SOPRA GLI SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI ORTOGONALI.

Nota di **Giuseppe Lauricella** (Catania).

Adunanza del 22 agosto 1909.

Si abbia un insieme numerabile di funzioni

$$(1) \quad \varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \dots$$

definite in un certo campo finito $\overline{ab}$, limitate, integrabili nel senso di LEBESGUE, ossia, come diremo nel seguito, *sommabili* ¹⁾, ed ortogonali.

La proprietà di ortogonalità è caratterizzata dalle condizioni:

$$(2) \quad \int_a^b \varphi_\mu(s) \varphi_\nu(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{se } \mu = \nu. \end{cases}$$

Si dirà che l'insieme (1) forma una *serie chiusa*, se all'infuori delle funzioni che sono diverse da zero al più in punti di un insieme di misura nulla, non esiste alcuna funzione $\theta(s)$ tale che

$$(3) \quad \int_a^b \theta(s) \varphi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

ossia, come diremo brevemente, se non esiste alcuna *soluzione effettiva* $\theta(s)$ delle equazioni integrali (3); nel caso contrario si dirà che l'insieme (1) forma una *serie non chiusa*.

Nel caso in cui la serie (1) è non chiusa, ammetteremo che una qualsiasi soluzione effettiva delle (3), oltre che sommabile nel campo $\overline{ab}$, sia anche limitata.

In una recente Nota il prof. SEVERINI ²⁾, valendosi di alcune uguaglianze stabilite dal sig. STEKLOFF ³⁾ per *undici* serie chiuse particolari, trova la condizione necessaria e sufficiente affinché, per una qualsiasi funzione $f(s)$ limitata ed integrabile nel campo $\overline{ab}$ e per una qualunque di tali serie chiuse particolari, si abbia che l'insieme dei punti di un campo qualsiasi $\overline{a_0 b_0}$, contenuto nel campo $\overline{ab}$, ove la differenza:

$$f(s) - \sum_i a_i \varphi_i(s) \quad \left[a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds \right]$$

¹⁾ LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), p. 115.

²⁾ *Sopra alcune proprietà comuni a più serie di funzioni di uso frequente nell'Analisi* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, tomo LXVIII (1908-09), parte 2^a, pp. 337-350].

³⁾ *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'analyse* [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, VIII^e série, vol. XV, N° 7 (1904), pp. 1-32].

supera in valore assoluto una quantità positiva, arbitrariamente scelta, sia un insieme rinchiudibile; e dà ancora alcuni notevoli teoremi, nel caso di $f(s)$ funzione finita e continua nel campo $\overline{a_0 b_0}$.

Mi propongo qui di estendere le formole di STEKLOFF alle serie generali (1); di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti affinché, per una funzione qualsiasi $f(s)$ (limitata o no) sommabile insieme al suo quadrato e per le serie generali (1), si abbia:

$$(4) \quad f(s) = \sum_i a_i \varphi_i(s), \quad a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds$$

in una porzione qualsiasi $\overline{a_0 b_0}$ di $\overline{ab}$, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla; e di estendere i teoremi del prof. SEVERINI relativi al caso di $f(s)$ funzione finita e continua nel campo $\overline{a_0 b_0}$.

I risultati del presente lavoro si fondano sopra un teorema del sig. E. FISCHER ⁴⁾ sulla *convergence en moyenne*, che contiene come caso particolare un notevole teorema di RIESZ ⁵⁾. Precisamente il teorema del quale faremo uso nel seguito, e che è contenuto nel detto teorema di FISCHER, si può così enunciare: *se alla serie (1) si fa corrispondere una serie di numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e se la serie $\sum_i \alpha_i^2$ è convergente, esisterà una funzione $F(s)$ (limitata o no) sommabile insieme al suo quadrato e tale che:*

$$\int_a^b [F(s)]^2 ds = \sum_i \alpha_i^2, \quad \alpha_i = \int_a^b F(s) \varphi_i(s) ds.$$

1. LEMMA.—*Se $\chi(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato, sarà:*

$$\int_a^b [\chi(s)]^2 ds \geq \sum_i a_i^2, \quad a_i = \int_a^b \chi(s) \varphi_i(s) ds.$$

Infatti si ha:

$$0 \leq \int_a^b [\chi(s) - \sum_i^n a_i \varphi_i(s)]^2 ds = \int_a^b [\chi(s)]^2 ds - \sum_i^n a_i^2,$$

qualunque sia n .

2. TEOREMA I.—*Se la serie (1) è chiusa e se $f(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato, si avrà:*

$$(5) \quad \int_a^b [f(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2, \quad a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds.$$

Infatti, in virtù del Lemma precedente, la serie $\sum_i a_i^2$ è convergente; quindi in forza del teorema di FISCHER si ha che esiste una funzione $f_1(s)$ (limitata o no) sommabile insieme al suo quadrato e tale che

$$\int_a^b [f_1(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2, \quad a_i = \int_a^b f_1(s) \varphi_i(s) ds.$$

⁴⁾ *Sur la convergence en moyenne* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLIV (1^{er} semestre 1907), pp. 1022-1024].

⁵⁾ F. RIESZ, *Ueber orthogonale Funktionensysteme* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, pp. 116-122].

Si ha poi:

$$\int_a^b [f(s) - f_i(s)] \varphi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots);$$

e poichè la serie (1) è chiusa, dovrà aversi nel campo $\overline{ab}$, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla,

$$f(s) = f_i(s);$$

e quindi, come si voleva dimostrare:

$$\int_a^b [f(s)]^2 ds = \int_a^b [f_i(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2.$$

3. TEOREMA I*. — *Se la serie è non chiusa e se $f(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato, condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia:*

$$(5^*) \quad \int_a^b [f(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2, \quad a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds,$$

è che la $f(s)$ soddisfaccia alla condizione ⁶⁾:

$$(6) \quad \int_a^b f(s) \theta(s) ds = 0$$

per ogni soluzione effettiva delle (3).

La condizione (6) è necessaria. Infatti supponiamo verificata la (5*) e supponiamo ancora che per una certa $\theta(s)$ fosse:

$$\int_a^b f(s) \theta(s) ds = \omega \neq 0.$$

Preso un numero positivo ε tale che

$$(7) \quad \varepsilon < \frac{2|\omega|}{\int_a^b [\theta(s)]^2 ds},$$

si ponga:

$$\chi(s) = f(s) \pm \varepsilon \theta(s).$$

Poichè:

$$\int_a^b \chi(s) \varphi_i(s) ds = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds = a_i,$$

si avrà, in virtù del Lemma al § 1,

$$\int_a^b [\chi(s)]^2 ds \geq \sum_i a_i^2,$$

ossia:

$$\int_a^b [\chi(s)]^2 ds \geq \int_a^b [f(s)]^2 ds.$$

Di qui risulta:

$$\varepsilon \int_a^b [\theta(s)]^2 ds \pm 2 \int_a^b f(s) \theta(s) ds \geq 0;$$

⁶⁾ Poichè per ipotesi $f(s)$ e $\theta(s)$ sono sommabili insieme ai loro quadrati, anche il loro prodotto $f(s)\theta(s)$ sarà sommabile nel campo $\overline{ab}$.

e quindi:

$$\varepsilon \geq \frac{2|\omega|}{\int_a^b [\theta(s)]^2 ds},$$

che è in contraddizione con la (7).

La condizione (6) è sufficiente. Infatti, come al § precedente, esisterà una funzione $f_1(s)$ sommabile insieme al suo quadrato, tale che

$$\int_a^b [f_1(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2, \quad a_i = \int_a^b f_1(s) \varphi_i(s) ds;$$

e si avrà ancora:

$$(8) \quad \int_a^b [f(s) - f_1(s)] \varphi_i(s) ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$(6') \quad \int_a^b f_1(s) \theta(s) ds = 0$$

per ogni soluzione effettiva $\theta(s)$ delle (3).

Se, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla, non si ha nel campo $\overline{ab}$:

$$f(s) = f_1(s),$$

la differenza $f(s) - f_1(s)$, in virtù della (8), sarà uguale ad una certa soluzione effettiva $\theta_1(s)$ delle (3). Ora le condizioni (6), (6') ci danno:

$$\int_a^b [f(s) - f_1(s)] \theta_1(s) ds = 0;$$

quindi sarà:

$$\int_a^b [f(s) - f_1(s)]^2 ds = 0;$$

e per conseguenza si avrà nel campo $\overline{ab}$, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla,

$$f(s) = f_1(s);$$

donde, come si voleva dimostrare,

$$\int_a^b [f(s)]^2 ds = \int_a^b [f_1(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2.$$

4. TEOREMA II. — Se la serie (1) è chiusa e se $f(s)$, $\psi(s)$ sono due funzioni (limitate o no) sommabili nel campo $\overline{ab}$ insieme ai loro quadrati, si avrà:

$$(9) \quad \int_a^b f(s) \psi(s) ds = \sum_i a_i b_i, \quad a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds, \quad b_i = \int_a^b \psi(s) \varphi_i(s) ds.$$

Infatti dal Teorema I risulta:

$$\int_a^b [f(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2, \quad \int_a^b [\psi(s)]^2 ds = \sum_i b_i^2,$$

$$\int_a^b [f(s) + \psi(s)]^2 ds = \sum_i (a_i + b_i)^2;$$

e da queste uguaglianze segue immediatamente la (9).

5. TEOREMA II*. — Se la serie (1) è non chiusa, se $f(s)$, $\psi(s)$ sono due funzioni (limitate o no) sommabili nel campo $\overline{ab}$ insieme ai loro quadrati e se inoltre per ogni

soluzione effettiva $\theta(s)$ delle (3) è verificata una almeno delle due condizioni:

$$\int_a^b f(s)\theta(s)ds = 0, \quad \int_a^b \psi(s)\theta(s)ds = 0,$$

si avrà:

$$(9^*) \quad \int_a^b f(s)\psi(s)ds = \sum_i a_i b_i, \quad a_i = \int_a^b f(s)\varphi_i(s)ds, \quad b_i = \int_a^b \psi(s)\varphi_i(s)ds.$$

Dalle condizioni di sommabilità poste per le $f(s)$, $\psi(s)$ e per i loro quadrati risulta intanto, in virtù del Lemma al § 1 e del teorema di FISCHER, l'esistenza di due funzioni $f_1(s)$, $\psi_1(s)$ sommabili nel campo $\overline{ab}$ insieme ai loro quadrati e tali che

$$(10) \quad \int_a^b [f_1(s)]^2 ds = \sum_i a_i^2, \quad a_i = \int_a^b f_1(s)\varphi_i(s)ds,$$

$$(11) \quad \int_a^b [\psi_1(s)]^2 ds = \sum_i b_i^2, \quad b_i = \int_a^b \psi_1(s)\varphi_i(s)ds.$$

Inoltre, in forza del Teorema I*, si avrà per ogni soluzione effettiva $\theta(s)$ delle (3):

$$(12) \quad \int_a^b f_1(s)\theta(s)ds = 0, \quad \int_a^b \psi_1(s)\theta(s)ds = 0.$$

Osserviamo poi che si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(s) - f_1(s)]\varphi_i(s)ds &= 0, \\ \int_a^b [\psi(s) - \psi_1(s)]\varphi_i(s)ds &= 0, \\ (i = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

per cui sarà:

$$\begin{aligned} f(s) &= f_1(s) + \theta_1(s), \\ \psi(s) &= \psi_1(s) + \theta_2(s), \end{aligned}$$

dove $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$ sono due certe soluzioni delle equazioni integrali (3), non necessariamente effettive.

Dalle (12) segue per ogni soluzione effettiva $\theta(s)$ delle (3):

$$(12') \quad \int_a^b [f_1(s) + \psi_1(s)]\theta(s)ds = 0;$$

sicchè si avrà, in virtù del Teorema I*,

$$\int_a^b [f_1(s) + \psi_1(s)]^2 ds = \sum_i (a_i + b_i)^2.$$

Da questa e dalle (10), (11) segue:

$$(13) \quad \int_a^b f_1(s)\psi_1(s)ds = \sum_i a_i b_i.$$

Se $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$ sono tutte e due soluzioni effettive delle (3), si ha:

$$\int_a^b f(s)\theta_1(s)ds = \int_a^b [f_1(s) + \theta_1(s)]\theta_1(s)ds = \int_a^b [\theta_1(s)]^2 ds \neq 0;$$

per cui dovrà essere, conformemente all'ipotesi fatta,

$$\int_a^b \psi(s)\theta_1(s)ds = 0;$$

e quindi:

$$\int_a^b \theta_1(s) \theta_2(s) ds = \int_a^b \psi(s) \theta_1(s) ds - \int_a^b \psi_1(s) \theta_1(s) ds = 0.$$

Questa e la (13) ci danno:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(s) \psi(s) ds &= \int_a^b f_1(s) \psi_1(s) ds + \int_a^b \psi_1(s) \theta_1(s) ds + \int_a^b f_1(s) \theta_2(s) ds + \int_a^b \theta_1(s) \theta_2(s) ds \\ &= \int_a^b f_1(s) \psi_1(s) ds = \sum_i a_i b_i, \end{aligned} \right.$$

come si voleva dimostrare.

Nel caso in cui una almeno delle $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$ non fosse effettiva, il ragionamento precedente si semplificherebbe.

6. Osserviamo che, ammessa la (9*), risulta dalla (14):

$$\int_a^b \theta_1(s) \theta_2(s) ds = 0;$$

e quindi ancora:

$$(15) \quad \int_a^b \psi(s) \theta_1(s) ds = 0.$$

Similmente si trova:

$$(16) \quad \int_a^b f(s) \theta_2(s) ds = 0.$$

I ragionamenti del § precedente ci assicurano poi che le condizioni (15), (16) sono sufficienti per la validità della (9*); sicchè possiamo enunciare il seguente

TEOREMA II.** — *Se la serie (1) è non chiusa e se $f(s)$, $\psi(s)$ sono funzioni (limitate o no) sommabili nel campo $\overline{ab}$ insieme ai loro quadrati, condizione necessaria e sufficiente, affinchè sia valida la formula (9*), è che siano soddisfatte le due condizioni (15), (16).*

7. TEOREMA III. — *Se la serie (1) è chiusa e $f(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato, condizione necessaria e sufficiente, affinchè nel campo $\overline{a_0 b_0}$ si abbia:*

$$(4) \quad f(s) = \sum_i a_i \varphi_i(s), \quad a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds,$$

fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla, e che la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ sia integrabile termine a termine nel campo $\overline{a_0 b_0}$ 7).

La condizione è necessaria. Infatti dalla (4) si ha intanto:

$$\int_{a_0}^{b_0} f(s) ds = \int_{a_0}^{b_0} \sum_i a_i \varphi_i(s) ds.$$

Dal Teorema II si ha ancora, ponendo $\psi(s) = 1$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$, $\psi(s) = 0$ nel rimanente campo $\overline{a_1 b_1} = \overline{ab} - \overline{a_0 b_0}$,

$$\int_{a_0}^{b_0} f(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \varphi_i(s) ds;$$

7) Per l'integrabilità termine a termine delle serie, vedi: VITALI, *Sull'integrazione per serie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIII (1° semestre 1907), pp. 137-155].

sicchè si avrà:

$$\int_{a_0}^{b_0} \sum_i a_i \varphi_i(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \varphi_i(s) ds.$$

La condizione è sufficiente. Infatti, poichè la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ per ipotesi è integrabile termine a termine nel campo $\overline{a_0 b_0}$, sarà pure integrabile termine a termine la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s) \varphi_j(s)$; e così si avrà:

$$\int_{a_0}^{b_0} \varphi_j(s) \sum_i a_i \varphi_i(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds.$$

Indicando con $f_1(s)$ quella funzione, la quale nei punti di $\overline{a_0 b_0}$ è uguale a $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ e nel rimanente campo $\overline{a_1 b_1}$ è uguale a $f(s)$, si avrà:

$$\int_a^b f_1(s) \varphi_j(s) ds = \int_{a_1}^{b_1} f(s) \varphi_j(s) ds + \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds.$$

Applicando poi il Teorema II col porre $\psi(s) = \varphi_j(s)$ nel campo $\overline{a_1 b_1}$, $\psi(s) = 0$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$, si avrà ancora:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(s) \varphi_j(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_1}^{b_1} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds;$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(s) \varphi_j(s) ds &= \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds + \sum_i a_i \int_{a_1}^{b_1} \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds \\ &= \sum_i a_i \int_a^b \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds = a_j. \end{aligned}$$

Adunque si può scrivere:

$$\int_a^b [f(s) - f_1(s)] \varphi_j(s) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots);$$

donde risulta:

$$f(s) = f_1(s) = \sum_i a_i \varphi_i(s)$$

in tutto il campo $\overline{a_0 b_0}$, fatta eccezione al più dei punti di un insieme di misura nulla.

8. TEOREMA III*. — Se la serie (1) è non chiusa, se $f(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato e se per ogni soluzione effettiva $\theta(s)$ delle (3) si ha:

$$(17) \quad \int_a^b f(s) \theta(s) ds = 0,$$

condizione necessaria e sufficiente, affinchè nel campo $\overline{a_0 b_0}$ si abbia:

$$(4^*) \quad f(s) = \sum_i a_i \varphi_i(s), \quad a_i = \int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds,$$

fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla, è che la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ sia integrabile termine a termine nel campo $\overline{a_0 b_0}$.

La condizione è necessaria. Infatti dalla (4*) risulta, in virtù delle (17) e del teorema II*, come al § precedente, che la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ è integrabile termine a termine nel campo $\overline{a_0 b_0}$.

La condizione è sufficiente. Infatti, poichè la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ è integrabile termine

a termine nel campo $\overline{a_0 b_0}$, si avrà, ragionando come al § precedente, in virtù delle (17) e del teorema II*,

$$\int_a^b [f(s) - f_1(s)] \varphi_j(s) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots);$$

e quindi dovrà essere:

$$f(s) = f_1(s) + \theta_1(s),$$

dove $\theta_1(s)$ è una certa soluzione delle equazioni integrali (3) non necessariamente effettiva.

Intanto dalla supposta integrabilità termine a termine della serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$ risulta:

$$\int_{a_0}^{b_0} f_1(s) \theta_1(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \theta_1(s) \varphi_i(s) ds.$$

Inoltre, in virtù delle condizioni (17), applicando il teorema II* col prendere $\psi(s) = 0$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$, $\psi(s) = \theta_1(s)$ nel campo $\overline{a_1 b_1}$, si ha:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(s) \theta_1(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_1}^{b_1} \theta_1(s) \varphi_i(s) ds;$$

per conseguenza avremo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(s) \theta_1(s) ds &= \int_{a_0}^{b_0} f_1(s) \theta_1(s) ds + \int_{a_1}^{b_1} f_1(s) \theta_1(s) ds \\ &= \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \theta_1(s) \varphi_i(s) ds + \sum_i a_i \int_{a_1}^{b_1} \theta_1(s) \varphi_i(s) ds = \sum_i a_i \int_a^b \theta_1(s) \varphi_i(s) ds; \end{aligned}$$

e quindi, avuto riguardo alle (3),

$$\int_a^b f_1(s) \theta_1(s) ds = 0.$$

Adunque si avrà:

$$0 = \int_a^b [f(s) - f_1(s)] \theta_1(s) ds = \int_a^b [\theta_1(s)]^2 ds;$$

e per conseguenza:

$$f(s) = f_1(s)$$

in tutto il campo $\overline{a b}$, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla, ossia:

$$f(s) = \sum_i a_i \varphi_i(s)$$

in tutto il campo $\overline{a_0 b_0}$, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla.

9. Sussiste ancora il seguente

TEOREMA III.** — *Se la serie (1) è non chiusa, se $f(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{a b}$ insieme al suo quadrato e se la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ è integrabile termine a termine nel campo $\overline{a_0 b_0}$, condizione necessaria e sufficiente affinché, fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla, sussista nel campo $\overline{a_0 b_0}$ lo sviluppo (4*), è che per ogni soluzione effettiva $\theta(s)$ delle equazioni integrali (3) sia soddisfatta la (17).*

La condizione è necessaria. Infatti, indicando con $\theta(s)$ una qualsiasi soluzione effettiva delle (3), si ha intanto integrando per serie:

$$\int_{a_0}^{b_0} f(s) \theta(s) ds = \int_{a_0}^{b_0} \theta(s) \sum_i a_i \varphi_i(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \theta(s) \varphi_i(s) ds.$$

Questa uguaglianza può essere dedotta ancora dalla (9*), ponendo $\psi(s) = \theta(s)$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$, $\psi(s) = 0$ nel rimanente campo $\overline{a_1 b_1}$; e poichè risulta allora, per la $\psi_1(s)$ del § 5, $\psi_1(s) = \sigma$, avremo, in forza del teorema II**, che la $f(s)$ deve necessariamente soddisfare alla condizione (17) [v. la (16)].

10. Passiamo ora ad estendere i teoremi del prof. SEVERINI relativi al caso di $f(s)$ funzione finita e continua nel campo $\overline{a_0 b_0}$, con l'ipotesi che anche le $\varphi_i(s)$ siano finite e continue.

Considerando senz'altro il caso più generale della serie (1) non chiusa, si hanno intanto i due seguenti teoremi, che si possono dimostrare valendosi dei ragionamenti contenuti nei §§ 6, 7 della Nota del SEVERINI.

α) Se $f(s)$ è una funzione (limitata o no) sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato, se è tale ancora che per ogni soluzione effettiva $\theta(s)$ delle (3) sussiste la (17), se inoltre essa è finita e continua nel campo $\overline{a_0 b_0}$, e se la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ è convergente nel campo $\overline{a_0 b_0}$, si ha che questa serie rappresenta la $f(s)$ nei punti di un insieme denso in $\overline{a_0 b_0}$.

β) Se per la $f(s)$ si fanno le medesime supposizioni del teorema precedente, condizione necessaria e sufficiente, affinchè la serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ la rappresenti nel campo $\overline{a_0 b_0}$, è che tale serie quivi converga quasi uniformemente.

Si osservi che, nelle ipotesi fatte per la $f(s)$ e per le $\varphi_i(s)$, gli integrali che entrano nella formola:

$$\int_{a_0}^{b_0} f(s) ds = \sum_i a_i \int_{a_0}^{b_0} \varphi_i(s) ds,$$

la quale si deduce immediatamente dalla (9*), divengono integrali di RIEMANN. Allora, ragionando come al § 8 della Nota del prof. SEVERINI, si ha il seguente teorema:

γ) Se per la $f(s)$ si fanno le solite ipotesi e tutt'al più se la $f(s)$, non essendo finita e continua nel campo $\overline{a_0 b_0}$, è tale però che questo campo si può scomporre in un numero finito di parti, in ciascuna delle quali la $f(s)$ è finita e continua, la convergenza quasi uniforme in generale della serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$ è condizione necessaria e sufficiente non solo perchè tale serie sia quivi integrabile (nel senso di RIEMANN), ma perchè sia anche integrabile termine a termine.

Questo teorema ed il Teorema III* ci danno:

δ) Se per la $f(s)$ si fanno le medesime ipotesi del teorema γ), la convergenza quasi uniforme in generale della serie $\sum_i a_i \varphi_i(s)$ nel campo $\overline{a_0 b_0}$ è condizione necessaria e sufficiente, affinchè nel campo $\overline{a_0 b_0}$ si abbia:

$$f(s) = \sum_i a_i \varphi_i(s),$$

fatta eccezione al più per i punti di un insieme di misura nulla.

Catania, agosto 1909.

GIUSEPPE LAURICELLA.