Zur Theorie des Hallschen Phänomens.

Von Emil Börner in Wien.

I. Einleitung.

Die folgenden Erörterungen und die daraus gezogenen Konsequenzen basieren auf Drudes Anregungen über das Hallsche Phänomen (Drude, Optik, II. Aufl., pag. 420 ff.). Drude stellt daselbst die elektromagnetischen Feldgleichungen in einem Körper mit isolierenden Elektronen, bei äußerem Magnetfeld auf. Auf pag. 422 (Anmerkung) gibt dann Drude an, daß die allgemeinste Theorie über das Hallsche Phänomen unter gleichzeitiger Annahme isolierender und rotierender (Magnetisierungs-) Elektronen zu erhalten sei.

Diese allgemeinen elektromagnetischen Feldgleichungen will ich im folgenden aufstellen. Dabei werde ich aber zuerst das durch den Magneten entworfene, dann das durch den galvanischen Strom in der Platte erzeugte elektromagnetische Feld in Form der allgemeinen Drudeschen Gleichungen aufstellen und diese beiden Felder dann superponieren. Durch Auswertung dieser superponierten Gleichungen werden sich dann entsprechend den transversalen und longitudinalen Hallschen Effekten elektrische Feldstärken ergeben.

Es wird durch Diskussion dieser Lösungen ferner hervorgehen, daß (wie schon Drude, wenn auch nicht direkt ausgesprochen, annahm) das Hallsche Phänomen ein Analogon zu dem Phänomen der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes ist. Schließlich wird sich zeigen lassen, daß der Hallsche Rotationskoeffizient ein elektrisches Analogon zum optischen spezifischen Drehvermögen, bzw. zu den Verdetschen oder Kundtschen Konstanten ist. (Vergleiche Winkelmann „Handbuch der Physik“, II. Aufl., Band 5, pag. 453.)

II. Bezeichnungen.

Die Dimensionen sind alle im Gaußschen Maßsystem aufgestellt. Die aus Drude, Optik (II. Aufl.) entnommenen Größen enthalten den Vermerk „Drude, pag. ...“.

Dimensionen :

$$a = \frac{r \vartheta}{4\pi}, \text{ Drude, pag. 366, Gl. (12)}$$

t^1

$$b = \frac{m \vartheta}{4\pi e^2}, \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 366, \quad \text{,,} \quad (12)$$

t^2

$$c = \text{Lichtgeschwindigkeit im Äther} = 3.10^{10} \text{ cm/Sek.} \quad t^1 t^{-1}$$

e = elektrische Ladung

$\mathfrak{E}$ = el. Feldstärke

$\mathfrak{H}$ = magn. Feldstärke

Index h für rotierende (Magnetisierungs-)Elektronen

„ h „ leitende

$4\pi j_{x(yz)}$ = el. Stromdichten nach den Koord.-Achsen

m ponderable Maße

$$m' = \frac{m}{e^2}$$

$\mathfrak{N}$ = Anzahl der Elektronen pro 1 cm^3 , Drude, p. 365

p = reziproke Wellengeschwindigkeit

q = Querschnitt der Strombahn der rotierenden Magnetisierungs-Elektronen, (Drude p. 408)

= Querschnitt der solenoidalen Elementarströme magnetisch beeinflussbarer Körper

r = eine Art Reibungskoeffizient der sich bewegenden Elektronen, gleichgültig ob Polarisations- oder Konvektions-Elektronen; zu bestimmen aus der Gleichung:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e X - \frac{4\pi e^2}{\mathfrak{H}} \xi - r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (\text{Drude p. 364,}$$

$$\text{Gl. 1) vgl. auch: } r = \frac{2}{3c^3} \cdot \frac{4\pi^2}{T_h^2} \text{ nach Planck}$$

(Wied. Ann. Bd. 60 ex. 1897, pag. 593).

$4\pi s_{x(yz)}$ = magnet. Stromdichten nach den Koord.-Achsen.

T = Periode der von außen eindringenden Kraft

$x(y, z)$ = Koordinaten

$X(Y, Z)$ = Komponenten der el. Feldstärke.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{i\nu}{\tau} + \frac{m}{e^2 \tau^2} \\ \beta_{1(2,3)} &= \frac{\mu \mathfrak{H}_{x(yz)}}{c \tau e} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Konstanten für leitende} \\ \text{Elektronen} \end{array}$$

δ = Polarisationswinkel

ε = Dielektrizitätskonstante

$\mathfrak{D}$ = Leichtigkeit, mit der die Elektronen aus ihrer ursprünglichen Lage zu verschieben sind, also proportional dem reziproken elektrischen Widerstand. Zu bestimmen aus der Gleichung:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\alpha t^2} = e X - \frac{4\pi e^2}{\mathfrak{H}} \xi - r e^2 \frac{\partial \xi}{\alpha t} \quad (\text{Drude, p. 364,}$$

Gl. 1).

Dimensionen:

$$m^{1/2} l^{3/2} t^{-1}$$

$$m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}$$

$$m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}$$

$$m^1$$

$$m^0 l^{-3} t^{+2}$$

$$l^{-3}$$

$$l^{-1} t^{+1}$$

$$l^2$$

$$l^{-3} t^{+1}$$

$$t^1$$

$$l^1$$

$$m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}$$

$$l^{-3}$$

$$l^{-3}$$

Konst.

Konst.

$$l^3$$

Θ = Konstante für isolierende Elektronen (Drude, pag. 423).	Dimensionen : Konst.
μ = magnet. Permeabilität.	Konst.
ν = eine Art magnet. Feldstärkenfaktor per Längeneinheit längs der induzierten Elementarenoiden, welche sich unter dem Einfluß der äußeren Feldkraft auf die Magnetisierungs-Elektronen ergeben. Drude, pag. 409, 412.	l^1
π = Ludolf'sche Zahl.	
ρ = eine Art Dielektrizitätskonstante.	Konst.
$\Phi_{1(2,3)} = \frac{\mu \vartheta}{4\pi c \tau e} \cdot \mathfrak{H} x(y, z)$, Konstante für isolierende Elektronen; vgl. Größe β ; Drude, pag. 423, Gl. 47.	Konst.
$\tau = \frac{T}{2\pi}$	t^1
$\xi(\eta, \epsilon) = \text{Koordinaten.}$	l^1
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = \text{Komponenten der magnet. Feldstärke.}$	$m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}$

III. Aufstellung der allgemeinen Systemgleichungen für das elektromagnetische Feld.

Die folgenden Systemgleichungen sind ganz allgemein aus den nach Drude, Optik, pag. 406 ff., entwickelten Gedankengängen abgeleitet. Wir unterscheiden drei Arten von Elektronen: Magnetisierungs- (rotierende), isolierende (polarisierende) und leitende (Konvektions-) Elektronen. Drude stellt (pag. 422) elektromagnetische Feldgleichungen auf unter Annahme eines äußeren Magnetfeldes und isolierender Ionen, gibt aber (pag. 422, Anmerkung) an, daß der allgemeinste Fall unter Annahme isolierender, leitender und rotierender Elektronen zu erhalten sei. Um nun für den allgemeinsten Fall die Feldgleichungen abzuleiten, will ich zuerst folgende Spezialfälle von Systemgleichungen aufstellen, wobei wieder die elektrischen, bzw. magnetischen Bestandteile der elektromagnetischen Feldgleichungen getrennt behandelt werden:

1. Feldgleichungen für isolierende und rotierende Elektronen, unter Einfluß eines äußeren Magnetfeldes. Systeme Ia und 1a (pag. 5, 7).

2. Feldgleichungen für leitende und rotierende Elektronen, unter Einfluß eines äußeren Magnetfeldes. Systeme Ib und 1b (pag. 8, 10). Daraus entwickeln sich dann als Zusammenfassung dieser vier Systeme:

3. Elektromagnetische Feldgleichungen für isolierende, rotierende und leitende Elektronen, unter Einfluß eines äußeren Magnetfeldes. System I (pag. 11).

Wir haben also der Reihe nach:

1. Feldgleichungen für isolierende und rotierende Elektronen, bei äußerem Magnetfeld.

Wir wollen einzeln im folgenden in den Punkten a und b die elektrischen, bzw. magnetischen Bestandteile der elektromagnetischen Feldgleichungen aufstellen.

a) Elektrische Stromdichte, äußeres Magnetfeld, isolierende und rotierende Ionen.

Den Ausgang bilden die Drude pag. 422 aufgestellten Gleichungen für die elektrische Stromdichte:

$$4\pi j_x = \frac{\partial}{\partial t} (X + 4\pi \Sigma e N \xi), \text{ etc.}, \quad (a)$$

wobei N die Anzahl der in Betracht kommenden Elektronen pro 1 cm^3 und e ihre Ladung bedeutet. Um dann die Ausdrücke $4\pi \Sigma e N \xi$ zu bestimmen, nehmen wir die Drude, pag. 422, Gl. 43, aufgestellten elektrischen Grundgleichungen unter Einfluß eines äußeren Magnetfeldes

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e X - \frac{4\pi e^3}{\vartheta} \xi - r c^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \mathfrak{H}_z - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathfrak{H}_y \right), \text{ etc.} \quad (b)$$

zu Hilfe.

Unter Annahme periodischer Zustandsänderungen gehen diese Systeme über in

$$e \xi \Theta - \frac{i \vartheta}{4\pi c \tau} (\eta \mathfrak{H}_z - \zeta \mathfrak{H}_y) = \frac{\vartheta}{4\pi} X, \text{ etc. (Drude, p. 422, Gl. 46),} \quad (c)$$

wobei

$$\Theta = 1 + i \frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}, \quad a = \frac{r \vartheta}{4\pi}, \quad b = \frac{m \vartheta}{4\pi e^2}$$

zu setzen sind (vgl. Bezeichnungen, pag. 1 ff.). Bedienen wir uns der Abkürzung

$$\Phi_{1(2,3)} = \frac{\mu \vartheta}{4\pi c \tau e} \mathfrak{H}_{x(yz)},$$

so schreiben sich die Gleichung (c) für unseren Fall in der Form:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad 4\pi e \xi \Theta & - i \Phi_3 4\pi e \eta + i \Phi_2 4\pi e \zeta = \vartheta X, \\ 2. \quad i \Phi_3 4\pi e \xi & + \Theta \cdot 4\pi e \eta - i \Phi_1 4\pi e \zeta = \vartheta Y, \\ 3. \quad -i \Phi_2 4\pi e \xi & + i \Phi_1 4\pi e \eta + \Theta \cdot 4\pi e \zeta = \vartheta Z. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Aus diesem linearen System lassen sich die gesuchten Größen $4\pi e\xi$, $4\pi e\eta$, $4\pi e\zeta$ ausrechnen und in das Gleichungssystem (a) einsetzen. Die erste Gleichung darin nimmt dann die Form an:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} \left[1 + \sum \frac{\partial(\Theta^2 - \Phi_1^2) \mathfrak{N}}{N} \right] - \frac{\partial Y}{\partial t} \sum \frac{\partial \mathfrak{N}(\Phi_1 \Phi_2 - i \Theta \Phi_3)}{N} - \frac{\partial Z}{\partial t} \sum \frac{\partial \mathfrak{N}(\Phi_1 \Phi_3 + i \Theta \Phi_2)}{N}, \quad (c)$$

wobei

$$N = \Theta^2 - \Theta(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2) \quad (f)$$

ist.

Nennen wir in Gleichung (c) die Koeffizienten von $\frac{\partial X}{\partial t}$ etc. der Reihe nach ε_1 , ρ_{11} , ρ_{12} , so erhalten wir also endlich mit Hilfe der Gleichung (d) das System der Gleichungen (a) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad 4\pi j_x &= \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} - \rho_{11} \frac{\partial Y}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial Z}{\partial t}, \\ 2. \quad 4\pi j_y &= \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} - \rho_{21} \frac{\partial Z}{\partial t} - \rho_{22} \frac{\partial X}{\partial t}, \\ 3. \quad 4\pi j_z &= \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} - \rho_{31} \frac{\partial X}{\partial t} - \rho_{32} \frac{\partial Y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (I a)$$

Diese Gleichungen stellen also die elektrischen Stromdichten bei äußerem Magnetfeld unter Annahme nur rotierender und isolierender Elektronen dar. Im System (I a) bedeuten dann die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1(2,3)} &= 1 + \sum \frac{\partial \mathfrak{N}(\Theta^2 - \Phi_{1(2,3)}^2)}{N}, \\ \rho_{11} &= \sum \frac{\partial(\Phi_1 \Phi_2 - i \Theta \Phi_3) \mathfrak{N}}{N}, \\ \rho_{12} &= \sum \frac{\partial(\Phi_1 \Phi_3 + i \Theta \Phi_2) \mathfrak{N}}{N}, \\ \rho_{21} &= \sum \frac{\partial(\Phi_2 \Phi_3 - i \Theta \Phi_1) \mathfrak{N}}{N}, \\ \rho_{22} &= \sum \frac{\partial(\Phi_2 \Phi_1 + i \Theta \Phi_3) \mathfrak{N}}{N}, \\ \rho_{31} &= \sum \frac{\partial(\Phi_3 \Phi_1 - i \Theta \Phi_2) \mathfrak{N}}{N}, \\ \rho_{32} &= \sum \frac{\partial(\Phi_3 \Phi_2 + i \Theta \Phi_1) \mathfrak{N}}{N}. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Die Summen sind über die einzeln betrachteten Elektronengattungen zu erstrecken.

b) Magnetische Stromdichte, äußeres Magnetfeld, isolierende und rotierende Elektronen.

Wir nehmen an, daß ein äußeres Magnetfeld vorhanden sei und setzen voraus, daß in dem Körper, den wir in dieses Feld eingebracht haben, isolierende und rotierende Elektronen sich befinden, der Körper also magnetisch beeinflussbar sei. Zur Aufstellung der magnetischen Bestandteile der Feldgleichungen dienen die Ansätze Drudes, pag. 411, Gleichung (4), für die magnetisch induzierte Stromdichte, wenn α, β, γ die nach den Achsen genommenen Komponenten der äußeren magnetischen Feldkraft, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ dagegen die Komponenten der induzierten Magnetfeldstärke sind:

$$4\pi s_x = \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_1 \xi - \alpha_1 \zeta) - \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \eta - \beta_1 \xi) \right], \text{ etc. } (a_1)$$

Da nach Drude, pag. 409, Gleichung (2), die nach den Koordinatenachsen genommenen Komponenten der durch das äußere Magnetfeld induzierten Kraftliniendichten infolge der Molekularströme (rotierende Elektronen) gegeben sind durch:

$$\gamma_1 = \frac{4\pi}{c} i q \Re \cos(Kz), \text{ etc. } (b_1)$$

wobei $i = \frac{e}{T}$ die Stromstärke, q den Querschnitt der solenoidalen Molekularströme, $\Re(Kz)$ den Winkel zwischen der Z -Achse und der Richtung der induzierenden äußeren magnetischen Feldkraft bedeuten, so bleibt für die Berechnung der oben aufgestellten Gleichungen (a_1), für die Stromdichte die Bestimmung der Ausdrücke von der Form $\gamma_1 \xi$ etc. übrig.

Bestimmt man aus dem obigen Gleichungssystem (d) die Größen ξ, η, ζ , nennt abkürzend:

$$N = \Theta^2 - \Theta(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)$$

und setzt $i = \frac{e}{T}$, so erhält man z. B. für $\gamma_1 \xi$ den Wert:

$$\gamma_1 \xi = \frac{q}{cT} \cos(Kz) \left[\frac{(\Theta^2 - \Phi_1^2) \Re}{N} \cdot X - \frac{(\Phi_1 \Phi_2 - i(\Theta \Phi_3) \Re)}{N} Y - \frac{(\Phi_1 \Phi_3 + i\Theta \Phi_2) \Re}{N} \cdot Z \right] \quad (c_1)$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich dann für $\alpha_1 \zeta$ etc. in Gleichung (a_1). Bildet man ferner die Differenzen ($\gamma_1 \xi - \gamma_1 \zeta$) etc. in Gleichung (a_1), so erhält System (a_1) für die magnetische Stromdichte folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} 1. 4\pi s_x &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha + \frac{\partial}{\partial z} [(\nu_{1z} X - \nu_{4x} Z) - (\nu_{2z} Y - \nu_{5x} X) - (\nu_{3z} Z - \nu_{6x} Y)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} [(\nu_{7x} Y - \nu_{1y} X) - (\nu_{8x} Z - \nu_{2y} Y) - (\nu_{9x} X - \nu_{3y} Z)] \right\}; \\ 2. 4\pi s_y &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \beta + \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_{7x} Y - \nu_{1y} X) - (\nu_{8x} Z - \nu_{2y} Y) - (\nu_{9x} X - \nu_{3y} Z)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} [(\nu_{4y} Z - \nu_{7z} Y) - (\nu_{5y} X - \nu_{8z} Z) - (\nu_{6y} Y - \nu_{9z} X)] \right\}; \\ 3. 4\pi s_z &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \gamma + \frac{\partial}{\partial y} [(\nu_{4y} Z - \nu_{7z} Y) - (\nu_{5y} X - \nu_{8z} Z) - (\nu_{6y} Y - \nu_{9z} X)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_{1z} X - \nu_{4x} Z) - (\nu_{2z} Y - \nu_{5x} X) - (\nu_{3z} Z - \nu_{6x} Y)] \right\}; \end{aligned} \right\} (1)$$

Dieses System (1a) stellt also die magnetischen Stromdichten im Körper bei Annahme eines äußeren Magnetfeldes und Vorhandensein isolierender und rotierender Elektronen dar.

In den Gleichungen (1a) bedeuten dann die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{i,x(y,z)} &= \nu_i \cos [K, x(yz)], \quad (i = 1, 2, \dots, 9) \\ \nu_{1(4,7)} &= \sum \frac{(\Theta^2 - \Phi_{1(3,2)}^2) \vartheta \mathfrak{N}}{N} \cdot \frac{q}{cT}, \\ \nu_{2(5,8)} &= \sum \frac{[\Phi_{1(3,2)} \Phi_{2(1,3)} - i \Theta \Phi_{3(2,1)}] \vartheta \mathfrak{N}}{N}, \\ \nu_{3(6,9)} &= \sum \frac{[\Phi_{1(3,2)} \Phi_{3(2,1)} + i \Theta \Phi_{2(1,3)}] \vartheta \mathfrak{N}}{N}, \end{aligned} \right\} (1b)$$

Bezüglich N vergleiche oben Gl. (7).

Die Summen sind dabei wieder über die einzelnen vorhandenen Elektronengattungen zu erstrecken.

2. Elektromagnetische Feldgleichungen für leitende und rotierende Elektronen.

Wir stellen wieder im folgenden in den Punkten a und b die elektrischen, bzw. magnetischen Bestandteile des Feldes einzeln auf.

a) Elektrische Stromdichte, äußeres Magnetfeld, leitende und rotierende Elektronen.

Wir stellen wieder zuerst die Gleichungen für die elektrische Stromdichte auf und nehmen als Grundlage Drude, pag. 412, Gleichung (12):

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} \left[1 + \frac{4\pi\tau\mathfrak{M}}{ir - \frac{m'}{\tau^2}} \right], \text{ etc.} \quad (a_2.)$$

Die Aufstellung dieser Systeme ist in geänderter Form eine der oben sub Punkt 1 a gegebenen Durchführung analoge.

Bezeichnet man abkürzend

$$\alpha = -\frac{ir}{\tau} + \frac{m}{e^2\tau^2} = -\frac{ir}{\tau} + \frac{m'}{\tau^2} \text{ (analog obigem } \Theta)$$

$$\beta_{1(2,3)} = \frac{\mu}{e\tau e} \cdot \mathfrak{G}_{x(y,z)} \text{ (analog obigem } \Phi_{1(2,3)}),$$

so kann man wieder ein dem obigen System (d) analoges System

$$1. \quad e\xi\alpha - ie\eta\beta_3 + ie\zeta\beta_2 = X$$

$$2. \quad e\eta\alpha - ie\zeta\beta_1 + ie\xi\beta_3 = Y$$

$$3. \quad e\zeta\alpha - ie\xi\beta_2 + ie\eta\beta_1 = Z$$

aufstellen und erhält dann, wenn man wieder analoge mathematische Transformationen durchführt, für die elektrischen Stromdichten die Form:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad 4\pi j_x &= \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} - \rho_{11} \frac{\partial Y}{\partial t} - \rho_{12} \frac{\partial Z}{\partial t}; \\ 2. \quad 4\pi j_y &= \varepsilon_1 \frac{\partial Y}{\partial t} - \rho_{21} \frac{\partial X}{\partial t} - \rho_{22} \frac{\partial Z}{\partial t}; \\ 3. \quad 4\pi j_z &= \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} - \rho_{31} \frac{\partial X}{\partial t} - \rho_{32} \frac{\partial Y}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (I b)$$

Dieses, der Form nach mit den obigen sub. I a aufgestellten elektrischen Bestandteilen der Feldgleichungen analoge System

stellt die elektrische Stromdichte bei äußerem Magnetfeld und bei Annahme rotierender und leitender Elektronen dar.

Der Unterschied gegen System I a liegt nur in der Verschiedenheit der Koeffizienten. In diesem System I b bedeuten nämlich:

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha^3 - \alpha (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2), \\ \varepsilon_{1(2,3)} &= 1 + \Sigma \frac{4\pi(\alpha^2 - \beta_{1(2,3)}^2) \Re}{N} \\ \rho_{11} &= \Sigma \frac{4\pi(\beta_1\beta_2 - i\alpha\beta_3) \Re}{N} \\ \rho_{12} &= \Sigma \frac{4\pi(\beta_1\beta_3 + i\alpha\beta_2) \Re}{N} \\ \rho_{21} &= \Sigma \frac{4\pi(\beta_2\beta_3 - i\alpha\beta_1) \Re}{N} \\ \rho_{22} &= \Sigma \frac{4\pi(\beta_2\beta_1 + i\alpha\beta_3) \Re}{N} \\ \rho_{31} &= \Sigma \frac{4\pi(\beta_3\beta_1 - i\alpha\beta_2) \Re}{N} \\ \rho_{32} &= \Sigma \frac{4\pi(\beta_3\beta_2 + i\alpha\beta_1) \Re}{N} \end{aligned} \right\} \quad (g_1)$$

Dabei sind wieder die Summen über die betreffenden Elektronengattungen zu erstrecken.

b) Magnetische Stromdichte, äußeres Magnetfeld, leitende und rotierende Elektronen.

Der Gedankengang ist wieder dem oben sub Punkt 1 b gegebenen vollkommen analog.

Wir gehen wieder aus von den magnetischen Stromdichten in der Form:

$$4\pi s_x = \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma_1 \xi - \alpha_1 \xi) - \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \eta - \beta_1 \xi) \right], \text{ etc.}$$

bestimmen wieder $\gamma_1, \xi, \dots, \gamma_1 \xi \dots$ und erhalten wieder, falls

$$N = \alpha^3 - \alpha (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$$

bedeutet, für die magnetischen Stromdichten Ausdrücke von der Form:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad 4\pi s_x &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha + \frac{\partial}{\partial z} [(\nu_{1z} X - \nu_{4x} Z) - (\nu_{2z} Y - \nu_{5x} X) - (\nu_{3z} Z - \nu_{6x} Y) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} [(\nu_{7x} Y - \nu_{1y} X) - (\nu_{8x} Z - \nu_{2y} Y) - (\nu_{9x} X - \nu_{3y} Z)] \right\}; \\ 2. \quad 4\pi s_y &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \beta + \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_{7x} Y - \nu_{1y} X) - (\nu_{8x} Z - \nu_{2y} Y) - (\nu_{9x} X - \nu_{3y} Z) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} [(\nu_{4y} Z - \nu_{7z} Y) - (\nu_{5y} X - \nu_{8z} Z) - (\nu_{6y} Y - \nu_{9z} X)] \right\}; \\ 3. \quad 4\pi s_z &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \gamma + \frac{\partial}{\partial y} [(\nu_{4y} Z - \nu_{7z} Y) - (\nu_{5y} X - \nu_{8z} Z) - (\nu_{6y} Y - \nu_{9z} X)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_{1x} X - \nu_{4x} Z) - (\nu_{2x} Y - \nu_{5x} X) - (\nu_{3x} Z - \nu_{6x} Y)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

Dieses System stellt die magnetischen Stromdichten unter Einfluß eines äußeren Magnetfeldes bei Annahme rotierender und leitender Elektronen dar.

Die äußere Form ist wieder die gleiche wie in obigem System (1a) für die magnetischen Stromdichten bei äußerem Magnetfeld und Annahme isolierender und rotierender Elektronen. Der Unterschied liegt hier wieder nur in den Koeffizienten.

Unter abermaliger Annahme der Beziehung:

$$\nu_{i,x}(y,z) = \nu_i \cos [K, x(y,z)], \quad (i = 1, 2, \dots, 9)$$

wobei wieder K die Richtung der äußeren magnetischen Feldkraft, $x(y,z)$ die Achsenrichtung bedeuten, haben in obigem System 1b die Koeffizienten folgende Bedeutung:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1(4,7)} &= \sum \frac{[\alpha^2 - \beta_{1(2,3)}^2] \Re}{N} \cdot \frac{q}{cT}; \\ \nu_{2(5,8)} &= \sum \frac{[\beta_{1(3,2)} \beta_{2(1,3)} - i \alpha \beta_{3(2,1)}] \Re}{N} \cdot \frac{q}{cT}; \\ \nu_{3(6,9)} &= \sum \frac{[\beta_{1(3,2)} \beta_{3(2,1)} + i \alpha \beta_{2(1,3)}] \Re}{N} \cdot \frac{q}{cT} \end{aligned} \right\} \quad (h_1)$$

3. Elektromagnetische Feldgleichungen, äußeres Magnetfeld, rotierende, isolierende und leitende Elektronen.

Wir gehen jetzt zur Aufstellung der elektromagnetischen Feldgleichungen für den allgemeinsten Fall über, nämlich:

Annahme eines äußeren Magnetfeldes und in diesem ein Körper mit isolierenden, rotierenden und leitenden Elektronen.

Diese Gleichungen ergeben sich in analoger Form wie die oben aufgestellten Systeme. Schreiben wir jetzt die Feldgleichungen nicht mehr in der Form der Stromdichte, sondern in der Form:

$$\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}; \text{ etc.}$$

$$\frac{4\pi s_x}{c} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}; \text{ etc.}$$

so erhalten unsere allgemeinen elektromagnetischen Feldgleichungen die Form:

$$\begin{aligned} 1. a) & \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\rho_{11}}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\rho_{12}}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}; \\ b) & \frac{\epsilon_2}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\rho_{21}}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\rho_{22}}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \\ c) & \frac{\epsilon_3}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\rho_{31}}{c} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\rho_{32}}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \\ 2. a) & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha + \frac{\partial}{\partial z} [(\nu_{1z} X - \nu_{4x} Z) - (\nu_{2z} Y - \nu_{5x} X) - (\nu_{3z} Z - \nu_{6x} Y)] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} [(\nu_{7x} Y - \nu_{1y} X) - (\nu_{8x} Z - \nu_{2y} Y) - (\nu_{9x} X - \nu_{3y} Z)] \right\} = \frac{\partial Y}{\partial Z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ b) & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \beta + \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_{7x} Y - \nu_{1y} X) - (\nu_{8x} Z - \nu_{2y} Y) - (\nu_{9x} X - \nu_{3y} Z)] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial z} [(\nu_{4y} Z - \nu_{7z} Y) - (\nu_{5y} X - \nu_{8z} Z) - (\nu_{6y} Y - \nu_{9z} X)] \right\} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ c) & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \gamma + \frac{\partial}{\partial y} [(\nu_{4y} Z - \nu_{7z} Y) - (\nu_{5y} X - \nu_{8z} Z) - (\nu_{6y} Y - \nu_{9z} X)] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x} [(\nu_{1z} X - \nu_{4x} Z) - (\nu_{2z} Y - \nu_{5x} X) - (\nu_{3z} Z - \nu_{6x} Y)] \right\} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}$$

Dieses System (I) stellt den allgemeinsten Fall der elektromagnetischen Feldgleichungen unter Annahme eines äußeren Magnetfeldes und Annahme rotierender, isolierender und leitender Elektronen dar.

Da wir in dem Körper, der sich im Magnetfelde befindet, in diesem allgemeinsten Falle drei Arten von Elektronen voraussetzen, so stellen sich im System I die Koeffizienten der elektrischen Feldstärken ϵ_i , ρ_{ik} als Summen der diesbezüglichen Koeffizienten ϵ_i , ρ_{ik} in den Gleichungen (g) und (g₁) und ebenso die Koeffizienten der magnetischen Feldstärken $\nu_{i(x,y,z)}$ auch als Summen dieser Koeffizienten aus den Gleichungen (h) und (h₁) dar.

IV. Spezialisierung obiger Feldgleichungen für das Hallsche Phänomen.

Das Hallsche Phänomen tritt bekanntlich auf, wenn eine stromdurchflossene Platte (angenommen, die Platte befinde sich in der X — Y -Ebene) in ein dazu senkrechtes Magnetfeld (parallel zur Z -Achse) eingebracht wird. Es tritt also in der ebenen Platte experimentell eine Superposition zweier elektromagnetischer Kraftfelder auf u. zw.:

1. Ein durch den Magneten entworfenes Kraftfeld (parallel Z -Achse) und
2. ein durch den elektrischen Strom (parallel Y -Achse) entworfenes Kraftfeld.

Ich will im folgenden das erstere als „Kraftfeld aus magnetischer Ursache“ und das letztere als „Kraftfeld aus elektrischer Ursache“ bezeichnen. Durch Superposition dieser zwei Felder treten dann bekanntlich in der Platte zwei Transversalströme (in Richtung der X - und Z -Achse) und ein Longitudinaleffekt (Widerstandsänderung in Richtung der Y -Achse) auf. Dabei ergibt sich nach den Versuchen von Ettinghausen und Nernst (Winkelmann, Handbuch der Physik, Band V, pag. 343) die experimentelle Tatsache, daß der Transversalstrom bei unserer Lagerung, also in Richtung der X -Achse größer ist, als der in Richtung der Z -Achse, d. h. es ist der auf der Stromrichtung und Magnetfeldrichtung senkrecht stehende Transversalstrom größer, als der nur zur Richtung des Magnetfeldes senkrechte Strom.

Ich will nun theoretisch den experimentellen Vorgang verfolgen, u. zw. in folgender Art:

1. Aufstellung der elektromagnetischen Feldgleichungen in einem allgemeinen Körper (also mit rotierenden, isolierenden und leitenden Elektronen) entworfen durch einen Magneten, dessen Kraftlinien in Richtung der Z -Achse verlaufen. („Feld aus magnetischer Ursache“.)

2. Aufstellung der elektromagnetischen Feldgleichungen für denselben Körper, entworfen durch einen elektrischen Strom in Richtung der Y -Achse. („Feld aus elektrischer Ursache“.)

Beide Felder sollen durch Spezialisierung aus den oben aufgestellten allgemeinen elektromagnetischen Feldgleichungen I (p. 11) erfolgen.

3. Superposition beider Felder, woraus dann durch Auswertung das Hallsche Phänomen folgen soll.

Dieser Gedankengang der Superposition kann dann in zweierlei Art durchgeführt werden, u. zw.:

a) Aufstellung der einzelnen sub Punkt 1 und 2 angeführten elektromagnetischen Feldgleichungen, getrennte Auswertung dieser und Superposition der als Lösungen sich ergebenden Feldstärken.

b) Aufstellung der einzelnen sub Punkt 1 und 2 angeführten elektromagnetischen Feldgleichungen, Superposition dieses Feldgleichungssystems zu einem einzigen Resultantensystem und Auswertung dieses auf die als Lösung sich ergebenden Feldstärken.

Ich will im folgenden den sub Punkt a ausgeführten Gedankengang einschlagen, weil er sich theoretisch der experimentellen Superposition beider elektromagnetischen Kraftfelder, welche eben zum Hall'schen Phänomen führt, am engsten anschließt.

4. Die Auswertung der einzelnen sub Punkt 1 und 2 aufgestellten Systemgleichungen wird dann elektrische Feldstärken ergeben, welche den beim Hall'schen Phänomen auftretenden entsprechen und weiter unten dann diskutiert werden sollen.

Wir wollen nun durch Spezialisierung der oben aufgestellten allgemeinen elektromagnetischen Feldgleichungen die oben sub Punkt 1 und 2 besprochenen Felder der Reihe nach charakterisieren.

A. Feld aus magnetischer Ursache, parallel Z-Achse.

Wir nehmen an, daß eine rechteckige homogene Metallplatte (ein Körper mit rotierenden, isolierenden und leitenden Elektronen) zwischen die ebenen Pole eines Elektromagneten parallel zu diesen Polen eingelagert sei. Den Mittelpunkt des Koordinatensystems verlegen wir in den Mittelpunkt der rechteckigen Platte; die Seiten dieser seien parallel zur X - bzw. Y -Achse des Koordinatensystems. Die magnetischen Kraftlinien mögen in Richtung der positiven Z -Achse verlaufen. Die Platte selbst sei stromlos.

Um nun das in der Platte durch das Vorhandensein des äußeren Magnetfeldes hervorgerufene elektromagnetische Feld darzustellen, wollen wir die oben pag. 11 aufgestellten allgemeinen Feldgleichungen I für diesen Fall spezialisieren.

Zu diesem Zwecke machen wir folgende Annahmen und Bemerkungen:

1. Wir nehmen ebene Wellen parallel zur Z -Achse an und setzen deshalb $Z = \gamma = 0$.

2. Feld $\mathfrak{H}_z$ (bzw. $\mu \mathfrak{H}_z$) ist von außen vorhanden, das zum Werte $\gamma = 0$ zu addieren ist. Das Feld $\mathfrak{H}_z = \text{Konst.}$ ist dann auch eine Lösung unserer im System I, pag. 11, aufgestellten linearen Differentialgleichungen. (Vergl. Abraham, „Theorie der Elektrizität“, Band I, pag. 350.)

3. Die Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärken $X(Y)$, $\alpha(\beta)$ sind Funktionen von z und t .

4. Voraussetzung rotierender, isolierender und leitender Ionen in der Platte.

5. Ferner sind in unserem Spezialfalle für die Koeffizienten folgende Spezialisierungen anzusetzen (vergl. Bezeichnungen pag. 2 und Gleichung g, g_1, h, h_1 , pag. 5, 7, 9, 10).

$$a) \Phi_1 = \Phi_2 = 0; \quad \Phi_3 \neq 0; \quad \beta_1 = \beta_2 = 0; \quad \beta_3 \neq 0.$$

$$b) v_{ix} = v_{iy} = 0; \quad v_{iz} \neq 0, \quad \cos(Kz) = 1.$$

c) In den Systemgleichungen (I) (pag. 11) sind wohl nach vorhergehendem Punkt b) $v_{iz} \neq 0$, da aber $\frac{\partial X(Y)}{\partial x(y)} = 0$ sind, so fällt rot. Z weg.

$$d) \rho_{31} = \rho_{32} = 0; \quad \rho_{1i} \text{ und } \rho_{2i} \neq 0.$$

6. Endlich ist in diesem besonderen Falle, falls der Index h für rotierende, der Index k für leitende Elektronen gilt (vergl. Gleichung g, g_1 und h, h_1):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1 + \Sigma \frac{\partial_h \Theta \mathfrak{N}_h}{\Theta^2 - \Phi_3^2} + 4\pi \Sigma \frac{\alpha \mathfrak{N}_\kappa}{\alpha^2 - \beta_3^2}; \quad \varepsilon_3 = 0;$$

$$\rho_{11} = -i \left[\Sigma \frac{\Phi_3 \mathfrak{N}_h \partial_h}{\Theta^2 - \Phi_3^2} + 4\pi \Sigma \frac{\beta_3 \mathfrak{N}_\kappa}{\alpha^2 - \beta_3^2} \right] = -i\rho; \quad \rho_{12} = 0;$$

$$\rho_{22} = +i\rho; \quad \rho_{21} = 0; \quad \rho_{31} = \rho_{32} = 0;$$

$$v_{1z} = \Sigma \frac{\partial_h \Theta \mathfrak{N}_h}{\Theta^2 - \Phi_3^2} \cdot \frac{q_h}{cT_h} + 4\pi \Sigma \frac{\alpha \mathfrak{N}_\kappa}{\alpha^2 - \beta_3^2} \cdot \frac{q_\kappa}{cT_\kappa} = v_1$$

$$v_{2z} = -i \left[\Sigma \frac{\Phi_3 \partial_h \mathfrak{N}_h}{\Theta^2 - \Phi_3^2} \cdot \frac{q_\kappa}{cT_h} + 4\pi \Sigma \frac{\beta_3 \mathfrak{N}_\kappa}{\alpha^2 - \beta_3^2} \cdot \frac{q_\kappa}{cT_\kappa} \right] = -iv_2$$

$$v_{3z} = 0; \quad v_{7z} = v_1; \quad v_{8z} = 0; \quad v_{9z} = +iv_2;$$

also:

$$v_{1z} = v_{7z} = v_1; \quad -v_{2z} = +v_{9z} = iv_2.$$

Unter diesen Annahmen und Spezialisierungen nehmen dann unsere obigen, sub Gleichung I aufgestellten allgemeinen elektromagnetischen Feldgleichungen für unser „Feld aus magnetischer Ursache“ folgende Gestaltung an:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad a) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} + i \frac{\rho}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} &= -\frac{\partial \beta}{\partial z}; \\ b) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} - i \frac{\rho}{c} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z}; \\ 2. \quad a) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha + \frac{\partial}{\partial z} (\nu_1 X + i \nu_2 Y) \right] &= \frac{\partial Y}{\partial z}; \\ b) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\beta + \frac{\partial}{\partial z} (\nu_1 Y + i \nu_2 X) \right] &= \frac{\partial X}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (S_1)$$

Zur Auswertung dieser Feldgleichungen differenziert man Gleichung 1 a und 1 b je nach t , Gleichung 2 a und 2 b je nach z und substituiert aus den ersteren so erhaltenen Gleichungen die Werte $\frac{\partial^2 \beta(\alpha)}{\partial z \partial t}$ in die zuletzt erhaltenen Gleichungen, woraus sich lineare Differentialgleichungen ergeben von der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - i \frac{\rho}{c} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\nu_1}{c} \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial z^2} + i \frac{\nu_2}{c} \frac{\partial^3 Y}{\partial t \partial z^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}; \\ \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + i \frac{\rho}{c} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\nu_1}{c} \frac{\partial^3 Y}{\partial t \partial z^2} + i \frac{\nu_2}{c} \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial z^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch den Ansatz:

$$X = A e^{\frac{i}{\tau}(t-pz)}; \quad Y = B e^{\frac{i}{\tau}(t-pz)}. \quad (j)$$

Setzt man diese Lösungen in die Gleichungen (i) ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{c^2 \tau^2} B + i \frac{\rho}{c^2 \tau^2} A - i \frac{\nu_1 p^2}{c \tau^3} A + \frac{\nu_2 p^2}{c \tau^3} B &= -\frac{p^2}{\tau^2} B; \\ -\frac{\varepsilon}{c^2 \tau^2} A - i \frac{\rho}{c^2 \tau^2} B + i \frac{\nu_1 p^2}{c \tau^3} B + \frac{\nu_2 p^2}{c \tau^3} A &= -\frac{p^2}{\tau^2} A. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Setzt man in die eine oder andere dieser Gleichungen (k) $B = +Ai$, so erhält man nach Durchkürzung durch Ai die Form:

$$-\frac{\varepsilon}{c^2 \tau^2} + \frac{\rho}{c^2 \tau^2} - \frac{\nu_1 p^2}{c \tau^3} + \frac{\nu_2 p^2}{c \tau^3} = -\frac{p^2}{\tau^2} \quad (l_1)$$

und daraus für p den Wert:

$$p_1 c = \sqrt{\frac{\varepsilon - \rho}{1 - \frac{\nu_1 - \nu_2}{c \tau}}} \quad (\text{für } B = +Ai). \quad (m_1)$$

Setzt man dagegen wieder in einer der Gleichungen (k) $B = -Ai$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon}{c^2 \tau^2} + \frac{\rho}{c^2 \tau^2} - \frac{\nu_1 p^2}{c \tau^3} - \frac{\nu_2 p^2}{c \tau^3} = \frac{p^2}{\tau^2}, \quad (l_2)$$

und daraus den Wert für p

$$p_2 c = \sqrt{\frac{\varepsilon + \rho}{1 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{c \tau}}} \quad (\text{für } B = -Ai) \quad (m'_1)$$

Da in unserer Lösung (j) nur die reellen Bestandteile maßgebend sein können, so ergeben sich für unsere Ansätze X und Y mit Hilfe der Gleichungen (m_1) und (m'_1) die Wertpaare:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A \cos \frac{1}{\tau} (t - p_1 z) \\ Y_1 &= A \sin \frac{1}{\tau} (t - p_1 z) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X_2 &= A \cos \frac{1}{\tau} (t - p_2 z) \\ Y_2 &= -A \sin \frac{1}{\tau} (t - p_2 z) \end{aligned} \quad (n)$$

Durch Superposition dieser zwei Werte ergibt sich dann die Form:

$$\left. \begin{aligned} X_I &= X_1 + X_2 = 2A \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{p_1 + p_2}{2} z \right) \cos \frac{1}{\tau} \cdot \frac{p_2 - p_1}{2} \cdot z; \\ Y_I &= Y_1 + Y_2 = 2A \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{p_1 + p_2}{2} z \right) \cos \frac{1}{\tau} \cdot \frac{p_2 - p_1}{2} \cdot z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wir können die Ergebnisse dieser Auswertung der Feldgleichungen folgendermaßen zusammenfassen:

Befindet sich eine ebene Platte (mit isolierenden, rotierenden und leitenden Elektronen) in einem Magnetfeld, dessen Kraftlinien (parallel zur Z -Achse) die Platte normal durchsetzen, so treten in der Platte senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien zwei aufeinander normale elektrische Feldstärken X_I und Y_I in Richtung der X - bzw. Y -Achse auf.

B. „Feld aus elektrischer Ursache,“ parallel zur Y -Achse.

Wir nehmen wieder an, daß unsere (vergl. oben Punkt A) rechteckige, homogene Platte in der X - Y -Ebene eines Koordinatensystems so eingelagert sei, daß der Mittelpunkt des Koordinatensystems durch den Mittelpunkt der Platte geht und die Koordinaten-

achsen parallel zu den Abmessungen der Platte laufen. Diese Platte sei von einem galvanischen Strom in Richtung der Y -Achse durchflossen. Um das durch diesen galvanischen Strom entworfene, elektromagnetische Feld aufzustellen, verwenden wir die von Drude (Optik, pag. 413, Gleichungen 18 und 19) für magnetisch aktive Körper angenommenen Feldgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 1. a) \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}; \\ b) \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \\ c) \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \\ 2. a) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha + \frac{\partial}{\partial z} (\nu_z X - \nu_x Z) - \frac{\partial}{\partial y} (\nu_x Y - \nu_y X) \right\} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}; \\ b) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \beta + \frac{\partial}{\partial x} (\nu_x Y - \nu_y X) - \frac{\partial}{\partial z} (\nu_y Z - \nu_z Y) \right\} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}; \\ c) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \gamma + \frac{\partial}{\partial y} (\nu_y Z - \nu_z Y) - \frac{\partial}{\partial x} (\nu_z X - \nu_x Z) \right\} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (p)$$

Dabei bedeuten X, Y, Z die Komponenten der elektrischen Feldkraft, α, β, γ die Komponenten der magnetischen Feldkraft. Die Koeffizienten ε, ν haben die weiter unten angegebene Bedeutung. Die Ausdrücke: $\frac{\partial}{\partial z} (\nu_z X - \nu_x Z)$ etc. stammen von den durch den galvanischen Strom induzierten magnetischen Einwirkungen auf die Magnetisierungselektronen her.

Wir wollen zur Charakterisierung unseres speziellen Falles des galvanischen Stromdurchgangs durch die Platte folgende Annahmen und Bemerkungen bezüglich der Feldgleichungen (p) machen:

1. Wir nehmen ebene Wellen parallel zur Y -Achse an, also $Y = \beta = 0$.

2. Unser galvanisches Stromfeld $i = \sigma \mathfrak{E}_y = \text{konst.}$ ist von außen vorhanden, so daß also dieser Wert zu $Y = 0$ zu addieren ist. Wir bemerken hier wieder, daß auch $i = \sigma \mathfrak{E}_y = \text{konst.}$ eine Lösung unserer oben aufgestellten Feldgleichungen (p) ist, die Anwendbarkeit derselben also nicht tangiert.

3. Sind in unserem Falle der Annahme ebener Wellen parallel zur Y -Achse X, Z, α, γ Funktionen von y und t .

Unter Annahme dieser Voraussetzungen nehmen unsere obigen Feldgleichungen (p) folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad a) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y}; \\ c) \quad \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial y}; \\ 2. \quad a) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha + \nu \frac{\partial X}{\partial y} \right\} &= -\frac{\partial Z}{\partial y}; \\ c) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \gamma + \nu \frac{\partial Z}{\partial y} \right\} &= \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (\Sigma_1)$$

Dabei bedeuten: (vergl. Drude, pag. 413, Gleichungen 20, 21).

$$\varepsilon = 1 + \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \partial_h}{1 + i \frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} + 4\pi\tau \sum_k \frac{\mathfrak{N}_k}{i r_k - \frac{m'_k}{\tau}}$$

$$\nu_y = \nu = \frac{1}{c} \sum_h \frac{\mathfrak{N}_h \partial_h}{1 + i \frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} \cdot \frac{q_h}{T_h} + \frac{4\pi\tau}{\tau} \sum_k \frac{\mathfrak{N}_k}{i r_k - \frac{m'_k}{\tau}} \cdot \frac{q_k}{T_k},$$

wobei wieder der Index h für rotierende, der Index k für leitende Elektronen gilt. Die Auswertung dieses Systems (Σ_1) geschieht in analoger Weise wie die Auswertung des oben sub Punkt A aufgestellten Systems (S_1) und führt auf die 2 Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\nu}{c} \frac{\partial^3 X}{\partial t \partial y^2} &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}; \\ +\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\nu}{c} \frac{\partial^3 Z}{\partial t \partial y^2} &= +\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

Diesem Gleichungssystem (o) wird wieder Genüge geleistet durch die Ansätze:

$$X = A e^{\frac{i}{\tau}(t - \nu y)}; \quad Z = B e^{\frac{i}{\tau}(t - \nu y)}.$$

Spezialisiert man wieder ganz analog wie oben sub Punkt A die Konstanten A und B , so erhält man:

$$\text{Für } A = iB: \quad \dots p'_1 c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 - \frac{\nu}{c\tau}}},$$

$$\text{Für } A = -iB: \quad \dots p'_2 c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \frac{\nu}{c\tau}}}.$$

Da wieder nur die reellen Bestandteile maßgebend sein können, so hat man als Lösungen:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= B \sin \frac{1}{\tau} (t - p'_1 y) \\ Z_1 &= B \cos \frac{1}{\tau} (t - p'_1 y) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X_2 &= -B \sin \frac{1}{\tau} (t - p'_2 y) \\ Z_2 &= B \cos \frac{1}{\tau} (t - p'_2 y) \end{aligned} \quad (q)$$

Daraus erhält man dann durch Superposition:

$$\left. \begin{aligned} X_{II} &= X_1 + X_2 = 2B \cos \frac{1}{\tau} \left[t - \frac{p'_1 + p'_2}{2} y \right] \sin \frac{1}{\tau} \frac{p'_2 - p'_1}{2} y; \\ Z_{II} &= Z_1 + Z_2 = 2B \cos \frac{1}{\tau} \left[t - \frac{p'_1 + p'_2}{2} y \right] \cos \frac{1}{\tau} \frac{p'_2 - p'_1}{2} y. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir können die Ergebnisse dieser Auswertung der Feldgleichungen (Σ_1) folgendermaßen zusammenfassen:

Wird eine magnetisch aktive Platte von einem galvanischen Strom in Richtung der Y -Achse durchflossen, so treten infolge der Induktionswirkung der magnetisch aktiven Magnetisierungselektronen elektrische Feldkräfte X und Z in Richtung der X - bzw. Z -Achse auf.

V. Folgerungen aus den sub Punkt IV aufgelösten Feldgleichungen für das Hallsche Phänomen.

1. Wir hatten oben sub Punkt IV *A* die Feldgleichungen (pag. 15) aufgestellt und ausgewertet für den Fall, daß eine magnetisch aktive, leitende rechteckige Platte in einem Magnetfelde (parallel zur Z -Achse) senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes so in der X - Y -Ebene des Koordinatensystems eingelagert war, daß der Mittelpunkt des Koordinatensystems mit dem Mittelpunkt der Platte zusammenfiel und daß die Abmessungen der rechteckigen Platte zur X - bzw. Y -Achse parallel waren. Es ergibt dann die Auswertung dieser Feldgleichungen in der Platte das Auftreten elektrischer Feldkräfte X_I und Y_I (vergl. Gleichung. 1, p. 16) parallel zur X - bzw. Y -Achse.

2. War die vorhin gebrauchte rechteckige Platte in gleicher Lagerung aber ohne äußeres Magnetfeld von einem galvanischen Strome in Richtung der Y -Achse durchflossen, so ergab die Auswertung der für diesen Fall geltenden Gleichungen (vergl. oben Punkt IV *B*, Gleichung pag. 17) in der Platte das Auftreten elektrischer Feldkräfte X_{II} und Z_{II} (vergl. Gleichung 2, pag. 19) parallel zur X - bzw. Z -Achse.

3. Durch gleichzeitige Einschaltung des elektromagnetischen (Kraftlinien parallel Z -Achse) und des galvanischen Stromes durch die Platte (parallel zur Y -Achse) also durch physikalische Superposition der soeben sub Punkt 1 und 2 behandelten Erscheinungen tritt dann das sog. Hall'sche Phänomen ein. Mathematisch läßt sich dieser physikalische Vorgang dann durch Superposition der Lösungen 1 und 2 (pag. 16, 19) verfolgen. Man hat dann also Resultantenfeldstärken:

a) $\parallel X$ -Achse: $X = X_I + X_{II}$

b) $\parallel Y$ -Achse: $Y = Y_I$

c) $\parallel Z$ -Achse: $Z = Z_{II}$

Diese auftretenden Feldstärken entsprechen dann den Hall'schen Transversal- (X und Z) bzw. Longitudinaleffekten (Y).

Dabei ergibt sich bei unserer angenommenen Lagerung auch mathematisch die experimentell von Ettingshausen und Nernst erwiesene (vergl. Winkelmann, „Handbuch der Physik, Band V, pag. 343) Tatsache, daß der zur X -Achse (also senkrecht auf das Magnetfeld und Stromrichtung) auftretende Effekt größer ist, als der parallel zur Z -Achse auftretende Transversaleffekt.

Es ist selbstverständlich, daß nun erst diese theoretisch aufgestellten Feldstärken durch Berechnung aus den dafür maßgebenden Elektronenkonstanten und für die einzelnen Dimensionen der Platte mit den experimentellen Ergebnissen in Einklang gebracht werden müssen.

4. Es lassen sich in den Lösungen (n) (pag. 16) X_1, Y_1 bzw. X_2, Y_2 als links- bzw. rechtszirkular-polarisierte Wellen auffassen. Durch Superposition dieser ergab sich dann das Wertesystem (1) (pag. 16), das theoretisch eine linear polarisierte Welle darstellt.

Bestimmt dabei δ_1 den Winkel der ausgezeichneten Ebene, die wir auch hier „Polarisationsebene“ nennen wollen, mit der X -Achse, so hat man aus Gleichung 1 pag. 16:

$$\frac{Y_I}{X_I} = \operatorname{tg} \delta_1$$

und somit:

$$\delta_1 = z \cdot \frac{p_2 - p_1}{2\tau}.$$

Durch analoge Betrachtung folgt dann aus den Gleichungen 2, pag. 19, eine analoge Drehung wieder einer „Polarisationsebene“ gegen die Z -Achse, gegeben durch den Ausdruck:

$$\delta_2 = y \cdot \frac{p'_2 - p'_1}{2\tau}.$$

Durch Superposition beider Lösungen 1 und 2 (pag. 16 u. 19) muß dann für die Resultantenpolarisationsebene aus der Drehung δ_1 (um die Z -Achse) und aus der Drehung δ_2 (um die Y -Achse) sich eine Resultantendrehung Δ im Raume ergeben.

Projiziert man diese Drehung Δ in die Plattenebene, also in die X - Y -Ebene unseres Koordinatensystems, so wird diese Projektion mit der X -Achse einen Drehwinkel Δ_1 bilden. Da einerseits alle diese Polarisationswinkel $\delta_1, \delta_2, \Delta, \Delta_1$ ihrer Bedeutung nach rein konstant sind, was sich auch durch Dimensionierung der einzelnen Größen im Gaußschen Maßsystem unter Zuhilfenahme der oben sub Punkt II (pag. 2) aufgestellten Dimensionen leicht ergibt; da aber anderseits der Hall'sche sog. Rotationskoeffizient R eine dimensionierte Größe ist, so kann zwischen diesem Rotationskoeffizienten R und dem oben erörterten Polarisationswinkel Δ_1 nur der Zusammenhang bestehen:

$$\Delta_1 = R \cdot f, \quad (r)$$

wobei f eine Funktion der magnetischen Feldstärke, Permeabilität der Platte, Stromstärke durch die Platte, Dimensionen dieser Platte etc. ist.

5. a) Bei der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in Lösungen und Flüssigkeiten ist der Polarisationswinkel ρ gegeben durch die Formel:

$$\rho = \rho_1 \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \delta \cdot l \quad (s)$$

wobei p die Gramme aktiver Substanz, q die Gramme des Lösungsmittels, δ die Dichte, l die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschichte und ρ_1 das sog. „spezifische Drehvermögen“ ist. (Vergl. Wüllner, Band Optik.) Dabei ist wieder ρ als Polarisationswinkel undimensioniert, ρ_1 dagegen dimensioniert.

b) Bei der Drehung der Polarisationssebene durch ein Magnetfeld ist der Drehungswinkel Ω dargestellt auf zwei Arten (vergl. Winkelmann, Handbuch der Physik):

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \quad \Omega = \omega \cdot l \cdot \mathfrak{H}, \\ \beta) \quad \Omega = \psi \cdot l \cdot \mathfrak{J}, \end{array} \right\} \quad (t)$$

wobei wieder l die Länge der durchstrahlten Schichte, $\mathfrak{H}$ die Stärke des Magnetfeldes, $\mathfrak{J}$ die Intensität der Magnetisierung bedeuten. ω ist dann die sog. Verdet'sche Konstante, ψ die sog. Kundt'sche Konstante. Dabei ist wieder der Polarisationswinkel Ω eine nicht dimensionierte Größe, dagegen sind die Verdet'sche bzw. Kundt'sche Konstante dimensioniert.

c) Vergleicht man nun die Gleichungen (r) (s) und (t), so ergibt sich, daß der in Gleichung (r) aufgestellte Polarisationswinkel Δ_1 analog dem Polarisationswinkel ρ bzw. Ω ist, dagegen der Hall'sche Rotationskoeffizient R ein elektrisches Analogon zu dem spezifischen Drehvermögen bzw. zur Verdet'schen oder Kundt'schen Konstanten ist (vergl. Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. 5, pag. 335).

Und es ist somit das Hall'sche Phänomen elektrisch ein Analogon zu dem Phänomen der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in der Optik.

Zusammenfassung.

Wir sind also ausgegangen von der Aufstellung zweier Systemgleichungen nach Drude'schen Ansätzen, je für das Magnetfeld bzw. Stromfeld beim Hall'schen Phänomen. Durch Superposition dieser zwei Felder und Auswertung derselben ergeben sich dann als Lösungen elektrische Feldkräfte entsprechend den Hall'schen Transversal- bzw. Longitudinaleffekten. Außerdem ergibt sich eine vollständige Analogie zwischen dem spezifischen Drehvermögen bzw. der Verdet'schen oder Kundt'schen Konstanten in der Optik mit dem Hall'schen Rotationskoeffizienten, sodaß sich also das Hall'sche Phänomen als vollständiges Analogon zu der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes auffassen läßt.