$. Il s'ensuit que la trajectoire de chacun des mouvements du point v , auquel correspond,

au moment $\tau = 0$, la position du point v sur l'intersection de l'axe $O\xi$ avec la circonférence E_2 , présente une courbe, pour laquelle l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie. Le point v occupe des positions symétriques sur cette trajectoire dans les moments τ et $-\tau$.

Dans l'expression (80) nous pouvons admettre $c = e^{\beta i}$, où β est déterminé par (88). Nous aurons

$$(89') \quad v = P\tau \frac{W_1' \tau + e^{\beta i} z W_2' \tau}{W_1 \tau + e^{\beta i} z W_2 \tau},$$

où z est une quantité arbitraire réelle. L'équation (89'), coïncidant avec l'équation (65), concerne plus nettement une forme général de la constante arbitraire c dans la formule (65), précisément: $c = e^{\beta i} z$. Ayant désigné la seconde partie de l'expression (89') plus brièvement par $v(\tau, z)$, au moyen des expressions (84), (84') et (85) nous nous convainquons que la fonction $v(-\tau, z)$ et la quantité conjuguée à la fonction

$$v\left(\tau, \frac{1}{z}\right)$$

coïncident. Il s'ensuit que la trajectoire du point v , déterminée par l'expression (89'), et la trajectoire du point v , déterminée par l'expression

$$(90) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1' \tau + e^{\beta i} \frac{1}{z} W_2' \tau}{W_1 \tau + e^{\beta i} \frac{1}{z} W_2 \tau},$$

sont symétriques par rapport à $O\xi$. Le point v occupe des positions symétriques sur l'une et l'autre des trajectoires dans les moments τ et $-\tau$.

Nous examinerons deux mouvements particuliers du point v , déterminés par l'équation (89'). Pour ces deux mouvements z prend deux valeurs:

$$+\frac{1}{h} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{h}.$$

Il est facile de se convaincre par les expressions (66'), (84) et (84'), que la quantité v prend pour chacun de ces mouvements des valeurs conjuguées au regard de $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$. Conséquemment chacune des trajectoires correspondantes du point v présente une courbe pour laquelle l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie, cependant le point v occupe sur cette trajectoire des positions symétriques dans les moments $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$. Chacune de ces deux trajectoires doit passer par le point correspondant du croisement de la circonférence E_3 avec l'axe $O\xi$; car le point v doit se trouver sur la circonférence E_3 au moment $\tau = \omega$, de plus il doit être symétrique avec lui-même, c. à. d. qu'il doit se trouver sur l'axe $O\xi$ de la symétrie.

Ainsi nous n'avons que quatre trajectoires pareilles pour lesquelles l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie. Chacune d'elles passe par le point correspondant du croisement des circonférences E_2 et E_3 avec l'axe $O\xi$.

§ 7.

Rotation du solide dans le cas, où le corps pesant n'est pas capable de reproduire des mouvements asymptotiques periodiques avec la période 2ω .

Supposons à présent que les racines s_1 et s_2 de l'expression (57) ne sont pas égales et que la quantité caractéristique h est une quantité imaginaire de la forme: $h = e^{\varphi i}$. D'après cela l'amplitude φ de la quantité h satisfait les conditions (63).

En examinant le mouvement du point v , déterminé par l'expression (65), dans la phase du temps $\tau + 2m\omega$, nous devons avoir recours à l'expression (67), qu'on peut présenter ainsi:

$$(91) \quad v_m = P\tau \frac{W_1' \tau + c \cdot e^{2m\varphi i} W_2' \tau}{W_1 \tau + c \cdot e^{2m\varphi i} W_2 \tau}.$$

La liaison entre les quantités

$$(92) \quad Z = v_m \text{ et } z = e^{2m\varphi i},$$

représentée par l'expression (91), appartient aussi à la transformation linéaire (68). Les points Z et z , déterminées par les expressions (92), sont disposés, avec différentes valeurs entières de m , le premier sur la circonférence E , et l'autre sur la circonférence E_0 , décrite, partant du commencement des coordonnées, par le rayon égal à 1. Souvenons-nous de la propriété de la transformation linéaire (68) et concluons, qu'avec le déplacement continu du point z sur la circonférence E_0 le point correspondant Z , qui représente une quantité, déterminée par la formule (68), doit incessamment décrire la circonférence E^* .

Un tour entier du point Z sur la circonférence E doit correspondre à chaque tour entier du point z sur la circonférence E_0 . Si le point z se mouve sur la circonférence E_0 dans une direction positive (dans la direction de l'accroissement de l'amplitude z), le point Z se mouvra sur la circonférence E dans une direction déterminée, qui peut être quelquefois positive et quelquefois négative, c'est comment la direction de l'axe $O\xi$ est choisie. Admettons que la direction de l'axe

*) Dans le cas, où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les équations (91) et (92) déterminent une seule paire de points $Z = v_m$, m ayant toute espèce de valeurs. Ce moyen n'éclaircit pas entièrement la position de la circonférence, par laquelle se meut le point Z , quand z se déplace le long de la circonférence E_0 . Cependant la conclusion, que nous venons de faire par rapport aux changements continuels de Z et qui est juste quand les significations de φ approchent de $\frac{\pi}{2}$, doit garder aussi sa valeur dans la limite quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$O\xi$ est choisie de façon que le mouvement du point Z sur la circonférence E se fait dans une direction *positive**).

On voit au moyen des propriétés de la transformation linéaire (68) qui relie les quantités (92), que toutes les rotations mécaniques possibles du solide, que nous étudions, ne différant que par les positions initiales du point v sur la circonférence E_2 , se déterminent, ayant toutes les autres conditions initiales égales, par l'expression

$$(93) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c \cdot e^{\vartheta i} W_2'\tau}{W_1\tau + c \cdot e^{\vartheta i} W_2\tau},$$

où ϑ est une quantité constante arbitraire *réelle*. Effectivement si, dans la formule (93), la quantité ϑ n'était pas réelle, les positions du point v dans les phases du temps $\tau + 2m\omega$, avec des m différentes, ne se disposeraient pas sur la même circonférence E , ce qui contredirait les propriétés du module de v que nous avons démontrées au commencement dans le § 4.

Comme l'expression $ce^{\vartheta i}$ ne peut jamais devenir zéro ou infini pour les valeurs réelles de ϑ , la formule (93) ne peut jamais coïncider avec l'une ou l'autre des formules (75) et (76). C'est qu'avec les conditions présentes (c. à. d. avec h imaginaire) pas un des mouvements périodiques du point v avec la période 2ω , déterminés par les expressions (75) et (76), ne peut être produit dans le solide donné.

En sousentendant par m' et m'' des nombres entiers et par $v_{m'}$ et $v_{m''}$ des quantités correspondantes, déterminées au moyen de l'expression (91), convenons de sousentendre par $v_{m'}v_{m''}$ l'arc de la circonférence E que le point v décrit, pendant le changement continu de ϑ de $2m'\varphi$ jusqu'à $2m''\varphi$; le point mobile v est déterminé par l'expression (93), dans laquelle τ reste invariable. Nous désignerons l'arc correspondant de la circonférence E sur la sphère O par $V_{m'}V_{m''}$; et nous désignerons par $U_{m'}U_{m''}$ l'arc de la circonférence F_3 , avec laquelle l'arc $V_{m'}V_{m''}$ coïncide au moment $\tau = -\omega$.

Examinons le nombre j des tours, produits par l'arc $V_{m'}V_{m''}$ autour de l'axe $O\xi$. Présentons la quantité $2k\varphi$ ainsi

$$(93') \quad 2k\varphi = 2k_1\pi + \varphi_0,$$

où k_1 est un nombre entier et φ_0 est choisi d'après les conditions:

$$(93'') \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi.$$

*) Le changement de la direction de l'axe $O\xi$ est réduit au changement de la direction Ox ; avec le changement de la direction positive de l'axe Ox le signe de chacune des quantités α , γ , α et p change et, comme le montrent les expressions (6), le signe de la quantité ξ change aussi, c. à. d. que c'est la direction positive de l'axe $O\xi$ qui change. Quant aux signes des quantités η et ξ , ils ne changent pas avec le changement indiqué de la direction de l'axe Ox , comme on le voit au moyen des expressions (6).

L'expression (93') montre qu'avec le changement de ϑ de $2m\varphi$ jusqu'à $2(m+k)\varphi$ le point $z=e^{\vartheta}$ fait k_1 de tours complets sur la circonférence E_0 et plus il fait la partie du tour complet qui correspond au changement de ϑ de $2(m\varphi + k_1\pi)$ jusqu'à $2(m\varphi + k_1\pi) + \varphi_0$. Par conséquent, d'après la propriété de la transformation linéaire (68) ou (93), le point correspondant Z ou v doit faire aussi k_1 de tour entiers et la partie α d'un tour entier sur la circonférence E . Le point correspondant V de la sphère pression (93), et décrit l'arc $V_m V_{m+k}$. On voit par là que le nombre cherché j des tours, produits par l'arc $V_m V_{m+k}$ autour de l'axe $O\xi$, doit être représenté ainsi;

$$(94) \quad j = k_1 + \alpha,$$

où $0 \leq \alpha < 1$ et k_1 et un nombre entier, déterminé par l'expression (93') suivant les conditions (93'').

Il est évident que quand φ_0 est petit, le nombre α doit être aussi petit. Si $\varphi_0 = 0$, $\alpha = 0$.

Au moyen de (63), (93') et (93'') il est facile de se convaincre, que chacun des arcs $V_m V_{m+1}$ et $V_m V_{m+2}$ ne fait qu'une partie d'un tour entier autour de l'axe $O\xi$.

Etablissons ensuite la notion de l'index de la rotation examinée, entièrement analogue à la notion correspondante, que nous avons expliquée dans le paragraphe précédent.

Représentons le morceau Σ_m de la trajectoire Σ , décrit par le point V_m qui représente la quantité v_m , déterminée par l'expression (91), pendant le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. Désignons ensuite par σ_m une courbe fermée, composée de la courbe nommée précédemment Σ_m et de l'arc $U_{m+1} U_m$ de la circonférence F_3 , avec lequel l'arc $V_{m+1} V_m$ coïncide dans le moment $\tau = -\omega$. Elargissons le cas $l_1 = 0$, car dans ce cas chaque courbe fermée σ_m passe au moins par un des pôles de la sphère O .

Les courbes fermées

$$(94') \quad \dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$$

font chacune un nombre égal de tours autour de l'axe $O\xi$. Pour démontrer cette supposition, plaçons les courbes σ_m de la déformation continue dans l'ordre suivant. Examinons l'autre trajectoire du point V , après avoir pris, pour déterminer sa rotation, non pas l'équation (65), mais la (93) qui correspond à une autre position initiale du point v sur la circonférence E_2 . On peut imaginer pour cette trajectoire des courbes fermées correspondantes $\sigma_m(\vartheta)$, qui ont leur construction analogue aux courbes σ_m . Les courbes $\sigma_m(\vartheta)$ coïncident avec les courbes (94'), quand $\vartheta = 0$, et se déforment continuellement pendant la croissance de ϑ de 0 jusqu'à 2φ . Il est évident, qu'avec

une déformation continue pareille la courbe $\sigma_m(\vartheta)$ passera de sa position initiale σ_m (suivant $\vartheta = 0$) à une position finale (quand $\vartheta = 2\varphi$), qui était occupée d'abord par la courbe σ_{m+1} ; pendant son déplacement la courbe $\sigma_m(\vartheta)$ gardera invariable le nombre des tours qu'elle produit autour de l'axe $O\xi$. Il s'ensuit que les courbes (94') font chacune le même nombre de tours autour de l'axe $O\xi$.

Désignons ce nombre de tours par J et nommerons le «*index*» du mouvement examiné. Il s'agit d'éclaircir à présent la question de la détermination de ce nombre, qui joue un grand rôle dans le mouvement que nous examinons.

Disons d'abord sans preuve que *l'index J est toujours égal à zéro dans le cas que nous examinons*. Remettons la preuve entière de cette supposition jusqu'au § 9. Maintenant arrêtons notre attention sur la constance de l'index J avec le changement de quelques quantités constantes.

L'examen de la déformation ci-devant désignée des courbes $\sigma_m(\vartheta)$ montre, que l'index J ne change pas, s'il passe d'un mouvement à l'autre, en changeant la constante ϑ dans l'équation (93), qui détermine le mouvement, c. à. d. en déplaçant la position initiale du point v sur la circonférence E_2 .

D'ailleurs il est facile de montrer, que la constance de l'index J est gardée aussi pendant le changement de mouvements, pendant lequel les constantes l_1 , l_2 et a changent constamment, si seulement la quantité caractéristique h reste imaginaire, on observe les conditions (17) et la quantité l_1 ne devient pas zéro. Effectivement les changements continuels de ce genre produisent des changements continus dans la quantité h et dans les fonctions qui déterminent la position du point v , c. à. d. que ces changements ne font qu'occasionner des déformations continues dans les courbes σ_m (sans faire rompre leurs parties et sans les faire passer par l'axe $O\xi$); ces déformations ne changent pas le nombre des tours, que produit la courbe σ_m autour de l'axe $O\xi$, et conséquemment ne changent pas l'index J .

Si par conséquent l'index J est un zéro pour la rotation donnée, pour laquelle les conditions (17) doivent être remplies, si la quantité l_1 est différente de zéro et si la quantité h a une valeur imaginaire, l'index J restera aussi zéro aux rotations, pendant lesquelles les constantes l_1 , l_2 et a acquièrent des significations contiguës qui satisfont aux mêmes conditions. Nous nous servirons de cette remarque comme de base pour la preuve, qui montre, que l'index J que nous examinons est toujours égal à zéro (voyez le § 9).

Examinons maintenant le nombre j_k des tours produits autour de l'axe $O\xi$ par la partie de la trajectoire Σ , décrite par le point V

dans l'intervalle $2k\omega$, égal au nombre entier k des périodes 2ω . Montrons que ce nombre j_k peut toujours être représenté ainsi:

$$(95) \quad j_k = J \cdot k + k_1 + \alpha,$$

où $0 \leq \alpha < 1$ et k_1 est nombre entier, déterminé par l'expression (93') suivant les conditions (93''). Fixons le moment, à partir duquel commence l'intervalle $2k\omega$, de cette façon: $\tau = \tau' + 2m\omega$, où m est un nombre entier et $-\omega \leq \tau' \leq +\omega$. Représentons les morceaux

$$\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m+1}, \dots, \mathcal{C}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ , décrits par les points

$$V_m, V_{m+1}, \dots, V_{m+k-1}$$

avec le changement de τ de τ' jusqu'à $\tau' + 2\omega$. Ce sont précisément ces morceaux qui sont décrits successivement par le point V dans l'intervalle $2k\omega$ que nous avons examiné. Nous entendons par

$$V'_m, V'_{m+1}, \dots, V'_{m+k}$$

les positions des points

$$V_m, V_{m+1}, \dots, V_{m+k}$$

dans le moment $\tau = \tau'$; les morceaux désignés

$$\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m+1}, \dots, \mathcal{C}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ se transforment en courbes fermées

$$\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_{m+1}, \dots, \mathcal{S}_{m+k-1}$$

par la jonction des arcs correspondantes

$$V'_m V'_{m+1}, V'_{m+1} V'_{m+2}, \dots, V'_{m+k-1} V'_{m+k}$$

de la circonférence F' , arcs qui passent dans la direction opposée. La déformation, que les courbes

$$\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_{m+1}, \dots, \mathcal{S}_{m+k-1}$$

subissent pendant le changement continu de τ' jusqu'à $-\omega$, n'occasionne pas la rupture de leurs parties et leur passage par l'axe $O\xi$ et conduit ces courbes en cas limite, d'après $\tau' = -\omega$, en coïncidence avec les courbes

$$\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_{m+1}, \dots, \mathcal{C}_{m+k-1}.$$

A cause de cela chacune des courbes fermées

$$\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_{m+1}, \dots, \mathcal{S}_{m+k-1}$$

fait J de tours autour de l'axe $O\xi$, et réunies ensemble elles font $J.k$ de tours. Pour obtenir le nombre j_k il ne reste qu'à joindre au nombre $J.k$ le nombre j des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la réunion des arcs

$$V'_m, V'_{m+1}, \dots, V'_{m+k-1}, V'_{m+k}$$

ou, autrement dit, par un arc $V'_m V'_{m+k}$. Ce dernier nombre j est déterminé par l'expression (94). De sorte que l'expression (95) se trouve entièrement démontrée.

Représentons l'expression (95) ainsi :

$$(95') \quad j_k = \left(J + \frac{k_1}{k} \right) k + \alpha$$

et examinons la dans la limite, quand k tend à ∞ . Par l'expression (93') suivant les conditions (93'') on voit, que le rapport $\frac{k_1}{k}$ tend au nombre positive $\frac{\varphi}{\pi}$, qui d'après les inégalités (63) diffère de zéro et n'est pas plus grand que $\frac{1}{2}$. En même temps la somme

$$J + \frac{k_1}{k}$$

tend dans la limite à la quantité

$$J + \frac{\varphi}{\pi},$$

qui par sa quantité absolue ne peut pas être plus petite que $\frac{\varphi}{\pi}$.

Avec ces conditions la seconde partie de l'expression (95') doit tendre, par sa valeur, à l'infini. Par conséquent le nombre absolu des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la ligne OV , grandit indéfiniment dans l'intervalle croissant sans limites. Cette conclusion a lieu aussi quand $J = 0$.

Cette déduction montre que l'amplitude Φ de la quantité v , déterminée par l'expression (65), doit atteindre, pendant la croissance illimitée du temps τ , la limite $\Phi = \infty$. Cette propriété des changements continuels de l'amplitude Φ forme la particularité essentielle du cas de rotation d'un solide que nous examinons, c. à d. du cas où la quantité caractéristique h est une quantité imaginaire. L'existence de cette propriété, J étant zéro, est nécessaire et suffit pour que la quantité caractéristique h soit imaginaire.

Les circonstances examinées existant, le solide n'admet pas, comme il a été démontré, les mouvements asymptotiques périodiques (75) et (76); cependant dans le cas que nous examinons le point v peut avoir quelquefois des mouvements périodiques d'un autre caractère. Le mouvement des points v et V sera périodique, si l'amplitude φ de la quantité caractéristique h est commensurable avec le nombre π . Effectivement nous pouvons dans ce cas représenter l'amplitude φ ainsi:

$$(96) \quad \varphi = \frac{n'}{n} \pi,$$

où n' et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux, satisfaisants l'inégalité: $n' < 2n$ d'après les conditions (63). Quand φ a cette valeur, nous voyons d'après les expressions (65) et (91) que $v_n = v$, c. à d. que la fonction v , déterminée par l'expression (65), est

périodique avec la période $2n\omega$. En même temps le mouvement des points correspondants v et V doit être périodique avec la même période. Cette périodicité de mouvement a lieu avec toute position initiale du point v sur la circonférence E_2 . La trajectoire Σ présente dans ce mouvement une courbe fermée, décrite entièrement par le point V dans l'intervalle $2n\omega$. Le nombre des tours, faits autour de l'axe $O\xi$ par la trajectoire Σ , ou, autrement, le nombre des tours, produits dans l'intervalle $2n\omega$ par la ligne OV autour de la ligne $O\xi$, est déterminé au moyen des expressions (95) et (93'), dans lesquelles on doit admettre: $k=n$ et où on doit attribuer à la quantité φ la signification (96). Nous obtiendrons par là: $k_1=n'$, $\varphi_0=0$ et $\alpha=0$. Ainsi le nombre j_n des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la courbe fermée Σ , sera donnée par

$$(97) \quad j_n = Jn + n'.$$

Passons à présent à la question du nombre et de la position des points du croisement mutuel des parties de la trajectoire Σ . Si l'amplitude φ est incommensurable avec π , le nombre de ces points est infiniment grand et ils couvrent entièrement par leurs positions la zone sphérique entre les circonférences E_2 et E_3 . Mais si l'amplitude φ est commensurable avec π , le nombre des points du croisement mutuel des morceaux de la trajectoire Σ sera fini. Pour éclaircir les propriétés de la trajectoire Σ , nous examinerons d'abord en détail les croisements mutuels de ces morceaux pour le cas, où φ et π sont commensurables; puis au moyen des limites nous passerons au cas, où φ et π sont incommensurables.

Ainsi supposons que l'amplitude φ est commensurable avec π et peut être présentée par l'expression (96).

Les points v_m de la circonférence E , figurant des quantités qui peuvent être déterminées pour toutes les quantités entières m par l'expression (91), doivent, suivant la condition (96), se répéter périodiquement, en coïncidant avec n de points

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}.$$

Ces points sont disposés sur la circonférence E les uns après les autres non pas dans l'ordre de l'indice (à part le cas $n'=1$), mais dans celui que nous étudierons plus à fond.

D'après la similitude de la répartition des points Z et z , déterminés par les expressions (92) et liés par la relation (68), la succession des points

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$$

sur la circonférence E doit être semblable à celle de la succession des points correspondants sur la circonférence E_0 , points qui représentent les quantités

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1},$$

où, en général,

$$z_m = e^{\frac{2mn'\pi i}{n}}.$$

Il s'ensuit de l'expression

$$z_{m+1} = z_m e^{\frac{2n'\pi i}{n}},$$

que $n' - 1$ points, pris du groupe:

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1},$$

sont répartis sur l'arc $z_m z_{m+1}$, qui est décrite par le point $z = e^{\vartheta i}$ pendant la croissance de ϑ de

$$\frac{2mn'\pi}{\pi} \quad \text{à} \quad \frac{2(m+1)n'\pi}{n}.$$

Admettons que ces $n' - 1$ de points, étant disposés dans leur succession sur l'arc $z_m z_{m+1}$, soient présentés de la manière suivante:

$$z', z'', \dots, z^{(n'-1)}.$$

Il est évident que ces points représentent les quantités de la forme:

$$z^{(k)} = z_m e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

où

$$k = 1, 2, \dots, n' - 1.$$

Admettons ensuite que les correspondants des points

$$v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$$

seront:

$$v', v'', \dots, v^{(n'-1)},$$

de sorte que

$$v^{(k)} = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + cz^{(k)}W_2'\tau}{W_1'\tau + cz^{(k)}W_2\tau}.$$

En se basant sur l'analogie de la répartition des points $Z = v^{(k)}$ et des points $z = z^{(k)}$, les points

$$v', v'', \dots, v^{(n'-1)}$$

doivent être répartis sur l'arc $v_m v_{m+1}$ de la circonférence E dans la succession des index. La répartition des points

$$V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$$

sur la circonférence F se soumet à la même loi, c. à. d. que les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)},$$

correspondant aux points

$$v', v'', \dots, v^{(n'-1)},$$

se répartissent sur l'arc $V_m V_{m+1}$ de la circonférence F dans l'ordre de la croissance des index.

Après avoir fixé la répartition des points V_m sur la circonférence F , passons à l'examen des morceaux

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}$$

de la trajectoire Σ , décrits par les points

$$V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$$

avec le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. Ces morceaux se composent d'une manière conforme premièrement des parties

$$K_0, K_1, \dots, K_{n-1},$$

décrites par les points

$$V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$$

pendant le changement du temps τ depuis $-\omega$ jusqu'à 0, et puis des parties

$$L_0, L_1, \dots, L_{n-1},$$

décrites par les mêmes points pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à $+\omega$. Comme les points

$$V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$$

ne peuvent aucunement coïncider les uns avec les autres, les courbes

$$K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$$

ne peuvent évidemment pas se croiser; il en est de même des courbes

$$L_0, L_1, \dots, L_{n-1}.$$

Cependant les courbes

$$K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$$

peuvent se croiser avec les courbes

$$L_0, L_1, \dots, L_{n-1}.$$

Suivant la succession des points V_m sur la circonférence F , les courbes K_m se disposent dans l'intérieur de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 non pas dans l'ordre des index, mais dans un autre (excepté le cas $n' = 1$). D'après cet ordre les courbes

$$K', K'', \dots, K^{(n'-1)},$$

se disposent successivement entre les courbes K_m et K_{m+1} . Les courbes

$$K', K'', \dots, K^{(n'-1)}$$

sont décrites pendant le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à 0 par les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)},$$

qui sont disposés sur l'arc $V_m V_{m+1}$ de la circonférence F .

Les courbes L_m se disposent dans la zone sphérique de la même manière, de sorte que les courbes

$$L', L'', \dots, L^{(n'-1)},$$

décrites pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω par les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)},$$

se disposent entre les courbes L_m et L_{m+1} .

Les courbes L_m et K_m forment par leurs croisements mutuels dans l'intérieur de la zone sphérique un filet, dont l'épaisseur dépend du nombre j_n des tours, produits par la courbe fermée Σ autour de l'axe $O\xi$; le nombre j_n est déterminé, comme nous l'avons vu, par l'expression (97). Si nous sousentendons par j'_n la valeur absolue du nombre j_n désigné et par M le nombre des points des croisements mutuels des morceaux de la trajectoire Σ , l'inégalité

$$(98) \quad M \geq n(j'_n - 1)$$

doit avoir lieu. On peut démontrer cette supposition comme il suit. Faisons passer par l'intérieur de la zone sphérique, que nous examinons, la courbe l partant de la circonférence F_2 jusqu'à la circonférence F_3 . Admettons que la circonférence mobile F , sur laquelle les points V_m sont disposés, croise, dans toutes ses positions, la courbe l une seule fois. Nommons la courbe l , qui satisfait à toutes ces exigences, *transversale* de la zone sphérique. Distinguons par rapport à cette transversale deux rives, comme on distingue les rives sur le globe terrestre en dessinant la place de la rivière par une ligne courbe. Supposons ensuite, que le point V décrive la trajectoire Σ , et examinons les passages du point V par la transversale l , en les partageant en deux catégories, selon que le passage correspondant du point V par la transversale l se produit en partant de la rive droite et en allant à la rive gauche ou vice-versa. Les passages de chaque catégorie sont comptés séparément. La quantité absolue de la différence des deux nombres, que nous avons ainsi obtenus, doit coïncider avec le nombre absolu j'_n des tours, produits par la courbe Σ autour de l'axe $O\xi$. En même temps il est évident que la courbe Σ doit croiser la transversale l moins de j'_n de fois. Supposons que la transversale l est tracée de façon qu'elle n'ait avec la courbe L_m qu'un seul point commun. Si avec cela nous excluons de la courbe Σ la partie L_m , la transversale l doit croiser la courbe Σ dans ses autres parties pas

moins de $j'_n - 1$ de fois. Maintenant il est facile de voir, qu'en conservant toutes les propriétés désignées de la transversale l nous pouvons la faire passer aussi près, que nous voulons, de la coïncidence avec la courbe L_m . Et c'est pourquoi la courbe L_m doit se croiser avec les autres parties de la courbe Σ pas moins de $j'_n - 1$ de fois. Ce qui vient d'être dit, se rapporte à chacune des courbes $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$. Par conséquent le nombre entier M des points de croisement mutuel des morceaux de la trajectoire Σ n'est pas plus petit que le nombre $n(j'_n - 1)$. Ainsi l'inégalité (98) est démontrée.

L'inégalité (98) montre, que $n(j'_n - 1)$ est le *minimum* du nombre M des points du croisement mutuel des morceaux de la courbe Σ . Dans beaucoup de cas le nombre M coïncide avec le *minimum*, c. à d. qu'il est déterminé par l'expression:

$$(99) \quad M = n(j'_n - 1).$$

Il en est ainsi par exemple dans les cas où l'amplitude Φ de la quantité v , déterminée par l'expression (65), ou diminue constamment ou augmente constamment pendant la croissance du temps τ . Mais dans certains cas l'amplitude désignée Φ balance, admettant avec quelques-unes des positions du point v la croissance et avec d'autres la décroissance. Dans ces cas le nombre M peut surpasser la limite inférieure $(j'_n - 1)$.

Si $J = 0$, on a d'après (97) $j'_n = n'$. Par conséquent, ayant $J = 0$, l'inégalité (98) s'exprimera ainsi:

$$(99') \quad M \geq n(n' - 1),$$

et l'expression (99) qui détermine le minimum de M devient:

$$(99'') \quad M = n(n' - 1).$$

On voit par l'inégalité (99') ce qui suit: quand le nombre n' est considérable, le nombre M des points de croisement mutuel des morceaux de la trajectoire Σ doit être aussi considérable; donc l'épaisseur du filet formé par les croisements des courbes K_m et L_m doit être considérable.

Pour se faire une idée plus nette du filet, formé par la courbe Σ , fixons notre attention sur un cas plus simple, quand l'amplitude Φ de la quantité v augmente ou diminue incessamment pendant la croissance du temps τ . Ce cas ne peut pas avoir lieu toujours, mais il peut se réaliser. Examinons dans ce cas non seulement le nombre, mais aussi la répartition relative des points du croisement mutuel des parties de la courbe Σ , en supposant que l'index J est zéro, comme cela arrive toujours, et que la direction de l'axe $O\xi$ est choisie de façon que Φ grandisse incessamment.

Aux conditions, que nous examinons, les morceaux successifs Σ_m et Σ_{m+1} de la courbe Σ ne peuvent pas se croiser. La courbe Σ_m , représentée schématiquement sur la figure 4 par la ligne $u'u'u_1$, et l'arc u_1u de la circonférence F_3 , renfermé entre les positions u_1 et u des points V_{m+1} et V_m au moment $\tau = -\omega$, pris ensemble

Fig. 4.

forment sur la sphère O une courbe fermée σ_m , qui sépare une partie entière sur la surface de la sphère O^*). De même la courbe Σ_{m+1} , représentée sur la figure 4 par la ligne $u_1u''u_2$, et l'arc u_2u_1 de la circonférence F_3 , enfermé dans les positions u_2 et u_1 des points V_{m+1} et V_m au moment $\tau = +\omega$, forment sur la sphère O une courbe fermée σ_{m+1} . En outre les parties L_m et K_{m+1} des courbes Σ_m et Σ_{m+1} , représentées sur la figure 4 par les lignes $u'u_1$ et u_1u'' , et l'arc $u'u''$ de la circonférence F_2 , enfermé dans les positions u' et u'' des points V_m et V_{m+1} au moment $\tau = 0$, forment ensemble sur la sphère O une courbe fermée $u'u''u_1u'$, que nous désignerons par σ'_m .

Les points ci-devant désignés

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)},$$

qui se trouvent sur l'arc V_mV_{m+1} de la circonférence F , se placent au moment $\tau = -\omega$ sur l'arc uu_1 de la circonférence F_3 . Puis pendant le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à 0 les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)}$$

décrivent, tout en gardant sur l'arc mobile F la succession dans leur position, les parties

$$K', K'', \dots, K^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \dots, \Sigma^{(n'-1)}$$

de la courbe Σ et au moment $\tau = 0$ ils se disposent sur l'arc $u'u''$ de la circonférence F_2 . On voit par là que les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)}$$

doivent se trouver au commencement de l'intervalle τ de $-\omega$ jusqu'à 0

*) Les points u , u_1 et u_2 ne présentent sur la figure 4 que la désignation plus brève des points U_m , U_{m+1} et U_{m+2} de la circonférence F_3 .

dans la surface, limitée par la courbe σ_m , et vers la fin de ce même intervalle ils doivent se trouver en dehors de cette surface et au milieu de celle qui est limitée par la courbe σ'_m ; par conséquent ils doivent traverser la courbe σ_m dans l'intervalle du temps τ de $-\omega$ jusqu'à 0. Ce passage ne peut se produire que par l'arc $u'u_1$, c. à d. par la partie L_m du morceau Σ_m , et non par l'arc $u'u'$, parce que les courbes

$$K', K'', \dots, K^{(n'-1)}$$

ne peuvent pas couper $u'u'$, c. à d. la courbe K_m . Ainsi les parties

$$K', K'', \dots, K^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \dots, \Sigma^{(n'-1)}$$

doivent couper la partie L_m du morceaux Σ_m et chacune une seule fois (ce qui dérive de la croissance continue de la longitude Φ du point V). Désignons ces croisements successives d'une manière conforme par $\beta'_m, \beta''_m, \dots, \beta^{(n'-1)}_m$. Ces points doivent être placés d'après les circonstances, que nous examinons, le long de la courbe L_m dans la succession des index supérieurs.

Supposons maintenant, que le temps τ change de 0 jusqu'à $+\omega$. Avec ces conditions les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)}$$

décrivent les parties

$$L', L'', \dots, L^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \dots, \Sigma^{(n'-1)}$$

et en même temps ils passent du domaine, limité par la courbe σ'_m , dans celui qui est limité par la courbe σ_{m+1} , en se disposant dans le moment $\tau = \omega$ sur l'arc $u_1 u_2$. De cette façon les parties

$$L', L'', \dots, L^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \dots, \Sigma^{(n'-1)}$$

coupent la courbe $u_1 u''$ ou, autrement, la partie K_{m+1} du morceau Σ_{m+1} dans les points, que nous désignerons d'une manière correspondante $\alpha'_{m+1}, \alpha''_{m+1}, \dots, \alpha^{(n'-1)}_{m+1}$. Ces points se disposent le long de la courbe K_{m+1} dans l'ordre de la décroissance des index supérieurs.

Ce qui vient d'être énoncé s'étend, si les conditions que nous étudions existent, sur tous les morceaux de la trajectoire du point V et montre que chaque morceau Σ_m contient sur son étendue $2(n'-1)$ de points, auxquels ce morceau se croise avec ceux de la courbe Σ . La première partie de ces points de croisement se trouve sur la partie K_m , et la seconde partie sur la partie L_m de la courbe Σ_m .

S'il se trouve sur chaque courbe L_m $n' - 1$ de points de croisement, produits par cette ligne avec les autres parties de la courbe Σ , le nombre entier M de tous les points de croisement mutuel des morceaux de la courbe Σ s'exprimera, considérant les conditions nommées, de cette manière: $M = n(n' - 1)$ ce qui est entièrement conforme à la formule (99").

Passons à présent au cas où l'amplitude φ de la quantité caractéristique h est incommensurable avec le nombre π , de sorte que le rapport $\varphi : \pi$ est un nombre irrationnel. Pour se faire une idée des points de croisement mutuel de la trajectoire Σ dans ce cas, changeons le nombre incommensurable $\varphi : \pi$ en un nombre rationnel *rapproché* et, tout en examinant ce cas rapproché, nous passerons à la limite, quand ce nombre rationnel tend au nombre irrationnel désigné. Autrement dit, admettons avec un *rapprochement* l'existence de l'expression (96) avec laquelle le mouvement périodique des points v et V avec la période $2n\omega$ aura de la valeur. Les nombres entiers n' et n grandissent d'une manière illimitée par suite du rapprochement de la corrélation $n' : n$ de la limite $\varphi : \pi$. Il se produit en même temps la croissance illimitée du période $2n\omega$, ainsi que du nombre des croisements de chaque morceau Σ_m avec les autres parties de la trajectoire Σ du point V . Comme en même temps les points

$$V', V'', \dots, V^{(n'-1)},$$

pris du nombre des points $V_1, \dots, V_{n-1}$ et situés successivement sur l'arc $V_m V_{m+1}$, avec la croissance des nombres n' et n vont en se rapprochant et couvrent entièrement, dans la limite, l'arc $V_m V_{m+1}$ de la circonférence F , les morceaux

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}$$

de la trajectoire Σ couvrent entièrement, dans la limite, la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 ; les points de croisement des morceaux de la trajectoire Σ remplissent aussi totalement cette zone sphérique. Autrement dit dans le cas donné la trajectoire Σ forme par le croisement réciproque de ses morceau un filet infiniment serré, c. à. d. un filet avec un nombre infini de points de sections, qui couvrent entièrement l'intérieur de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 .

Si dans le cas, que nous examinons, nous limitons la variation du temps τ par des limites finies, le point V décrira dans cet intervalle fini une courbe finie, qui, se coupant elle-même, forme un filet avec un nombre fini de points de section; plus l'intervalle sera grand plus ce filet sera serré.

Nous remarquerons par rapport aux moments du temps τ , pendant lesquels le point mobile V passe par les points de section des morceaux

de la trajectoire, qu'on peut se servir pour les déterminer de la même équation, qui se trouve dans le § précédent, c. à. d. de l'équation (80').

Après avoir étudié la position relative des trajectoires du point v , correspondant à ses positions initiales différentes sur la circonférence E_2 , nous remarquerons, qu'avec les conditions que nous examinons les racines s_1 et s_2 de l'équation (57), représentées par les expressions (60), et les quantités conjuguées sont liées par les corrélations:

$$\bar{s}_1 \bar{\delta} = -s_2 \delta, \quad \bar{s}_2 \bar{\delta} = -s_1 \delta.$$

A l'aide de ces corrélations et des corrélations (53) nous nous convainquons que les quantités q_1 et q_2 , déterminées par les expressions (58''), et les quantités conjuguées remplissent les conditions:

$$(100) \quad \bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_2 = q_2,$$

c. à. d. que les quantités q_1 et q_2 sont réelles. Par là et d'après les expressions (58'') il s'ensuit que:

$$(100') \quad W_1(-\tau) = \bar{W}_1 \tau, \quad W_2(-\tau) = \bar{W}_2 \tau.$$

En différentiant ces corrélations nous trouvons:

$$(100'') \quad W_1'(-\tau) = -\bar{W}_1' \tau, \quad W_2'(-\tau) = -\bar{W}_2' \tau.$$

Ayant ces corrélations, nous allons examiner deux trajectoires du point v , pour lesquelles la position initiale (au moment $\tau=0$) coïncide avec l'un ou l'autre des points de l'intersection de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$. Nous avons pour ces positions initiales: $v = \pm \sqrt{1 - \xi^2}$. En déterminant par ces positions initiales les significations correspondantes c' et c'' de la constante c , nous obtenons:

$$c' = -\frac{q_1 - \gamma_2}{q_2 - \gamma_2}, \quad c'' = -\frac{q_1 + \gamma_2}{q_2 + \gamma_2},$$

où γ_2 est déterminé par l'expression (86'). Comme les deux mouvements que nous examinons se trouvent encore dans le cas général représenté au moyen de l'équation (93), nous avons: $c' = c'z$, $c'' = cz''$ et par là $c' = c''z$, où z' , z'' et z sont des quantités dont les modules coïncident avec 1. Dans le cas présent la quantité z doit coïncider avec -1 , car les quantités inégales c' et c'' sont réelles. Ainsi $z = -1$, autrement $c' = -c''$. De là:

$$\frac{q_1 + \gamma_2}{q_2 + \gamma_2} = -\frac{q_1 - \gamma_2}{q_2 - \gamma_2},$$

d'où il s'ensuit que:

$$(101) \quad q_1 q_2 = \gamma_2^2.$$

C'est pourquoi nous pouvons supposer que:

$$(101') \quad \begin{cases} q_1 = \gamma_2 b, \\ q_2 = \gamma_2 : b. \end{cases}$$

Il est évident que la quantité b , faisant partie des expressions (101'), est réelle. Au moyen des expressions (101') nous nous convainquons que :

$$(101'') \quad c' = -c'' = b.$$

Par conséquent les deux mouvements, auxquels le point v se dispose sur l'axe $O\xi$ quand $\tau = 0$, se déterminent à l'aide des expressions :

$$(102) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau \pm b W_2'\tau}{W_1\tau \pm b W_2\tau},$$

où b est une quantité, déterminée par les expressions (101'). Au moyen des expressions (100), (100') et (100'') nous nous convainquons que la quantité v , déterminée par l'expression (102), devient, avec le remplacement de τ par $-\tau$, la quantité conjuguée. Par conséquent la trajectoire de chacun des deux mouvements, que nous venons d'examiner, représente une courbe pour laquelle l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie. Le point v occupe sur chaque trajectoire les positions symétriques dans les moments τ et $-\tau$.

Dans l'expression (93) nous pouvons admettre: $c = b$, en sousentendant par b une quantité déterminée par une des expressions (101'). Nous aurons par là :

$$(103) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + bz W_2'\tau}{W_1\tau + bz W_2\tau},$$

où $z = e^{\vartheta i}$. L'équation (103), coïncidant avec l'équation (65), concerne plus nettement une forme générale de la constante arbitraire c dans la formule (65), précisément: $c = b e^{\vartheta i}$, où ϑ est une quantité arbitraire réelle. Après avoir désigné la seconde partie de l'expression (103) par $v(\tau, z)$, nous nous convainquons au moyen des expressions (100') et (100'') que la fonction $v(-\tau, z)$ et la quantité conjuguée à la fonction

$$v\left(\tau, \frac{1}{z}\right),$$

coïncident. On voit par là que la trajectoire du point v , déterminée par l'expression (103), et la trajectoire du point v , déterminée par l'expression :

$$(104) \quad v = P\tau \frac{W_1'\tau + b \frac{1}{z} W_2'\tau}{W_1\tau + b \frac{1}{z} W_2\tau},$$

sont symétrique relativement à l'axe $O\xi$; le point v occupe des positions symétriques sur l'une et l'autre des trajectoires dans les moments τ et $-\tau$.

Examinons parmi les mouvements du point v , déterminés par l'expression (103), deux mouvements, pour lesquels z prend les valeurs suivantes :

$$+ e^{-\varphi i} \quad \text{et} \quad - e^{-\varphi i},$$

où φ est l'amplitude de la quantité caractéristique h . Il est facile de

se convaincre au moyen des expressions (66'), (100') et (100''), que la quantité v prend pour chacun de ces mouvements, quand $\tau = \omega + u$ et quand $\tau = \omega - u$, des valeurs conjuguées. Par conséquent chacune des trajectoires, que nous examinons, du point v présente une courbe, pour laquelle $O\xi$ est un axe de symétrie, avec lequel le point v occupe sur la trajectoire des points symétriques aux moments $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$. Chacune de ces deux trajectoires passe, comme il est facile de le voir, par un des points correspondant du croisement de la circonférence E'_3 avec l'axe $O\xi$ et le mobile v passe par ce point au moment $\tau = \omega$.

Ainsi dans ce cas comme dans celui, que nous avons examiné dans le paragraphe précédent, nous n'avons que *quatre* trajectoires, pour lesquelles l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie.

Comme conclusion du paragraphe présent il faut dire, que le mouvement du point v , déterminé par l'expression (65), est instable à cause des perturbations qui agissent sur l'amplitude φ de la quantité h . Effectivement, si l'amplitude φ subit la moindre perturbation $\Delta\varphi$, la position du point v_m , déterminée par l'expression (91), et sa position agitée, qui représente la quantité

$$P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + ce^{2m(\varphi+\Delta\varphi)i}W_2'\tau}{W_1\tau + ce^{2m(\varphi+\Delta\varphi)i}W_2\tau},$$

différent l'une de l'autre par une quantité finie, suivant le nombre entier m , pris à volonté; cette circonstance caractérise le mouvement instable du point v dans le cas que nous examinons.

§ 8.

Mouvement du point v dans le cas, où le solide est capable de reproduire un seul mouvement asymptotique périodique avec la période 2ω .

Examinons ici le cas de transition, quand les racines des équations (57) sont égales ($s_1 = s_2 = s$); la quantité caractéristique h doit être égale à l'unité.

Dans ce cas le mouvement du point v se détermine par l'expression (73) et sa position v_m dans la phase du temps $\tau + 2m\omega$ est déterminée par l'expression (74). Si m tend à $+\infty$ ou à $-\infty$, v_m tend dans les deux cas à la même position limite

$$(105) \quad v_{\pm\infty} = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau}{W_1\tau}.$$

Par conséquent le mouvement du point v , déterminé par l'expression (73), étant impériodique pour les changements finis du temps τ , tend, avec la diminution infinie du temps τ ainsi qu'avec l'augmentation

infinie, à un seul mouvement périodique avec la période 2ω , déterminé au moyen de l'expression

$$(106) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau}{W_1\tau}.$$

Nommons ce mouvement périodique mouvement *asymptotique*. C'est à ce mouvement unique asymptotique du cas donné qu'aboutissent les deux mouvements *asymptotiques*, déterminés par les expressions (75) et (76).

La liaison qui existe entre les quantités:

$$(107) \quad Z = v_m \text{ et } z = 2m\omega,$$

représentée par l'expression (74), appartient évidemment à la transformation linéaire

$$(108) \quad Z = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c(W_3'\tau + zW_1'\tau)}{W_1\tau + c(W_3\tau + zW_1\tau)}.$$

Comme les tableaux des quantités Z et z , déterminées par les expressions (107), se disposent, ayant l'entière arbitraire m , l'une sur la circonférence E et l'autre sur la droite $O\xi$, le point correspondant Z doit changer constamment de place sur la circonférence E pendant la translation continuelle de z le long de l'axe $O\xi$.

On peut voir par là, en outre, que tous les mouvements mécaniques possibles du solide, que nous examinons, qui ne se diffèrent que par les positions initiales du point v sur la circonférence E_2 , sont déterminés, quand les autres circonstances initiales sont égales, par l'expression de la forme:

$$(109) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c(W_3'\tau + zW_1'\tau)}{W_1\tau + c(W_3\tau + zW_1\tau)},$$

où z est une quantité constante *réelle*.

Si z change de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, le point correspondant Z , déterminé par l'expression (108), décrit une seule fois la circonférence entière E depuis le point $v_{\pm\infty}$, représentant la quantité (105), jusqu'au retour à ce point. Par là on voit que les points

$$v_{-\infty}, \dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{+\infty},$$

qui représentent les quantités v_m , déterminés par l'expression (74), se disposent le long de la circonférence E dans l'ordre de la croissance des index. Cependant ils forment des deux côtés du point $v_{\pm\infty}$ les lignes pointillées, dont les points contigus v_m et v_{m+1} se rapprochent infiniment à mesure qu'ils approchent de la position $v_{\pm\infty}$. C'est de cette même manière que se disposent les points correspondants V_m de la circonférence F sur la sphère O .

Si nous supposons que le temps τ change de $-\omega$ jusqu'à $+\omega$, les points V_m décriront sur la sphère O les courbes Σ_m , qui forment ensemble une courbe continuelle Σ , par laquelle se mouve le point V .

Les morceaux Σ_m de cette courbe se disposent successivement les uns après les autres dans la zone sphérique entre les circonférences E_2 et E_3 . Dans la limite, quand m tend ou à $-\infty$ ou à $+\infty$, les morceaux Σ_m tendent à une seule et même position de la limite $\Sigma_{\pm\infty}$, qui représente en même temps la trajectoire fermée du point V dans le cas du mouvement asymptotique périodique, déterminé par l'expression (106).

Prenant m' et m'' pour des nombres entiers, convenons de sousentendre par $v_m' v_m''$ l'arc de la circonférence E , décrit par le point v , qui représente une quantité, déterminée par l'expression (109), pendant le changement de z de $2m'\omega$ jusqu'à $2m''\omega$. Nous désignerons l'arc correspondant de la circonférence F par $V_m' V_m''$. Cet arc ne forme qu'une partie de la circonférence F .

Désignons par σ_m une courbe fermée, qui se compose de la courbe déjà nommée Σ_m et de l'arc $U_{m+1} U_m$ de la circonférence F_3 , avec lequel l'arc $V_{m+1} V_m$ coïncide au moment $\tau = -\omega$. Les courbes fermées

$$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$$

doivent faire chacune un nombre égal de tours autour de l'axe $O\xi$, ce qui est démontré par des procédés analogues à ceux, qui ont été employés dans les paragraphes précédents et que pour plus de brièveté nous ne répéterons pas ici.

Nous désignerons par J le nombre des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par chacune des courbes σ_m , et nous le nommerons «index» du mouvement, que nous examinons.

Dans le paragraphe suivant il nous sera démontré, que cet index est zéro. Maintenant bornons nous à remarquer: 1) que l'index J garde sa constance avec le changement d'un mouvement à un autre, pendant lequel change d'une manière arbitraire la position initiale du point v sur la circonférence E_2 ; 2) que l'index J garde sa constance avec le changement continu des constantes l_1, l_2 et a , pendant lequel la quantité caractéristique h reste toujours égale à 1 et quand les conditions (17) ont toujours lieu et l_1 ne devient jamais zéro. Cette constance est confirmée par des preuves analogues à celles qui se rencontrent dans les paragraphes précédents.

La courbe σ_m , que nous avons indiquée, change dans la limite en trajectoire $\Sigma_{\pm\infty}$ du mouvement asymptotique périodique, déterminé par l'expression (106), quand m tend à $\pm\infty$. C'est pourquoi la courbe $\Sigma_{\pm\infty}$ fait J de tours autour de l'axe $O\xi$. Autrement dit, si le mouvement périodique (106) a lieu, la ligne verticale OV fait dans le période du temps 2ω J de tours autour de l'axe $O\xi$. Comme en réalité $J = 0$, ainsi que nous le verrons plus bas, la courbe $\Sigma_{\pm\infty}$ ne fait aucun tour autour de l'axe $O\xi$ et par conséquent la droite OV ne peut pas non plus produire de tours autour du même axe.

Admettons que le mouvement impériodique, déterminé par l'égalité (73), a lieu. Le nombre j_k de tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la partie de la trajectoire Σ , décrite par le point V dans l'intervalle $2k\omega$, égal au nombre entier k des périodes 2ω , se présente ainsi:

$$(110) \quad j_k = J \cdot k + \alpha,$$

où $-1 < \alpha < +1$. La démonstration de l'expression (110) est analogue aux démonstrations des formules (82) et (95) des paragraphes précédents et n'exige d'être répétée. Remarquons ce qui suit: si nous exprimons le moment, d'où commence l'intervalle $2k\omega$, que nous examinons, de la façon suivante: $\tau + 2k\omega$ où $-\omega \leq \tau \leq +\infty$, le nombre α , faisant partie de l'expression (110), présente le nombre de tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par l'arc $V_m V_{m+k}$ de la circonférence F . Si k est un nombre fini et si m tend à $+\infty$, l'arc $V_m V_{m+k}$ tend à zéro et le nombre correspondant α dans l'expression (110) tend aussi à zéro.

Si $J = 0$, le nombre j_k des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la route, décrite par le point V dans l'intervalle $2k\omega$, est déterminé par l'expression: $j_k = \alpha$ où $-1 < \alpha < +1$. Ce nombre j_k reste fini avec le nombre k aussi grand que l'on veut, et à cause de cela l'amplitude Φ de la quantité v , déterminée par l'expression (73), doit toujours varier, avec la croissance illimitée du temps τ , dans les limites finies et doit rester finie, quand $\tau = \infty$.

Pour être plus brefs nous ne ferons pas de détails sur les croisements réciproques des morceaux de la trajectoire Σ , croisements qui possèdent des qualités analogues à celles, que nous avons examinées dans le § 6. Nous ne remarquerons que ce qui suit. Les morceaux de la trajectoire Σ forment par leurs croisements réciproques dans l'intérieur de la zone sphérique, renfermée entre les circonférences F_2 et F_3 , un filet, qui atteint sa plus grande épaisseur près du morceau $\Sigma_{+\infty}$ et surtout près des points de ce morceau, qui se trouvent sur les circonférences F_2 et F_3 .

Passons à présent à l'examen de la position relative de la trajectoire Σ avec différentes circonstances.

Au moyen des expressions (72'), (72'') et (53) nous nous convainquons que

$$(110') \quad \bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_3 = -q_3,$$

Il en résulte de là et des expressions (58') et (71') que

$$(111) \quad \bar{W}_1(-\tau) = \bar{W}_1\tau, \quad \bar{W}_3(-\tau) = -\bar{W}_3\tau.$$

En différentiant ces expressions, nous trouvons:

$$(111') \quad W_1'(-\tau) = -\bar{W}_1'\tau, \quad W_3'(-\tau) = \bar{W}_3'\tau.$$

Les corrélations (111) et (111') montrent, que la quantité v , déterminée par l'expression (106), change en une quantité conjuguée

avec le changement de τ en $-\tau$. Par conséquent dans le cas du mouvement asymptotique périodique du point v sa trajectoire $S_{\pm\infty}$ présente une courbe, pour laquelle la droite $O\xi$ est un axe de symétrie, et le point mobile v occupe des positions symétriques dans les moments τ et $-\tau$ et arrive sur l'axe $O\xi$ dans les moments $\tau=0$ et $\tau=\omega$. En même temps cette trajectoire doit passer par un des points de l'intersection de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$, et aussi par un des points d'intersection de la circonférence E_3 avec le même axe. Pour couper la trajectoire $S_{\pm\infty}$ avec l'axe $O\xi$ qui se trouve sur la circonférence E_2 , nous avons: $\tau=0$ et

$$(112) \quad v = P0 \cdot \frac{W_1'0}{W_1'0} = P0 \cdot q_1 i' = b \sqrt{1 - \xi_2^2},$$

où $b = \pm 1$. Le signe de la quantité b est déterminé entièrement par l'expression (112), qui est réduite à la forme:

$$(113) \quad q_1 = b\gamma_2,$$

où γ_2 est déterminé par l'expression (86').

Déterminons la trajectoire du point v , qui passe par un autre point d'intersection de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$, c. à. d. par le point, pour lequel, ayant $\tau=0$, nous avons:

$$(114) \quad v = -b \sqrt{1 - \xi_2^2}.$$

Supposant dans l'expression (73) $\tau=0$, nous trouvons pour ce point:

$$-b \sqrt{1 - \xi_2^2} = P0 \cdot i(q_1 + cq_3),$$

d'où nous obtenons en considérant l'expression (112):

$$(115) \quad c = -\frac{2q_1}{q_3} = \beta i.$$

Au moyen des expressions (110') nous nous convainquons que la quantité β , déterminée par l'expression (115), est réelle. Le mouvement du point v , pour lequel l'expression (114) a lieu quand $\tau=0$, est déterminé par l'équation:

$$(116) \quad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + \beta i W_3'\tau}{W_1'\tau + \beta i W_3'\tau}.$$

Cette quantité v devient quantité conjuguée quand τ est remplacé par $-\tau$. Par conséquent la trajectoire, que nous examinons, présente une courbe, pour laquelle l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie. Le point mobile v occupe des positions symétriques sur cette trajectoire dans les moments τ et $-\tau$.

Dans l'expression (109) nous pouvons introduire à la place de c une quantité, déterminée par l'expression (115). Nous aurons alors:

$$(117) \quad v = P\tau \frac{W_1'\tau + \beta i(W_3'\tau + z W_1'\tau)}{W_1'\tau + \beta i(W_3'\tau + z W_1'\tau)},$$

où z est une quantité constante arbitraire réelle. L'équation (117),

coïncidant avec l'équation (73), concerne plus nettement une forme générale de la constante arbitraire c dans la formule (73), précisément: $c = \beta i : (1 + z\beta i)$. Ayant désigné la deuxième partie de l'expression (117) par $v(\tau, z)$, nous nous convainquons au moyen des expressions (111) et (111'), que la fonction $v(-\tau, z)$ et la quantité, conjuguée à la fonction $v(\tau, -z)$, coïncident. Il s'ensuit que les trajectoires des deux mouvements du point v , déterminés par l'expression (117) avec deux valeurs de z , égales par la quantité et différentes par les signes, sont disposées symétriquement par rapport à l'axe $O\xi$, pendant quoi le point v occupe sur l'une et l'autre des trajectoires des positions symétriques dans les moments τ et $-\tau$.

Examinons ensuite la trajectoire du mouvement, déterminée par l'expression (117) ayant $z = -\omega$. Il est facile de voir au moyen des expressions (70), (73'), (111) et (111'), que la quantité v , ayant $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$, prend des valeurs conjuguées. Par conséquent la trajectoire, que nous examinons, présente une courbe, pour laquelle l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie. Cette trajectoire doit passer par l'un des points d'intersection de l'axe $O\xi$ avec la circonférence E_3 , et justement par celui des deux points par lequel ne passe pas la courbe $S_{\pm\infty}$.

Ainsi dans le cas présent il existe non pas quatre trajectoires pour lesquelles l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie (comme dans les cas, examinés dans les deux paragraphes précédents), mais seulement trois.

Par le choix de la position initiale du point v on peut obtenir que le mouvement asymptotique périodique (106) se réalise immédiatement. Ce mouvement, obtenu au moyen de celui de (117), quand $z = \pm\infty$, n'est pas évidemment stable si la position initiale du point v sur la circonférence E_2 est agitée et si les autres circonstances initiales du mouvement sont restées sans changements.

§ 9.

Coïncidence de l'index J du mouvement avec zéro. Signes simplifiés de l'existence des mouvements asymptotiques périodiques.

Nous avons établi ci devant l'idée de l'index J pour tous les cas possibles du mouvement, n'écartant que le cas où $l_1 = 0$. En même temps nous avons préparé dans l'énonciation précédente toutes les bases nécessaires pour la preuve du théorème, par lequel cet index J égale toujours zéro. Passons maintenant à la démonstration même de ce théorème.

Nous avons établi séparément dans chacun des trois cas, qui dépendent des propriétés de la quantité caractéristique h , que le nombre J ne change pas avec les changements continuels des quantités l_1, l_2

et a , si certaines conditions sont observées. Nous unirons cette conclusion, en démontrant, que la constance de l'index J a lieu *indépendamment de la valeur que prend la quantité caractéristique h* , à condition que les inégalités (17) soient remplies et que la quantité l_1 ne se change pas en zéro pendant les changements continuels des quantités l_1 , l_2 et a . La démonstration de cette thèse se réduit, en réalisant les conditions énoncées, à la démonstration des deux propositions suivantes :

I. Si la quantité caractéristique h , qui change continuellement partant de la valeur *réelle*, qui remplit la condition (62), tend en cas limite à 1, l'index J du mouvement limite, ayant $h=1$, garde la valeur qu'il avait avec les valeurs réelles h , contiguës à 1.

II. Si la quantité caractéristique h , qui change continuellement partant de la valeur *imaginaire*, satisfaisante les conditions (63), tend en cas limite à 1, l'index J du mouvement limite, ayant $h=1$, garde la même valeur qu'il avait avec les valeurs imaginaires h , contiguës à 1.

Si la quantité h , étant réelle, tend continuellement à 1, les deux mouvements asymptotiques périodiques (75) et (76) coïncident, en cas limite, en un seul mouvement (106), avec quoi les trajectoires fermées correspondantes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$, examinées dans le § 6, en se déformant sans la rupture de leurs parties et sans le passage par l'axe $O\xi$, coïncident avec la trajectoire fermée $\Sigma_{\pm\infty}$, que nous avons examinée dans le § 8 et qui est décrite par le point V dans le mouvement asymptotique périodique (106). Par conséquent les courbes fermées $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$, ayant les valeurs réelles de h contiguës avec 1, et la courbe fermée $\Sigma_{\pm\infty}$, avec $h=1$, font chacune le même nombre de tours autour de l'axe $O\xi$ et déterminent ainsi la même valeur de l'index J . La première des deux positions est démontrée.

Si la quantité h est imaginaire, il ne peut pas exister un seul des mouvements (75) et (76) dans le solide. C'est pourquoi nous emploierons un autre procédé, quand h est imaginaire. Prenons un mouvement déterminé par l'équation (65) ou mieux, par l'équation équivalente (103), qui, comme il est facile de s'en convaincre au moyen des expressions (58'), peut être représenté par la forme suivante :

$$(118) \quad v = P\tau \cdot \frac{(1+bz)W_1'\tau - bz(q_1 - q_2)w_2'\tau}{(1+bz)W_1\tau - bz(q_1 - q_2)w_2\tau},$$

où $z = e^{\vartheta i}$ et où ϑ est une constante arbitraire réelle. Admettons que la quantité z diffère de ± 1 par une quantité finie. Représentons la courbe σ_0 fermée, prise du nombre des courbes (94') et composée de la courbe Σ_0 et de l'arc U_1U_0 de la circonférence F_3 . Passons à la limite quand la quantité h tend à 1 et quand, par conséquent, l'amplitude φ tend à zéro. Dans la limite la différence $q_1 - q_2$ tend

à zéro; la quantité b , déterminée par les expressions (101'), tend ou à $+1$ ou à -1 ; la quantité $1 + bz$ tend à la quantité $1 \pm z$ finie et différente de zéro; la deuxième partie de l'expression (118) tend, pour les valeurs finies de τ , à la coïncidence avec la deuxième partie de l'expression (106); le morceau Σ_0 , décrit par le point V de la sphère O dans l'intervalle fini du temps (de $\tau = -\omega$ jusqu'à $\tau = +\omega$), tend à la coïncidence avec la trajectoire fermée $\Sigma_{\pm\infty}$ du mouvement asymptotique périodique (106), qui a lieu quand $h = 1$; l'arc $U_0 U_1$ de la circonférence F_3 , qui fait partie de la courbe fermée σ_0 , tend à zéro [nous nous en convainquons, en déterminant par la formule (94) le nombre j des tours, produits par l'arc $U_0 U_1$ autour de l'axe $O\xi$]. Avec ces circonstances la courbe fermée σ_0 doit tendre à la coïncidence avec la courbe ci-devant désignée $\Sigma_{\pm\infty}$, en même temps cette déformation de la courbe σ_0 s'opère continuellement, c. à d. sans la rupture de ces parties et sans leur passage par l'axe $O\xi$. Par conséquent la courbe σ_0 et la courbe $\Sigma_{\pm\infty}$, avec laquelle coïncide σ_0 quand $h = 1$, font le même nombre de tours autour de l'axe $O\xi$, ce nombre détermine une seule et unique valeur de l'index J . Ainsi la deuxième supposition est démontrée.

Si la constance de l'index J se conserve dans la limite, quand h tend d'une manière ou d'une autre à 1, elle doit se conserver avec le passage continu de h des valeurs réelles aux valeurs imaginaires et vice-versa, puisque ce passage n'est possible pour la quantité caractéristique h que par $h = 1$. En plus la constance de l'index J , pendant les autres changements continus l_1 , l_2 et a , est déjà établie dans les paragraphes précédentes. C'est pourquoi la constance de l'index J pendant les changements, que nous examinons, est démontrée en général, indépendamment de la valeur h .

Si, par conséquent, il est possible de produire un passage continu d'un système des quantités l_1 , l_2 et a à un autre en conservant pendant tout le temps du passage les conditions (17) et si en même temps l_1 reste toujours distinct de zéro, nous pouvons affirmer, malgré la quantité h , que l'index J du mouvement pour l'un et pour l'autre système des quantités constantes l_1 , l_2 et a est le même.

Supposons que le système donné des quantités l_1 , l_2 et a satisfasse les conditions (17) *) et admettons que l_1 est différent de zéro. Changeons continuellement la quantité a jusqu'à zéro, en laissant intact les quantités l_1 et l_2 . On obtient ce changement de la quantité a , comme on le voit d'après l'expression (13'), par le rapprochement d'une des quantités A et C , qui n'entrent nullement dans les conditions (17), à la

*) La quantité a ne rentre pas immédiatement dans les conditions (17); mais il y entre le moment B dont dépend la quantité a .

quantité B . Ce changement ne peut pas enfreindre les conditions (17) et ne peut pas non plus rompre la constance de l'index J . Si, par conséquent, l'index J est zéro avec $a = 0$, il est en général zéro. Arrêtons donc notre attention sur la détermination de l'index J dans le cas où $a = 0$.

Dans ce cas l'équation (42) prend la forme:

$$(119) \quad \frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi' T - e_0}{\varphi T - e_0} \right) \frac{dw}{d\tau} = 0.$$

Les résolutions fondamentales particulières de ces équations seront

$$(119') \quad w_1 \tau = 1, \quad w_2 \tau = i \int_0^\tau \sqrt{\frac{e_0 - \varphi T}{e_0 - e_2}} \cdot e^{i\chi\tau} d\tau,$$

où $\chi\tau$ est une fonction, déterminée par l'expression (53''). Les coefficients κ , λ , μ et ν , déterminés par les expressions (52) et (53'''), seront exprimés ainsi:

$$(119'') \quad \kappa = 1, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 2i e^{i\chi\omega} \mu_1, \quad \nu = e^{2i\chi\omega},$$

où

$$\mu_1 = \int_0^\omega \sqrt{\frac{e_0 - \varphi T}{e_0 - e_2}} \cdot \cos(\chi\omega - \chi\tau) d\tau.$$

La quantité N , déterminée par l'expression (61'), sera représentée ainsi:

$$N = \cos \chi\omega.$$

En même temps la quantité caractéristique h sera *imaginaire* et sera exprimée par l'une des quatre quantités:

$$\pm e^{\pm i\chi\omega}.$$

On doit choisir parmi ces quatre quantités celle dont l'amplitude φ satisfait les conditions (63). Prenant la quantité l_1 pour positive [ce qui ne borne pas la généralité du raisonnement, car le remplacement de τ par $-\tau$, qui occasionne dans l'équation (42) le remplacement de l_1 par $-l_1$, est toujours possible], nous ferons remarquer qu'en même temps $\chi\omega$ sera aussi positive. Puis démontrons que l'amplitude φ , que nous cherchons, de la quantité caractéristique h sera:

$$(120) \quad \varphi = \chi\omega,$$

de sorte que

$$(120') \quad h = e^{i\chi\omega}.$$

Pour se convaincre de l'exactitude de cette conclusion, il suffit de montrer que la quantité positive $\chi\omega$ satisfait l'inégalité:

$$(121) \quad \chi\omega < \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons:

$$\chi\omega = \frac{l_1}{2} \int_0^{\omega} \frac{d\tau}{e_0 - \gamma T} = \frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{2}{B e_0}} \int_0^{\omega} \frac{d\tau}{\xi - \xi_0}.$$

Après avoir remarqué, que:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{B e_0}} \cdot R = \sqrt{\frac{2}{B e_0}} \sqrt{2 B e_0 (1 - \xi^2)(\xi - \xi_0) - l_1^2},$$

et en remplaçant dans l'intégrale précédent le variable τ par ξ , nous trouvons:

$$\begin{aligned} \chi\omega &= \frac{l_1}{2} \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0) R} \\ &= \frac{l_1}{2 \sqrt{2 B e_0}} \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0) \sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi_3 - \xi)}}. \end{aligned}$$

Sousentendant par δ une valeur moyenne de la variable ξ , qui varie entre les limites de l'intégration:

$$(121') \quad \xi_2 < \delta < \xi_3,$$

nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0) \sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi_3 - \xi)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta - \xi_1}} \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0) \sqrt{(\xi - \xi_2)(\xi_3 - \xi)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(\delta - \xi_1)(\xi_3 - \xi_0)(\xi_3 - \xi_2)}}. \end{aligned}$$

On voit par cette expression et par l'expression

$$\frac{l_1}{\sqrt{2 B e_0}} = \sqrt{(1 - \xi_2^2)(\xi_2 - \xi_0)}$$

que la quantité $\chi\omega$ peut être exprimée ainsi:

$$(122) \quad \chi\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{1 + \xi_2}{\delta - \xi_1}\right) \cdot \left(\frac{1 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_0}\right)}.$$

En même temps la première des inégalités (19) et la première des inégalités (121') démontrent que

$$(122') \quad 0 < \frac{1 + \xi_2}{\delta - \xi_1} < 1.$$

En même temps la première des inégalités (19) et l'équation

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi_0$$

démontrent, que

$$(122'') \quad 0 < \frac{1 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_0} < 1.$$

L'équation (122) et les inégalités (122') et (122'') affirment entièrement l'exactitude des inégalités (121). Par conséquent l'amplitude φ de la quantité caractéristique h , satisfaisant les conditions (63), se détermine par l'équation (120).

Après avoir déterminé la quantité caractéristique h et son amplitude φ , nous trouvons au moyen de (119''), (60) et (58'')

$$s_1 = 1, \quad s_2 = e^{2i\chi\omega}, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{\sin \chi\omega}{\mu_1},$$

avec quoi les résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$ doivent être exprimées ainsi :

$$(123) \quad W_1\tau = 1, \quad W_2\tau = 1 + q_2 i \int_0^\tau \sqrt{\frac{e_0 - \varphi T}{e_0 - e_2}} e^{i\chi\tau} d\tau.$$

En déterminant ensuite v , nous remarquons que les expressions (65) et (93) exigent pour passer à la limite, quand a devient zéro, des préparations préliminaires. La constante c , qui se trouve dans l'expression (65) et qui est déterminée d'après la position initiale de v sur la circonférence E_2 , dépend de a . Il est nécessaire d'examiner cette dépendance. Les résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$ de l'expression (42) peuvent être développées, avant de passer à la limite, par les degrés a^2 , avec quoi les deuxièmes parties des équations (123) ne présenteront que les premiers membres de ces développements. Par conséquent, avant de passer à la limite, les résolutions $W_1\tau$ et $W_2\tau$ seront exprimées ainsi :

$$(123') \quad \begin{cases} W_1\tau = 1 + a^2 f_1\tau, \\ W_2\tau = 1 + q_2 i \left[\int_0^\tau \sqrt{\frac{e_0 - \varphi T}{e_0 - e_2}} \cdot e^{i\chi\tau} d\tau + a^2 f_2\tau \right], \end{cases}$$

où $f_1\tau$ et $f_2\tau$ sont des fonctions qui gardent des valeurs finies ayant $a=0$ et qui changent en zéro quand $\tau=0$. Supposant qu'avec $\tau=0$ le point v occupe la position initiale, déterminée par l'expression

$$v = \sqrt{1 - \xi_2^2} \cdot e^{\beta i},$$

introduisons les expressions (123') dans l'équation (65) et examinons cette équation ayant $\tau=0$. Nous trouverons

$$a\sqrt{e_0 - e_2} \cdot e^{\beta i} = \frac{a^2 f_1' 0 + c q_2 (1 + a^2 f_2' 0)}{1 + c}.$$

Il s'ensuit que

$$(124) \quad c = \frac{a\sqrt{e_0 - e_2} \cdot e^{\beta i}}{q_2} (1 + a\varepsilon),$$

où ε est une quantité qui garde une valeur finie avec $a=0$.

Après avoir introduit dans l'équation (65) les quantités $W_1\tau$, $W_2\tau$ et c , déterminées par les expressions (123') et (124), puis en abrégeant dans l'expression v , que nous avons obtenue, le multiplicateur a dans le numérateur et dans le dénominateur et en passant enfin à la limite, quand $a = 0$, nous trouvons:

$$(125) \quad v = c_1 \cdot \frac{\wp' T - e_0'}{\sqrt{e_0 - \wp T}} \cdot e^{i\chi\tau},$$

où

$$c_1 = \frac{i e^{\beta i}}{2} \sqrt[3]{\frac{2}{B e_0}}.$$

De même l'expression (93) prend, en passant à la limite quand $a = 0$, la forme:

$$(125') \quad v = c_1 \cdot \frac{\wp' T - e_0'}{\sqrt{e_0 - \wp T}} e^{i(\vartheta + \chi\tau)}.$$

Maintenant nous passons à l'examen du nombre J des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la courbe fermée σ_0 , composée du morceau Σ_0 de la trajectoire Σ et de l'arc $U_1 U_0$ de la circonférence F_3 (supposant $a = 0$).

Le morceau Σ_0 est décrit par le point V , représentant la quantité v , déterminée par l'expression (125), pendant que τ change de $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. Dans cet intervalle l'amplitude de la quantité:

$$c_1 \frac{\wp' T - e_0'}{\sqrt{e_0 - \wp T}}$$

recevra un accroissement égal à zéro; tandis que l'amplitude de la quantité $e^{i\chi\tau}$ recevra un accroissement égal à

$$\chi\omega - \chi(-\omega) = 2\chi\omega.$$

Cet accroissement coïncide à celui de l'amplitude Φ de la quantité v qui est obtenu pendant que le point correspondant V décrit l'arc Σ_0 .

L'arc $V_0 V_1$ de la circonférence F est décrit, avec la constante τ et avec la croissance de ϑ de 0 jusqu'à $2\varphi = 2\chi\omega$, par le point V qui représente la quantité v , déterminée par l'expression (125'). Pendant ce déplacement du point V , l'amplitude Φ de la quantité correspondante v reçoit l'accroissement de $2\chi\omega$. Cet accroissement de l'amplitude Φ correspond aussi à l'arc $U_0 U_1$, avec lequel coïncide l'arc $V_0 V_1$ au moment $\tau = -\omega$. Quant à l'accroissement, qui correspond à l'arc $U_0 U_1$ passé en sens invers, c. à. d. à l'arc $U_1 U_0$, il s'exprimera ainsi:

$$-2\chi\omega.$$

En additionnant les accroissement ci-devant nommés de l'amplitude Φ , lesquels correspondent au passage des arcs Σ_0 et $U_1 U_0$, nous obtenons zéro. Ce zéro représentera l'accroissement de l'amplitude Φ de la quantité v , obtenue pendant que le point correspondant V décrit

la courbe fermée σ_0 . Par conséquent le nombre J des tours, produits par cette courbe autour de l'axe $O\xi$ est zéro. En même temps l'index J de rotation est zéro.

Ainsi le théorème de la coïncidence de l'index J de la rotation avec zéro peut être regardé pour démontré sur tous les points.

On peut changer la forme de la démonstration de ce théorème de différentes façons. Dans la preuve que nous venons d'énoncer, nous n'avons changé que la dernière des quantités l_1, l_2 et a . Mais il est possible de fonder la preuve sur le changement de la quantité l_1 , en ajoutant, s'il devient nécessaire, les changements des quantités l_2 et a . Montrons d'une manière brève le plan de cette preuve. Avant tout remarquons que les conditions (17) équivalent aux suivantes :

$$(126) \quad \xi_0 < 1, \quad l_1^2 < g_0 + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}},$$

où

$$g_0 = \frac{2l_2 B}{3} - \frac{l_2^3 B}{54g_0^2}.$$

Admettons que ces conditions soient satisfaites par le système donné des quantités l_1, l_2 et a et admettons que l_1 diffère de zéro. Puis augmentons continuellement la quantité l_1^2 depuis sa valeur initiale jusqu'à la limite :

$$g_0 + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}},$$

en l'approchant infiniment de cette limite. Les conditions (17) seront toujours remplies, en même temps la quantité $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ décroîtra en approchant infiniment de zéro, les racines ξ_2 et ξ_3 de l'équation $R^2 = 0$ se rapprocheront et deviendront égales dans la limite, avec quoi ξ coïncide avec chacune d'elles ($\xi = \xi_2 = \xi_3$). Ce cas de la limite est examiné en détails dans le § 12, où il est démontré que d'après la condition :

$$(126') \quad \xi^2 < a^2(1 - \xi^2)$$

les mouvements asymptotiques existent et les courbes fermées $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$ se transforment en points b' et b'' . En même temps chacune des courbes fermées $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ se transforme aussi en le point correspondant de la sphère O et fait le nombre J de tours autour de l'axe $O\xi$ égal évidemment à zéro. Cependant si le changement continu désigné de l_1^2 jusqu'à

$$g_0 + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}}$$

conduit non pas à la condition (126') mais à la condition inverse, il faut augmenter a^2 et atteindre par ce moyen la satisfaction de la condition (126'). Si avec cela on rencontrait un obstacle dans ce que la différence $1 - \xi^2$ serait zéro, on pourrait éloigner cet obstacle en changeant l_2 de façon que $1 - \xi^2$ ne fût pas zéro. C'est par des changements continuels

pareils qu'on obtient toujours l'exécution de la condition (126'), avec laquelle les trajectoires $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ deviennent des points et font chacune zéro de tours autour de l'axe $O\xi$. Par conséquent l'index J doit être aussi zéro pour ce mouvement ci et pour le mouvement qui correspond aux valeurs initiales des quantités l_1 , l_2 et α .

Passons à présent à l'examen des conséquences du théorème de la coïncidence de l'index J avec zéro. Nous concernerons les signes, qui permettent parfois de juger sans calculer la quantité caractéristique h , si les mouvements asymptotiques périodiques du point v avec la période 2ω sont possibles ou non, suivant les circonstances présentes.

Si l'index J est un zéro, nous nous convainquons par les explications données dans les paragraphes précédents, que le principe suivant doit avoir lieu.

Si la longitude Φ du point V (qui représente aussi l'amplitude de la quantité $v = \xi + i\eta$) tend, avec la croissance illimitée du temps τ , en cas limite à $\pm \infty$, il n'existe pas de rotations asymptotiques périodiques; mais si pendant la croissance illimitée du temps τ la longitude Φ dans la limite garde une valeur finie, les mouvements asymptotiques périodiques doivent exister. On sousentend ici le changement continu de la longitude Φ du point V depuis la valeur initiale donnée.

Ce principe, exprimé pour la première fois par Mr. B. C. Mlodzeievsky sans démonstration complète, peut être compté pour démontré dans toute sa plénitude, comme une conséquence des formules (82), (95) et (110) et du théorème concernant la coïncidence de l'index J avec zéro. Nous nous baserons sur ce principe pour la déduction des signes ou des règles, désignés plus bas, qui montrent la possibilité ou l'impossibilité des mouvements asymptotiques périodiques du point v avec la période 2ω .

En introduisant dans l'expression (14) à la place de v l'expression:

$$v = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot e^{\Phi i}$$

et supposant pour brièveté

$$(127) \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{-R}{l_1}, \quad \gamma = \sqrt{2B\varrho_0} \sqrt{\frac{2}{B\varrho_0}}, \quad \varrho_1 = \frac{1}{2\sqrt{2B\varrho_0}},$$

nous avons

$$(128) \quad \frac{d(\Phi - \Theta)}{d\tau} = \alpha \gamma \sqrt{\xi - \xi_0} \left\{ \frac{l_1 \varrho_1}{\alpha \sqrt{(\xi - \xi_0)^3}} - \cos(\Phi - \Theta) \right\}.$$

Remarquons que l'angle Θ , déterminé par la première des expressions (127), est une fonction périodique du temps τ , variable toujours entre deux limites finies. D'ailleurs la fonction

$$(129) \quad f\tau = \frac{l_1 \varrho_1}{\alpha \sqrt{(\xi - \xi_0)^3}}$$

ne change pas de signe pendant le changement de τ et varie

toujours entre les limites b_2 et b_3 , correspondantes aux valeurs de cette fonction pour $\tau = 0$ et $\tau = \omega$ et déterminées par les expressions:

$$(130) \quad b_2 = \frac{l_1 e_1}{a\sqrt{(\xi_2 - \xi_0)^3}} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{l_1 e_1}{a\sqrt{(\xi_3 - \xi_0)^3}}.$$

Au moyen des inégalités (20) et (21) nous nous convainquons que

$$(131) \quad b_2^2 > b_3^2.$$

N'oublions pas cela et supposons, que pendant tous les changements du temps τ la fonction $f\tau$ ne devient jamais par sa quantité absolue plus petite que 1. Cela se réalise avec les conditions: $b_3^2 \geq 1$ et dans ce cas la deuxième partie de l'équation (128) conserve toujours le même signe. Par conséquent la quantité absolue de la différence $\Phi - \Theta$ grandit indéfiniment pendant la croissance du temps τ . Cependant l'amplitude Φ doit tendre à l'infini pendant la croissance illimitée de τ . Voilà pourquoi il ne peut pas exister de mouvements asymptotiques périodiques, quand $b_3^2 \geq 1$.

Si nous supposons, qu'avec tous les changements du temps τ la fonction $f\tau$, déterminée par l'expression (129), ne devient jamais plus grande que 1 par sa quantité absolue, ce qui se réalise avec la condition $b_2^2 \leq 1$, on peut se convaincre au moyen de l'équation (128), que la différence $\Phi - \Theta$ doit toujours varier entre deux limites finies pendant la croissance illimitée de τ . Effectivement la croissance continue de la quantité $\Phi - \Theta$ doit toujours, suivant ces conditions, venir prendre la valeur de zéro de la deuxième partie de l'équation (128) et ensuite changer son signe, c. à. d. que la croissance de la quantité $\Phi - \Theta$ doit se changer en décroissance; cette décroissance de la quantité $\Phi - \Theta$ doit conduire à ce que la dérivée $\Phi - \Theta$ vienne prendre la valeur de zéro, puis changer le signe de la deuxième partie de l'équation (128), c. à. d. que $\Phi - \Theta$ doit commencer à croître, et ainsi de suite. Pour représenter ces variations avec plus de clarté, déterminons l'angle Ψ des conditions

$$(132) \quad \cos \Psi = f\tau, \quad 0 < \Psi < \pi,$$

puis imaginons nous sur la sphère O deux courbes, décrites, pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω , par des points qui représentent deux quantités:

$$\sqrt{1 - \xi^2} \cdot e^{\pm \Psi i}.$$

Ces courbes présenteront deux transversales ℓ et ℓ' de la zone sphérique incernée entre les circonférences F_2 et F_3 ; ces courbes seront disposées symétriquement par rapport au plan $\xi O \xi$. Ces transversales partagent la zone désignée en deux domaines, pour lesquels la seconde partie de l'équation (128) garde l'un ou l'autre signe, selon le domaine dans lequel se trouve le point $\mathfrak{B}$, qui représente la quantité:

$$(133) \quad v = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot e^{(\Phi - \Theta)i};$$

la seconde partie de l'équation (128) devient zéro avec la position du point $\mathfrak{B}$ sur l'une ou l'autre des transversales. Pendant la croissance du temps τ l'amplitude $\Phi - \Theta$ augmente ou diminue, selon la position du point $\mathfrak{B}$ dans l'un ou dans l'autre des deux domaines désignés. Il est facile de voir en plus que le point $\mathfrak{B}$ avec l'une et l'autre de ces positions se mouve pendant la croissance de τ dans la direction d'une seule et même transversale que nous désignerons par l' . Le point $\mathfrak{B}$, représentant la quantité v , déterminée par l'expression (133), balance près de cette transversale l' pendant le temps τ , exprimant de grandes valeurs positives. Effectivement il est facile de se convaincre au moyen de l'équation (128) et de l'expression (133), que si dans le moment donné le point $\mathfrak{B}$ est passé du côté du plan $\xi O \zeta$, où se trouve la transversale l' , ce point ne peut pas traverser de nouveau le plan $\xi O \zeta$ pendant la croissance de τ commençant de ce moment. Par conséquent les passages du point $\mathfrak{B}$ par la transversale l' sont impossibles à partir de ce moment, ce ne sont que les passages de la transversale l' qui sont possibles. Ces passages du point $\mathfrak{B}$ d'une rive de la transversale l' à l'autre se repètent infiniment beaucoup de fois. La comparaison des dérivées

$$\frac{d\Psi}{d\tau} \quad \text{et} \quad \frac{d(\Phi - \Theta)}{d\tau}$$

montre le suivant. Les intersections de la trajectoire du point $\mathfrak{B}$ avec la transversale l' sont telles que les passages du point mobile $\mathfrak{B}$ allant de la première rive de la transversale l' à l'autre s'accomplissent dans les phases $\tau + 2m\omega$, $-\omega < \tau < 0$ et les passages inverses dans les phases $\tau + 2m\omega$, $0 < \tau < \omega$. Le point $\mathfrak{B}$ peut aussi faire une infinité de passages à travers l'autre transversale l'' , mais cela se produira avec la décroissance de τ jusqu'à $-\infty$. Avec les mouvements désignés du point $\mathfrak{B}$ l'amplitude $\Phi - \Theta$ de la quantité v correspondante, ainsi que l'amplitude Φ de la quantité v , ayant $\tau = +\infty$, restent finies. Par conséquent, quand $b_2^2 \leq 1$ nous devons avoir deux mouvements asymptotiques périodiques du point v avec la période 2ω .

Ainsi nous pouvons exprimer la règle suivante.

I. Règle. Si $b_3^2 \geq 1$, il n'existe pas de mouvements asymptotiques dériodiques du point v (la quantité caractéristique h doit être imaginaire). Si $b_2^2 \leq 1$, il doit exister des mouvements asymptotiques périodiques du point v avec le période 2ω (la quantité caractéristique h doit être réelle).

Cette règle ne résoud pas la question dans le cas où

$$(134) \quad b_3^2 < 1 < b_2^2.$$

On peut rapetisser le domaine, où la règle n'est pas réelle, en compliquant un peu les calculs. Introduisons l'angle Γ auxiliaire en le désignant ainsi:

$$(135) \quad \frac{d\Gamma}{d\tau} = a\gamma\sqrt{\xi - \xi_0} \left\{ b_4 - \frac{l_1 e_1}{a\sqrt{(\xi - \xi_0)^3}} \right\},$$

où b_4 est une quantité constante. Choisissons la quantité b_4 à condition, que l'angle Γ reste toujours fini pendant la croissance illimitée de τ . Pour avoir les circonstances, qui permettront la réalisation de cette condition, il faut remarquer, que la deuxième partie de l'expression (135) est une fonction périodique paire avec le période 2ω et par conséquent elle doit se développer suivant les cosinus d'arcs multiples en série de la forme:

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi\tau}{\omega} + A_2 \cos \frac{2\pi\tau}{\omega} + \dots$$

En même temps l'angle Γ sera représenté ainsi:

$$\Gamma = \text{Const.} + A_0\tau + \frac{\omega}{\pi} \left[A_1 \sin \frac{\pi\tau}{\omega} + \frac{1}{2} A_2 \sin \frac{2\pi\tau}{\omega} + \dots \right].$$

Cet angle ne restera fini pendant toutes espèces de changements de τ que dans le cas où

$$A_0 = 0.$$

Après avoir écrit cette condition sous une forme plus étendue, nous en obtiendrons la quantité b_4 , exprimée ainsi:

$$(135') \quad b_4 = \frac{l_1 e_1 \int_0^\omega \frac{d\tau}{\xi - \xi_0}}{\int_0^\omega \sqrt{\xi - \xi_0} d\tau}.$$

Au moyen de cette expression et de l'expression:

$$\int_0^\omega \sqrt{\xi - \xi_0} d\tau = \sqrt{(\xi_3 - \xi_0)^3} \int_0^\omega \frac{d\tau}{\xi - \xi_0},$$

où ξ_3 a une valeur moyenne entre ξ_2 et ξ_3 , nous nous convainquons, que la quantité b_4 occupe aussi une valeur moyenne entre les quantités b_2 et b_3 , c. à. d. que

$$(136) \quad b_3^2 < b_4^2 < b_2^2.$$

Après avoir additionné les expressions (135) et (128) nous trouvons:

$$(137) \quad \frac{d(\Phi - \Theta + \Gamma)}{d\tau} = a\gamma\sqrt{\xi - \xi_0} \{ b_4 - \cos(\Phi - \Theta) \}.$$

Cette équation montre, que la fonction dérivée $\Phi - \Theta + \Gamma$ garde toujours son signe ayant $b_4^2 \geq 1$ et que par conséquent l'angle $\Phi - \Theta + \Gamma$ de même que l'angle Φ grandissent indéfiniment pendant la croissance du temps τ . Cependant il n'existe pas de mouvements asymptotiques périodiques. Ainsi à la place de la règle I nous pouvons exprimer la règle suivante.

II. Règle. Si $b_4^2 \geq 1$, il n'existe pas de mouvements asymptotiques périodiques du point v (la quantité caractéristique h doit être imaginaire).

Si $b_2^2 \leq 1$, il doit exister des mouvements asymptotiques périodiques du point v (la quantité caractéristique h doit être réelle).

Cette règle ne résoud pas la question dans le cas où $b_4^2 < 1 < b_2^2$, inégalités, qui correspondent moins au large domaine que les inégalités (134), puisque $b_3^2 < b_4^2$.

Il est évident qu'il est possible de composer une quantité inombrable de signes pour résoudre la question de l'existence ou de la non-existence des mouvements asymptotiques périodiques. Rappelons nous du signe, proposé par Mr. B. C. Mlodzeievsky, signe, qui se distingue par sa simplicité.

Il est à regretter, que tous les signes connus de cette espèce laissent toujours un certain domaine, où ils ne résolvent pas la question. Si l'on parvient à étraicir ce domaine, ce n'est qu'en compliquant le calcul, et ce n'est pas désirable. Il reste à savoir, si ce défaut est la conséquence de conditions accidentelles, ou si elle provient de l'essence du problème.

§ 10.

Correlations, qui existent entre les résolutions de l'équation (42) et leur quantités conjuguées. Formules pour le calcul des coefficients dans le développement des résolutions particulières fondamentales en séries τ .

Bornons nous à examiner les corrélations pour les résolutions particulières fondamentales $w_1\tau$ et $w_2\tau$, résolutions qui se développent en séries (51). On obtient facilement ensuite au moyen de ces corrélations d'autres qui correspondent à deux résolutions particulières quelconque de l'équation (42), par exemple aux résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$.

La fonction v , déterminée par l'expression (41) est présentée au moyen des résolutions particulières fondamentales $w_1\tau$ et $w_2\tau$ de la façon suivante:

$$(138) \quad v = P\tau \cdot \frac{w_1'\tau + cw_2'\tau}{u_1\tau + cw_2\tau},$$

où $P\tau$ est déterminée au moyen de l'expression (66), et la constante c est déterminée d'après la position initiale du point v sur la circonférence E_2 (au moment $\tau = 0$). On peut représenter la valeur initiale correspondante de la quantité v ainsi:

$$v = \sqrt{1 - \xi_2^2} \cdot e^{bi},$$

où b est une quantité réelle. En même temps, quand $\tau = 0$, l'équation (138) prend la forme:

$$(139) \quad c = \gamma_2 e^{bi},$$

où γ_2 est une quantité réelle, déterminée par l'expression (86'). C'est pourquoi la fonction v est exprimée ainsi:

$$(140) \quad v = P\tau \cdot \frac{w_1' \tau + \gamma_2 e^{bi} w_2' \tau}{w_1 \tau + \gamma_2 e^{bi} w_2 \tau},$$

et la fonction conjuguée de la façon suivante

$$(140') \quad \bar{v} = \bar{P}\tau \cdot \frac{\bar{w}_1' \tau + \gamma_2 e^{-bi} \bar{w}_2' \tau}{\bar{w}_1 \tau + \gamma_2 e^{-bi} \bar{w}_2 \tau}.$$

En multipliant les expressions (140) et (140') et ayant en vue que

$$v\bar{v} = 1 - \xi^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{4}{B^2 \varrho_0}} \cdot \frac{\wp' T^2 - e_0'^2}{e_0 - \wp T},$$

$$P\tau \cdot \bar{P}\tau = \frac{1}{4a^2} \sqrt{\frac{4}{B^2 \varrho_0^2}} \cdot \frac{\wp' T^2 - e_0'^2}{(e_0 - \wp T)^2},$$

nous trouvons après les simplifications:

$$(w_1 \tau + \gamma_2 e^{bi} w_2 \tau) (\gamma_2 \bar{w}_2 \tau + e^{bi} \bar{w}_1 \tau) =$$

$$= \frac{(w_1' \tau + \gamma_2 e^{bi} w_2' \tau) (\gamma_2 \bar{w}_2' \tau + e^{bi} \bar{w}_1' \tau)}{a^2 (e_0 - \wp T)}.$$

En disposant les deux parties de cette identité par les degrés de la quantité arbitraire $z = e^{bi}$ et en composant les coefficients avec les mêmes degrés, nous obtenons les corrélations suivantes:

$$(141) \quad \begin{cases} w_1' \tau \cdot \bar{w}_2' \tau = a^2 (e_0 - \wp T) w_1 \tau \cdot \bar{w}_2 \tau, \\ \bar{w}_1' \tau \cdot w_2' \tau = a^2 (e_0 - \wp T) \bar{w}_1 \tau \cdot w_2 \tau, \\ w_1' \tau \cdot \bar{w}_1' \tau + \gamma_2^2 w_2' \tau \cdot \bar{w}_2' \tau = a^2 (e_0 - \wp T) (w_1 \tau \cdot \bar{w}_1 \tau + \gamma_2^2 w_2 \tau \cdot \bar{w}_2 \tau). \end{cases}$$

Ces expressions déterminent deux quantités:

$$w_1' \tau \cdot \bar{w}_1' \tau \quad \text{et} \quad \gamma_2^2 w_2' \tau \cdot \bar{w}_2' \tau$$

au moyen des quantités $w_1 \tau$, $\bar{w}_2 \tau$, $\bar{w}_1 \tau$, $w_2 \tau$ et justement:

$$w_1' \tau \cdot \bar{w}_1' \tau = \gamma_2^2 a^2 (e_0 - \wp T) \bar{w}_2 \tau \cdot w_2 \tau,$$

$$\gamma_2^2 w_2' \tau \cdot \bar{w}_2' \tau = a^2 (e_0 - \wp T) w_1 \tau \cdot \bar{w}_1 \tau.$$

Ces deux expressions et la première des expressions (141) réduisent les trois corrélations (141) à une forme plus simple:

$$(142) \quad \begin{cases} w_1' \tau \cdot \bar{w}_1 \tau = \gamma_2^2 w_2' \tau \cdot \bar{w}_2 \tau, & \bar{w}_1' \tau \cdot w_1 \tau = \gamma_2^2 \bar{w}_2' \tau \cdot w_2 \tau, \\ w_1' \tau \cdot \bar{w}_1' \tau = \gamma_2^2 a^2 (e_0 - \wp T) w_2 \tau \cdot \bar{w}_2 \tau. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations (142), nous trouvons:

$$\frac{d}{d\tau} (w_1 \tau \cdot \bar{w}_1 \tau - \gamma_2^2 \bar{w}_2 \tau \cdot w_2 \tau) = 0,$$

d'où

$$w_1 \tau \cdot \bar{w}_1 \tau - \gamma_2^2 w_2 \tau \cdot \bar{w}_2 \tau = \text{Const.}$$

Après avoir déterminé *Const* avec $\tau = 0$, nous obtenons:

$$(143) \quad w_1 \tau \cdot \bar{w}_1 \tau - \gamma_2^2 w_2 \tau \cdot \bar{w}_2 \tau = 1.$$

En joignant aux corrélations (142) et (143) la corrélation (53') et si nous en déduisons les expressions $w_1' \tau$, $w_2' \tau$, $\bar{w}_1' \tau$ et $\bar{w}_2' \tau$, nous aboutissons seulement à cinq corrélations différentes que nous représentons ainsi:

$$(144) \quad \begin{cases} w_1' \tau = \gamma_2^2 \cdot i \cdot \bar{w}_2 \tau \cdot \psi_1 \tau \cdot e^{i\chi\tau}, & \bar{w}_1' \tau = -\gamma_2^2 \cdot i \cdot w_2 \tau \cdot \psi_1 \tau \cdot e^{-i\chi\tau}, \\ w_2' \tau = i \cdot \bar{w}_1 \tau \cdot \psi_1 \tau \cdot e^{i\chi\tau}, & \bar{w}_2' \tau = -i w_1 \tau \cdot \psi_1 \tau \cdot e^{-i\chi\tau}, \\ w_1 \tau \cdot \bar{w}_1 \tau - \gamma_2^2 w_2 \tau \cdot \bar{w}_2 \tau = 1, \end{cases}$$

où $\chi\tau$ est déterminée par l'expression (53'') et

$$(144') \quad \psi_1 \tau = \sqrt{\frac{e_0 - \wp T}{e_0 - e_2}}.$$

Passons à présent à la formation des formules pour les calculs des coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_2, \beta_3, \dots$ dans les développements (51) des résolutions fondamentales particulières $w_1 \tau$ et $w_2 \tau$ en séries par les degrés τ . Représentons avant tout les développements par les degrés τ des fonctions suivantes:

$$\frac{\wp' T}{2(\wp T - e_0)}, \quad \frac{i e_0'}{2(\wp T - e_0)}, \quad (\wp T - e_0),$$

dont la première est impaire et les deux dernières sont paires. Ces développements doivent avoir la forme

$$(145) \quad \frac{\wp' T}{2(\wp T - e_0)} = A_0 \tau + A_1 \tau^3 + \dots + A_n \tau^{2n+1} + \dots,$$

$$(146) \quad \frac{i e_0'}{2(\wp T - e_0)} = B_0 + B_1 \tau^2 + \dots + B_n \tau^{2n} + \dots,$$

$$(147) \quad \wp T - e_0 = C_0 + C_1 \tau^2 + \dots + C_n \tau^{2n} + \dots,$$

où les coefficients $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots, C_0, C_1, \dots$ sont des quantités réelles, calculées d'après les formules citées ci-dessous, empruntées à la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'ensuit des séries (145) et (146) que

$$(148) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\wp' T - e_0'}{\wp T - e_0} \right) = A_0 \tau + A_1 \tau^3 + \dots + A_n \tau^{2n+1} \dots \\ + i(B_0 + B_1 \tau^2 + \dots + B_n \tau^{2n} + \dots).$$

Nous obtiendrons en introduisant cette série et celle de (147) dans l'équation (42), puis en remplaçant dans cette équation la fonction w par l'une ou l'autre des fonctions $w_1 \tau$ et $w_2 \tau$, déterminées par les expressions (51), nous obtiendrons, par le moyen des coefficients indéterminés, des équations pour la détermination des quantités

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_2, \beta_3, \dots$$

Ainsi nous nous convainquons que les quantités $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ se déterminent successivement par les équations suivantes:

$$(149) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2(n+1)(2n+1)\alpha_{2n+2} \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \{ (2kA_{n-k} - a^2 C_{n-k})\alpha_{2k} - (2k+1)B_{n-k}\alpha_{2k+1} \}, \\ & 2(n+1)(2n+3)\alpha_{2n+3} \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \{ [(2k+1)A_{n-k} - a^2 C_{n-k}]\alpha_{2k+1} + 2(k+1)B_{n-k}\alpha_{2k+2} \}, \end{aligned} \right.$$

où l'on doit supposer: $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$, en donnant au nombre n les significations $0, 1, 2, \dots$. Nous trouvons de la même manière que les quantités $\beta_2, \beta_3, \dots$ se déterminent successivement par les équations

$$(150) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2(n+1)(2n+1)\beta_{2n+2} \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \{ (2kA_{n-k} - a^2 C_{n-k})\beta_{2k} - (2k+1)B_{n-k}\beta_{2k+1} \}, \\ & 2(n+1)(2n+3)\beta_{2n+3} \\ & = \sum_{k=0}^{k=n} \{ [(2k+1)A_{n-k} - a^2 C_{n-k}]\beta_{2k+1} + 2(k+1)B_{n-k}\beta_{2k+2} \}, \end{aligned} \right.$$

où l'on doit supposer: $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$, en donnant au nombre n les significations $0, 1, 2, \dots$.

En différentiant l'expression (148) d'après τ , nous obtiendrons*):

$$(151) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi T - \varphi(T+T_0) &= A_0 + 3A_1\tau^2 + \dots + (2n+1)A_n\tau^{2n} + \dots \\ &\dots + 2i(B_1\tau + \dots + nB_n\tau^{2n-1} + \dots), \end{aligned} \right.$$

où T_0 est une quantité, déterminée par l'expression (43') ou, autrement, par les expressions (43). Il s'ensuit des expressions (151) et (147), que

$$(152) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{\varphi^{(2n)}(\omega + \omega') - \varphi^{(2n)}(\omega + \omega' + T_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)}, \\ B_n &= \frac{i\varphi^{(2n)}(\omega + \omega' + T_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}, \\ C_n &= \frac{\omega^{(2n)}(\omega + \omega')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}, \end{aligned} \right.$$

où $n = 1, 2, 3, \dots$. Il faut ajouter aux expressions (152) encore les suivantes:

$$(152') \quad A_0 = \frac{(e_2 - e_1)(e_1 - e_2)}{e_2 - e_0}, \quad B_0 = \frac{ie_0'}{2(e_2 - e_0)}, \quad C_0 = e_2 - e_0.$$

*) Halphen, t. I, p. 137.

Par le calcul successif des dérivées

$$\wp^{(m)}(\omega + \omega') \quad \text{et} \quad \wp^{(m)}(\omega + \omega' + T_0),$$

qui font partie des formules (152), on doit, en vue des expressions:

$$\begin{aligned}\wp(\omega + \omega') &= e_1, \quad \wp'(\omega + \omega') = 0, \\ \wp(\omega + \omega' + T_0) &= e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{e_0 - e_2}, \\ \wp'(\omega + \omega' + T_0) &= \frac{-(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)e_0'}{(e_0 - e_2)^2},\end{aligned}$$

se servir des corrélations:

$$\begin{aligned}\wp''u &= 6(\wp u)^2 - \frac{1}{2}g_2, \\ \wp^{(n+2)}u &= 12 \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)_k \wp^{(k)}u \cdot \wp^{(n-k)}u, \quad (n=1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Dans la dernière corrélation, que l'on obtient par la formule de Leibnitz, adoptée à l'équation:

$$\wp''u = 12\wp u \cdot \wp' u,$$

l'expression $(n-1)_k$ est un coefficient binominal.

§ 11.

Cas où $l_1 = 0$.

Ce cas appartient au nombre des plus simples. Mr. Hess a déjà montré que la question dans ce cas se résolvait jusqu'à la fin au seul moyen des fonctions elliptiques.

Dans ce cas on obtient facilement l'expression de l'amplitude Φ de la quantité v . Cette amplitude satisfait l'équation:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{\alpha \sin \Phi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

d'où nous trouvons

$$(153) \quad \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = c \cdot e^{-\alpha \cdot \arccos \xi},$$

où c est une constante, déterminée par la valeur initiale de la quantité Φ . L'angle ψ , déterminé par l'expression (40), ne change pas dans ce cas.

Le cas, que nous examinons, par rapport à la question de l'index J a été séparé dans la théorie énoncée ci-devant; car la trajectoire du point V passe dans ce cas au moins par un des pôles de la sphère O . Mais dans les autres rapports ce cas peut servir d'explication pour la théorie générale. Afin de rapprocher ce cas de la théorie générale, examinons le en combinaison avec l'équation (42).

Dans le cas, que nous examinons, $e_0' = 0$ et l'équation (42) admet les deux résolutions particulières suivantes:

$$(154) \quad \begin{cases} w_1 u = e^{-\frac{1}{2} a i \log(\xi + i \sqrt{1-\xi^2})} \\ w_2 u = e^{-\frac{1}{2} a i \log(\xi - i \sqrt{1-\xi^2})} \end{cases},$$

Si d'après la désignation déjà établie nous sousentendons par θ l'angle de l'axe $O\xi$ (Fig. 1) avec la direction de la gravité, nous aurons:

$$(155) \quad \xi = \cos \theta, \quad \sqrt{1-\xi^2} = \sin \theta,$$

et l'expression (154) prend la forme:

$$(155') \quad w_1 \tau = e^{+\frac{1}{2} a \theta}, \quad w_2 \tau = e^{-\frac{1}{2} a \theta}.$$

Dans la suite nous distinguerons deux cas: 1) quand $\xi_0 < 1$ et 2) quand $-1 < \xi_0 < +1$. En plus nous examinerons deux cas limite: 1) quand $\xi_0 = -1$ et 2) quand $\xi_0 = +1$.

Cas où $l_1 = 0$, $\xi_0 < -1$.

Avec ces conditions les racines ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 du polynome R^2 , qui sera présenté sous la forme:

$$R^2 = 2B_0(1-\xi^2)(\xi-\xi_0),$$

seront:

$$(156) \quad \xi_1 = \xi_0, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = +1.$$

Les rayons des circonférences E_2 et E_3 sont des zéros. Avec le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω le point v doit d'abord se mouvoir sur un côté du plan $\xi O \eta$ depuis le point O jusqu'à la circonférence E_0 , décrite du centre O par le rayon 1 (circonférence que le point v atteint au moment où $\xi = 0$); puis avec le changement de τ depuis ω jusqu'à 2ω le point v doit passer de l'autre côté du plan $\xi O \eta$ (voyez le § 4) et doit aller jusqu'au point O . Les rayons des circonférences F_2 et F_3 sont aussi des zéros, et les sections de la sphère O , auxquelles se disposent ces circonférences, se changent en tangentes de la sphère. Ces tangentes passent par les pôles (points d'intersection de la sphère O avec l'axe $O\xi$). Par conséquent le point V de la sphère O passe, pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω , d'un pôle de la sphère O à l'autre, en passant par l'équateur E_0 au moment où $\xi = 0$.

Quand le temps τ passe par chacun des moments $2m\omega$ et $(2m+1)\omega$, où m est un nombre entier, la quantité $\sin \theta$, qui d'après les expressions (155) et (156) se présente ainsi:

$$\sin \theta = \sqrt{(\xi - \xi_2)(\xi_3 - \xi)} = \frac{R}{\sqrt{2B_0(\xi - \xi_1)}},$$

est annulée *en changeant de signe**). Avec ces conditions l'angle θ , déterminé par les expressions (155), doit recevoir l'accroissement 2π , quand le temps τ , augmentant continuellement, reçoit l'accroissement de 2ω . En même temps les quantités $w_1\tau$ et $w_2\tau$, déterminées par les expressions (155'), doivent satisfaire les conditions

$$w_1(\tau + 2\omega) = s_1 w_1 \tau,$$

$$w_2(\tau + 2\omega) = s_2 w_2 \tau,$$

où

$$s_1 = e^{a\pi} \quad \text{et} \quad s_2 = e^{-a\pi}.$$

Par conséquent les résolutions, que nous examinons, $w_1\tau$ et $w_2\tau$ sont elles-mêmes canoniques, et la quantité caractéristique h sera dans le cas donné:

$$(157) \quad h = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} = e^{-a\pi}.$$

Afin que cette quantité satisfasse la condition (62), prenons la quantité a pour une quantité négative (ce qui s'obtient par le choix de la direction approchante de l'axe Ox).

Comme la quantité caractéristique h est réelle et différente de 1, il doit exister sous les conditions, que nous examinons, des mouvements asymptotiques périodiques du premier et du second genre avec la période 2ω ; le mouvement impériodique doit tendre à l'un ou à l'autre des mouvements périodiques, quand le temps τ tend à $\pm\infty$.

Le mouvement impériodique du point v se détermine au moyen de l'expression:

$$(158) \quad v = \sin \theta \cdot \frac{e^{+\frac{1}{2}a\theta} - ce^{-\frac{1}{2}a\theta}}{e^{+\frac{1}{2}a\theta} + ce^{-\frac{1}{2}a\theta}},$$

où l'on peut déterminer la constante c par la position du point v au moment, où $\theta = \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\xi = 0$; à ce moment le point v doit se trouver sur la circonférence E_0 , en représentant la quantité de la forme: $v = e^{\beta i}$, et par conséquent nous aurons:

$$c = -i \cdot e^{\frac{1}{2}a\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta.$$

La trajectoire du point v passe par l'origine O , et la trajectoire du point V passe par les deux pôles de la sphère O .

Si le temps τ reçoit un accroissement, égal au nombre entier m des périodes 2ω , le point v se dispose au point v_m , représentant la quantité

$$(158') \quad v_m = \sin \theta \cdot \frac{e^{+\frac{1}{2}a\theta} - e^{-2m\pi a} ce^{-\frac{1}{2}a\theta}}{e^{+\frac{1}{2}a\theta} + e^{-2m\pi a} ce^{-\frac{1}{2}a\theta}}.$$

*) Cela s'explique par ce que ξ_2 et ξ_3 sont le *minimum* et le *maximum* des fonctions ξ et par conséquent la quantité R , proportionnelle à $\frac{d\xi}{d\tau}$, s'annule aux moments désignés en changeant de signe.

Quant à ce qui concerne les mouvements périodiques du premier et du second genre avec la période 2ω , l'un d'eux se détermine au moyen des expressions:

$$(159) \quad v = \sin \theta, \quad \eta = 0, \quad \xi = \sin \theta,$$

et l'autre au moyen des expressions

$$(160) \quad v = -\sin \theta, \quad \eta = 0, \quad \xi = -\sin \theta.$$

Ces deux mouvements sont des *mouvements de rotation autour de l'axe $O\eta$* (Fig. 1) et ils ne diffèrent que par la direction des rotations.

Le mouvement impériodique, déterminé au moyen de l'expression (158), tend au mouvement périodique (159) avec la croissance du produit $a \cdot \tau$ jusqu'à $+\infty$ et au mouvement périodique (160) avec la décroissance du produit $a \cdot \tau$ jusqu'à $-\infty$.

Remarquons enfin, que le cas donné, caractérisé, entre autre, par l'inégalité $\xi_0 < -1$ ou autrement par l'inégalité $l_2 > 2\rho_0$, a lieu, quand la constante l_2 est suffisamment grande, c. à. d. quand le *solide a reçu une force vive suffisamment grande*.

$$\text{Cas où } l_1 = 0, \quad -1 < \xi_0 < +1.$$

Avec ces conditions les racines ξ_1, ξ_2 et ξ_3 du polynôme R^2 seront:

$$(161) \quad \xi_1 = -1, \quad \xi_2 = \xi_0, \quad \xi_3 = +1.$$

Le rayon de la circonférence E_3 devient zéro; mais le rayon de la circonférence E_2 est différente de zéro. Si $\xi_2 < 0$, le point v se mouve, pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω , d'abord d'un côté du plan $\xi O\eta$ partant de la circonférence E_2 jusqu'à la circonférence E_0 (qu'il atteint au moment où $\xi = 0$) et puis sur l'autre côté du plan $\xi O\eta$ partant de la circonférence E_0 jusqu'au point O . Le point correspondant V de la sphère O se mouve pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω , entre la circonférence F_2 et le pôle inférieur de la sphère O , en passant par l'équateur E_0 au moment où $\xi = 0$. Si $\xi_2 > 0$ le caractère du mouvement ne diffère du précédent que par ce que le point v n'accomplit pas le passage d'un côté du plan $\xi O\eta$ à l'autre, et que le point V de la sphère O ne fait pas de passage par l'équateur E_0 .

Avec le changement du temps τ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ la quantité $\sin \theta$ qui, d'après les expressions (155) et (161), se présente ainsi:

$$\sin \theta = \sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi_3 - \xi)},$$

s'annule et change de signe aux moments $(2m+1)\omega$, où m est un nombre entier. A cause de cela, quand le temps τ , augmentant continuellement, reçoit l'accroissement de 2ω , l'angle θ se transforme en $-\theta$ et les résolutions (155) $w_1\tau$ et $w_2\tau$ passent mutuellement l'une dans l'autre, c. à. d. qu'il se forme une substitution linéaire, déterminée par les expressions:

$$(162) \quad \begin{cases} w_1(\tau + 2\omega) = w_2\tau, \\ w_2(\tau + 2\omega) = w_1\tau. \end{cases}$$

Ayant cette substitution nous obtenons les résolutions canoniques:

$$(163) \quad \begin{cases} W_1\tau = \frac{1}{2}(e^{+\frac{1}{2}a\theta} + e^{-\frac{1}{2}a\theta}) = \text{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right), \\ W_2\tau = \frac{1}{2}(e^{+\frac{1}{2}a\theta} - e^{-\frac{1}{2}a\theta}) = \text{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right), \end{cases}$$

où $\text{Sin } z$ et $\text{Cos } z$ sont le sinus et le cosinus *hyperboliques* de l'argument z . Ces résolutions canoniques satisfont les conditions:

$$W_1(\tau + 2\omega) = s_1 W_1\tau, \quad W_2(\tau + 2\omega) = s_2 W_2\tau,$$

où $s_1 = +1$ et $s_2 = -1$. Par conséquent la quantité caractéristique h sera imaginaire et s'exprimera ainsi:

$$h = i = e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

C'est pourquoi il n'existe pas dans le cas présent de mouvements asymptotiques périodiques du premier et du second genre avec la période 2ω . Comme l'amplitude φ de la quantité caractéristique h , égale à $\frac{\pi}{2}$, est commensurable avec π , le mouvement du point v , avec n'importe laquelle de ses positions initiales sur la circonférence E_2 , sera périodique avec la période 4ω . Ce mouvement se détermine au moyen de l'expression:

$$(164) \quad v = \sin \theta \cdot \frac{\text{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right) + c \cdot \text{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}{\text{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right) + c \cdot \text{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}.$$

Ici c est une quantité constante, déterminée par la position initiale du point v sur la circonférence E_2 , et elle a la forme: $c = e^{\beta i}$ où β est une quantité réelle. La trajectoire du point V passe dans ce cas par le pôle inférieur de la sphère O .

Quand $\beta = 0$, nous avons: $c = 1$ et par conséquent $v = \sin \theta$. Quand $\beta = \pi$, nous avons: $c = -1$ et $v = -\sin \theta$. Dans ces deux cas le solide se balance autour de l'axe $O\eta$, qui reste immobile.

Si le temps τ reçoit un accroissement égal au nombre entier m des périodes 2ω , le point v , qui représente la quantité (164), se transporte au point v_m , représentant la quantité

$$(165) \quad v_m = \sin \theta \cdot \frac{\text{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right) + (-1)^m c \cdot \text{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}{\text{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right) + (-1)^m c \cdot \text{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}.$$

Si m est une quantité paire; $v_m = v$, mais m est impaire, $v_m = v_1$.

Le cas, caractérisé par les conditions: $l_1 = 0$, $-1 < \xi_0 < +1$, a lieu quand le solide a reçu une force vive pas trop grande ($l_2 < 2\varrho_0$). Entre autre ce mouvement se produit dans le cas, où l'on a fait partir le solide examiné de n'importe quelle position sans vitesses initiales.

Cas où $l_1 = 0$, $\xi_0 = -1$.

Dans ce cas

$$R^2 = 2B\varrho_0(1-\xi)(1+\xi)^2.$$

Les racines ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 se présentent ainsi:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_0 = -1, \quad \xi_3 = +1.$$

La seconde des conditions (17) est remplacée par la condition de la limite $\Delta = 0$. Le semipériode ω change en ∞ , c. à. d. que la fonction ξ n'a pas de période réelle dans le cas que nous examinons.

En intégrant l'équation (10) nous trouvons:

$$(166) \quad \xi = \left\{ \frac{2}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} \right\} - 1,$$

où t_0 est une quantité constante et

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varrho_0}{B}}.$$

La position du point v sera déterminée dans ce cas au moyen de l'amplitude Φ , que l'on trouve par l'expression (153).

Cas où $l_1 = 0$, $\xi_0 = +1$.

Dans ce cas limite

$$R^2 = 2B\varrho_0(1-\xi)(1-\xi^2).$$

Les racines ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 sont représentées à ce moment de la manière suivante:

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_0 = +1.$$

Les conditions (17) se remplacent par les conditions de la limite: $\xi_0 = 1$ et $\Delta = 0$. La fonction ξ change en constante égale à 1. Le module de la quantité v , égal à $\sqrt{1-\xi^2}$, est toujours zéro. Le solide tourne également autour de l'axe $O\xi$, qui coïncide avec la ligne verticale OV .

§ 12.

Cas où les racines ξ_2 et ξ_3 sont égales.

Ce cas limite qui est un cas *singulier*, sur lequel Mr. N. E. Jonkovsky a arrêté son attention, appartient aussi au nombre des plus simples. Ce cas est caractérisé par les conditions:

$$(167) \quad \xi_0 < 1, \quad \Delta = 0,$$

remplaçant les conditions (17), qui ont servi de base aux déductions précédentes.

Sous les conditions (167) les racines ξ_2 et ξ_3 deviennent égales. La quantité ξ , qui, en général, doit varier entre ξ_2 et ξ_3 , devient dans ce cas particulier la constante:

$$(168) \quad \xi = \xi_2^*).$$

Les circonférences E_2 et E_3 coïncident dans la même circonférence E , par laquelle le point v doit se mouvoir. La droite $O\xi$ doit se mouvoir par la surface d'un cône à base circulaire, dont l'axe coïncide avec la ligne verticale OV (Fig. 1). L'équation (14) prend la forme:

$$(169) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{l_1 i (av - 2\xi)v}{2B(1-\xi^2)} + \frac{al_1 i}{2B} = 0.$$

L'équation (169) peut être intégrée immédiatement, par la séparation des variables. En sousentendant par b' et b'' les racines des équations

$$(170) \quad av^2 - 2\xi v + a(1-\xi^2) = 0,$$

résolue par rapport à v , et supposant

$$(171) \quad \gamma = \frac{al_1(b' - b'')}{2B(1-\xi^2)},$$

nous trouvons:

$$(172) \quad v = \frac{b' - b'ce^{i\gamma t}}{1 - ce^{i\gamma t}},$$

où c est une constante, déterminée par la position initiale du point v sur la circonférence E .

Le caractère du mouvement que nous examinons dépend de celui des racines b' et b'' . Ainsi il nous faut distinguer ici trois cas:

*) L'équation (10) est satisfaite par des solutions singulières $\xi = \xi_2$ et $\xi = \xi_3$ même avec $\Delta > 0$. Mais ces résolutions particulières, quand $\Delta > 0$, n'amènent pas la solution du problème concernant le mouvement, car avec ces solutions quelques unes des équations (2) ne peuvent pas être satisfaites.

1) quand les racines b' et b'' sont des imaginaires conjuguées, 2) quand les racines b' et b'' sont réelles et inégales et 3) quand les racines b' et b'' sont réelles et égales. Le troisième cas est un cas intermédiaire par rapport aux deux premiers.

Premier cas. Supposons que

$$(173) \quad \xi^2 < a^2(1 - \xi^2),$$

c. à d. que les racines b' et b'' de l'équation (170) sont imaginaires et inégales. La quantité γ , déterminée par l'expression (171), est aussi dans ce cas une imaginaire de la forme:

$$\gamma = i\gamma_1,$$

où γ_1 est une quantité réelle, que nous compterons aussi comme *positive* (ce qui s'obtient par le choix du signe du radical dans les expressions des racines b' et b''). Avec ces conditions et avec l'exigence de placer le point v sur la circonférence E , l'expression (162) prendra la forme:

$$(174) \quad v = b'' \cdot \frac{1 - b' z e^{-\gamma_1 t}}{1 - b'' z e^{-\gamma_1 t}},$$

où z est une quantité *réelle* arbitraire constante.

En examinant l'expression (174) dans deux cas particuliers: 1) quand $z = 0$ et 2) quand $z = \infty$, nous nous convainquons que dans ces cas le solide se mouve de façon à ce que le point v reste en repos, occupant soit la position b'' (si $z = 0$), soit la position b' (si $z = \infty$). Par conséquent le solide doit tourner dans chacun de ces deux cas autour de l'axe OV [avec une vitesse constante, comme le montre l'expression (40)]. Les positions immobiles b' et b'' du point v seront nommées dans ces deux cas positions *asymptotiques* du premier et du second genre. Ces positions du point v sont symétriques par rapport à l'axe $O\xi$, puisque les quantités b' et b'' sont conjuguées.

Examinons ensuite l'équation (174), admettant que la quantité z soit finie et différente de zéro. Dans ce cas le point v se déplace continuellement sur l'un des deux arcs de la circonférence E , partagée en deux parties par les points b' et b'' , et s'approche sans limite ou de la position asymptotique b'' (si t augmente jusqu'à $+\infty$), ou de la position asymptotique b' (si t diminue jusqu'à $-\infty$).

Il est évident que le cas, que nous examinons, présente un cas limite (quand $\xi_3 - \xi_2$ tend à zéro) du mouvement, exploré dans le § 6. Aux deux mouvements asymptotiques périodiques désignés du point v correspondent en cas limite les deux positions asymptotiques b' et b'' du point v , c. à d. les trajectoires fermées $S_{+\infty}$ et $S_{-\infty}$ dans la limite (quand $\xi_3 - \xi_2$ tend à zéro) se transforment d'une manière correspondante en

points b'' et b' . En même temps les courbes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ changent aussi en points; ainsi on voit immédiatement que le nombre J des tours, produits par chacune de ces courbes autour de l'axe $O\xi$, doit être zéro. Cette remarque de même que la constance de l'index J avec le changement de l_1 , l_2 et a a servi plus haut (§ 9) de base à une des preuves du théorème qui démontre que $J = 0$.

La quantité caractéristique h (désignée plus bas) doit être réelle dans ce cas.

Second cas. Supposons que

$$(175) \quad \xi^2 > a^2(1 - \xi^2),$$

c. à. d. que les racines b' et b'' de l'équation (170) sont réelles inégales. An moyen de cette condition et avec l'exigence que le point v reste sur la circonférence E , l'expression (172) se présentera ainsi:

$$(176) \quad v = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \frac{b' + \sqrt{1 - \xi^2} \cdot e^{i(\gamma t + \vartheta)}}{\sqrt{1 - \xi^2} + b'' \cdot e^{i(\gamma t + \vartheta)}},$$

où ϑ est une quantité constante arbitraire réelle.

Avec le changement du temps t le point v se déplace sur la circonférence E sans tendre à aucune position asymptotique et en décrivant la circonférence entière E dans la période de temps représenté par la quantité*)

$$\frac{2\pi}{\gamma}.$$

Il est évident que ce mouvement présente un cas limite (quand $\xi_3 - \xi_2$ tend à zéro) du mouvement qui a été examiné dans le § 7. La quantité caractéristique h (désignée plus bas) doit être imaginaire dans ce cas.

Troisième cas. Supposons que

$$(177) \quad \xi^2 = a^2(1 - \xi^2),$$

c. à. d. que les racines b' et b'' de l'équation (170) sont égales ($b' = b'' = \frac{\xi}{a}$). Dans ce cas l'intégrale de l'équation (169) peut être exprimé ainsi:

$$(178) \quad v = \frac{\xi}{a} \left\{ 1 + \frac{2\gamma'}{i(t+z) - \gamma'} \right\},$$

où

$$\gamma' = \frac{B\xi}{a^2 l_1},$$

*) Cette période a une valeur singulière qui n'appartient qu'au cas limite que nous examinons. Cette période existe même quand la quantité caractéristique h , étant imaginaire, a l'amplitude φ incommensurable avec π .

et z est une constante arbitraire, à laquelle on doit donner une valeur réelle pour que le point v puisse se poser sur la circonférence E ,

Quand $z = \pm \infty$, l'expression (178) se réduit à la forme:

$$(178') \quad v = \frac{z}{a} = b_0.$$

Dans ce cas le solide se mouve de façon que le point v reste toujours en repos en occupant une position b_0 que nous nommerons *asymptotique*. Le solide tourne dans ce cas régulièrement autour de la verticale OV .

Supposons maintenant que la quantité z de l'équation (178) soit finie. Dans ce cas le point v se déplace, pendant le changement continu du temps t , sans interruption sur la circonférence E , en approchant sans limite de la position asymptotique b_0 , (178') quand le temps t croît jusqu'à $+\infty$ ou quand il décroît jusqu'à $-\infty$.

Il est évident que le mouvement que nous examinons présente le cas limite du mouvement qui a été examiné dans le § 8.

Remarque.

Dans le cas que nous examinons la demi-période ω , déterminée par l'expression (29), se présente, pour la variable τ , de cette façon:

$$(179) \quad \omega = \frac{1}{2} \int_{e_1}^{\infty} \frac{dy}{(y - e_2)\sqrt{y - e_1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_2}}.$$

Si nous passons au moyen de la deuxième des expressions (23) au variable t , la demi-période Ω s'exprimera pour ce variable de la façon suivante:

$$(179') \quad \Omega = \frac{B\pi}{2\sqrt{e_1 - e_2}} \sqrt[3]{\frac{2}{B e_0}} = \pi \sqrt[3]{\frac{B\xi}{e_0(1 + 3\xi^2)}}.$$

La quantité caractéristique h se présentera [comme il est facile de le voir au moyen de l'expression (172)] comme l'une des quatre quantités:

$$\pm e^{\pm i\gamma\Omega},$$

où γ est déterminé par l'expression (171) et

$$(180) \quad \gamma\Omega = \pi \sqrt[3]{\frac{\xi^2 - a^2(1 - \xi^2)}{1 + 3\xi^2}}.$$

Sous les conditions (173) la quantité h sera représentée ainsi:

$$(181) \quad h = e^{\gamma\Omega},$$

par quoi la condition (62) sera remplie.

Sous la condition (175) l'amplitude φ de la quantité caractéristique h sera:

$$(182) \quad \varphi = \gamma \Omega,$$

par quoi, comme le montre l'expression (180), les conditions (63) seront satisfaites. Donc

$$(183) \quad h = e^{i\gamma\Omega}.$$

Nous avons considéré dans les §§ 6—8 les courbes fermées de la forme σ_m . Dans le cas limite quand $\xi_2 = \xi_3$, la courbe fermée σ_m représente l'arc $U_m U_{m+1}$ passé deux fois en sens inverses. Le nombre J des tours, produits autour de l'axe $O\xi$ par la courbe σ_m , est évidemment égal à zéro. Ainsi nous trouvons la démonstration nouvelle du théorème sur l'index J .