NOTE SUR LA FONCTION

$$\mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$$

PAR

M. LERCH

À VINOHRADY.

Soit x une quantité dont la partie imaginaire est positive ou nulle, w une quantité réelle positive et moindre que l'unité et soit s une quantité dont la partie réelle est supérieure à l'unité. En représentant par $(w+k)^s$ la quantité $e^{s\lg(w+k)}$, où le logarithme est pris en sens arithmétique, considérons la somme

$$(1) \qquad \mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$$

convergente pour chaque valeur de s, si la partie imaginaire de x est supérieure à zéro, et ne convergente que pour les valeurs de s dont la partie réelle est positive, si x est une quantité réelle.

En se rappelant de la formule connue

$$\int_0^\infty e^{-(w+k)z} z^{s-1}\,dz = \frac{\Gamma(s)}{(w+k)^s}$$

nous aurons

$$\Gamma(s)\mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-wz-k(z-2\pi ix)} z^{s-1}\,dz.$$

Or on peut démontrer aisément l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi ix)}z^{s-1}\,dz = \int_0^{\infty} z^{s-1}\,dz\sum_{k=0}^{\infty} e^{-wz-k(z-2\pi ix)}$$

et il s'ensuit la formule

$$(2)\qquad \Gamma(s)\mathfrak{K}(w\,,\,x\,,\,s) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}.$$

En appliquant un raisonnement dû à RIEMANN[1] et employé dans une excellente communication de M. HURWITZ[2] nous ferons voir que la série (1) est une *fonction transcendante entière* de s et nous développerons une relation qui nous semble mériter d'être signalée.

Considérons l'intégrale

$$(3)\qquad K(w\,,\,x\,,\,s) = \int_{(\infty\,,\,0\,,\,\infty)}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}$$

prise le long d'un contour fermé ($\infty\alpha\beta\gamma\alpha\infty$) enveloppant l'origine au moyen d'un cercle $\alpha\beta\gamma\alpha$ du rayon α ne contenant ni à son intérieur ni à sa périphérie aucun des points $2\pi i(x+\nu)$, ($\nu = 0\,,\,\pm 1\,,\,\pm 2\,,\,\pm 3\,,\ldots$).

Nous avons représenté, dans cette intégrale, par z^{s-1} la quantité $e^{(s-1)\lg z}$, la partie imaginaire de $\lg z$ étant supposée ou nulle ou positive et non supérieure à 2π, de sorte que la fonction z^{s-1} est continue dans tout le plan des z à l'exception des points de la *coupure* ($0\ldots\infty$) où elle est discontinue de la manière qu'on peut exprimer par les formules

$$(z+0.i)^{s-1} = z^{s-1} = e^{(s-1)\lg z}$$
$$(z-0.i)^{s-1} = e^{2\pi i(s-1)}z^{s-1} = e^{2\pi i(s-1)}e^{(s-1)\lg z},$$

le logarithme y étant pris en sens arithmétique. Nous avons évidemment

$$K = \int_{\infty}^{\alpha}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}} + \int_{(\alpha\beta\gamma\alpha)}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}} + e^{(s-1)2\pi i}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}$$

[1] *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Monatsber. der Preuss. Akad. der Wissensch. 1859).

[2] Zeitschrift für Mathem. und Physik t. 27, 1882.

et en nous rappelant de ce que

$$\lim_{\alpha=0} \int_{(\alpha\beta\gamma\alpha)} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} = 0$$

nous aurons

$$K = 2ie^{s\pi i} \sin \pi s \Gamma(s) \mathfrak{K}(w, x, s),$$

et puisqu'on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

il s'ensuit la formule

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = e^{-s\pi i} \Gamma(1 - s) \frac{1}{2\pi i} K(w, x, s). \tag{4}$$

L'intégrale K donnée par la formule (3) existe évidemment pour chaque valeur finie de s et on démontre aisément qu'elle est une fonction transcendante entière de cette variable. Cette intégrale devant s'annuler, d'après le théorème de CAUCHY, pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ et la fonction $\Gamma(1 - s)$ ne devenant infinie que pour ces valeurs-ci, il suit de la formule (4) que $\mathfrak{K}(w, x, s)$ est elle-même une fonction transcendante entière de s; c. q. f. d.

La fonction sous le signe $\int$ dans la formule (3) ne devient infinie que pour $z = 2\pi i(x + \nu)$, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Soit C_n le cercle du centre $2\pi i x$ et du rayon $\pi(2n + 1)$, cercle qui ne contient à sa périphérie aucun des infinis de la dite fonction, et représentons par $\mathfrak{A}_n$ le contour composé du contour $(\lambda_n \alpha\beta\gamma\alpha\lambda_n)$ et du cercle C_n parcouru dans le sens *rétrograde,* λ_n désignant l'intersection du cercle C_n avec l'axe réel. Ce contour $\mathfrak{A}_n$ limite une aire finie simplement connexe qui ne contient d'autres infinis de la fonction sous le signe $\int$ dans la formule (3) que les suivants:

$$z = (x + \nu). \qquad {\scriptstyle (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n)}$$

Cela étant, le théorème de CAUCHY nous donne

$$K_n = \int_{\mathfrak{A}_n} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1 - e^{2\pi i x - z}} = -2\pi i \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i w(x+k)} \{2\pi i(x + k)\}^{s-1}, \tag{α}$$

en désignant par $\{2\pi i(x+k)\}^{s-1}$ la quantité $e^{(s-1)\lg 2\pi i(x+k)}$, la partie imaginaire du logarithme étant supposée ou nulle ou positive et non supérieure à 2π.

La quantité w étant réelle, positive et moindre que l'unité la fonction

$$\frac{e^{-wz}z^s}{1-e^{2\pi ix-z}}=\frac{e^{(1-w)z}z^s}{e^z-e^{2\pi ix}}$$

sera moindre en valeur absolue qu'une certaine quantité finie pour chaque valeur de z appartenant à la circonférence C_n, et si nous supposons que la *partie réelle de s est négative,* cette fonction-là devient infiniment petite pour les valeurs indéfiniment croissantes de n, de sorte que nous aurons

$$\lim_{n=\infty}\int_{C_n}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}=0,$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty}K_n=\int_{\infty,0,\infty}\frac{e^{-wz}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}=K,$$

de sorte que la formule (α) nous donne

$$(5)\qquad K(w,x,s)=-2\pi ie^{-2\pi iwx}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2k\pi iw}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}}.$$

Il est permis de supposer que la partie réelle de x est entre les limites $(0\ldots 1)$; dans ce cas nous aurons

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2k\pi iw}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-2k\pi iw}}{\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi iw}e^{2k\pi iw}}{\{-2\pi i(1-x+k)\}^{1-s}}.$$

Or on a, d'après les conventions faites plus haut:

$$\{2\pi i(x+k)\}^{1-s}=(2\pi)^{1-s}e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)}(x+k)^{1-s},$$

$$\{-2\pi i(1-x+k)\}^{1-s}=(2\pi)^{1-s}e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)}(1-x+k)^{1-s},$$

de sorte que la formule (5) devient

$$(5') \qquad \frac{ie^{2\pi i w x}}{(2\pi)^s} K(w, x, s)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2k\pi i w}}{(x+k)^{1-s}} + e^{2\pi i w + \frac{\pi i}{2}(1-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i w}}{(1-x+k)^{1-s}}.$$

Nous n'avons défini la fonction $\mathfrak{K}$ que pour les valeurs réelles et positives de w. Représentons par $[u^\sigma]$ la quantité $e^{\sigma \lg u}$, la partie imaginaire de $\lg u$ devant être contenue entre les limites $(-\pi i \ldots \pi i)$, de sorte que la fonction $[u^\sigma]$ sera continue et uniforme dans le plan des u affecté de la *coupure* $(-\infty \ldots 0)$ le long de laquelle celle-là est discontinue, et posons d'une manière générale

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{[(w+k)^s]}.$$

D'après cette convention nous aurons

$$(x+k)^{1-s} = [(x+k)^{1-s}], \qquad (1-x+k)^{1-s} = e^{2\pi i(1-s)}[(1-x+k)^{1-s}]$$

et la formule (5') deviendra

$$\frac{ie^{2\pi i w x}}{(2\pi)^s} K(w, x, s)$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \mathfrak{K}(x, -w, 1-s) + e^{2\pi i w - \frac{3\pi i}{2}(1-s)} \mathfrak{K}(1-x, w, 1-s)$$

ou, d'après (4), en changeant s en $1-s$:

$$(6) \qquad \mathfrak{K}(w, x, 1-s)$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e^{\pi i\left(\frac{1}{2}s - 2wx\right)} \mathfrak{K}(x, -w, s) + e^{\pi i\left(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x)\right)} \mathfrak{K}(1-x, w, s) \right\}.$$

Cette formule devient une relation concrète en supposant que la partie imaginaire de x est supérieure à zéro, que w est une quantité réelle entre les limites $(0 \ldots 1)$ et que la partie réelle de s est positive; si elle fait partie de l'intervalle $(0 \ldots 1)$, la même chose aura lieu aussi dans le cas où la valeur de x est réelle. En exprimant les fonctions $\mathfrak{K}$ par les intégrales K au moyen de la formule (4) on obtient une relation entre les trois intégrales

$$K(w, x, 1-s), \qquad K(x, -w, s), \qquad K(1-x, w, s).$$

Remarquons encore que pour $s = 0$ la formule (5) nous donne d'après une digression facile

$$\frac{e^{2\pi i w x}}{1 - e^{2\pi i x}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2kw\pi i}}{k - x},$$

formule qui a été donnée par M. Kronecker dans les Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wissensch. (Avril 1883 et Juillet 1885).