Sulle serie $\sum_0 A_n X_n$.

(Memoria del prof. G. ASCOLI, a Milano.)

1.

Il prof. DIRI in una Memoria inserita nel tomo 6° di questi Annali (*) dimostrò il teorema:

Se, fatta astrazione di un gruppo di punti dell'ordine r (**) compresi tra 1 e -1 , si ha

$$\sum A_n X_n = \sum B_n X_n$$

per gli altri punti dello stesso intervallo, sarà:

$$A_n = B_n.$$

Questo teorema può enunciarsi anche nel modo che segue:

Una funzione $f(x)$ nulla tra 1 e -1 , tranne che per un gruppo di punti dell'ordine r (e circa al significato della medesima in essi punti nulla viene supposto), può esprimersi in un sol modo, fatta astrazione del gruppo indicato, per serie della forma:

$$\sum a_n X_n,$$

essendo $a_n = 0$, oppure, ciò che torna lo stesso,

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_n dx.$$

Tale proposizione è caso particolare della seguente, che mi propongo di dimostrare in questa Memoria:

(*) V. pag. 216.

(**) Per gruppo di punti dell'ordine r intendo ciò che nella mia Memoria: *Sulla serie di Fourier* ho chiamato sistema di punti r volte infinito. V. il vol. 6° di questi Annali, pag. 55 e seguente.

Se la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione ovunque integrabile; che va all'infinito in un numero limitato di punti, purchè, considerata soltanto nelle estreme vicinanze dei valori $+1$ e -1 , si possa integrare anche presa sempre con lo stesso segno, sarà:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} (\sum_s A_s X_s) X_n dx.$$

Questo teorema riesce molto interessante, in quanto per provarne la verità fa di mestieri toccare alcuni punti fondamentali del Calcolo integrale. Anzi, ciò che mi indusse a scrivere questa Memoria non è già il desiderio di dimostrare la proposizione enunciata, che pur non mi sembra scevra da qualche interesse, ma bensì la brama di esporre alcune ricerche di Calcolo integrale ed altre relative alla teoria delle funzioni X_n , le quali sono necessarie per porre in sodo il teorema indicato.

2.

Anzitutto converrà chiarire ciò che va inteso dicendo la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile (*).

Supposto che $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sieno due funzioni finite dei punti del segmento ab ed in esso integrabili, consideriamo il simbolo $\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$. Questo può essere ovunque scevro da significato, il che avrebbe luogo ad es. se la $\varphi_1(x)$ fosse eguale ad 1 in tutti i punti distanti dall'origine di lunghezze commensurabili con la unità di misura, non avendo luogo dipendenza per gli altri, e se la $\varphi_2(x)$ fosse nulla in questi ultimi e non esistesse nei primi. Il simbolo $\varphi_1 \pm \varphi_2$ potrà anche aver significato in un numero limitato o illimitato di punti. Quando poi in un intervallo qualsivoglia di ab esiste un punto, e quindi infiniti, pel quale il segno $\varphi_1 \pm \varphi_2$ rappresenta una grandezza, gli è chiaro che, se si pone $\varphi = \varphi_1 \pm \varphi_2$, sarà:

$$\int_c^d \varphi(x) dx = \int_c^d \varphi_1(x) dx \pm \int_c^d \varphi_2(x) dx, \quad a \leq c < d \leq b.$$

(*) Per l'intelligenza di questo paragrafo e di alcuni di quelli che seguono fa d'uopo leggere la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, inserita nel t. 2° della Serie 2ª degli Atti della Reale Accademia dei Lincei.

È altresì manifesto come due funzioni non integrabili φ_1, φ_2 possano dare origine ad una funzione integrabile $\varphi_1 - \varphi_2$ oppure $\varphi_1 + \varphi_2$; in questa ipotesi però le due espressioni $\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2$ non sono integrabili nel medesimo tempo.

Ciò posto, sieno φ_1 e φ_2 due funzioni finite tra a e b integrabili insieme all'altra $\varphi_1 - \varphi_2$, in guisa che sia

$$\int_c^d \varphi_1(x) dx - \int_c^d \varphi_2(x) dx = 0, \quad a \leq c < d \leq b,$$

e studiamo la funzione $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ il cui integrale è nullo.

Dico $G_1, G_2, G_3, \dots, G_s, \dots$ una serie illimitata di gruppi di punti nel segmento ab , scelta in guisa che i punti di qualsiasi gruppo G_s appartengano al successivo G_{s+1} e che, indicati con $\delta_s^{(1)}, \delta_s^{(2)}, \dots$ gli intervalli corrispondenti a G_s , si abbia $\lim_{s \rightarrow \infty} \delta_s^{(r)} = 0$, quale si sia r . Chiamo poi $S_{(s)}$ la somma degli

spazi δ relativi a G_s nei quali, inclusi i limiti, la funzione $\varphi(x)$ assume valori positivi e negativi, somma che potrà essere anche nulla. Ora, la quantità $S_{(s)}$

converge a zero con $\frac{1}{s}$ oppure ciò non ha luogo: suppongo anzitutto il primo

caso. In tale ipotesi attribuisco ad s un valore $s_1 + r$ ($r \geq 0$) tale, che la somma $S_{(s_1+r)}$ sia arbitrariamente piccola. In ciascuno degli spazi δ non appartenenti a $S_{(s_1+r)}$ la funzione $\varphi(x)$ sarà, compresi i limiti, sempre positiva o negativa: poniamo che nel tratto $\delta_{s_1+r}^{(k)}$ abbia il segno $+$, essendo p e q le ascisse dei suoi estremi. Quindi, considerato il gruppo G_{s_1+r+t} e posto mente che per la fatta ipotesi si ha

$$\int_{p_1}^{q_1} \varphi(x) dx = 0, \quad p \leq p_1 < q_1 \leq q,$$

la somma degli spazi appartenenti al tratto $\delta_{s_1+r}^{(k)}$, nei quali la funzione $\varphi(x)$ ha un limite superiore che non è più piccolo della quantità arbitraria σ , convergerà a zero con $\frac{1}{t}$. Il numero dei tratti δ_{s_1+r} in ciascuno dei quali, inclusi

i limiti, la $\varphi(x)$ è sempre dello stesso segno, è limitato per ogni valor particolare del numero intero $s_1 + r$, e per ciò la somma dei segmenti δ_{s_1+r+t} appartenenti ai medesimi, nei quali il limite superiore od inferiore supera, astrazione fatta dal segno, la quantità arbitraria σ , va a zero con $\frac{1}{t}$. Adunque nel caso ora contemplato la somma degli spazi nei quali la funzione studiata assume,

non tenendo calcolo del segno, un valore più grande della quantità arbitraria σ , si annulla con $\frac{1}{s}$.

Poniamo ora che l'espressione $S_{(s)}$ non tenda a zero con $\frac{1}{s}$.

Sia s scelto in guisa che le quantità $S_{(s)}$ e $\sum_r A_s^{(r)} \delta_s^{(r)}$ sieno arbitrariamente vicine al loro limite, $A_s^{(r)}$ essendo il limite superiore della funzione $\varphi(x)$ nel tratto $\delta_s^{(r)}$, i confini compresi. Ciò posto, formando l'integrale $\int \varphi(x) dx$ si potrà moltiplicare ciascuno dei tratti appartenenti alla somma $S_{(s)}$ pel limite superiore dei valori della $\varphi(x)$ nel medesimo, e poichè per gli intervalli non appartenenti ad $S_{(s)}$ vale il ragionamento fatto or ora, ne consegue che anche la somma degli spazi δ_s appartenenti ad $S_{(s)}$, nei quali il limite superiore è maggiore di σ , va a zero con $\frac{1}{s}$. Se poi calcolando l'integrale moltiplicassi ciascuno dei tratti appartenenti ad $S_{(s)}$ pel suo limite inferiore, ne inferirei che la somma degli spazi appartenenti ad $S_{(s)}$ e nei quali la $\varphi(x)$ ha, astrazion fatta dal segno, un limite inferiore più grande di σ , converge a zero con $\frac{1}{s}$. Adunque:

Se una funzione dei punti di ab ha il suo integrale nullo, dovrà convergere a zero la somma degli spazi nei quali essa raggiunge valori maggiori, astrazion fatta dal segno, di una quantità arbitraria; e reciprocamente.

Se consideriamo la funzione $\varphi(x)$ in un tratto qualsivoglia appartenente ad ab , nel quale è sempre positiva, supposto che tale tratto possa assegnarsi, sarà il limite inferiore dei valori assunti della medesima in esso, compresi amendue i limiti o uno o nessuno, eguale a zero. Questa asserzione non trae però di necessaria conseguenza che la $\varphi(x)$ abbia a raggiungere questo valore in esso segmento. Così per es., se definissi nell'intervallo $\frac{1}{2}$ 1 una funzione per modo, che in tutti i punti di ascissa $\frac{p}{q}$ fosse eguale al valore corrispondente $\frac{1}{q}$, mentre negli altri non avesse luogo dipendenza, otterrei una funzione sempre positiva il cui integrale è nullo e che non raggiunge mai lo zero.

Ora possiamo spiegare ciò che va inteso col dire la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile.

Essendo $c_1, c_2, c_3, \dots$ una serie illimitata di grandezze, consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_1^{\frac{1}{x}} c_n,$$

la quale esiste soltanto per valori di x della forma $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

Facendo convergere x allo zero la $f(x)$ potrà restar finita o no: poniamo che si verifichi il primo caso. In tale ipotesi la $f(x)$ oscillerà per $x = +0$ fra due rette limite (*), le equazioni delle quali sieno $y = A, y = B$ ($A \geq B$). Indicheremo questo fatto dicendo che la serie $\sum c_n$ si mantiene finita e che la sua somma oscilla tra le quantità A e B .

Lasciando indeterminato il significato della serie $\sum A_n X_n$ in un gruppo di punti dell'ordine r , poniamo che essa del resto si mantenga finita per ogni valor particolare di x compreso tra $+1$ e -1 , e sieno $\theta_1(x)$ e $\theta_2(x)$ le quantità tra le quali oscilla la sua somma. Voglio dire con ciò che, essendo x_1 un punto appartenente a questo gruppo, ignoriamo se i simboli $\theta_1(x_1), \theta_2(x_1)$ rappresentino o no una grandezza. Stando le cose in questi termini diremo che il simbolo $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile quando sieno tali le due funzioni $\theta_1(x), \theta_2(x)$, e di più sia

$$\int_c^d \theta_1(x) dx = \int_c^d \theta_2(x) dx, \quad c < d, \quad c \geq -1, \quad d \leq +1.$$

L'asserire poi che la funzione $\sum A_n X_n$ va all'infinito in un numero limitato di punti equivale all'ammettere che la funzione $\theta_1(x)$ o la $\theta_2(x)$, oppure amendue, crescano o diminuiscano al di là di ogni limite per un numero assegnabile di punti. Osservo che se una delle funzioni $\theta_1(x), \theta_2(x)$ si comporta nel modo indicato in un punto del segmento $-1 +1$, ciò non ha luogo di necessità dell'altra.

Infatti, se si considera nell'intervallo $+0\epsilon$ una funzione che va all'infinito per $x = +0$ (**), non potrà assegnarsi al certo una almeno delle rette limite corrispondenti al medesimo, oppure nessuna delle due. Nel caso che ne esista una, essa sarà una funzione di ϵ , la quale si scosta indefinitamente per $\epsilon = +0$ oppure converge ad una posizione.

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 28. Ivi io mi accosto al punto $a + 0$ che è a distanza finita supponendo la funzione continua tra a e b ($a < b$) e finita. Di queste condizioni però basta che sia soddisfatta la terza perchè esistano le due rette limite. La differenza $A - B$ è la oscillazione O_{+0} a destra della origine della funzione $f(x)$. V. anche la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, n.º III, par. 2.

(**) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 33 e seg.™

Am messo poi che la $\theta_1(x)$ vada per $x = +0$ ad es. all'infinito, se non esistono le due rette limite corrispondenti al tratto $+0\varepsilon$ dovrà la $\theta_2(x)$ crescere oltre ogni misura, astrazione fatta dal segno, per $x = +0$. Perchè se ciò non avesse luogo, essendo sempre $\theta_2(x) < \theta_1(x)$, la $\theta_1(x)$ avrebbe un limite inferiore nel tratto $+0\varepsilon$; la qual cosa è contraria all'ipotesi. Supposto invece che nell'intervallo $+0\varepsilon$ la $\theta_1(x)$ manchi della retta limite superiore soltanto, se la retta limite inferiore va all'infinito per $\varepsilon = +0$ anche la $\theta_2(x)$ crescerà per $x = +0$ oltre ogni confine, inquantochè l'integrale della funzione $\theta_1(x) - \theta_2(x)$ essendo, per ipotesi nullo, si può sempre assegnare nel tratto $+0\varepsilon$, quale si sia ε , un punto, in cui la espressione $\theta_1(x) - \theta_2(x)$ è arbitrariamente piccola. Se all'incontro la retta limite inferiore convergesse per $\varepsilon = +0$ ad una posizione assegnabile, la $\theta_2(x)$ non andrebbe per $x = +0$ di necessità all'infinito. Per ultimo, se nell'intervallo $+0\varepsilon$ la $\theta_1(x)$ non ammettesse la retta limite inferiore soltanto, la $\theta_2(x)$ crescerebbe, astrazione fatta dal segno, al di là di ogni limite per $x = +0$.

Gli è chiaro adunque ciò che debba intendersi col dire la serie $\sum A_n X_n$ rappresenta una funzione integrabile o meglio è atta all'integrazione, e come l'integrabilità della serie non porti di necessaria conseguenza che la medesima abbia a convergere sia pure in un sol punto del tratto $-1 + 1$.

Il sig. PAUL DU BOIS-REYMOND asserisce in una Memoria sulle serie trigonometriche (*) che una serie di cui tutti i termini sono funzioni della x debba convergere almeno una volta, e quindi infinite, in un intervallo qualsivoglia per essere integrabile; asserzione che per quanto or ora fù detto non mi sembra del tutto esatta.

Diamo adesso alcuni schiarimenti circa alle condizioni imposte alla serie nelle estreme vicinanze dei punti -1 e $+1$ e, a tal fine, dimostriamo il teorema:

Se $f(x)$ è una funzione finita dei punti del segmento ab ed in esso integrabile, nel medesimo segmento la funzione $f_1(x) = +\sqrt{[f(x)]^2}$ sarà atta all'integrazione.

Infatti, sia $G_1, G_2, \dots G_s, \dots$ una serie illimitata di gruppi nel segmento ab , tali che i punti formanti un gruppo appartengano anche al successivo. Supposto s_1 sufficientemente grande, la somma $S_{s_1+t}(t \geq 0)$ degli spazi nei quali la oscillazione massima della $f(x)$ è eguale o maggiore alla quantità arbitraria

(*) Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XII Bd. I Abth.

σ , sarà piccola quanto si vuole. Ciò posto, è chiaro che in uno qualunque degli intervalli δ_{s_i+t} non appartenenti ad S_{s_i+t} i valori della $f(x)$ saranno, compresi i limiti, o tutti positivi o tutti negativi, e, se di segno contrario, in valore assoluto non potranno nè eccedere nè eguagliare σ , poichè, se non fossero soddisfatte queste condizioni, la oscillazione della $f(x)$ nel tratto considerato sarebbe superiore a σ . Ora, è evidente che la somma degli spazi nei quali la oscillazione della funzione $f_1(x)$ è maggiore di σ relativamente al gruppo $G_{s_i+t}(t \geq 0)$ non è più grande di S_{s_i+t} . L'asserzione è quindi dimostrata.

Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ vada all'infinito per $x = +0$, non conservando lo stesso segno, e che l'integrale $\int_x f(x) dx$ converga per $\varepsilon = +0$; di più la $f(x)$, considerata che sia nel tratto 0ε , manchi di una retta limite soltanto e per fissar le idee della superiore: in tale ipotesi è facile a vedersi come la espressione $\int_x f_1(x) dx$ converga ad un limite per $\varepsilon = +0$. Infatti, la funzione $f(x) - f_1(x)$ non va all'infinito per $x = +0$, e quindi la stessa cosa ha luogo per la differenza $\int_x f(x) dx - \int_x f_1(x) dx$, perciò l'integrale $\int_x f_1(x) dx$, che non oscilla all'annullarsi di ε , tende ad un limite. Se però la funzione $f(x)$ mancasse di amendue le rette limite nel tratto $+0\varepsilon$ e l'integrale $\int_x f(x) dx$ convergesse, ciò non avrebbe luogo necessariamente dell'altro $\int_x f_1(x) dx$ (*). Si

può anche enunciare il seguente teorema:

Se una funzione dei punti di un segmento, la quale non sia sempre dello stesso segno, è integrabile, dovrà convergere a zero la somma degli spazi, nei quali essa è positiva e negativa ed in pari tempo consegue valori che, astrazion fatta dal segno, non sono inferiori ad una quantità arbitraria σ .

Adunque, riepilogando, le condizioni imposte alla serie $\sum A_n X_n$ nell'enunciato del teorema da dimostrarsi sono:

I. Che si mantenga finita per ogni valor particolare della va-

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 41 e seg.¹⁴

riabile x compreso tra -1 e $+1$, astrazione fatta di un gruppo di punti dell'ordine r , nei quali si ignora il modo di comportarsi della medesima.

II. Sia ovunque integrabile e vada all'infinito tutto al più in un numero limitato di punti, che supporremo facciano parte del gruppo dell'ordine r , purchè, considerata soltanto nelle estreme vicinanze dei punti $+1$ e -1 , si possa integrare presa sempre con lo stesso segno.

3.

Per la dimostrazione del nostro teorema è necessario far vedere come si abbia

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2 \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2n\pi} \sin \theta} \left(1 - \frac{1}{4n} \right) + \frac{\cotg \theta \sin \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4n \sqrt{2n\pi} \sin \theta} + \frac{p_n}{n^2 \sqrt{n}}, \quad (1)$$

ove $\rho = n + \frac{1}{2}$, p_n resta finito ed è funzione continua di θ quale si sia n , e θ è compreso tra ε e $\pi - \varepsilon$, essendo ε una quantità arbitrariamente piccola.

Il sig. BONNET nella Memoria: *Sur le développement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fonctions X_n et Y_n* (Journal de LIOUVILLE, t. 17, Année 1852) trova invece tra gli stessi limiti

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2 \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2n\pi} \sin \theta} \left(1 + \frac{(-1)^n}{4n} \right) + \frac{\cotg \theta \sin \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4n \sqrt{2n\pi} \sin \theta} + \frac{p}{n^2 \sqrt{n}}, \quad (2)$$

p avendo un significato analogo a quello di p_n .

Indicherò alla fine di questo paragrafo le obbiezioni che, a mio credere, si ponno fare alla dimostrazione del sig. BONNET.

Ecco come parmi si possa porre in sodo la formola (1) giovandosi di quanto è esposto a pag. 99 e seg.^{ue} dell'opera del sig. HEINE: *Handbuch der Kugelfunctionen*.

Si ha con LAPLACE

$$\begin{aligned} \pi P_n(x) &= \int_0^\pi (x + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi (x + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi, \end{aligned}$$

e ponendo nell'ultimo integrale $\varphi = \pi - \varphi_1$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x + \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi;$$

fatto poi $\sin^2 \frac{1}{2} \varphi = z$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \pi P_n(x) &= \int_0^{\frac{1}{2}} [x + (1 - 2z) \sqrt{x^2 - 1}]^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}} + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 [x - (1 - 2z) \sqrt{x^2 - 1}]^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}}. \end{aligned}$$

Posto quindi

$$\xi = x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{1}{\xi^{-1}},$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \pi P_n(x) &= \xi^n \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\xi} z\right)^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}} + \\ &+ \xi^{-n} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 + 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\xi^{-1}} z\right)^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}}. \end{aligned}$$

Faccio adesso

$$a = 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\xi}, \quad a_1 = -2 \xi \sqrt{x^2 - 1},$$

$$x = \cos \theta, \text{ quindi } \xi = x + \sqrt{x^2 - 1} = e^{i\theta},$$

ed ho:

$$\begin{aligned} \pi P_n(\cos \theta) &= e^{in\theta} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - az)^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}} + e^{-in\theta} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - a_1 z)^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}} \\ &= e^{in\theta} H + e^{-in\theta} K, \end{aligned}$$

K deducendosi da H mutando i in $-i$.

Considerando in prima l'integrale H , decomponiamolo in due, l'uno da 0 ad $n \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta} - 1$, $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$, l'altro da $n \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta} - 1$ sino ad $\frac{1}{2}$. Gli è facile il vedere come la espressione

$$\int_{\frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta} - 1}^{\frac{1}{2}} (1 - az)^n \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}}$$

diventi zero di ordine infinito al crescere indefinito di $n\left(\frac{1}{n}\right.$ considerandosi come uno zero di primo ordine per $n=\infty$); ciò risulta dalle seguenti considerazioni.

Si ha

$$a = 2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)i\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta + i\operatorname{sen}2\theta,$$

e

$$\operatorname{mod}[1-az] = \sqrt{(1-2z\operatorname{sen}^2\theta)^2 + z^2\operatorname{sen}^22\theta} = \sqrt{1-4(z-z^2)\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Ora, poichè la funzione $z-z^2$ cresce sempre da $z=0$ a $z=\frac{1}{2}$, il modulo di $(1-az)$ decresce sempre tra gli stessi limiti variando da 1 a $+\sqrt{\cos^2\theta}$. Avremo quindi:

$$\log(1-az) = -\eta + \varphi i,$$

essendo $\eta > 0$ per tutti i valori di z fuori che per $z=0$, pel quale valore si annulla. L'espressione

$$(1-az)^n = e^{-n\eta}(\cos n\varphi + i\operatorname{sen}n\varphi)$$

va adunque a zero con infinita rapidità per tutti i valori di z maggiori od eguali ad una quantità comunque piccola, oppure per tutti i valori di $z \geq \varphi(n)$, essendo $\lim_{n=\infty} \varphi(n) = 0$, quando $(1-az)^n$ si annulli con rapidità infinita per $z = \varphi(n)$ ed $n = \infty$.

È facile vedere che la funzione $\varphi(n) = n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}$ soddisfa alle condizioni accennate.

Infatti, essendo $\operatorname{mod} a = 2\operatorname{sen}\theta$, $z < \frac{1}{2}$, e quindi $\operatorname{mod} az < 1$, si ha:

$$\log(1-az) = -az - \frac{a^2z^2}{2} - \frac{a^3z^3}{3} - \dots,$$

perciò:

$$(1-az)^n = e^{-naz\left(1+\frac{az}{2}+\frac{a^2z^2}{3}+\dots\right)},$$

e, facendo $z = n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}$,

$$(1-az)^n = e^{-an^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}}\left(1+\frac{a}{2}n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}-1}+\dots\right)}.$$

Questa espressione va a zero come $e^{-2\operatorname{sen}^2\theta n^{\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta}}}$, ossia diviene zero di ordine infinito, perchè, essendo $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$, si ha $\frac{\operatorname{sen}^2\varepsilon}{\operatorname{sen}^2\theta} < 1$.

Consideriamo ora l'integrale

$$I_n = \int_0^b (1 - az)^n \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} \quad \left(b = n^{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta} - 1}\right);$$

ponendo $z = \frac{y}{n}$ si otterrà:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay \left(1 + \frac{ay}{2n} + \frac{a^2 y^2}{3n^2} + \dots\right)} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1 - \frac{y}{n}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1 - \frac{y}{n}}} \left[1 - \frac{a^2 y^2}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{a^4 y^4}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{a^6 y^6}{n^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots\right)^3 + \dots\right] dy. \end{aligned}$$

L'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1 - \frac{y}{n}}}$$

è, essendo $y \leq n^{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \theta}} < n$, eguale a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \sqrt{y} dy + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} y^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{5}{6} \frac{y}{n} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \frac{y^2}{n^2} + \dots\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \sqrt{y} dy + \frac{q_n}{n^2 \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

e q_n non cresce oltre ogni limite con n . Questo aggregato potrà poi presentarsi nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-ay} \sqrt{y} dy + \frac{q'_n}{n^2 \sqrt{n}},$$

q'_n avendo un significato analogo a quello di q_n , e ciò perchè gli integrali

$$\int_{nb}^\infty e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad \int_{nb}^\infty e^{-ay} \sqrt{y} dy$$

vanno a zero con rapidità infinita mentre n cresce al di là di ogni limite.

Ora, poichè la parte reale di a è positiva, si ha:

$$\int_0^\infty e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ay} \sqrt{y} dy = \left(\sqrt{y} \frac{e^{-ay}}{-a} \right)_0^\infty + \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

laonde:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y} \sqrt{1 - \frac{y}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{1}{4an\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{q'_n}{n^2 \sqrt{n}}.$$

D'altra parte, l'integrale I_n può mettersi nella forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y} \sqrt{1 - \frac{y}{n}}} - \frac{a^2}{n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{1}{\sqrt{y} \sqrt{1 - \frac{y}{n}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots \right) y^2 dy + \\ & + \frac{a^4}{2n^2 \sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{1}{\sqrt{y} \sqrt{1 - \frac{y}{n}}} y^4 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{a^2 y^2}{n} \left(\frac{1}{2} + \dots \right)^3 + \dots \right] dy. \end{aligned}$$

L'espressione

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{a^2 y^2}{n} \left(\frac{1}{2} + \dots \right)^3 + \dots - \frac{1}{4},$$

supposto θ scelto in guisa che si abbia

$$2 \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta} - 1 < 0,$$

si annulla con $\frac{1}{n}$, poichè per $y \leq nb$ la quantità

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{ay}{3n} + \dots \right)^s$$

converge ad $\frac{1}{2^s}$ e l'altra $\left(\frac{a^2 y^2}{n} \right)^s$ va a zero con $\frac{1}{n}$, quale si sia s . L'ipotesi che si abbia $2 \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta} - 1 < 0$ non impedisce che θ possa avvicinarsi ai valori 0 e π quanto si vuole, purchè ε sia scelto convenientemente.

Ciò posto, l'integrale I_n può scriversi anche così

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{1}{4an\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{q'_n}{n^2\sqrt{n}} - \frac{a^2}{n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} y^2 dy - \\ & - \frac{a^3}{n^2\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} \left(\frac{1}{3} + \frac{ay}{4n} + \dots \right) y^3 dy = \\ & \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{1}{4an\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{a^2}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} \frac{y^2}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} dy + \frac{r_n}{n^2\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

q'_n ed r_n essendo due quantità che non vanno all'infinito con n .

Ma

$$\int_0^{nb} y^2 e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} = \int_0^{nb} e^{-ay} y^{\frac{3}{2}} dy + \frac{1}{2n} \int_0^{nb} e^{-ay} y^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{y}{n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{y^2}{n^2} + \dots \right) dy,$$

quindi:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} y^2 e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-\frac{y}{n}}} &= \frac{a^2}{2n\sqrt{n}} \int_0^{nb} e^{-ay} y^{\frac{3}{2}} dy + \frac{t'_n}{n^2\sqrt{n}} = \\ & \frac{a^2}{2n\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-ay} y^{\frac{3}{2}} dy + \frac{t_n}{n^2\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

t_n e t'_n non crescendo oltre ogni limite con n .

Ora,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ay} y^{\frac{3}{2}} dy &= \left(y^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-ay}}{-a} \right)_0^\infty + \frac{3}{2} \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-ay} \sqrt{y} dy = \\ & \frac{3}{2} \frac{1}{a} \left(\sqrt{y} \frac{e^{-ay}}{-a} \right)_0^\infty + \frac{3}{4} \frac{1}{a^2} \int_0^\infty e^{-ay} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3}{4} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{aligned}$$

per cui:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{1}{4an\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{3}{8n\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \frac{s_n}{n^2\sqrt{n}},$$

ed s_n non va all'infinito con n .

D'altra parte,

$$a = 2(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) i \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta + i \cos \theta) =$$

$$2 \operatorname{sen} \theta \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] = 2 \operatorname{sen} \theta e^{i \frac{\pi}{2}} e^{-i \theta},$$

quindi:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{i \frac{\theta}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}} \frac{1}{2 \operatorname{sen} \theta} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{3i \frac{\theta}{2}} e^{-3i \frac{\pi}{4}} -$$

$$- \frac{3}{8n\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{i \frac{\theta}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} + \frac{s_n}{n^2 \sqrt{n}},$$

perciò:

$$H = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{i \frac{\theta}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}} \frac{1}{2 \operatorname{sen} \theta} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{3i \frac{\theta}{2}} e^{-3i \frac{\pi}{4}} -$$

$$- \frac{3}{8n\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{i \frac{\theta}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} + \frac{s'_n}{n^2 \sqrt{n}},$$

s'_n avendo significato analogo a quello di s_n .

L'integrale K deducendosi da H mutando i in $-i$, si ha:

$$K = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{-i \frac{\theta}{2}} e^{i \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4n\sqrt{n}} \frac{1}{2 \operatorname{sen} \theta} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{-3i \frac{\theta}{2}} e^{3i \frac{\pi}{4}} -$$

$$- \frac{3}{8n\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \theta}} e^{-i \frac{\theta}{2}} e^{i \frac{\pi}{4}} + \frac{s''_n}{n^2 \sqrt{n}},$$

per cui finalmente:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi \operatorname{sen} \theta}} \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4n\sqrt{2n\pi \operatorname{sen} \theta}} \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$+ \frac{\cotg \theta}{4n\sqrt{2n\pi \operatorname{sen} \theta}} \operatorname{sen} \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{4n\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sen} \theta}} \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{p_n}{n^2 \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{2 \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2n\pi \operatorname{sen} \theta}} \left(1 - \frac{1}{4n} \right) + \frac{\cotg \theta}{4n\sqrt{2n\pi \operatorname{sen} \theta}} \operatorname{sen} \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{p_n}{n^2 \sqrt{n}},$$

p_n essendo una funzione finita e continua di θ , quale si sia n .

Accenno ora brevemente alle obbiezioni che si possono fare alla dimostrazione del sig. BONNET, che mi sembra appuntabile in due punti.

L'autore trova con operazioni lecite le due eguaglianze (*)

$$0 = \frac{\delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2} \left[3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) - \frac{a}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) \right] + \frac{p\delta}{k^3} + \frac{q}{k^3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}\pi} e^{-\frac{1}{8k} + \frac{\theta''}{k^3}} = \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) + \frac{a}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) \right] + \frac{p\delta}{k^3} + \frac{q}{k^3}.$$

Però, convien avvertire che le quantità δ ed ε , le quali compariscono nella prima delle due formole precedenti, sono funzioni del numero pari e positivo $2k$, mentre le quantità δ ed ε della seconda sono funzioni formate nello stesso modo delle altre col numero impari e positivo $2k+1$.

Ora, trovate queste relazioni, il sig. BONNET opera sovra esse come se le quantità δ ed ε che compariscono nella prima fossero eguali alle quantità indicate egualmente nella seconda, mentre nulla permette di asserire che tale eguaglianza abbia luogo. Ricava quindi

$$\delta = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \pm \frac{1}{n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n\sqrt{n}}, \quad \varepsilon = -\frac{\pi}{4} - \frac{a}{8n} + \frac{q}{n^2},$$

il segno superiore riferendosi al caso di n pari, l'altro a quello di n impari (v. p. 276). La sostituzione di questi valori nella equazione

$$u = \frac{\delta \cos(\rho\gamma + \varepsilon)}{n} - \frac{\delta \cos(\rho\gamma + \varepsilon)}{2n^2} - \frac{\delta}{8n^2} \operatorname{sen}(\rho\gamma + \varepsilon) \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\gamma'}{\operatorname{sen}^2 \gamma'} + \frac{p\delta}{n^3} + \frac{q}{n^3}$$

$$\left(\rho = n + \frac{1}{2} \right)$$

non dà origine alla formola trovata dal sig. BONNET, che è

$$u = \frac{2 \cos\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + (-1)^n \frac{\cos\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}} + \frac{\cotg \gamma \operatorname{sen}\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

ma bensì all'altra

$$\frac{2 \cos\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi n}} \pm \frac{\cos\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}} - \frac{2 \cos\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}} + \frac{\cotg' \gamma \operatorname{sen}\left(\rho\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

il segno superiore valendo per n pari, l'inferiore per n impari. Questa sostituzione è il secondo dei punti critici ai quali allusi poco fa.

(*) V. pag. 270-277 della Memoria citata.

Anche intorno alla dimostrazione data dal sig. BONNET circa alla sviluppabilità di una funzione per serie di funzioni sferiche si ponno fare alcune osservazioni. Circa alla medesima il prof. DINI, in una Memoria inserita nel tomo sesto di questi Annali (p. 112), dice: « Uno dei teoremi più importanti dell'Analisi è quello che permette di esprimere analiticamente per una serie di funzioni sferiche una funzione di due variabili reali data arbitrariamente sopra la sfera. Le dimostrazioni però di DIRICHLET e di BONNET, che ordinariamente si danno di questo teorema, non mi pare che possano dirsi del tutto rigorose, a meno che non si facciano sulla natura della funzione certe restrizioni delle quali nelle dimostrazioni stesse non si fa parola ».

Ora, tenendo conto soltanto della dimostrazione del sig. BONNET, non parmi che regga la obbiezione del sig. DINI. Egli è vero, l'Autore francese non enuncia a principio della sua dimostrazione tutte le proprietà che dee avere una funzione per essere esprimibile per serie di funzioni sferiche, o meglio, perchè alla medesima possano applicarsi le sue ricerche; ma però esse scaturiscono dai ragionamenti successivi, ossia la dimostrazione stessa restringe di più in più la natura delle funzioni per le quali essa è valevole.

Per non parlare di mende di minor momento, la inesattezza principale consiste, a mio credere, nel far uso della formola (α), che non è vera, nella dimostrazione del teorema in discorso. Ciò non pertanto alcune leggiere modificazioni, mentre semplificano di un tantino detta dimostrazione, la rendono altresì rigorosa, ed esse si riducono ad omettere le considerazioni circa alle due serie

$$\sum_{\alpha} \int^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \varphi(\gamma) d\gamma, \quad \sum_{\alpha} \int^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \varphi(\gamma) d\gamma$$

estese ai valori pari od impari soltanto di n (*).

Anche il prof. DINI accetta nella Memoria di cui parlo al primo paragrafo la formola del sig. BONNET: ad onta di ciò la sua dimostrazione non abbisogna di verun mutamento, se si esclude quello della quantità $(-1)^n$ in -1 in tutte le formole nella quale comparisce.

4.

Per le ricerche seguenti giova studiare il modo di comportarsi dei coefficienti della serie data al crescere indefinito di n .

(*) V. p. 291-294 della Memoria citata.

Annali di Matematica, tomo VII.

A questa domanda risponde il teorema:

Se la serie $\sum A_n X_n$ è in tutti i punti di un intervallo comunque piccolo kh ($-1 \leq k < h \leq +1$) finita, e tale che la differenza $\theta_1(x) - \theta_2(x)$ in esso tratto sia integrabile ed il suo integrale abbia un valore nullo, dovrà la quantità $\frac{A_n}{\sqrt[n]{n}}$ convergere a zero con $\frac{1}{n}$.

La verità di questa proposizione risulta da quanto segue.

Data una serie illimitata di grandezze $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$, le quali non crescono indefinitamente con n , siano $y=A$ ed $y=B$ le equazioni delle rette limite corrispondenti alla funzione $\varphi(m) = c_{\frac{1}{m}}$ per $m = +0$; $A-B$ indica adun-

que la oscillazione di $\varphi(m)$ a destra dell'origine delle coordinate. Scelta quindi dalla serie proposta l'altra $c_{r_1}, c_{r_2}, \dots$ pure illimitata, e da quest'ultima la terza $c_{r_{s_1}}, c_{r_{s_2}}, \dots, c_{r_{s_t}}, \dots$, mentre t cresce al di là di ogni limite la quantità $c_{r_{s_t}}$ oscillerà tra due grandezze M ed N ($M \geq N$), la prima delle quali non potrà essere manifestamente maggiore di A , l'altra non minore di B . Invertendo questo ragionamento si ha il teorema:

Data una serie illimitata di grandezze $c_1, c_2, c_3, \dots$, tale, che, pigliata dalla medesima arbitrariamente un'altra pure senza fine $c_{r_1}, c_{r_2}, c_{r_3}, \dots$, da quest'ultima possa sempre scegliersi una terza $c_{r_{s_1}}, c_{r_{s_2}}, \dots, c_{r_{s_t}}, \dots$ in guisa che $c_{r_{s_t}}$ al crescere indefinito di t oscilli tra due grandezze A e B ($A \geq B$), delle quali la prima non supera la quantità A_1 , la seconda non è inferiore a B_1 ($A_1 \geq B_1$), dovrà altresì c_r per r infinito oscillare tra due grandezze, l'una non maggiore di A_1 , l'altra non minore di B_1 .

Poniamo per un momento che ciò non abbia luogo. In tale ipotesi la quantità c_n per n infinito andrà pure all'infinito, oppure oscillerà tra due grandezze M ed N ($M \geq N$). Il primo caso non può aver luogo, poichè, scelta la serie $c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, v_1 < v_2 < \dots, c_{v_1} < c_{v_2} < \dots, \lim_{s \rightarrow \infty} c_{v_s} = \infty$, qualsiasi serie illimitata tolta da quest'ultima non avrà al certo i suoi termini oscillanti tra due grandezze l'una non maggiore di A_1 , l'altra non minore di B_1 , ma all'incontro essi andranno all'infinito sempre crescendo. Consideriamo ora l'altro caso: poniamo, per fissare le idee, che M sia maggiore di A_1 , senza asserire nulla circa alla relazione che ha luogo tra B_1 ed N . In tale caso potremo scegliere dalla data una serie $c_{t_1}, c_{t_2}, \dots$ in guisa che si abbia $\lim_{s \rightarrow \infty} c_{t_s} = M$, dalla quale non si può al certo levare un'altra che soddisfi alle condizioni ammesse per ipotesi.

Si consideri ora un intervallo $p_1 q_1$ di $k_1 h_1$ per tutti i punti del quale la funzione $\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)$ [$\varphi_1(\theta) = \theta_1(x)$, $\varphi_2(\theta) = \theta_2(x)$, $x = \cos \theta$, $p = \cos p_1$, $q = \cos q_1$, $k = \cos k_1$, $h = \cos h_1$] raggiunge valori minori della quantità arbitrariamente piccola σ , astrazion fatta dal segno, intervallo che può al certo assegnarsi, essendo $\int_{k_1}^{\theta_1} [\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)] d\theta = 0$, $k_1 < \theta_1 \leq h_1$. Per questi valori di θ la quantità

$A_n P_n(\cos \theta)$ oscilla al crescere indefinito di n tra due grandezze M ed N ($M \geq N$), nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ . Ed invero, essendo la quantità $\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)$ pei valori considerati di θ minore di σ , astrazion fatta dal segno, la oscillazione della somma

$$\psi(n) = \sum_1^n A_r P_r(\cos \theta),$$

per $n = +\infty$ e per questi valori particolari di θ , è pure più piccola di σ ; quindi, a partire da un valore opportuno di n , le due somme

$$\sum_1^n A_r P_r(\cos \theta), \quad \sum_1^{n+m} A_r P_r(\cos \theta)$$

differiscono, quale si sia m , di una quantità inferiore a σ . Osservando poi che in virtù della formola dimostrata nel paragrafo precedente si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n P_n(\cos \theta)}{\frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = 1, \quad \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

si potrà asserire che per tutti i punti del tratto $p_1 q_1$ la quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ assume valori minori di σ , astrazion fatta dal segno, al crescere indefinito di n .

In luogo del teorema detto a principio di questo paragrafo dimostriamo ora il seguente che è più generale:

Se, data una grandezza arbitraria σ , si può assegnare un intervallo $p_1 q_1$ per ciascun punto del quale la quantità

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

al crescere indefinito di n oscilla tra due grandezze, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ , sarà $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0$ per n crescente al di là di ogni limite.

Ciò posto, rammento il seguente teorema del sig. CANTOR: (*)

Indicandosi con $x_1, x_2, x_3, \dots$ una serie illimitata di numeri interi e positivi, tale, che si abbia $x_2 > kx_1, x_3 > k^2x_2, x_4 > k^3x_3, \dots, k > 1$, si può assegnare una quantità Ω in guisa che il prodotto $x_n\Omega$ differisca da un numero impari $2y_n + 1$ di una quantità Θ_n , che converge a zero con $\frac{1}{n}$, e la grandezza Ω può pigliarsi in un intervallo dato qualsivoglia.

Scelgo ora ad arbitrio dalla serie illimitata

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \quad \left[\alpha_n = \frac{A_n}{\sqrt[n]{n}} \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

un'altra, e sia essa

$$\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}, \alpha_{r_3}, \dots \quad (r_1 < r_2 < r_3 < \dots),$$

da quest'ultima poi la terza

$$\alpha_{r_{t_1}}, \alpha_{r_{t_2}}, \alpha_{r_{t_3}}, \dots,$$

per modo che si abbia

$$r_{t_2} > kr_{t_1}, \quad r_{t_3} > k^2r_{t_2}, \dots \quad (k > 1).$$

Prendo quindi, giovandomi del teorema rammentato, una grandezza Ω nell'intervallo $\frac{0p_1}{\pi} \frac{0q_1}{\pi}$ in guisa che sia

$$\Omega r_{t_s} - (2y_s + 1) = \Theta_s,$$

essendo y_s un numero intero e positivo, quale si sia s , e Θ_s una quantità che va a zero con $\frac{1}{s}$. Posto poi $\Omega = \Omega\pi$, è chiaro che la grandezza Ω sarà compresa tra $0p_1$ ed $0q_1$, e si avrà:

$$\Omega r_{t_s} - (2y_s + 1)\pi = \Omega r_{t_s} + \frac{1}{2}\Omega - \frac{1}{2}\Omega - (2y_s + 1)\pi = \Omega \left(r_{t_s} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}\Omega - (2y_s + 1)\pi = \Theta_s,$$

essendo $\Theta_s = \Theta_s\pi$ una quantità che si annulla con $\frac{1}{s}$.

L'espressione

$$\frac{A_{r_{t_s}}}{\sqrt[r_{t_s}]{r_{t_s}}} \cos \left[\left(r_{t_s} + \frac{1}{2} \right) \Omega - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{A_{r_{t_s}}}{\sqrt[r_{t_s}]{r_{t_s}}} \cos \left[(2y_s + 1)\pi + \Theta_s + \frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = - \frac{A_{r_{t_s}}}{\sqrt[r_{t_s}]{r_{t_s}}} \cos \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\Omega}{2} - \Theta_s \right]$$

(*) V. CLEBSCH e NEUMANN, *Mathematische Annalen*, t. 4°, pag. 139.

al crescere indefinito di s oscillerà quindi tra due grandezze, ciascuna delle quali è, fatta astrazione dal segno, minore di σ . Ma la grandezza σ è arbitraria, e poichè Ω non eccede, quale si sia σ , i limiti 0 e π , l'arco $\frac{\pi}{4} - \frac{\Omega}{2}$ non si accosterà indefinitamente a $-\frac{\pi}{2}$; quindi, rammentando le considerazioni fatte al principio di questo paragrafo, e non essendo

$$\lim_{n=\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Omega}{2} - \Theta_s\right) = 0,$$

sarà:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A}{\sqrt{n}} = 0,$$

la qual cosa si voleva dimostrare.

L'ultimo dei teoremi enunciato in questo numero è caso particolare del seguente:

Se, data una quantità arbitraria σ , si può assegnare un intervallo pq per ciascun punto del quale la espressione

$$a_n \sin \varphi(n)x + b_n \cos \varphi(n)x,$$

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \dots \quad (\lim_{n=\infty} \varphi(n) = \infty)$$

al crescere indefinito di n oscilli tra due grandezze, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ , sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0, \quad n = \infty.$$

La verità di questa proposizione risulta dalle considerazioni che seguono.

Lemma I. Detta $\varphi(\mu_1), \varphi(\mu_2), \dots$ una serie illimitata di quantità positive, tale, che si abbia

$$\varphi(\mu_2) > k \varphi(\mu_1), \quad \varphi(\mu_3) > k^2 \varphi(\mu_2), \dots \quad (k > 1),$$

si potrà assegnare una grandezza Ω entro un intervallo qualsivoglia $\alpha\beta$, in guisa che la differenza

$$\Omega \varphi(\mu_s) - (2y_s + 1)$$

converga a zero con $\frac{1}{s}$, y_s essendo un numero intero e positivo.

Questo teorema generalizza quello del sig. CANTOR enunciato poco fa, e si dimostra nello stesso modo.

Lemma II. Se, data una grandezza arbitraria σ , si può assegnare un intervallo tu per ciascun punto del quale la quantità

$$a_n \sin \varphi(n)x$$

oscilli al crescere indefinito di n tra due grandezze, nessuna delle quali è maggiore di σ , sarà $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, essendo $\varphi(n)$ una funzione positiva di n , la quale per n infinito va all'infinito insieme alla retta limite inferiore corrispondente al tratto $n\infty$.

Dalla serie $\varphi(1), \varphi(2), \dots$ scelgo ad arbitrio un'altra pure illimitata $\varphi(r_1), \varphi(r_2), \dots$, e da quest'ultima la terza $\varphi(r_{\rho_1}), \varphi(r_{\rho_2}), \dots$, in guisa che si abbia

$$\varphi(r_{\rho_2}) \geq k \varphi(r_{\rho_1}), \quad \varphi(r_{\rho_3}) \geq k^2 \varphi(r_{\rho_2}), \dots \quad (k > 1).$$

Si determini ora una quantità Ω nel tratto i cui estremi hanno per ascisse $2 \frac{0t}{\pi}, 2 \frac{0u}{\pi}$ per modo che l'espressione

$$\Omega \varphi(r_{\rho_s}) - (2y_s + 1) = \varepsilon$$

converga a zero con $\frac{1}{s}$, e quindi anche l'altra:

$$\Omega \frac{\pi}{2} \varphi(r_{\rho_s}) - (2y_s + 1) \frac{\pi}{2} = \Omega \varphi(r_{\rho_s}) - (2y_s + 1) \frac{\pi}{2} = \varepsilon \frac{\pi}{2},$$

essendo Ω una quantità che cade nell'intervallo tu . Per l'ipotesi fatta $c_n \sin \varphi(n) \Omega$ al crescere indefinito di n oscilla tra due grandezze, nessuna delle quali è in valore assoluto maggiore di σ ; ciò si verifica quindi anche per l'altra:

$$c_{r_{\rho_s}} \sin \varphi(r_{\rho_s}) \Omega = \pm c_{r_{\rho_s}} \cos \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

all'annullarsi di $\frac{1}{s}$. Adunque i termini della serie

$$c_{r_{\rho_1}}, \quad c_{r_{\rho_2}}, \quad c_{r_{\rho_3}}, \dots, \quad c_{r_{\rho_s}}, \dots,$$

a partire da valore opportuno di s non sono maggiori di σ , astrazione fatta dal segno. Il lemma è dunque dimostrato, quando si rammentino le ricerche fatte al principio di questo paragrafo, e si ponga mente che la quantità σ è di quella piccolezza che si vuole.

Gli è facil cosa il porre ora in sodo il teorema enunciato.

Infatti, detto m il punto di mezzo del segmento tu , si faccia

$$\begin{aligned} a_n \cos \varphi(n)m - b_n \sin \varphi(n)m &= c_n, \\ a_n \sin \varphi(n)m + b_n \cos \varphi(n)m &= d_n. \end{aligned}$$

Dalle due ultime eguaglianze si deduce:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= c_n \cos \varphi(n)m + d_n \sin \varphi(n)m \\ b_n &= -c_n \sin \varphi(n)m + d_n \cos \varphi(n)m. \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

Ora, la quantità d_n al crescere indefinito di n oscilla tra due grandezze nessuna delle quali è maggiore di σ , e ciò per dato. Anche la quantità c_n soddisfa alla stessa condizione, in quanto ciò ha luogo per le due grandezze

$$\begin{aligned} a_n \sin \varphi(n)(m+x) + b_n \cos \varphi(n)(m+x), & \quad a_n \sin \varphi(n)(m-x) + b_n \cos \varphi(n)(m-x), \\ 0m < x < 0q, & \quad 0p < x < 0m, \end{aligned}$$

e quindi anche per l'altra:

$$[a_n \cos \varphi(n)m - b_n \sin \varphi(n)m] \sin \varphi(n)x,$$

e, pel lemma II, altresì per la espressione:

$$a_n \cos \varphi(n)m - b_n \sin \varphi(n)m = d_n.$$

Per le relazioni (α) poi ne consegue che all'annullarsi di $\frac{1}{n}$ ciascuna delle quantità a_n e b_n oscilla tra due grandezze non maggiori in valore assoluto di 2σ ; e poichè il numero σ è arbitrario, sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Il teorema ora dimostrato contiene come caso particolare il seguente dovuto a RIEMANN (*) e dimostrato dal sig. CANTOR nella Memoria citata:

Se per tutti i punti di un intervallo comunque piccolo la quantità

$$a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

converge a zero con $\frac{1}{n}$, sarà:

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty).$$

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, p. 21 e seg.^{te}, e quella di RIEMANN: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, pag. 25.

5.

Facciamo ora alcune ricerche di Calcolo integrale le quali sono necessarie per la risoluzione del problema che ci siamo proposti, e dimostriamo anzitutto il teorema:

Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ indicano due funzioni finite dei punti del segmento ab ed integrabili, il simbolo $\varphi(x)\psi(x)$, quando non si possa assegnare un intervallo di ab per ciascun punto del quale esso sia scevro da significato, rappresenterà una funzione integrabile.

Infatti, detta $G_1, G_2, \dots, G_s, \dots$ una serie illimitata di gruppi di punti, $\partial_1^{(s)}, \partial_2^{(s)}, \dots$ i tratti corrispondenti al gruppo G_s ed $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, \dots, a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, b_1^{(s)}, b_2^{(s)}, \dots$ i limiti superiori ed inferiori delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ nei medesimi rispettivamente, sarà:

$$\lim_{s=\infty} \sum_r \partial_r^{(s)} (A_r^{(s)} - a_r^{(s)}) = 0, \quad \lim_{s=\infty} \sum_r \partial_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)}) = 0,$$

essendo per ipotesi le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ integrabili nel segmento ab .

Per dimostrare con tutta chiarezza il teorema ora enunciato giova distinguere più casi, cioè:

1. le due funzioni φ e ψ sono amendue positive nel tratto $\partial_r^{(s)}$, i limiti inclusi;
2. amendue negative;
3. l'una negativa e l'altra positiva;
4. l'una positiva e l'altra positiva e negativa;
5. l'una negativa e l'altra positiva e negativa;
6. amendue positive e negative, sempre i limiti inclusi, e supposto che la prima ipotesi valga per la funzione φ la seconda per ψ .

Indicando con $P_r^{(s)}$ e $p_r^{(s)}$ il limite superiore ed inferiore rispettivamente del prodotto $\varphi(x)\psi(x)$ nell'intervallo $\partial_r^{(s)}$, inclusi i limiti, si ha nel primo caso:

$$P_r^{(s)} \leq A_r^{(s)} B_r^{(s)}, \quad p_r^{(s)} \geq a_r^{(s)} b_r^{(s)},$$

nel secondo:

$$P_r^{(s)} \leq a_r^{(s)} b_r^{(s)}, \quad p_r^{(s)} \geq A_r^{(s)} B_r^{(s)},$$

nel terzo:

$$P_r^{(s)} \leq A_r^{(s)} b_r^{(s)}, \quad p_r^{(s)} \geq a_r^{(s)} B_r^{(s)},$$

nel quarto:

$$P_r^{(s)} \leq A_r^{(s)} B_r^{(s)}, \quad p_r^{(s)} \geq A_r^{(s)} b_r^{(s)},$$

nel quinto:

$$P_r^{(s)} \leq a_r^{(s)} b_r^{(s)}, \quad p_r^{(s)} \geq a_r^{(s)} B_r^{(s)},$$

nell'ultimo infine $P_r^{(s)}$ non potrà superare la massima delle due grandezze $A_r^{(s)} B_r^{(s)}$, $a_r^{(s)} b_r^{(s)}$, e $p_r^{(s)}$ non sarà inferiore alla più piccola delle due $A_r^{(s)} b_r^{(s)}$, $a_r^{(s)} B_r^{(s)}$.

Rispetto ai casi contemplati si ha quindi ordinatamente:

$$\begin{aligned} P_r^{(s)} - p_r^{(s)} &\leq A_r^{(s)} B_r^{(s)} - a_r^{(s)} b_r^{(s)} = A_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)}) + b_r^{(s)} (A_r^{(s)} - a_r^{(s)}), \\ P_r^{(s)} - p_r^{(s)} &\leq a_r^{(s)} b_r^{(s)} - A_r^{(s)} B_r^{(s)} = A_r^{(s)} (b_r^{(s)} - B_r^{(s)}) + b_r^{(s)} (a_r^{(s)} - A_r^{(s)}), \\ &\quad " \leq A_r^{(s)} b_r^{(s)} - a_r^{(s)} B_r^{(s)} = A_r^{(s)} (b_r^{(s)} - B_r^{(s)}) + B_r^{(s)} (A_r^{(s)} - a_r^{(s)}), \\ &\quad " \leq A_r^{(s)} B_r^{(s)} - A_r^{(s)} b_r^{(s)} = A_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)}), \\ &\quad " \leq a_r^{(s)} b_r^{(s)} - a_r^{(s)} B_r^{(s)} = a_r^{(s)} (b_r^{(s)} - B_r^{(s)}), \\ P_r^{(s)} - p_r^{(s)} &\leq A_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)}), \leq B_r^{(s)} (A_r^{(s)} - a_r^{(s)}), \leq b_r^{(s)} (a_r^{(s)} - A_r^{(s)}), \\ &\leq a_r^{(s)} (b_r^{(s)} - B_r^{(s)}), \end{aligned}$$

gli ultimi quattro casi riferendosi all'ipotesi che amendue le funzioni φ e ψ siano e positive e negative nel tratto $\delta_r^{(s)}$.

Se indichiamo ora con M una quantità non minore del più grande dei limiti superiori dei valori numerici di φ e di ψ nell'intervallo ab , sarà in ogni caso, osservate le ultime disequaglianze:

$$P_r^{(s)} - p_r^{(s)} \leq M[(A_r^{(s)} - a_r^{(s)}) + (B_r^{(s)} - b_r^{(s)})],$$

astrazione fatta dal segno, in quanto in ogni tratto determinato dal gruppo G_s dee aver luogo uno dei sei casi contemplati. Abbiamo quindi:

$$\sum_r \delta_r^{(s)} (P_r^{(s)} - p_r^{(s)}) \leq M \sum_r \delta_r^{(s)} (A_r^{(s)} - a_r^{(s)}) + M \sum_r \delta_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)}),$$

e perciò:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_r \delta_r^{(s)} (P_r^{(s)} - p_r^{(s)}) = 0,$$

l'asserto è adunque vero.

Il sig. PAUL DU BOIS-REYMOND dimostra questo teorema a pag. 24 e seg.^{te} del t. 79° del Giornale di BORCHARDT in un modo più breve, è vero, ma però, a mio credere, non del tutto rigoroso.

Dimostriamo ora la proposizione:

Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni integrabili dei punti del segmento ab , ciascuna delle quali va all'infinito in un numero limitato di punti, gli infiniti dell'una essendo diversi da quelli dell'altra, sarà:

$$\int_a^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^b \psi(\alpha) d\alpha - \int_a^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha. \quad (K)$$

Supponiamo in prima che le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si mantengano finite; detti $A_r^{(s)}$, $a_r^{(s)}$, $B_r^{(s)}$, $b_r^{(s)}$ i limiti superiori ed inferiori delle funzioni φ e ψ nel tratto $\partial_r^{(s)}$ rispettivamente, si ha l'identità:

$$\left. \begin{aligned} & A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} (B_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)} (B_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + B_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + A_3^{(s)} \partial_3^{(s)} (B_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + \\ & \quad B_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + B_3^{(s)} \partial_3^{(s)} + \dots = \\ & (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + \dots) (B_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + B_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + \dots) - B_2^{(s)} \partial_2^{(s)} (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} - \\ & B_3^{(s)} \partial_3^{(s)} (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)}) - B_4^{(s)} \partial_4^{(s)} (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + A_3^{(s)} \partial_3^{(s)}) - \dots \\ & = (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + \dots) (B_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + B_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + \dots) - B_1^{(s)} \partial_1^{(s)} (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} - \\ & B_2^{(s)} \partial_2^{(s)} (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)}) - B_3^{(s)} \partial_3^{(s)} (A_1^{(s)} \partial_1^{(s)} + A_2^{(s)} \partial_2^{(s)} + A_3^{(s)} \partial_3^{(s)}) - \\ & \quad \dots + B_1^{(s)} A_1^{(s)} \overline{\partial_1^{(s)2}} + B_2^{(s)} A_2^{(s)} \overline{\partial_2^{(s)2}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

Gli è facile il vedere come il primo membro di questa eguaglianza al crescere indefinito di s tenda al valore

$$\int_a^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha.$$

Infatti, consideriamo i valori conseguiti dalla funzione φ nell'intervallo $\partial_r^{(s)}$, i limiti inclusi. Tra questi ci sarà anche la quantità $A_r^{(s)}$, oppure ciò non avrà luogo: in quest'ultimo caso si può assegnare un punto c dell'intervallo considerato, tale, che il limite superiore dei valori della espressione $\varphi(x)$ nel tratto $\overline{c+\eta} \overline{c+0}$ o $\overline{c-\eta} \overline{c-0}$, oppure in amendue, sia eguale ad $A_r^{(s)}$, per quanto piccolo sia il numero η . Il valore che la funzione continua $\int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta$

consegue nel punto c è $\int_a^c \psi(\beta) d\beta$. Essendo poi $\partial_1^{(s)}$, $\partial_2^{(s)}$, ... $\partial_p^{(s)}$ gli intervalli $\partial^{(s)}$ che hanno un numero illimitato di punti comuni col segmento ac ,

sarà la somma $\sum_1^p \delta_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)})$ a partire da valori opportuni di s arbitrariamente piccola, e quindi la espressione $\sum_1^p \delta_r^{(s)} B_r^{(s)}$ vicinissima all'integrale $\int_a^c \psi(x) dx$, quale si sia c . Ciò ha luogo perchè l'aggregato $\sum_r \delta_r^{(s)} (B_r^{(s)} - b_r^{(s)})$ esteso a tutti i segmenti $\delta^{(s)}$ ha i suoi termini positivi e converge a zero con $\frac{1}{s}$. Potremo dunque porre:

$$\sum_1^p B_r^{(s)} \delta_r^{(s)} = \int_a^c \psi(\beta) d\beta + \sigma_c,$$

essendo σ_c una funzione dei punti di ab , la quale è sempre arbitrariamente piccola per valori opportuni di s .

Il prodotto

$$\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta$$

è in virtù del teorema or ora dimostrato integrabile, e di più la funzione

$$\psi_1(\alpha) = \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta$$

è continua nell'intervallo ab , inclusi i limiti.

D'altra parte, l'integrale

$$\int_a^b \varphi(\alpha) \psi_1(\alpha) d\alpha$$

può considerarsi come il limite della espressione

$$\sum_1^r \delta_r^{(s)} D_r^{(s)} A_r^{(s)}$$

per s infinito, essendo $D_r^{(s)}$ il valore raggiunto dalla funzione $\psi_1(x)$ nel punto c del tratto $\delta_r^{(s)}$, nel quale la funzione $\varphi(x)$ raggiunge il valore $A_r^{(s)}$, oppure accostandosi al quale, da una parte almeno, il limite superiore della medesima nel segmento che rimane è $A_r^{(s)}$. Questa asserzione risulta manifesta quando si osservi che la quantità $D_r^{(s)} A_r^{(s)}$ non è maggiore del limite superiore della funzione $\varphi(x) \psi_1(x)$ nell'intervallo $\delta_r^{(s)}$, nè più piccola del limite inferiore.

Si ha adunque:

$$\sum_r (\delta_r^{(s)} A_r^{(s)}) \sum_t^r \delta_t^{(s)} B_t^{(s)} = \sum_r (\delta_r^{(s)} A_r^{(s)} D_r^{(s)}) + \sum_r \delta_r^{(s)} A_r^{(s)} \sigma_c,$$

e quindi:

$$\lim_{s=\infty} \sum_r (\partial_r^{(s)} A_r^{(s)}) \sum_1^r \partial_t^{(s)} B_t^{(s)} = \int_a^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha.$$

Così pure si ha manifestamente

$$\lim_{s=\infty} \left\{ \sum_r \partial_r^{(s)} A_r^{(s)} \right\} \left\{ \sum_r \partial_r^{(s)} B_r^{(s)} \right\} = \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^b \psi(\alpha) d\alpha,$$

$$\lim_{s=\infty} \sum_r (\partial_r^{(s)} B_r^{(s)}) \sum_1^r \partial_t^{(s)} A_t^{(s)} = \int_a^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha,$$

il teorema è quindi dimostrato in virtù della eguaglianza (α), se si pone mente che si ha

$$\lim_{s=\infty} \sum_r A_r^{(s)} B_r^{(s)} \overline{\partial_r^{(s)}} = 0,$$

quando le funzioni date siano sempre finite.

Poniamo ora che la $\psi(x)$ vada all'infinito nel punto di ascissa m restando integrabile, in guisa cioè che la espressione

$$\left(\int_{m+\varepsilon_1}^{m-\varepsilon} + \int \right) \psi(\alpha) d\alpha$$

converga ad un limite mentre ε ed ε_1 si annullano in modo arbitrario, $\varphi(x)$ poi resti finita per $x=m$.

Si ha in tale ipotesi:

$$\int_a^{m-\varepsilon} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_a^{m-\varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-\varepsilon} \psi(\alpha) d\alpha - \int_a^{m-\varepsilon} \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha, \quad (1)$$

$$\int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_{m+\varepsilon_1}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+\varepsilon_1}^b \psi(\alpha) d\alpha - \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha. \quad (2)$$

Queste relazioni esistono anche se si fa ε ed ε_1 eguali a $+0$, poichè esse sono vere comunque siano piccole queste quantità, e di più abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{m-\varepsilon} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_a^{m-0} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{m+\varepsilon_1}^{m-\varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+\varepsilon_1}^{m-\varepsilon} \psi(\alpha) d\alpha = \int_a^{m-0} \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \psi(\alpha) d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha} \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_{m+0}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+0}^{\alpha} \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha} \psi(\alpha) d\alpha = \int_{m+0}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+0}^{\alpha} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Di queste quattro eguaglianze la penultima abbisogna forse di alcune parole di schiarimento; eccole: se si pone

$$\int_{m+0}^{m+\varepsilon_1} \psi(\beta) d\beta = d,$$

essendo d una quantità che si annulla con ε_1 , ne consegue:

$$\int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha} \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_{m+\varepsilon_1}^b \left[\varphi(\alpha) \left(\int_{m+0}^{\alpha} \psi(\beta) d\beta - d \right) \right] d\alpha =$$

$$\int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+0}^{\alpha} \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha - d \int_{m+\varepsilon_1}^b \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Facendo ora convergere ε_1 allo zero si otterrà la relazione in discorso.

Per maggior chiarezza diamo anche il significato della quantità

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha} \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha$$

che forma il secondo termine del secondo membro della relazione (2). Posto

$$\int_{m+0}^{m+\varepsilon_1} \varphi(\beta) d\beta = c_1,$$

sarà:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} c_1 = 0,$$

e quindi:

$$\int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha} \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \int_{m+\varepsilon_1}^b \left[\psi(\alpha) \left(\int_{m+0}^{\alpha} \varphi(\beta) d\beta - c_1 \right) \right] d\alpha =$$

$$\int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+0}^{\alpha} \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha - c_1 \int_{m+\varepsilon_1}^b \psi(\alpha) d\alpha,$$

per cui:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+\varepsilon_1}^{\alpha} \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+0}^{\alpha} \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha.$$

Il significato poi del secondo termine del secondo membro della relazione (1) per $\varepsilon = +0$ è così palese che non abbisogna di schiarimento.

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha &= \int_a^{m-0} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha + \int_{m+0}^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha \\ &= \int_a^{m-0} \left(\varphi(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha + \int_{m+0}^b \left(\varphi(\alpha) \int_a^{m-0} \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha + \int_{m+0}^b \left(\varphi(\alpha) \int_{m+0}^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha, \\ \int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^b \psi(\alpha) d\alpha &= \int_a^{m-0} \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \psi(\alpha) d\alpha + \int_a^{m-0} \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+0}^b \psi(\alpha) d\alpha + \\ &\quad \int_{m+0}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \psi(\alpha) d\alpha + \int_{m+0}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_{m+0}^b \psi(\alpha) d\alpha, \\ \int_a^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha &= \int_a^{m-0} \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha + \int_{m+0}^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha \\ &= \lim_{\varepsilon=+0} \int_a^{m-\varepsilon} \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha + \lim_{\varepsilon_1=0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_a^{m-0} \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha + \\ &\quad \lim_{\varepsilon_1=0} \int_{m+\varepsilon_1}^b \left(\psi(\alpha) \int_{m+0}^\alpha \varphi(\beta) d\beta \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Osservate attentamente queste ultime tre relazioni, sommando le eguaglianze che si ricavano facendo $\varepsilon = +0$ ed $\varepsilon_1 = +0$ nelle relazioni (1) e (2), ed aggiungendo ad ambo i membri della somma ottenuta la quantità

$$\int_{m+0}^b \varphi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \psi(\alpha) d\alpha,$$

ed al secondo la differenza

$$\int_{m+0}^b \psi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \varphi(\alpha) d\alpha - \int_{m+0}^b \psi(\alpha) d\alpha \int_a^{m-0} \varphi(\alpha) d\alpha,$$

ne consegue la verità della formola (K) anche se la funzione $\psi(x)$ va all'infinito in un punto dell'intervallo ab , restando però integrabile.

È poi manifesto come le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ possano andare all'infinito in un numero limitato di punti restando integrabili, senza che il teorema cessi

di aver luogo, supposto però che gli infiniti delle medesime non cadano negli stessi punti.

Essendo ora $\psi(x)$ e $\theta(x)$ due funzioni integrabili nel tratto $a \overline{m-0}$, le quali vanno all'infinito soltanto nel punto $\overline{m-0}$, posto

$$\psi_1(x) = \int_a^x \psi(\alpha) d\alpha,$$

sarà:

$$\int_a^{m-\varepsilon} \theta(x) \psi_1(x) dx = \left[\psi_1(x) \int_a^x \theta(\alpha) d\alpha \right]_a^{m-\varepsilon} - \int_a^{m-\varepsilon} \left(\psi(x) \int_a^x \theta(\alpha) d\alpha \right) dx.$$

Infatti, pel teorema or ora dimostrato si ottiene:

$$\int_a^{m-\varepsilon} \left(\theta(x) \int_a^x \psi(\alpha) d\alpha \right) dx = \int_a^{m-\varepsilon} \theta(\alpha) d\alpha \int_a^{m-\varepsilon} \psi(\alpha) d\alpha - \int_a^{m-\varepsilon} \left(\psi(x) \int_a^x \theta(\alpha) d\alpha \right) dx,$$

e d'altra parte si ha

$$\int_a^{m-\varepsilon} \theta(\alpha) d\alpha \int_a^{m-\varepsilon} \psi(\alpha) d\alpha = \left[\psi_1(x) \int_a^x \theta(\alpha) d\alpha \right]_a^{m-\varepsilon}.$$

Quindi il teorema:

Se $\theta(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni integrabili nel tratto $a \overline{m-0}$, che vanno all'infinito soltanto per $x = m-0$, i due integrali

$$\int_a^{m-\varepsilon} \left(\theta(x) \int_a^x \psi(\alpha) d\alpha \right) dx, \quad \int_a^{m-\varepsilon} \left(\psi(x) \int_a^x \theta(\alpha) d\alpha \right) dx$$

convergeranno o divergeranno insieme all'annullarsi di ε (*).

Aggiungo a questo teorema alcune osservazioni.

La funzione $\psi_1(x)$ gode adunque della proprietà indicata dalla eguaglianza

$$\int_a^x \psi(x) dx = \psi_1(x),$$

$\psi(x)$ crescendo al di là di ogni limite tutto al più in un numero limitato di punti. È poi manifesto che, se esiste una funzione $\psi(x)$ ovunque integrabile la quale abbia questa proprietà, se ne potranno assegnare tante quante si vuole,

(*) V. la mia Memoria: *Sulla serie di Fourier*, pag. 41-43.

bastando aggiungere a $\psi(x)$ un'altra funzione $f_1(x)$, tale, che sia

$$\int_c^d f_1(x) dx = 0, \quad a \leq c < d \leq b.$$

Giova osservare come il simbolo $\int_a^m \psi(x) dx$ possa avere significato anche se il numero dei punti nei quali la $\psi(x)$ va all'infinito non è assegnabile nel tratto am , quando esso si interpreti convenientemente. Valga ad esempio la funzione

$$\theta(x) = \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^\mu - \frac{\mu \cos \frac{1}{x}}{x \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^{1-\mu}} \quad (0 < \mu < 1),$$

che va all'infinito in un numero illimitato di punti formanti un gruppo del primo ordine nel tratto $0\ 1$, e per la quale la quantità $\int_0^1 \theta(x) dx$ è eguale a $(\operatorname{sen} 1)^\mu$, essendo

$$\int_0^1 \theta(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \theta(x) dx,$$

e

$$\frac{d}{dx} \left[x \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^\mu \right] = \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^\mu - \frac{\mu \cos \frac{1}{x}}{x \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)^{1-\mu}}.$$

6.

Del teorema espresso dalla formola (K) può darsi anche la seguente dimostrazione.

Sia $\varphi(x)$ una funzione finita ed integrabile dei punti del segmento ab ($a < b$), e $\psi(x)$ una funzione ovunque continua in esso tratto, oppure discontinua soltanto in un numero limitato di punti, per modo che, detto c uno dei medesimi, i simboli $\psi(c+0)$ e $\psi(c-0)$ abbiano significato. Si divida l'intervallo ab nelle parti $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, e si indichi con $\varphi_1(x)$ una funzione costante in ciascuna delle medesime ed eguale nel tratto Δ_s al limite inferiore dei valori in esso assunti dalla $\varphi(x)$, inclusi i limiti; sarà in tale ipotesi per un noto teorema:

$$\int_a^b \left(\varphi_1(x) \int_a^x \psi(\beta) d\beta \right) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \int_a^b \psi(x) dx + \int_a^b \left(\psi(x) \int_a^x \varphi_1(\beta) d\beta \right) dx = 0. \quad (1)$$

Si suppone per semplicità che la funzione $\varphi_1(x)$ non esista nei punti che limitano i segmenti $\Delta_1, \Delta_2, \dots$.

Indichiamo ora con $\varphi_2(x)$ una funzione scevra da significato nei punti estremi dei tratti $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ e del resto eguale a

$$\varphi(x) - \varphi_1(x).$$

In allora è facile vedere che si avrà, qualunque sia c ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_2(x) dx = 0, \quad a < c \leq b,$$

poichè

$$\int_a^c \varphi_2(x) dx \leq \sum_1^n \Delta_r O_r, \quad \int_a^c \varphi_2(x) dx \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \Delta_r O_r = 0,$$

O_r essendo la oscillazione massima della $\varphi(x)$ nel tratto Δ_r , e Δ_m indicando quell'intervallo che contiene nel suo interno il punto c , oppure che lo ha per estremo destro.

Ciò posto, è manifesto che la espressione

$$\int_a^b \left(\varphi_2(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha - \int_a^b \varphi_2(\alpha) d\alpha \int_a^b \psi(\alpha) d\alpha + \int_a^b \left(\psi(\alpha) \int_a^\alpha \varphi_2(\beta) d\beta \right) d\alpha = \varepsilon_n$$

converge a zero al crescere indefinito di n , basta por mente che si può fare

$$\int_a^b \left(\varphi_2(\alpha) \int_a^\alpha \psi(\beta) d\beta \right) d\alpha < M \int_a^b \varphi_2(\alpha) d\alpha, \quad \varphi_2(\alpha) \geq 0,$$

astrazione fatta dal segno, M essendo una quantità positiva. Aggiungendo ora le due ultime eguaglianze e mandando quindi n all'infinito ne consegue la verità del teorema, quale si sia la funzione $\varphi(x)$, purchè nell'intervallo ab finita ed integrabile. Con metodo del tutto analogo si farebbe ora vedere come il teorema esiste anche se la $\psi(x)$ è soltanto finita ed integrabile nel segmento ab .

Questa dimostrazione è tolta in parte dal paragrafo 12 della Memoria già citata sulle serie trigonometriche del sig. PAUL DU BOIS-REYMOND. Il suddetto però enuncia il teorema in discorso nel modo seguente (V. p. 13):

Es sei $\varphi(x)$ stetig und der Differentialquotient $\varphi'(x)$ sei integrirbar, ferner sei $f(x)$ integrirbar, so soll gezeigt werden, dass:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) d\alpha = \varphi(b) \int_a^b f(\alpha) d\alpha - \int_a^b d\alpha \varphi'(\alpha) \int_a^\alpha d\beta f(\beta).$$

Ora, l'idea di introdurre nell'enunciato del teorema il concetto di derivata, è, a quanto parmi, superflua e rende la dimostrazione più complessa. Questa asserzione è subito giustificata, quando si ponga mente come il sig. PAUL DU BOIS-REYMOND dimostri la eguaglianza

$$\varphi(\alpha) = \varphi(a) + \int_a^\alpha \varphi'(\beta) d\beta$$

per porre in sodo il teorema. La dimostrazione poi di quest'ultima relazione, data nell'appendice della Memoria citata, comunque in complesso soddisfacente, non mi pare condotta con quella accuratezza che è indispensabile in tali ricerche.

In ciò che segue dimostro due teoremi, il primo dei quali soltanto riesce necessario alla risoluzione del problema che ci siamo proposti in questa Memoria.

Se $\rho(x)$ è una funzione continua nell'intervallo ab , compresi i limiti, e se in ogni punto interno al medesimo la quantità

$$\frac{\rho(x+\varepsilon) - 2\rho(x) + \rho(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

oscilla all'annullarsi di ε tra due grandezze A_x e B_x ($A_x \geq B_x$), che si mantengono finite e soddisfanno alla condizione

$$\int_a^y A_x dx = \int_a^y B_x dx = 0, \quad a < y \leq b,$$

si avrà:

$$\rho(x) = Cx + C',$$

C e C' essendo due costanti.

Se $\rho_1(x)$ è una funzione continua di x nell'intervallo ab (*), e se per ogni valor particolare di x ($a < x < b$) le espressioni

$$\frac{\rho_1(x+\varepsilon) - \rho_1(x)}{\varepsilon}, \quad \frac{\rho_1(x-\varepsilon) - \rho_1(x)}{-\varepsilon}$$

oscillano per $\varepsilon = +0$ rispettivamente tra le quantità finite M_x, N_x ($M_x \geq N_x$), ed M'_x, N'_x ($M'_x \geq N'_x$), essendo

$$\int_a^y M_x dx = \int_a^y N_x dx = \int_a^y M'_x dx = \int_a^y N'_x dx = 0, \quad a < y \leq b,$$

(*) Circa ai limiti non si fa alcuna ipotesi.

sarà:

$$\rho_1(x) = C,$$

C indicando una costante.

Dimostriamo anzitutto la prima di queste due proposizioni.

Sia $G_1, G_2, G_3, \dots, G_s, \dots$ una serie illimitata di gruppi nel tratto ab , scelta in guisa che i punti di un gruppo appartengano al successivo e che si abbia $\delta_s^{(1)} = \delta_s^{(2)} = \dots$, quale si sia s . Ciò posto, si assegni un valore s_1 per modo che sia piccola quanto si vuole la somma degli spazi appartenenti al gruppo G_{s_1+t} ($t \geq 0$), nei quali, inclusi i limiti, cadono punti in cui la differenza $A_x - B_x$ non è minore della quantità arbitraria σ : la qual cosa è al certo possibile per le ricerche del paragrafo 2. Supponiamo altresì s_1 tale, che sia arbitrariamente piccolo l'aggregato dei tratti spettanti al gruppo G_{s_1+t} ($t \geq 0$) e contenenti nell'interno o sul contorno punti nei quali la funzione A_x raggiunge, astrazione fatta dal segno, valori maggiori di σ . Nelle fatte ipotesi sarà ciascuna delle quantità

$$\sum_r A_{s_1+t}^{(r)} \delta_{s_1+t}^{(r)}, \quad \sum_r B_{s_1+t}^{(r)} \delta_{s_1+t}^{(r)},$$

piccola oltre ogni dire, $A_{s_1+t}^{(r)}$ e $B_{s_1+t}^{(r)}$ essendo i limiti superiori delle funzioni A_x e B_x nell'intervallo $\delta_{s_1+t}^{(r)}$ rispettivamente, e le somme estendendosi ai tratti che sono entro ab . Detta poi $a_1 b_1$ ($a_1 < b_1$) una parte di ab , si inserisca nella medesima a partire da a_1 l'intervallo δ_{s_1+t} ($t \geq 0$) tante volte quante è possibile. Ora, è chiaro che quando s_1 abbia valore opportuno, anche la somma degli spazi δ_{s_1+t} appartenenti ad $a_1 b_1$, i quali hanno le proprietà or ora indicate, sarà arbitrariamente piccola.

Indicato con α un segmento qualsivoglia minore di ab , si ponga

$$\alpha = m \delta_{s_1+t} + \eta,$$

essendo η una quantità maggiore di zero ma non di δ_{s_1+t} ed m un numero intero e positivo, e si consideri la funzione

$$G(x_1) = \sum_0^{m-1} \delta_{s_1+t} \rho(x_1 + p \delta_{s_1+t}) = \delta_{s_1+t} \sum_0^{m-1} \rho(x_1 + p \delta_{s_1+t}), \quad a \leq x_1 \leq b - \alpha.$$

Questa somma, quando s_1 sia scelto in modo conveniente, è vicina quanto si vuole al valore dell'integrale

$$\int_{x_1}^{x_1+\alpha} \rho(x) dx,$$

quale si sia il punto x_1 nel tratto $a \overline{b-\alpha}$, in quanto una funzione continua in un certo intervallo, compresi i limiti, è in esso uniformemente tale.

D'altra parte, per valori sufficientemente piccoli di ε la quantità

$$\frac{\Delta^2 \rho(x_1 + p \delta_{s_1+t})}{\varepsilon^2} = \frac{\rho(x_1 + p \delta_{s_1+t} + \varepsilon) - 2\rho(x_1 + p \delta_{s_1+t}) + \rho(x_1 + p \delta_{s_1+t} - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

oscilla per ogni valor particolare x_1 ($a < x_1 < \overline{b-\alpha}$), quale si sia p ($0 \leq p \leq m-1$), tra le grandezze $\overline{A_{x_1+p\delta_{s_1+t}} + \varepsilon_1}$, $\overline{B_{x_1+p\delta_{s_1+t}} - \varepsilon_1}$, ε_1 essendo di quella piccolezza che si vuole. Adunque la somma

$$\sum_0^{m-1} \delta_{s_1+t} \frac{\Delta^2 \rho(x_1 + p \delta_{s_1+t})}{\varepsilon^2}$$

è arbitrariamente vicina allo zero a partire da valori opportuni di ε , per ogni valor particolare x_1 interno al segmento $a \overline{b-\alpha}$. La funzione

$$G(x) = \sum_0^{m-1} \delta_{s_1+t} \rho(x + p \delta_{s_1+t})$$

poi è manifestamente continua nell'intervallo ac ($c = \overline{b-\alpha}$), i limiti inclusi.

Consideriamo ora col sig. PAUL DU BOIS-REYMOND le due funzioni (*)

$$H(x) = G(x) - G(a) - \frac{x-a}{c-a} [G(c) - G(a)], \quad (1)$$

$$K(x) = \gamma H(x) - \frac{r^2}{2} (x-a)(c-x), \quad (2)$$

essendo $\gamma = \pm 1$, r una quantità reale arbitraria, e c eguale a $\overline{b-\alpha}$.

Si ha manifestamente

$$\Delta^2 K(x) = \varepsilon^2 r^2 \left(1 + \frac{\gamma}{r^2} \frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} \right),$$

e le funzioni $H(x)$ e $K(x)$ soddisfanno alle seguenti condizioni:

1. $H(a) = H(c) = K(a) = K(c) = 0$,
2. $K(x)$ è continua nel tratto ac ($a \leq x \leq c$), tanto se γ è eguale a $+1$, quanto se è eguale a -1 ,
3. $\Delta^2 K(x)$ è positiva per ogni valore particolare x_1 ($a < x_1 < c$).

(*) V. pag. 30 della Memoria più volte citata.

L'ultima condizione è soddisfatta a partire da valore opportuno s_1 di s e quando ε non ecceda un limite conveniente, poichè, per quanto piccolo sia r , si potrà assegnare per s_1 ed ε valori tali che la quantità

$$\left(\frac{\gamma}{r^2} \frac{\Delta^2 G(x_1)}{\varepsilon^2} \right)^2$$

sia minore di uno, e che si abbia quindi:

$$1 + \frac{\gamma}{r^2} \frac{\Delta^2 G(x_1)}{\varepsilon^2} > 0.$$

Da quanto precede si deduce di leggieri che la funzione $K(x)$ non può assumere valori positivi. Imperocchè, se la funzione $K(x)$ fosse positiva in un qualche punto dell'intervallo ac , sarebbe altresì positivo il limite superiore dei suoi valori, il quale verrebbe raggiunto in un punto x_1 ($a < x_1 < c$), essendo la funzione studiata continua nel tratto ac , i limiti compresi. Si avrebbe perciò:

$$K(x_1 + \varepsilon) - K(x_1) \leq 0,$$

$$K(x_1 - \varepsilon) - K(x_1) \leq 0,$$

quindi:

$$\Delta^2 K(x_1) = K(x_1 + \varepsilon) - 2K(x_1) + K(x_1 - \varepsilon) \leq 0,$$

quale si sia ε , purchè non maggiore della più piccola tra le due grandezze $c - x_1$, $x_1 - a$. Ma l'ultima diseuguaglianza è impossibile per le cose dette poco fa, e si ha perciò:

$$K(x) = \pm H(x) - \frac{r^2}{2}(x-a)(c-x) \leq 0,$$

qualunque sia il segno attribuito alla funzione $H(x)$. Abbiamo quindi:

$$\text{mod. } H(x) - \frac{r^2}{2}(x-a)(c-x) \leq 0,$$

ossia l'eccesso di $\text{mod. } H(x)$ sullo zero può rendersi arbitrariamente piccolo impicciolendo di più in più r .

Facciamo ora decrescere indefinitamente r ed ε in guisa che sia sempre

$$1 + \frac{\pm 1}{r^2} \frac{\Delta^2 G(x)}{\varepsilon^2} > 0.$$

In tale ipotesi $G(x_1)$ si avvicinerà senza confine al valore

$$\int_{x_1}^{x_1 + \alpha} \rho(x) dx,$$

quale si sia x_1 nell'intervallo $a \overline{b-\alpha}$, e sarà in virtù della relazione (1):

$$\int_{x_1}^{x_1+\alpha} \rho(x) dx = C' + C'_1 x_1,$$

C' e C'_1 essendo costanti. Dall'ultima eguaglianza si deduce:

$$\alpha \rho(x_1 + \theta \alpha) = C_1 + C'_1 x_1, \quad 0 < \theta < 1,$$

quindi:

$$\rho(x_1 + \theta \alpha) = \frac{C_1}{\alpha} + C'_1 \frac{x_1}{\alpha},$$

ed indicando con x'_1 ed x'_2 due valori particolari tra a e $\overline{b-\alpha}$:

$$\rho(x'_1 + \theta_1 \alpha) - \rho(x'_2 + \theta_2 \alpha) = \frac{C'_1}{\alpha} (x'_1 - x'_2)$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Supposto ora che α vada diminuendo senza limite, il primo membro si accosterà di più in più alla grandezza $\rho(x'_1) - \rho(x'_2)$, e perciò si avrà:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{C'_1}{\alpha} = \frac{\rho(x'_1) - \rho(x'_2)}{x'_1 - x'_2} = C,$$

ed anche il quoziente $\frac{C_1}{\alpha}$ tenderà ad un valore C' . Si ha quindi:

$$\rho(x) = Cx + C',$$

ed il primo teorema è dimostrato.

Dalla proposizione ora studiata consegue che:

Se una funzione $\rho(x)$ è continua nell'intervallo ab , i limiti inclusi, e se l'espressione

$$\frac{\rho(x+\varepsilon) - 2\rho(x) + \rho(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

oscilla per ogni valore particolare di x intorno ad ab per $\varepsilon = +0$ tra le due quantità ovunque finite A_x e B_x , tali, che si abbia

$$\int_c^d A_x dx = \int_c^d B_x dx = 0, \quad a \leq c < d \leq b,$$

sarà, inclusi i limiti:

$$A_x = B_x = 0.$$

Il secondo teorema detto a principio di questo paragrafo può dedursi facilmente da quello già dimostrato; ciò risulta da quanto segue.

Consideriamo la funzione

$$L(x) = \int_x^{x+\alpha} \rho_1(\beta) d\beta,$$

x essendo un valore compreso tra a e $\overline{b-\alpha}$, la quale è continua per ogni punto interno all'intervallo $a \overline{b-\alpha}$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} L(x \pm \varepsilon) - L(x) &= \int_{x \pm \varepsilon}^{x+\alpha \pm \varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta - \int_x^{x+\alpha} \rho_1(\beta) d\beta = \\ &= - \int_x^{x \pm \varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta + \int_{x+\alpha}^{x+\alpha \pm \varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta, \end{aligned}$$

per ogni valore di x tra a e $\overline{b-\alpha}$.

Ora,

$$\begin{aligned} & \frac{L(x+\varepsilon) - 2L(x) + L(x-\varepsilon))}{\varepsilon^2} = \\ & \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\int_{x+\varepsilon}^{x+\alpha+\varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta - 2 \int_x^{x+\alpha} \rho_1(\beta) d\beta + \int_{x-\varepsilon}^{x+\alpha-\varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta \right] = \\ & \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x+\alpha}^{x+\alpha+\varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x+\alpha}^{x+\alpha-\varepsilon} \rho_1(\beta) d\beta + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x+\varepsilon}^x \rho_1(\beta) d\beta + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x-\varepsilon}^x \rho_1(\beta) d\beta = \\ & \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon [\rho_1(x+\alpha+\beta) - \rho_1(x+\alpha-\beta) + \rho_1(x-\beta) - \rho_1(x+\beta)] d\beta = \\ & [\rho_1(x+\alpha+\theta\varepsilon) - \rho_1(x+\alpha-\theta\varepsilon) + \rho_1(x-\theta\varepsilon) - \rho_1(x+\theta\varepsilon)] \frac{1}{\varepsilon} = \\ & \frac{\rho_1(x+\alpha+\theta\varepsilon) - \rho_1(x+\alpha)}{\varepsilon} - \frac{\rho_1(x+\alpha-\theta\varepsilon) - \rho_1(x+\alpha)}{\varepsilon} \\ & + \frac{\rho_1(x-\theta\varepsilon) - \rho_1(x)}{\varepsilon} - \frac{\rho_1(x+\theta\varepsilon) - \rho_1(x)}{\varepsilon} = \\ & \frac{\rho_1(x+\alpha+\theta\varepsilon) - \rho_1(x+\alpha)}{\theta\varepsilon} \theta + \frac{\rho_1(x+\alpha-\theta\varepsilon) - \rho_1(x+\alpha)}{-\theta\varepsilon} \theta \\ & - \frac{\rho_1(x-\theta\varepsilon) - \rho_1(x)}{-\theta\varepsilon} \theta - \frac{\rho_1(x+\theta\varepsilon) - \rho_1(x)}{\theta\varepsilon} \theta. \end{aligned}$$

Adunque, poichè θ è sempre compreso tra 0 ed 1, la espressione

$$\frac{\Delta^2 L(x)}{\varepsilon^2}$$

oscilla al decrescere indefinito di ε per ogni valor particolare x interno al segmento $a \overline{b-\alpha}$ tra due quantità S_x e T_x ($S_x \geq T_x$) tali, che si ha

$$\int_c^d S_x dx = \int_c^d T_x dx = 0, \quad a \leq c < d \leq \overline{b-\alpha}.$$

Ciò ha luogo perchè, fatta astrazione dei punti appartenenti ad una somma di spazi che può rendersi piccola ad arbitrio, i valori conseguiti dalle funzioni M_x , N_x , M'_x ed N'_x nel tratto $a \overline{b-\alpha}$ sono di quella piccolezza che si vuole, e questa condizione si verifica manifestamente anche per le quantità S_x e T_x . Detta quindi η una quantità positiva piccolissima, sarà nel tratto $\overline{a+\eta} \overline{b-\alpha-\eta}$ pel primo teorema:

$$L(x) = Cx + C_1,$$

e poichè le due funzioni $L(x)$, $Cx + C_1$ sono continue nell'intervallo $a \overline{b-\alpha}$, la eguaglianza precedente sarà vera anche per $\eta = +0$. Ma

$$\int_x^{x+\alpha} \rho_1(\beta) d\beta = Cx + C_1,$$

$$\alpha \rho_1[x + \theta\alpha] = Cx + C_1, \quad 0 < \theta < 1,$$

quindi:

$$\rho_1(x + \theta\alpha) = \frac{C}{\alpha}x + \frac{C_1}{\alpha},$$

e mandando α a zero:

$$\rho_1(x) = C'x + C'_1.$$

D'altra parte, rammentando come per ipotesi si comporti la quantità

$$\frac{\rho_1(x \pm \varepsilon) - \rho_1(x)}{\pm \varepsilon}$$

all'annullarsi di ε , sarà: $C' = 0$, ed il teorema è dimostrato.

Come corollario si ha:

Se una funzione $\rho_1(x)$ è continua in un intervallo ab (*), e se per

(*) Non si fa veruna ipotesi circa ai limiti.

tutti i punti interni al segmento ab le espressioni

$$\frac{\rho_1(x \pm \varepsilon) - \rho_1(x)}{\pm \varepsilon}$$

oscillano rispettivamente tra le quantità ovunque finite

$$M_x, N_x (M_x \geq N_x), \quad M'_x, N'_x (M'_x \geq N'_x),$$

essendo

$$\int_c^d M_x dx = \int_c^d N_x dx = \int_c^d M'_x dx = \int_c^d N'_x dx = 0, \quad a \leq c < d \leq b,$$

sarà:

$$M_x = N_x = M'_x = N'_x = 0.$$

A quest'ultimo teorema aggiungiamo la conseguenza:

Se $F(x)$ è tale una funzione continua per tutti i punti del tratto ab (*), che le espressioni

$$\frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon}, \quad \frac{F(x - \varepsilon) - F(x)}{-\varepsilon}$$

oscillino per ciascun punto compreso nel tratto ab rispettivamente tra le quantità ovunque finite A_x e B_x ($A_x \geq B_x$), A'_x e B'_x ($A'_x \geq B'_x$), che soddisfanno alle relazioni

$$\int_c^d (A_x - B_x) dx = \int_c^d (A'_x - B'_x) dx = 0,$$

$$\int_c^d A_x dx = \int_c^d A'_x dx, \quad a \leq c < d \leq b,$$

sarà:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x A_x dx = \int_a^x B_x dx = \int_a^x A'_x dx = \int_a^x B'_x dx.$$

Infatti, la funzione

$$\begin{aligned} \psi(x) &= F(x) - F(a) - \int_a^x A_x dx, \\ &= F(x) - F(a) - \int_a^x A'_x dx, \end{aligned}$$

(*) Non si fa alcuna ipotesi circa ai limiti.

$$\begin{aligned}
 &= F(x) - F(a) - \int_a^x B_x dx, \\
 &= F(x) - F(a) - \int_a^x B'_x dx
 \end{aligned}$$

si annulla per $x=a$, e la espressione

$$\frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}$$

oscilla tra due grandezze ovunque finite, integrabili ed aventi il loro integrale nullo tanto per $\varepsilon=+0$, quanto per $\varepsilon=-0$.

Infatti, detto N_{x+0} il minimo limite inferiore della funzione A_x nel tratto $x \overline{x+\varepsilon}$, ed O_{x+0} la oscillazione laterale destra della medesima nel punto x , in cui si tien calcolo del valore A_x , sarà:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} A_x dx = N_{x+0} + \theta O_{x+0} + \varepsilon_1, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

essendo ε_1 di quella piccolezza che si vuole a partire da valore opportuno di ε . Supposto poi l'indice del gruppo abbastanza grande, sarà piccola oltre ogni dire la somma degli spazi nei quali, incluso il contorno, cadono punti x tali, che la quantità O_{x+0} non sia minore della grandezza arbitraria σ . In ciascuno dei punti appartenenti agli altri tratti, la somma dei quali è vicinissima ad ab , la quantità $N_{x+0} + \theta O_{x+0} + \varepsilon_1$ oscilla al decrescere indefinito di ε tra valori che non eccedono i limiti arbitrariamente vicini $A_x + \sigma$, $A_x - \sigma$. Se si pone poi mente che a partire da valori opportuni dell'indice del gruppo anche la somma degli spazi nei quali la differenza $A_x - B_x$, inclusi i limiti, non è inferiore a σ è piccola quanto si vuole, ne consegue che l'espressione

$$\frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}$$

per ciascun valore particolare di x ($a < x < b$) oscilla tra due quantità P_x , Q_x , che si mantengono sempre finite e soddisfanno alla relazione

$$\int P_x = \int Q_x = 0.$$

La quantità

$$\frac{\psi(x-\varepsilon) - \psi(x)}{-\varepsilon},$$

si comporta nello stesso modo: l'asserzione è quindi dimostrata.

Il sig. PAUL DU BOIS-REYMOND enuncia come segue la proposizione ora dimostrata (*):

Ist $F(x)$ eine Function die differenzirt die Function $f(x)$ liefert, und ist $F(x)$ im Intervall $A \leq x \leq B$ stetig, so ist:

$$\lim_{n=\infty} [(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

wo $A < a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x < B$ im nämlichen Intervall von x genau gleich $F(x) - F(a)$.

Osservando come il limite di $\frac{F(x \pm \varepsilon) - F(x)}{\pm \varepsilon}$ possa essere indeterminato, sembra più conveniente di questo il mio enunciato. L'autore tedesco dimostra questa proposizione in modo diverso dal mio.

Lo stesso poi opina che, se una funzione $f(x)$ è integrabile, debba esistere in ogni intervallo, per quanto sia piccolo, un punto pel quale si ha

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x) \quad (**).$$

Questa asserzione non mi sembra esatta, imperocchè la condizione (***) di integrabilità di una funzione $f(x)$ finita in un intervallo ab è, che converga a zero con $\frac{1}{s}$ la somma degli spazi, i quali contengono nel loro interno punti la oscillazione dei quali non è inferiore alla quantità arbitraria σ , s essendo l'indice del gruppo. Ora, questo fatto non porta di necessaria conseguenza che vi debba essere in ogni tratticello di ab un punto, e quindi infiniti, nel quale la funzione $f(x)$ ha un oscillazione nulla. Certamente, in un intervallo qualsivoglia di ab il limite inferiore di ciascuna delle tre funzioni O_{x+0} , O_{x-0} , O_x sarà eguale a zero, ed è questo soltanto ciò che, a mio credere, si può asserire con sicurezza: nulla però autorizza di ammettere che questo limite venga raggiunto. Ed è appunto per questa considerazione che nell'enunciato dell'ultimo teorema del paragrafo precedente dico che la $\psi_1(x)$ è eguale all'integrale $\int_a^x \psi(x) dx$, non già che ammette per derivata la funzione $\psi(x)$.

(*) V. la Memoria citata da ultimo, pag. 45-50.

(**) V. p. 45 e 46 della stessa Memoria.

(***) V. la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, n.º III.

Si avverte di leggieri che non è necessaria la condizione di continuità imposta alla $\rho(x)$ ai limiti del tratto ab nel primo dei teoremi enunciati in questo paragrafo e nel suo corollario. Chè, se non si facesse alcuna ipotesi circa al comportarsi della medesima in essi punti, basterebbe considerare il segmento $\overline{a+\varepsilon} \overline{b-\varepsilon}$, ε essendo una quantità piccola oltre ogni dire, in luogo dell'altro ab , e nel primo sarebbe:

$$\rho(x) = Cx + C'.$$

Questa eguaglianza poi, essendo la funzione $Cx + C'$ ovunque continua ed ε di quella piccolezza che si vuole, regge anche nel tratto ab .

Nella seconda delle proposizioni dette in questo numero e nei suoi corollari la continuità della funzione $\rho_1(x)$ è conseguenza delle altre ipotesi.

7.

Consideriamo ora la serie $\sum_n A_n X_n$ che può presentarsi anche sotto alla forma

$$\sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\frac{2 \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin\theta}} \left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \frac{2 \cotg\theta \sin\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{8n\sqrt{\sin\theta}} \right] + \sum_1^n \frac{A_n p_n}{n^2 \sqrt{n}}, \quad (\alpha)$$

in quanto, $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$ annullandosi con $\frac{1}{n}$ e p_n non crescendo indefinitamente con n per le ricerche dei paragrafi 3 e 4, il simbolo $\sum_1^n \frac{A_n p_n}{n^2 \sqrt{n}}$ rappresenta una grandezza. Moltiplicando ciascun termine della serie (α) per $\sin^{\frac{3}{2}}\theta$ si ottiene l'altra:

$$\sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[2 \sin\theta \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \frac{2 \cos\theta \sin\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{8n} \right] + \sum_1^n \frac{A_n p_n \sin^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2 \sqrt{n}}, \quad (\beta)$$

la somma della quale oscilla tra le quantità

$$\varphi_1(\theta) \sin^{\frac{3}{2}}\theta - A_0 \sin^{\frac{3}{2}}\theta \quad \text{e} \quad \varphi_2(\theta) \sin^{\frac{3}{2}}\theta - A_0 \sin^{\frac{3}{2}}\theta,$$

quando il valor particolare θ non corrisponda ad un punto del gruppo dell'ordine r del quale si fa parola nel primo paragrafo.

L'aggregato (β) può trasformarsi nell'altro

$$\left. \begin{aligned} & \sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4n} \right) \left[\operatorname{sen} \left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen} \left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{8n} \left[\operatorname{sen} \left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{sen} \left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} + \sum_1^n \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}}, \end{aligned} \right\} \quad (\beta')$$

che, integrando due volte ciascuno dei suoi termini, dà la serie:

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho+1)^2} - \frac{\operatorname{sen} \left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho-1)^2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{8n} \left(\frac{\operatorname{sen} \left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho+1)^2} + \frac{\operatorname{sen} \left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho-1)^2} \right) \right] + \sum_1^n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \quad (\gamma)$$

$$= F_1(\theta)$$

convergente insieme a quella dei suoi moduli nell'intervallo $\overline{\pi - \eta}$, η essendo maggiore di zero e di quella piccolezza che si vuole, e la quale nel medesimo rappresenta una funzione continua, inclusi i limiti.

Consideriamo ora la funzione

$$F_{11}(\theta) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta \varphi_1(\beta) d\beta,$$

la quale è continua, compresi i confini, nel tratto $\eta \overline{\pi - \eta}$, ed i limiti cui tendono le quantità

$$\frac{F_{11}(\theta + \varepsilon) - 2F_{11}(\theta) + F_{11}(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{F_{11}(\theta + \varepsilon) - 2F_{11}(\theta) + F_{11}(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

all'annullarsi di ε , supposto che la $\varphi_1(\theta)$ non vada all'infinito pel valor considerato.

Se si pone

$$\varphi(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta \varphi_1(\beta) d\beta,$$

sarà:

$$F_{11}(\theta + \varepsilon) - 2F_{11}(\theta) + F_{11}(\theta - \varepsilon) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta + \varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \varphi(\alpha) d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta - \varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha =$$

$$\int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} \varphi(\alpha) d\alpha - \int_{\theta - \varepsilon}^{\theta} \varphi(\alpha) d\alpha = \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} [\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \varepsilon)] d\alpha = \varepsilon \{ \varphi(\theta + \lambda \varepsilon) - \varphi[\theta - (1 - \lambda)\varepsilon] \},$$

$$1 > \lambda > 0.$$

Ora,

$$\varphi(\theta + \lambda \varepsilon) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta + \lambda \varepsilon} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta \varphi_1(\beta) d\beta, \quad \varphi[\theta - (1 - \lambda)\varepsilon] = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta - (1 - \lambda)\varepsilon} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta \varphi_1(\beta) d\beta,$$

quindi:

$$\varphi(\theta + \lambda \varepsilon) - \varphi[\theta - (1 - \lambda)\varepsilon] = \int_{\theta - (1 - \lambda)\varepsilon}^{\theta + \lambda \varepsilon} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta \varphi_1(\beta) d\beta = \varepsilon [M_\theta - \eta(M_\theta - N_\theta)],$$

$$0 \leq \eta \leq 1,$$

essendo M_θ ed N_θ i limiti superiore ed inferiore rispettivamente della funzione $\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta \varphi_1(\theta)$ nel tratto $\overline{\theta - (1 - \lambda)\varepsilon} \overline{\theta + \lambda \varepsilon}$, compreso un confine amendue o nessuno. Si ha perciò:

$$\frac{F_{11}(\theta + \varepsilon) - 2F_{11}(\theta) + F_{11}(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2} = M_\theta - \eta(M_\theta - N_\theta),$$

la quale eguaglianza vuol dire che il primo membro ha un valore che non eccede i limiti M_θ ed N_θ . All'infinito decrescere di ε la quantità $M_\theta - N_\theta$ tende all'oscillazione O_θ della funzione $\varphi_1(\theta)$ nel punto θ (*) ed M_θ tende pure ad un limite che diremo M'_θ . Abbiamo quindi che i limiti tra i quali oscilla la espressione

$$\frac{F_{11}(\theta + \varepsilon) - 2F_{11}(\theta) + F_{11}(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

per $\varepsilon = +0$ non eccedono le quantità M'_θ , $M'_\theta - O_\theta$.

La espressione

$$\frac{F_{11}(\theta + \varepsilon) - 2F_{11}(\theta) + F_{11}(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

converge manifestamente allo zero con ε , quale si sia θ .

(*) V. la mia Nota: *Sul concetto di integrale definito*, n.º III, § 3.

Consideriamo ora la funzione

$$S(\theta) = F_{11}(\theta) - F_1(\theta) - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta,$$

la quale è continua nell'intervallo da η a $\overline{\pi - \eta}$, inclusi i limiti, per quanto piccola sia la quantità η , e studiamo il modo di comportarsi delle espressioni

$$\frac{S(\theta + \varepsilon) - 2S(\theta) + S(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{S(\theta + \varepsilon) - 2S(\theta) + S(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

all'infinito diminuire di ε . A tale fine consideriamo i valori assunti dalle quantità

$$\frac{F_1(\theta + \varepsilon) - 2F_1(\theta) + F_1(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{F_1(\theta + \varepsilon) - 2F_1(\theta) + F_1(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

per ε tendente a zero.

Posto

$$\sum_1^n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} = \tau(\theta),$$

$$- \sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho + 1)^2} - \frac{\operatorname{sen} \left((\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho - 1)^2} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{8n} \left(\frac{\operatorname{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho + 1)^2} + \frac{\operatorname{sen} \left((\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\rho - 1)^2} \right) \right] = \omega(\theta),$$

rammentando la relazione γ , sarà:

$$F_1(\theta) = \omega(\theta) + \tau(\theta).$$

Ora, si ha manifestamente

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\tau(\theta + \varepsilon) - 2\tau(\theta) + \tau(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2} = \sum_1^n \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}},$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\tau(\theta + \varepsilon) - 2\tau(\theta) + \tau(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

quale si sia θ ; fa di mestieri quindi studiare il modo di comportarsi delle espressioni

$$\frac{\omega(\theta + \varepsilon) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\frac{\omega(\theta + \varepsilon) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

all'annullarsi di ε .

Facciamo adunque questa ricerca.

8.

Si ha

$$\begin{aligned} & \sum_1^m \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4n} \right) \left[\text{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \text{sen} \left((\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{8n} \left[\text{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \text{sen} \left((\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} = \\ & \quad \sum_1^m \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n} \right) \text{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \\ & \quad \sum_1^m \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left(1 - \frac{3}{8n} \right) \text{sen} \left((\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \\ & \quad \sum_1^m \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n} \right) \text{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \\ & \quad \sum_1^m \frac{A_{n+2}}{\sqrt{2(n+2)\pi}} \left(1 - \frac{3}{8(n+2)} \right) \text{sen} \left((\rho + 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \\ & \quad \frac{A_1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{3}{8} \right) \text{sen} \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{A_2}{\sqrt{4\pi}} \left(1 - \frac{3}{16} \right) \text{sen} \left(\frac{3}{2}\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \\ & \quad \frac{A_{m+1}}{\sqrt{2(m+1)\pi}} \left(1 - \frac{3}{8(m+1)} \right) \text{sen} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \\ & \quad \frac{A_{m+2}}{\sqrt{2(m+2)\pi}} \left(1 - \frac{3}{8(m+2)} \right) \text{sen} \left[\left(m + \frac{3}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned}$$

Ora, le quantità

$$\begin{aligned} & \frac{A_{m+1}}{\sqrt{2(m+1)\pi}} \left(1 - \frac{3}{8(m+1)} \right) \text{sen} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \\ & \frac{A_{m+2}}{\sqrt{2(m+2)\pi}} \left(1 - \frac{3}{8(m+2)} \right) \text{sen} \left[\left(m + \frac{3}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

tendono a zero al crescere indefinito di m , quindi le due serie

$$\begin{aligned} & -\frac{A_1}{\sqrt{2}\pi}\left(1-\frac{3}{8}\right)\text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{A_2}{\sqrt{4}\pi}\left(1-\frac{3}{16}\right)\text{sen}\left(\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\right) \\ & +\sum_1^n\left[\frac{A_n}{\sqrt{2}n\pi}\left(1-\frac{1}{8n}\right)-\frac{A_{n+2}}{\sqrt{2}(n+2)\pi}\left(1-\frac{3}{8(n+2)}\right)\right]\text{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right), \\ & \sum_1^n\frac{A_n}{\sqrt{2}n\pi}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\left[\text{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\text{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\right. \\ & \quad \left.\frac{1}{8n}\left[\text{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\text{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

si comportano egualmente per ogni valore di θ .

Se si pone

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{3}{8}-1\right), & \alpha_2 &= \frac{A_2}{\sqrt{4}\pi}\left(\frac{3}{16}-1\right), \\ \alpha_{n+2} &= -\frac{A_{n+2}}{\sqrt{2}(n+2)\pi}\left(1-\frac{3}{8(n+2)}\right)-\frac{A_n}{\sqrt{2}n\pi}\left(\frac{1}{8n}-1\right), & n &\geq 1, \end{aligned}$$

sarà:

$$\omega(\theta) = -\sum_1^n \alpha_n \frac{\text{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= \frac{\omega(\theta+2\alpha)-2\omega(\theta)+\omega(\theta-2\alpha)}{4\alpha^2} = \sum_1^n \alpha_n \text{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right] \left(\frac{\text{sen}(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha}\right)^2 \\ &= \sum_1^n K_n \left(\frac{\text{sen}(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha}\right)^2, \end{aligned}$$

essendosi posto per brevità

$$K_n = \alpha_n \text{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right].$$

Indicando con A e B i limiti superiore ed inferiore rispettivamente dei valori assunti dalla funzione

$$\varphi(z) = \sum_1^{\frac{1}{z}} K_r$$

per $z=+0$ e per un valor particolare di θ , non appartenente al gruppo dell'ordine r per ciascun punto del quale è ignoto il comportarsi della serie

$\sum A_n P_n(\cos \theta)$, è chiaro che si avrà:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) = & \left[A \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} \right)^2 - (A - K_1) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} \right)^2 \right] + \\ & \left[(A - K_1) \left(\frac{\sin \frac{3}{2} \alpha}{\frac{3}{2} \alpha} \right)^2 - (A - K_1 - K_2) \left(\frac{\sin \frac{3}{2} \alpha}{\frac{3}{2} \alpha} \right)^2 \right] + \\ & \left[(A - K_1 - K_2) \left(\frac{\sin \frac{5}{2} \alpha}{\frac{5}{2} \alpha} \right)^2 - (A - K_1 - K_2 - K_3) \left(\frac{\sin \frac{5}{2} \alpha}{\frac{5}{2} \alpha} \right)^2 \right] + \\ & \dots \end{aligned}$$

Posto

$$A - K_1 - K_2 - \dots - K_r = \varepsilon_r,$$

sarà:

$$\lambda(\alpha) = A \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} \right)^2 - \sum_1^r \varepsilon_r \left[\left(\frac{\sin \left(r-1 + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(r-1 + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin \left(r + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(r + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2 \right],$$

poichè l'espressione

$$\varepsilon_r \left(\frac{\sin \left(r + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(r + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2$$

si annulla con $\frac{1}{r}$.

Decomponiamo ora la somma

$$\sum_1^r \varepsilon_r \left[\left(\frac{\sin \left(r-1 + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(r-1 + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin \left(r + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(r + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2 \right]$$

in tre (*)

1. da 1 sino ad m inclusivamente,

(*) V. la Memoria di RIEMANN: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, pag. 27.

2. da $m+1$ sino ad s , essendo s il massimo numero intero che soddisfa alla relazione $\frac{\pi}{\alpha} \geq s + \frac{1}{2}$,

3. da $s+1$ in poi.

La prima consta di un numero limitato di termini, qualunque valore si attribuisca alla variabile α , e quindi si annulla con essa; la seconda può porsi eguale a

$$\delta \left[\left(\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 \right],$$

essendo in ciascun termine della medesima il fattore di ε_r positivo, e δ una quantità intermedia alle grandezze $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_s$. Quanto alla terza somma si ha

$$\begin{aligned} & \varepsilon_r \left[\left(\frac{\sin\left(r-1 + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-1 + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 \right] = \\ & \varepsilon_r \left[\left(\frac{\sin\left(r-1 + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r-1 + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin\left(r-1 + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 \right] + \\ & \varepsilon_r \left[\left(\frac{\sin\left(r-1 + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 \right] = \\ & \varepsilon_r \left[\frac{1}{\left[\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2} - \frac{1}{\left[\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2} \right] \sin^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha + \\ & \frac{\varepsilon_r}{\left[\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2} \left[\sin^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin^2\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha \right]. \end{aligned}$$

Detta k una quantità qualsivoglia, non però un numero intero e negativo, si ha:

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \dots = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots,$$

e facendo $k = s + \frac{3}{2}$:

$$\frac{1}{s + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)\left(s + \frac{5}{2}\right)} + \frac{1}{\left(s + \frac{5}{2}\right)\left(s + \frac{7}{2}\right)} + \dots,$$

e così pure

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(s + \frac{5}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(s + \frac{7}{2}\right)^2} + \dots = \\ & \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)\left(s + \frac{5}{2}\right)} \cdot \frac{s + \frac{5}{2}}{s + \frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(s + \frac{5}{2}\right)\left(s + \frac{7}{2}\right)} \cdot \frac{s + \frac{7}{2}}{s + \frac{5}{2}} + \dots \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha - \operatorname{sen}^2\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha = \\ & \left[\operatorname{sen}\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha + \operatorname{sen}\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]\left[\operatorname{sen}\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha - \operatorname{sen}\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha\right] = \\ & -4\operatorname{sen}r\alpha\cos r\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha = -\operatorname{sen}2r\alpha\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Abbiamo adunque:

$$\begin{aligned} & \sum_{s+1}^r \varepsilon_r \left[\left(\frac{\operatorname{sen}\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen}\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(r + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 \right] = \\ & \left[\varepsilon_r \operatorname{sen}^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha \right]_{s+1} \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2} + \left[-\varepsilon_r \operatorname{sen}2r\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{r + \frac{3}{2}}{r + \frac{1}{2}} \right]_{s+1} \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2}\right)\alpha}, \end{aligned}$$

indicandosi con $\left[\varepsilon_r \operatorname{sen}^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha \right]_{s+1}$ ed $\left[-\varepsilon_r \operatorname{sen}2r\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{r + \frac{3}{2}}{r + \frac{1}{2}} \right]_{s+1}$ quantità

intermedie alle seguenti

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{s+1} \operatorname{sen}^2\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \varepsilon_{s+2} \operatorname{sen}^2\left(s + \frac{3}{2}\right)\alpha, \dots, \\ & -\varepsilon_{s+1} \operatorname{sen}2(s+1)\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{s + \frac{5}{2}}{s + \frac{3}{2}}, \quad -\varepsilon_{s+2} \operatorname{sen}2(s+2)\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \frac{s + \frac{7}{2}}{s + \frac{5}{2}}, \dots \end{aligned}$$

rispettivamente.

Ciò posto, se si fa decrescere indefinitamente la quantità α , l'espressione

$$\left(\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2$$

tenderà al valore $\left(\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2$. Detto poi m un numero abbastanza grande,

la somma $\sum_1^{m+r} K_i$ ($r \geq 0$) non potrà eccedere i limiti $A + \sigma$ e $B - \sigma$, essendo σ un numero arbitrariamente piccolo, nè ε_r , al crescere indefinito di r , potrà eccedere le quantità $A - B + \sigma$, $-\sigma$. Il prodotto

$$\left[\left(\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha} \right)^2 \right]$$

non assumerà perciò all'annullarsi di α valori maggiori di $A - B + \sigma$ e minori di $-\sigma$.

Le quantità

$$\left[\varepsilon_r \sin^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha \right]_{s+1} \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]^2}, \quad \left[-\varepsilon_r \sin 2r\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{r + \frac{3}{2}}{r + \frac{1}{2}} \right]_{s+1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)\alpha}$$

alla lor volta non eccederanno rispettivamente i limiti

$$\frac{A - B + \sigma}{\pi^2}, \quad \frac{-\sigma}{\pi^2}, \quad \frac{A - B + \sigma}{\pi}, \quad -\frac{A - B + \sigma}{\pi}.$$

Ciò ha luogo perchè il fattore $\sin^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha$ del prodotto $\varepsilon_r \sin^2\left(r - \frac{1}{2}\right)\alpha$ è sempre positivo, mentre non si può dire altrettanto della quantità $\sin 2r\alpha$ che si presenta nella espressione

$$-\varepsilon_r \sin 2r\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{r + \frac{3}{2}}{r + \frac{1}{2}}.$$

Quindi, ponendo mente che

$$\lambda(\alpha) = A \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} \right)^2 - \left\{ \left[\left(\frac{\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(m + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin \left(s + \frac{1}{2} \right) \alpha}{\left(s + \frac{1}{2} \right) \alpha} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left[\varepsilon_r \sin^2 \left(r - \frac{1}{2} \right) \alpha \right]_{s+1} \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right]^2} + \left[-\varepsilon_r \sin 2r \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{r + \frac{3}{2}}{r + \frac{1}{2}} \right]_{s+1} \frac{1}{\left(s + \frac{3}{2} \right) \alpha} \right\},$$

la funzione

$$\lambda(\alpha) = \frac{\omega(\theta + 2\alpha) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - 2\alpha)}{4\alpha^2}$$

oscilla al decrescere indefinito di α tra due quantità che non eccedono nè i limiti

$$A + \sigma + \frac{\sigma}{\pi^2} + \frac{A - B + \sigma}{\pi} = A + \frac{A - B}{\pi} + \sigma \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \right),$$

$$A - (A - B) \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \right) - \sigma \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \right),$$

nè, poichè σ è arbitrariamente piccola, gli altri

$$A + \frac{A - B}{\pi}, \quad A - (A - B) \left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \right).$$

I valori tra i quali resta compresa la funzione $\lambda(\alpha)$ all'annullarsi di α ponno ancora restringersi.

Consideriamo a tal fine la serie.

$$\sum_1^n (-\alpha_n) \sin \left[(\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right],$$

la somma della quale oscilla al crescere indefinito di n tra $-A$ e $-B$, $-A$ essendo il limite inferiore, e facciamo su questa tutti i ragionamenti fatti sull'altra

$$\sum_1^n \alpha_n \sin \left[(\rho - 1)\theta - \frac{\pi}{4} \right];$$

ne conseguirà che la espressione

$$-\lambda(\alpha) = -\frac{\omega(\theta + 2\alpha) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - 2\alpha)}{4\alpha^2}$$

è compresa all'annullarsi di α tra due quantità, l'una non maggiore di

$-B + \frac{-B+A}{\pi}$, l'altra non minore di $-B - (-B+A)\left(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right)$. Quindi il teorema:

Se $y = A_\theta$ ed $y = B_\theta$ ($A_\theta \geq B_\theta$) sono le equazioni delle rette limite corrispondenti alla funzione

$$\rho(z) = \sum_{n=1}^{\frac{1}{z}} \alpha_n \operatorname{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right] \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0)$$

per $z=0$, posto

$$\omega(\theta) = - \sum_{n=1}^{\frac{1}{z}} \alpha_n \frac{\operatorname{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2},$$

e dette $y = P_\theta$, $y = Q_\theta$ ($P_\theta \geq Q_\theta$) le rette limite corrispondenti alla espressione

$$\frac{\omega(\theta + \alpha) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - \alpha)}{4\alpha^2}$$

per $\alpha=0$, non sarà:

$$A_\theta + \frac{A_\theta - B_\theta}{\pi} < P_\theta, \quad B_\theta - \frac{A_\theta - B_\theta}{\pi} > Q_\theta (*).$$

È chiaro che si ha

$$A_\theta + \sum_{n=1}^{\frac{1}{z}} \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} + A_\theta \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta = \varphi_1(\theta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta,$$

$$B_\theta + \sum_{n=1}^{\frac{1}{z}} \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} + A_\theta \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta = \varphi_2(\theta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta,$$

fatta astrazione dei punti nei quali è ignoto il comportarsi della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta),$$

e quindi:

$$A_\theta - B_\theta = [\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)] \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta.$$

È facile poi vedere che si ha

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega(\theta + 2\alpha) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - 2\alpha)}{\alpha} = 0.$$

(*) Il sig. PAUL DU BOIS-REYMOND assegna alla funzione $\lambda(x)$ nomi stretti di questi. (V. pag. 20.)

Infatti,

$$\frac{\omega(\theta + 2\alpha) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - 2\alpha)}{2\alpha} = 2\alpha \sum_1^n K_n \left(\frac{\sin(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha} \right)^2.$$

Si decomponga ora con RIEMANN (*) la somma $\sum_1^n K_n \cdot \left(\frac{\sin(\rho-1)\alpha}{(\rho-1)\alpha} \right)^2$ in tre, la prima delle quali contenga tutti i termini sino ad un indice fisso m tale, che $K_{m+s} < \varepsilon$ ($s \geq 1$), essendo ε una quantità piccola quanto si vuole, la seconda quelli pei quali $n\alpha$ è eguale o minore ad una grandezza determinata c , la terza il resto della serie. In tale ipotesi si avverte di leggieri che, decrescendo α indefinitamente, la prima somma resta finita, cioè minore di una quantità assegnabile Q , la seconda $< \varepsilon(n-m)$, perchè $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$ è sempre < 1 , e quindi altresì di $\varepsilon n = \frac{\varepsilon n \alpha}{\alpha} \leq \frac{\varepsilon c}{\alpha}$, e la terza più piccola di

$$\varepsilon \sum_{c < n\alpha}^m \frac{1}{n^2 \alpha^2} < \frac{\varepsilon}{n \alpha^2} < \frac{\varepsilon}{\alpha c}.$$

Si ha quindi, astrazion fatta dal segno:

$$\frac{\omega(\theta + 2\alpha) - 2\omega(\theta) + \omega(\theta - 2\alpha)}{2\alpha} < 2 \left[\alpha Q + \varepsilon \left(c + \frac{1}{c} \right) \right];$$

e il teorema è dimostrato.

Pertanto, ora è noto ciò che avviene delle due espressioni

$$\frac{S(\theta + 2\alpha) - 2S(\theta) + S(\theta - 2\alpha)}{4\alpha^2},$$

$$\frac{S(\theta + 2\alpha) - 2S(\theta) + S(\theta - 2\alpha)}{2\alpha}$$

all'infinito diminuire di α , quando θ non sia un punto nel quale si ignora il modo di comportarsi della serie

$$\sum_0^n A_n P_n(\cos \theta).$$

Precisamente si ha, quale si sia θ ,

$$\lim_{\alpha=0} \frac{S(\theta + 2\alpha) - 2S(\theta) + S(\theta - 2\alpha)}{2\alpha} = 0,$$

(*) V. Memoria citata, pag. 29.

mentre, fatta astrazione dei punti più volte indicati, il quoto

$$\frac{S(\theta + 2\alpha) - 2S(\theta) + S(\theta - 2\alpha)}{4\alpha^2}$$

oscilla per $\alpha = +0$ tra due grandezze T_θ, V_θ ($T_\theta \geq V_\theta$) tali, che non si ha

$$\left. \begin{aligned} T_\theta &> M'_\theta - \varphi_2(\theta) \sin^{\frac{3}{2}} \theta + \frac{\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)}{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} \theta, \\ V_\theta &< N'_\theta - \varphi_1(\theta) \sin^{\frac{3}{2}} \theta - \frac{\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)}{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (\mu)$$

M'_θ ed N'_θ essendo le quantità cui convergono all'annullarsi di ε rispettivamente il limite superiore ed inferiore della funzione $\varphi_1(\theta) \sin^{\frac{3}{2}} \theta$ nel tratto $\overline{\theta + \varepsilon}$ $\overline{\theta - \varepsilon}$. Questa asserzione è manifesta quando si rammenti la eguaglianza

$$S(\theta) = F_{11}(\theta) - F_1(\theta) - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin^{\frac{3}{2}} \beta d\beta,$$

ove

$$F_1(\theta) = \omega(\theta) + \tau(\theta).$$

9.

Giovandoci delle ricerche contenute nei paragrafi precedenti è facile vedere che si ha

$$S(\theta) = C\theta + C_1,$$

C e C_1 essendo due costanti.

Infatti, sia $G_1, G_2, G_3, \dots, G_s, \dots$ una serie illimitata di gruppi di punti nell'intervallo $\eta \overline{\pi - \eta}$, essendo la quantità η piccola quanto si vuole. Poichè la funzione $\varphi_1(\theta)$ è integrabile in questo tratto, si potrà assegnare un valore per s tale, che per esso e per tutti i successivi sia arbitrariamente piccola la somma $\sum$ degli spazi, i quali, inclusi i limiti, contengono punti in cui la oscillazione è maggiore di σ , σ essendo di quella piccolezza che si vuole. Si potrà altresì supporre che i tratti formanti la somma $\sum$ contengano nel loro interno o sul contorno tutti quei punti in cui $A_\theta - B_\theta$ è superiore a σ , e quelli nei quali è ignoto il comportarsi della serie $\sum A_n P_n(\cos \theta)$. Se θ è un punto che non cade negli intervalli che costituiscono $\sum$, inclusi i limiti, la differenza

$$M'_\theta - \eta_1 O_\theta, \quad 0 \leq \eta_1 \leq 1,$$

sarà vicina quanto si vuole alla quantità $\varphi_1(\theta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta$, M'_θ essendo il limite superiore dei valori della medesima nel tratto $\overline{\theta - \varepsilon} \overline{\theta + \varepsilon}$ per $\varepsilon = +0$, ed O_θ la oscillazione di $\varphi_1(\theta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta$ nel punto θ . Ne consegue che le funzioni T_θ , V_θ , tra le quali oscilla il quoziente

$$\frac{S(\theta + \varepsilon) - 2S(\theta) + S(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

per $\varepsilon = +0$, sono ovunque definite nel tratto $\eta \overline{\pi - \eta}$, fatta astrazione dei punti appartenenti al gruppo dell'ordine r rammentato più volte. Si avverte poi di leggieri, ricordando le relazioni (μ) del paragrafo precedente, che esse sono integrabili nel segmento $\eta \overline{\pi - \eta}$, e di più che si ha:

$$\int_c^d T_\theta d\theta = \int_c^d V_\theta d\theta = 0, \quad \eta \leq c < d \leq \overline{\pi - \eta}.$$

L'ultima asserzione è manifesta quando si ponga mente che la differenza $T_\theta - V_\theta$ non è maggiore di

$$O_\theta + [\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)] \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta.$$

Riepilogando, la funzione $S(\theta)$, che è eguale a

$$\begin{aligned} F_{11}(\theta) - F_1(\theta) - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta = \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \sum_n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta}{n^2 \sqrt{n}} + \\ \sum_n K_n \frac{1}{(\rho - 1)^2} - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta, \end{aligned}$$

gode delle seguenti proprietà:

1. essa è continua nell'intervallo $\eta \overline{\pi - \eta}$, inclusi i limiti, essendo η di quella piccolezza che si vuole;
2. per ogni valore di θ in questo intervallo si ha

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{S(\theta + \varepsilon) - 2S(\theta) + S(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon} = 0;$$

3. tolto un gruppo di punti dell'ordine r compreso nel tratto η $\pi - \eta$, la espressione

$$\frac{S(\theta + \varepsilon) - 2S(\theta) + S(\theta - \varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

oscilla tra due funzioni integrabili T_θ , V_θ , tali, che si ha

$$\int_c^d T_\theta d\theta = \int_c^d V_\theta d\theta = 0, \quad \eta \leq c < d \leq \pi - \eta.$$

Adunque (*):

$$S(\theta) = C\theta + C_1, \quad \eta \leq \theta \leq \pi - \eta,$$

C e C_1 essendo due costanti.

10.

L'ultima relazione del paragrafo precedente si può scrivere sotto la forma

$$\sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \left(\frac{\sin\left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2} - \frac{\sin\left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{(\rho-1)^2} \right) + \frac{\sin\left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{8n(\rho+1)^2} + \frac{\sin\left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{8n(\rho-1)^2} \right] \\ - \sum_1^n \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^\alpha A_n p_n \frac{\sin^{\frac{3}{2}}\beta d\beta}{n^2 \sqrt{n}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^\alpha \varphi_1(\beta) \sin^{\frac{3}{2}}\beta d\beta - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^\alpha \sin^{\frac{3}{2}}\beta d\beta - C\theta - C_1 = 0.$$

Ora, si ha (**)

$$- \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^\alpha \sin\left[(\rho+1)\beta - \frac{\pi}{4}\right] d\beta = \\ \frac{\sin\left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{(\rho+1)^2} - \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho+1)^2} - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho+1} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

(*) V. CLEBSCH e NEUMANN, *Mathematische Annalen*, t. 5^o, pag. 13 e seg.⁴¹ V. anche il volume 6^o di questi Annali, pag. 59-61.

(**) V. la Memoria del prof. DINI inserita nel t. 6^o di questi Annali, pag. 220 e seg.⁴²

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen} \left[(\rho-1)\beta - \frac{\pi}{4} \right] d\beta =$$

$$\frac{\operatorname{sen} \left[(\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right]}{(\rho-1)^2} + \frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho-1)^2} + \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho-1} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right).$$

Quindi, sostituendo questi valori nella relazione che precede e rammentando la eguaglianza

$$X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta = P_n(\cos \theta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta =$$

$$\frac{2 \cos \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} n \pi} \left(1 - \frac{1}{4n} \right) \operatorname{sen} \theta + \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \left(\rho \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4 n \sqrt{2} n \pi} + \frac{p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \frac{1}{\sqrt{2} n \pi} \left[\operatorname{sen} \left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen} \left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{8 n \sqrt{2} n \pi} \left[\operatorname{sen} \left((\rho+1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{sen} \left((\rho-1)\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \frac{p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \theta}{n^2 \sqrt{n}},$$

si otterrà facilmente:

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} P_n(\cos \beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2} n \pi} \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \\ & C' \theta + C_1 - A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - C\theta - C_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

quando si faccia

$$C' = \sum_n \frac{A_n}{\sqrt{2} n \pi} \left[-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{4 n (\rho+1)} - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{4 n (\rho-1)} + \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8 n (\rho+1)} - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8 n (\rho-1)} \right] =$$

$$\sum_n \frac{A_n}{\sqrt{2} n \pi} \left[-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8 n (\rho+1)} - \frac{3 \cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{8 n (\rho-1)} \right] =$$

$$- \sum_n \frac{A_n}{\sqrt{2} n \pi} \frac{(2\rho+1) \cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{4 n (\rho^2-1)},$$

$$\begin{aligned} C'_1 &= \sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\left(1 - \frac{1}{4n} \right) \left(\frac{1}{(\rho+1)^2} + \frac{1}{(\rho-1)^2} \right) \operatorname{sen}(n+1) \frac{\pi}{2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8n} \left(\frac{1}{(\rho-1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) \operatorname{sen}(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16n} \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{3}{\rho-1} \right) \right] \\ &= \sum_1^n \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}} \left[\left(\frac{1 - \frac{1}{8n}}{(\rho+1)^2} + \frac{1 - \frac{3}{8n}}{(\rho-1)^2} \right) \operatorname{sen}(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2\rho+1)}{8n(\rho^2-1)} \cos(n+1) \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

La relazione (1) può presentarsi sotto l'aspetto

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} P_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \frac{\cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} \right) \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \\ A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta = C_{11} \theta + C'_{11} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

essendo

$$C_{11} = C' - C, \quad C'_{11} = C'_1 - C_1.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-1} &= \frac{1}{(n+1) \left(1 + \frac{1}{2(n+1)} \right)} + \frac{1}{(n+1) \left(1 - \frac{3}{2(n+1)} \right)} = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)^2} - \dots \right) + \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{3}{2(n+1)} + \frac{9}{4(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{2}{n+1} + \frac{c_n}{n^2}, \end{aligned}$$

c_n convergendo ad uno all'annullarsi di $\frac{1}{n}$. La eguaglianza (2) potrà quindi scriversi:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] + A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta = \\ C_{111} \theta + C'_{111} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

essendo

$$C_{111} = C_{11} + \sum_1^n A_n \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \frac{c_n}{n^2},$$

$$C'_{111} = C'_{11} - \frac{\pi}{2} \sum_1^n A_n \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \frac{c_n}{n^2}.$$

Supposto sempre θ compreso tra η e $\pi - \eta$, η essendo una quantità arbitrariamente piccola, si avrà:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen} \alpha d\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}} \right)' \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \gamma}} \right)'' d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta, \\ &\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen} \beta d\beta = \\ &\sqrt{\operatorname{sen} \theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \gamma}} \right)'' d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta, \end{aligned}$$

e quindi la relazione (3), quando sia moltiplicata per $\sqrt{\operatorname{sen} \theta}$, potrà presentarsi nella forma:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen} \beta d\beta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen} \delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} \gamma}} \right)'' d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \right. \\ \left. \frac{2 \cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\operatorname{sen} \theta} \right] + A_0 \sqrt{\operatorname{sen} \theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta = \\ (C_{111}\theta + C'_{111}) \sqrt{\operatorname{sen} \theta} + \sqrt{\operatorname{sen} \theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dalla equazione (3) poi si deduce facilmente l'altra:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_1^n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \theta}} \right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \text{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta - \right. \\ & \quad \left. \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \beta}} \right)^n \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) d\alpha \right] \\ & + A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \gamma}} \right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \text{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta = \\ & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (C_{111} \beta + C'_{111}) \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \beta}} \right)^n d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \gamma}} \right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

poichè la serie che compare nella eguaglianza (3) converge in egual grado, la quantità θ restando compresa tra η e $\overline{\pi - \eta}$. D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\eta} \text{sen } \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \beta}} \right)^n \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) d\beta = \\ & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \beta}} \right)^n \beta d\beta - \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \beta}} \right)^n d\beta = \\ & -\theta \sqrt{\text{sen } \theta} + \frac{\pi}{2} - \cos \theta + \frac{\pi}{2} \sqrt{\text{sen } \theta} - \frac{\pi}{2} = -\sqrt{\text{sen } \theta} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \theta, \end{aligned}$$

laonde addizionando le relazioni (4) e (5) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_1^n A_n \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} X_n \text{sen } \beta d\beta + \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} \cos \theta \right] + \\ & A_0 \sqrt{\text{sen } \theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \text{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta + A_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen } \delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen } \gamma}} \right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \text{sen}^{\frac{3}{2}} \beta d\beta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (C_{111}\theta + C'_{111})\sqrt{\text{sen}\theta} + C_{111}\left(-\theta\sqrt{\text{sen}\theta} + \frac{\pi}{2} - \cos\theta\right) - C'_{111}(\sqrt{\text{sen}\theta} - 1) + \\
& \quad \sqrt{\text{sen}\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}}\beta d\beta + \\
& \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \text{sen}\delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen}\gamma}}\right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}}\beta d\beta = \\
& \quad C_{111}\left(\frac{\pi}{2} - \cos\theta\right) + C'_{111} + \sqrt{\text{sen}\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}}\beta d\beta + \\
& \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \text{sen}\delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen}\gamma}}\right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi_1(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}}\beta d\beta.
\end{aligned}$$

Ponendo nell'ultima equazione x in luogo di $\cos\theta$ si ha:

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_1^n A_n \left[\int_0^x d\alpha \int_0^{\alpha} X_n d\beta + \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} x \right] + A_0 \int_0^x d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta = \\
& C_{111}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C'_{111} + \int_0^x d\alpha \int_0^{\alpha} \theta_1(\beta) d\beta,
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

essendo

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \text{sen}\alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \psi(\beta) \text{sen}\beta d\beta = \\
& \sqrt{\text{sen}\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \psi(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}}\beta d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \text{sen}\delta d\delta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{sen}\gamma}}\right)^n d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \psi(\beta) \text{sen}^{\frac{3}{2}}\beta d\beta,
\end{aligned}$$

ove $\psi(\beta)$ rappresenta una funzione ovunque integrabile e che va all'infinito in un numero limitato di punti.

Ora, se $n > 0$, si ha

$$\int_0^{\alpha} X_n d\beta = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} - \frac{X^{(0)}_{n+1} - X^{(0)}_{n-1}}{2n+1},$$

ossia, in virtù della nota formola

$$(n+1)X^{(0)}_{n+1} + nX^{(0)}_{n-1} = 0,$$

$$\int_0^x X_n d\beta = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} + \frac{X^{(0)}_{n-1}}{n+1};$$

quindi per $n > 1$ si avrà:

$$\int_0^x d\alpha \int_0^x X_n d\beta =$$

$$\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{X^{(0)}_{n-1}}{n+1} x - \frac{X^{(0)}_{n+2} - X^{(0)}_n}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{X^{(0)}_n - X^{(0)}_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{X^{(0)}_{n-1}}{n+1} x + \frac{X^{(0)}_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^{(0)}_{n-2}}{(2n+1)n},$$

e per $n=1$

$$\int_0^x d\alpha \int_0^x X_1 d\beta = \frac{x^3}{2 \cdot 3} = \frac{X_3 - X_1}{3 \cdot 5} + \frac{X_1}{6}.$$

D'altra parte, per la formola dimostrata al paragrafo terzo, si ha:

$$\frac{X^{(0)}_{n-1}}{n+1} = -\frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2(n-1)\pi}} \left(1 - \frac{1}{4(n-1)}\right) + \frac{p^{(0)}_{n-1}}{(n+1)(n-1)^2 \sqrt{n-1}}$$

$$= -\frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{2}}{(n+1) \sqrt{2n\pi}} + \frac{b_n}{n^2 \sqrt{n}}$$

b_n non crescendo al di là di ogni limite con n . Sostituendo questi valori nella relazione (6) si ottiene:

$$A_1 \left(\int_0^x d\alpha \int_0^x X_1 d\beta - \frac{2x}{2\sqrt{2\pi}} \right) + \sum_2 A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right.$$

$$\left. + \frac{X^{(0)}_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^{(0)}_{n-2}}{(2n+1)n} + \frac{b_n x}{n^2 \sqrt{n}} \right] + A_0 \int_0^x d\alpha \int_0^x d\beta =$$

$$C_{111} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + C'_{111} + \int_0^x d\alpha \int_0^x \theta_1(\beta) d\beta$$

Le serie

$$\sum_2^n A_n \left(\frac{X^{(0)}_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^{(0)}_{n-2}}{(2n+1)n} \right), \quad \sum_2^n \frac{b_n x}{n^2 \sqrt{n}}$$

convergono indipendentemente dall'ordine dei termini, l'ultima eguaglianza può scriversi quindi anche nel modo seguente:

$$A_0 \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha d\beta + A_1 \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha X_1 d\beta +$$

$$\sum_2^n A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right] = Dx + D' + \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta,$$

D e D' essendo due costanti il valore delle quali è facile ad assegnarsi, oppure anche nell'altro:

$$A_0 \frac{X_2 - X_0}{3} + A_1 \frac{X_3 - X_1}{3 \cdot 5} + \sum_2^n A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right] =$$

$$\left. \begin{aligned} & D_1 x + D'_1 + \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ordinando poi secondo le funzioni X_n si ottiene:

$$\left(-\frac{A_0}{3} + \frac{A_2}{3 \cdot 5} \right) X_0 + \left(-\frac{A_1}{3 \cdot 5} + \frac{A_3}{5 \cdot 7} \right) X_1 +$$

$$\sum_0^n \left[\frac{A_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+7)} + \frac{A_{n+4}}{(2n+7)(2n+9)} \right] X_{n+2} =$$

$$\left. \begin{aligned} & D_1 x + D'_1 + \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta = D_1 x + D'_1 + \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

ove

$$\psi(x) = \int_0^x d\alpha \int_0^\alpha \theta_1(\beta) d\beta.$$

11.

Dimostriamo ora la eguaglianza

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} X_n \theta_1(\beta) d\beta,$$

$$= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} X_n \theta_2(\beta) d\beta,$$

$$= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} X_n f(\beta) d\beta,$$

essendo

$$\theta_2(\beta) \leq f(\beta) \leq \theta_1(\beta)$$

per tutti i punti dell'intervallo 0π , ad eccezione di quelli che appartengono al gruppo dell'ordine ν , del quale si fa parola nel primo paragrafo.

La relazione

$$\left. \begin{aligned} & \left(-\frac{A_0}{3} + \frac{A_2}{3 \cdot 5} \right) X_0 + \left(-\frac{A_1}{3 \cdot 5} + \frac{A_3}{5 \cdot 7} \right) X_1 + \\ & \sum_n \left[\frac{A_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+5)(2n+7)} + \frac{A_{n+4}}{(2n+7)(2n+9)} \right] X_{n+2} \\ & = D_1 x + D'_1 + \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

fu dimostrata per tutti i valori di θ compresi tra η e $\pi - \eta$, oppure per tutti i valori di x che sono tra $-1 + \varepsilon$ e $1 - \varepsilon$, η ed ε essendo di quella piccolezza che si vuole. Ora, osservando che la serie del primo membro converge in egual grado, e che la funzione $\psi(x)$ è continua nell'intervallo $-1 + 1$, i limiti inclusi, si vede di leggieri che questa equazione è vera per tutti i valori tra 1 e -1 , compresi questi ultimi.

Occupiamoci in prima dei coefficienti della forma A_{2n} .

Rammentate le relazioni

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

si moltiplichi l'equazione (α) per X_0 e si integri da -1 a $+1$, si otterrà:

$$-\frac{A_0}{3} + \frac{A_2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X_0 dx + D'_1,$$

ed in modo analogo:

$$\frac{A_{2n}}{(4n+1)(4n+3)} - \frac{A_{2n+2}}{(4n+3)(4n+5)} - \frac{A_{2n+2}}{(4n+5)(4n+7)} + \frac{A_{2n+4}}{(4n+7)(4n+9)} =$$

$$\frac{4n+5}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X_{2n+2} dx.$$

Se ora nell'ultima relazione facciamo successivamente $n=0, 1, \dots, n$ e sommiamo le equazioni in tal guisa ottenute con la prima delle due precedenti, avremo:

$$-\frac{A_{2n+2}}{(4n+5)(4n+7)} + \frac{A_{2n+4}}{(4n+7)(4n+9)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) [X_0 + 5X_2 + 9X_4 + \dots + (4n+5)X_{2n+2}] dx + D'_1.$$

Ora,

$$\frac{dX_{2n+3}}{dx} = \sum_0^{n+1} (4s+1) X_{2s},$$

quindi:

$$\begin{aligned} & -\frac{A_{2n+2}}{(4n+5)(4n+7)} + \frac{A_{2n+4}}{(4n+7)(4n+9)} = \\ D'_1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X'_{2n+3} dx &= D'_1 + \frac{1}{2} \left[\psi(x) X_{2n+3} \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} X_{2n+3} \psi'(x) dx \\ &= D'_1 + \frac{1}{2} [\psi(+1) + \psi(-1)] - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} X_{2n+3} \psi'(x) dx. \end{aligned}$$

Ma per la relazione (7) del paragrafo precedente si ha:

$$\psi(+1) + D_1 + D'_1 = 0, \quad \psi(-1) - D_1 + D'_1 = 0,$$

quindi:

$$\psi(+1) + \psi(-1) + 2D'_1 = 0.$$

Nella eguaglianza

$$-\frac{A_{2n+2}}{4n+5} + \frac{A_{2n+4}}{4n+9} = -\frac{4n+7}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) X_{2n+3} dx$$

faccio successivamente $n=0, 1, 2, \dots, n$ e sommo i risultati; ricavo in tal modo:

$$-\frac{A_2}{5} + \frac{A_{2n+4}}{4n+9} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) \left[\sum_0^n (4s+7) X_{2s+3} \right] dx,$$

e poichè

$$\begin{aligned} -\frac{A_0}{1} + \frac{A_2}{5} &= \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X_0 dx + 3D'_1 = \\ \frac{3}{2} [\psi(+1) + \psi(-1) + 2D'_1] - \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} X_1 \psi'(x) dx &= -\frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} X_1 \psi'(x) dx, \end{aligned}$$

addizionando queste due relazioni ottengo:

$$\begin{aligned} \frac{A_{2n+4}}{4n+9} - \frac{A_0}{1} &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) \left[\sum_{s=1}^n (4s+7) X_{2s+3} \right] dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) X'_{2n+4} dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} \psi'(x) X_{2n+4} \right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+4} dx = \frac{1}{2} [\psi'(+1) - \psi'(-1)] + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+4} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+4} dx. \end{aligned}$$

Quindi:

$$A_{2n+4} = (4n+9) \left(c + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+4} dx \right),$$

essendo

$$c = A_0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

Dimostriamo ora che $c=0$.

La quantità $\frac{A_{2n}}{\sqrt{2n}}$ va a zero con $\frac{1}{n}$, ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(c + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n} dx \right) = 0,$$

perciò:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n} dx = -c + \varphi(n),$$

essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt{n} = 0 \quad (n = \infty).$$

Decomponiamo l'integrale

$$\int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n} dx$$

nei tre seguenti

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1}, \quad \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}, \quad \int_{1-\varepsilon_1}^{+1}.$$

Supposto ε_1 sufficientemente piccolo, si avrà:

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1} f_1(x) dx < \lambda,$$

essendo $f_1(x) = +\sqrt{[f(x)]^2}$ e λ una grandezza positiva piccola quanto si vuole, quindi:

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon_1} f(x) X_{2n} dx < \lambda,$$

quale si sia n , perchè si suppose che l'integrale della funzione $f_1(x)$ converga nelle estreme vicinanze dei punti $-1+0$ e $+1-0$ (*). Nello stesso modo si vede che l'integrale

$$\int_{1-\varepsilon_1}^1 f(x) X_{2n} dx$$

è minore di λ , quando ε_1 sia scelto convenientemente.

Occupiamoci ora della espressione

$$\begin{aligned} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} f(x) X_{2n} dx &= \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) P_{2n}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) \frac{2 \cos \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{4n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n} \right) d\theta + \\ &\int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) \frac{\cos \theta \sin \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]}{8n \sqrt{4n\pi} \sin \theta} d\theta + \frac{1}{4n^2 \sqrt{2n}} \int_{\eta}^{\pi-\eta} p_{2n} f_{11}(\theta) \sin \theta d\theta, \\ f_{11}(\theta) &= f(\cos \theta), \end{aligned}$$

che al crescere indefinito di n si comporta come l'altra

$$\int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{11}(\theta) \frac{2 \cos \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{4n\pi}} d\theta,$$

(*) Fatta astrazione da una somma di spazî che può rendersi piccola quanto si vuole, ciascuna delle differenze

$$\varphi_1(\beta) - \varphi_2(\beta), \quad \varphi_1(\beta) - f(\beta)$$

è arbitrariamente vicina allo zero. Quindi, se si suppone che una qualsivoglia delle funzioni $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$, $f(\beta)$ sia integrabile nei tratti $+0$ η , $\pi - \eta$ π anche pigliata con lo stesso segno, ciò avrà luogo altresì per le altre.

poichè espressioni della forma

$$\frac{1}{n^\mu} \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{i+1}(\theta) \sin 2n\theta d\theta, \quad \frac{1}{n^\mu} \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{i+1}(\theta) \cos 2n\theta d\theta, \quad \mu \geq 1,$$

si annullano con $\frac{1}{n}$, $f_{i+1}(\theta)$ essendo una funzione ovunque integrabile nel tratto η $\overline{\pi-\eta}$ che va all'infinito in un numero limitato di punti. Infatti, si ha

$$\int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{i+1}(\theta) \sin 2n\theta d\theta = \left[\sin 2n\theta \int_{\eta+0}^{\theta} f_{i+1}(\theta) d\theta \right]_{\eta}^{\pi-\eta} - 2n \int_{\eta}^{\pi-\eta} \cos 2n\theta d\theta \int_{\eta+0}^{\theta} f_{i+1}(\beta) d\beta,$$

e l'integrale

$$\int_{\eta}^{\pi-\eta} \cos 2n\theta d\theta \int_{\eta+0}^{\theta} f_{i+1}(\beta) d\beta$$

si annulla con $\frac{1}{n}$.

Ora, se la funzione $f(x)$ fosse finita oppure andasse all'infinito in guisa che fosse

$$\lim_{n=\infty} \int_{\eta}^{\pi-\eta} f_{i+1}(\theta) \cos \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\sin \theta} d\theta = 0,$$

sarebbe:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} f(x) X_{2n} dx = 0,$$

e quindi:

$$c = 0.$$

Questa relazione ha sempre luogo nel nostro caso, come risulta dal teorema dimostrato nel paragrafo seguente.

12.

Se

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0, \quad n = \infty,$$

sarà:

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\mu+1}{2\sqrt{\mu}} \int_b^c \psi(x) \lambda(x) \frac{d^2 X_{\mu}}{dx^2} dx = 0,$$

quando si ponga

$$\psi(x) - (C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3) = \sum_n A_n \left[\frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right],$$

e si dica $\lambda(x)$ una funzione continua tra b e c ($\eta \leq b < c \leq \pi - \eta$) insieme alla sua derivata prima, che si annulla ai limiti con la medesima e di cui la derivata seconda non ha infiniti massimi e minimi.

Ed invero, poichè la serie precedente converge in egual grado, sarà:

$$\int_b^c [\psi(x) - (C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3)] \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx =$$

$$\sum_n A_n \int_b^c \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx.$$

D'altra parte,

$$\int_b^c \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx =$$

$$\left[\left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \lambda(x) \frac{d X_\mu}{dx} \right]_b^c - \int_b^c \left[\left(\int_{-1}^x X_n d\alpha \right) \lambda(x) + \lambda'(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \right] \frac{d X_\mu}{dx} dx =$$

$$- \int_b^c \left[\left(\int_{-1}^x X_n d\beta \right) \lambda(x) + \lambda'(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \right] \frac{d X_\mu}{dx} dx,$$

essendo per ipotesi $\lambda(b) = \lambda(c) = 0$. Rammentando poi che $\lambda'(b) = \lambda'(c) = 0$, si ha:

$$\int_b^c \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx =$$

$$\int_b^c X_\mu \left[\lambda''(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) + 2\lambda'(x) \left(\int_{-1}^x X_n d\beta \right) + \lambda(x) X_n \right] dx.$$

Abbiamo quindi:

$$\sum_n A_n \int_b^c \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx =$$

$$\sum_n A_n \int_b^c \lambda''(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha X_n d\beta \right) X_\mu dx + \sum_n A_n \int_b^c X_\mu \left[2\lambda'(x) \left(\int_{-1}^x X_n d\beta \right) + \lambda(x) X_n \right] dx.$$

Consideriamo ora l'aggregato

$$\sqrt{\mu} \sum_n A_n \int_b^c X_\mu \left[2\lambda'(x) \left(\int_{-1}^x X_n d\beta \right) + \lambda(x) X_n \right] dx,$$

che può scindersi nelle due serie convergenti

$$2\sqrt{\mu} \sum_n A_n \int_b^c X_\mu \lambda'(x) \left(\int_{-1}^x X_n d\beta \right) dx,$$

$$\sqrt{\mu} \sum_n A_n \int_b^c \lambda(x) X_n X_\mu dx.$$

Infatti, si ha

$$\int_b^c X_\mu \lambda'(x) \left(\int_{-1}^x X_n d\beta \right) dx = \int_b^c X_\mu \lambda'(x) \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} dx,$$

$$\frac{1}{2n+1} \int_b^c X_\mu \lambda'(x) X_{n+1} dx =$$

$$\frac{-1}{2n+1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \lambda'(\cos \theta) \left[\frac{2 \cos \left(\rho_1 \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \pi \mu \sin \theta} \left(1 - \frac{1}{4\mu} \right) + \frac{\cotg \theta \sin \left(\rho_1 \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4\mu \sqrt{2} \pi \mu \sin \theta} + \frac{p_\mu}{\mu^2 \sqrt{\mu}} \right]$$

$$\left[\frac{2 \cos \left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \pi (n+1) \sin \theta} \left(1 - \frac{1}{4(n+1)} \right) + \frac{\cotg \theta \sin \left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4} \right)}{4(n+1) \sqrt{2} \pi (n+1) \sin \theta} + \frac{p_{n+1}}{(n+1)^2 \sqrt{n+1}} \right] \sin \theta d\theta,$$

essendo $\rho_{11} = n + \frac{3}{2}$. La serie

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2n+1} \sum_n A_n \int_b^c \lambda'(x) X_\mu X_{n+1} dx,$$

e così pure l'altra

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2n+1} \sum_n A_n \int_b^c \lambda'(x) X_\mu X_{n-1} dx,$$

può decomporre quindi in sedici altre, dodici delle quali sono, come di leggieri si avverte, convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini ed hanno una somma che si annulla con $\frac{1}{\mu}$. Resta a dimostrarsi prima la con-

vergenza delle quattro

$$\sum_2^n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos \theta) \cos\left(\rho_1 \theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\mu} \sum_2^n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos \theta) \cos\left(\rho_1 \theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\mu} \sum_2^n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos \theta) \sin\left(\rho_1 \theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg \theta d\theta, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_2^n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda'(\cos \theta) p_\mu \cos\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\sin \theta} d\theta, \quad (4)$$

e delle quattro analoghe.

Ponendo mente che

$$\begin{aligned} & \int_{b_1}^{c_1} p_\mu \sqrt{\sin \theta} \lambda'(\cos \theta) \cos\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta = \\ & \frac{1}{\rho_{11}} \left[p_\mu \sqrt{\sin \theta} \lambda'(\cos \theta) \sin\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) \right]_{b_1}^{c_1} - \frac{1}{\rho_{11}} \int_{b_1}^{c_1} \sin\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \sqrt{\sin \theta} \lambda'(\cos \theta)]'_\theta d\theta \\ & = -\frac{1}{\rho_{11}} \int_{b_1}^{c_1} \sin\left(\rho_{11} \theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \sqrt{\sin \theta} \lambda'(\cos \theta)]'_\theta d\theta, \\ & \lambda'(\cos b_1) = \lambda'(\cos c_1) = 0, \end{aligned}$$

si vede subito che l'ultima di queste serie converge indipendentemente dall'ordine dei termini; di più essa si annulla con $\frac{1}{\mu}$, essendo

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{D'_\theta p_\mu}{\mu^2} = 0,$$

come è noto.

La serie (1), fatta astrazione del termine nel quale $\rho_1 = \rho_{11}$, può porsi sotto la forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_2^n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\cos\left((\rho_1 + \rho_{11})\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\rho_1 - \rho_{11})\theta \right] \lambda'(\cos \theta) d\theta \\ & = \frac{1}{2} \sum_2^n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{\sin\left((\rho_1 + \rho_{11})\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\rho_1 + \rho_{11}} + \frac{\sin(\rho_1 - \rho_{11})\theta}{\rho_1 - \rho_{11}} \right] \lambda''(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

e si scinde quindi in due, la prima delle quali converge e si annulla con $\frac{1}{\mu}$. Anche l'aggregato

$$\sum_n \frac{A_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda''(\cos \theta) \frac{\sin(\rho_1 - \rho_{11})\theta}{\rho_1 - \rho_{11}} \sin \theta d\theta \quad (\alpha)$$

rappresenta evidentemente una grandezza, che, come è facile a vedersi, tende a zero mentre μ va all'infinito. Infatti, si può al certo assegnare un numero m tale, che la quantità

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \lambda''(\cos \theta) \sin(\rho_1 - \rho_{11})\theta \sin \theta d\theta, \quad n \geq m,$$

sia arbitrariamente piccola, quale si sia μ , essendo

$$\lim \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0, \quad (n = \infty);$$

si potrà poi pigliare μ sì grande che per $n < m$ il termine precedente risulti piccolo oltre ogni dire. La somma (α) è quindi minore della serie

$$\sum_n \frac{1}{(2n+1)(\rho_{11} - \rho_1)} = \sum_n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n+1-\mu},$$

$$1 < n \leq \mu - 1,$$

moltiplicata per una quantità che va a zero con $\frac{1}{\mu}$: basterà dunque far vedere che questa serie non va all'infinito con μ .

Si ha

$$\sum \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n-\mu+1} = - \sum_n^{\mu-2} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{-n+\mu-1} + \sum_\mu \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n-\mu+1}.$$

La serie

$$\sum_\mu \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{n-\mu+1} = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2\mu+3} \cdot \frac{1}{2} + \dots$$

va a zero con $\frac{1}{\mu}$, resta a considerarsi la somma

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\mu-3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\mu-4} + \dots + \frac{1}{2\mu-5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu-3} \cdot \frac{1}{1} = \sum_s^{\mu-3} \frac{1}{2\mu-(2s+1)} \cdot \frac{1}{s}.$$

Determiniamo il massimo numero intero s_1 in guisa, che si abbia

$$2\mu - (2s_1 + 1) \geq s_1,$$

ossia

$$s_1 \leq \frac{2\mu-1}{3}.$$

Ciò posto, la somma

$$\sum_{s=1}^{s_1} \frac{1}{2\mu-(2s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

va a zero al crescere indefinito di μ , perchè la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente e la quantità $2\mu-(2s+1)$ ($s \leq s_1$) va con μ all'infinito. Per la stessa ragione si ha:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{s=s_1+1}^{\mu-3} \frac{1}{2\mu-(2s+1)} \cdot \frac{1}{s} = 0.$$

È chiaro adesso che anche le serie (2) e (3) convergono e si annullano con $\frac{1}{\mu}$.

Dimostriamo ora che la espressione

$$\sqrt{\mu} \sum_n A_n \int_b^c X_n X_\mu \lambda(x) dx$$

va a zero con $\frac{1}{\mu}$. Posti per X_n ed X_μ i loro valori in funzione di θ , essa assume la forma

$$-\sum_z A_n \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{2 \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi n \sin\theta}} - \frac{\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{2n \sqrt{2\pi n \sin\theta}} + \frac{\cotg\theta}{4n \sqrt{2\pi n \sin\theta}} \sin\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p_n}{n^2 \sqrt{n}} \right] \\ \left[\frac{2 \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi \sin\theta}} - \frac{\cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{2\mu \sqrt{2\pi \sin\theta}} + \frac{\cotg\theta}{4\mu \sqrt{2\pi \sin\theta}} \sin\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{p_\mu}{\mu^2} \right] \lambda(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

La serie

$$\sqrt{\mu} \sum_n A_n \int_b^c X_n X_\mu \lambda(x) dx,$$

astrazione fatta da fattori indipendenti da μ e da θ , può, come vedrassi tra breve, porsi eguale alla somma delle sedici serie seguenti

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (1')$$

$$\sum A_n \int_{b_1}^{c_1} \frac{1}{n \sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (2')$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg\theta \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (3')$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} p_n \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} d\theta, \quad (4')$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{\mu\sqrt{n}} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (5)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (6)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg\theta \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (7)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n^2\sqrt{n}\mu} p_n \cos\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} d\theta, \quad (8)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{\sqrt{n}\mu} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg\theta \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (9)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg\theta \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (10)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu} \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg^2\theta \lambda(\cos\theta) d\theta, \quad (11)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n^2\sqrt{n}\mu} p_n \operatorname{sen}\left(\rho_1\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg\theta \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} d\theta, \quad (12)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{\sqrt{n}\mu^2} p_\mu \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} d\theta, \quad (13)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu^2} p_\mu \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} d\theta, \quad (14)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n\sqrt{n}\mu^2} p_\mu \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cotg\theta \lambda(\cos\theta) \sqrt{\operatorname{sen}\theta} d\theta, \quad (15)$$

$$\sum A_n \int_{b_i}^{c_i} \frac{1}{n^2\sqrt{n}\mu^2} p_\mu p_n \lambda(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta. \quad (16)$$

Le serie (4'), (8), (12), (16) sono convergenti e vanno a zero con $\frac{1}{\mu}$.

Consideriamo ora la serie (1') che, fatta astrazione del termine nel quale $\rho = \rho_1$, può porsi sotto la forma

$$\begin{aligned} & \sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\cos\left((\rho + \rho_1)\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \cos[(\rho - \rho_1)\theta] \right] \lambda(\cos\theta) d\theta \\ &= \sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{\sin\left((\rho + \rho_1)\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\rho + \rho_1} + \frac{\sin(\rho - \rho_1)\theta}{\rho - \rho_1} \right] \lambda'(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\ &= \sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \left[\frac{\cos\left((\rho + \rho_1)\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{(\rho + \rho_1)^2} + \frac{\cos(\rho - \rho_1)\theta}{(\rho - \rho_1)^2} \right] [\lambda'(\cos\theta) \sin\theta]'_{\theta} d\theta \\ &= \sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} [\lambda'(\cos\theta) \sin\theta]'_{\theta} \frac{\cos\left((\rho + \rho_1)\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{(\rho + \rho_1)^2} d\theta + \sum \frac{A_n}{2\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} [\lambda'(\cos\theta) \sin\theta]'_{\theta} \frac{\cos(\rho - \rho_1)\theta}{(\rho - \rho_1)^2} d\theta. \end{aligned}$$

La serie (1') risulta in tal modo decomposta in due che convergono indipendentemente dall'ordine dei termini, e la prima delle quali va al certo a zero con $\frac{1}{\mu}$. È facile poi vedere che altrettanto avviene della seconda. Infatti, potrò sempre determinare un numero m tale, che per tutti i valori di $n \geq m$ si abbia, astrazione fatta dal segno,

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos[(\rho - \rho_1)\theta] [\lambda'(\cos\theta) \sin\theta]'_{\theta} d\theta \leq \varepsilon,$$

essendo ε una quantità arbitraria; d'altra parte, assunto μ sufficientemente grande, ogni termine della forma

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos[(\rho - \rho_1)\theta] [\lambda'(\cos\theta) \sin\theta]'_{\theta} d\theta, \quad n < m,$$

è piccolo oltre ogni dire. Il valore numerico della serie

$$\sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{(\rho - \rho_1)^2} \int_{b_1}^{c_1} \cos[(\rho - \rho_1)\theta] [\lambda'(\cos\theta) \sin\theta]'_{\theta} d\theta,$$

sarà più piccolo della espressione

$$\sum \frac{1}{(n - \mu)^2}, \quad 0 < n \leq \mu,$$

moltiplicata per una quantità che si annulla con $\frac{1}{\mu}$. Basta quindi far vedere che la serie convergente

$$\sum \frac{1}{(n-\mu)^2}, \quad 1 < n \leq \mu,$$

non va con μ all'infinito. Che ciò abbia luogo, è subito visto, quando si ponga mente che

$$\sum_{1 < n \leq \mu} \frac{1}{(n-\mu)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(\mu-2)^2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

È manifesto ora che le serie (2'), (3'), (5), (6), (7), (9), (10), (11) convergono e tendono a zero al crescere indefinito di μ .

Resta a considerarsi le serie (13), (14), (15). Dimostriamo che la (13) ad es. converge e si annulla con $\frac{1}{\mu}$; lo stesso procedimento servirebbe per le altre due.

Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\sin\theta} d\theta = \\ & - \frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\rho \sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \sin\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\sin\theta}]'_{\theta} d\theta = \\ & - \frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\rho^2} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\sin\theta}]''_{\theta^2} d\theta. \end{aligned}$$

Le quantità

$$D_{\theta^2}^2 \frac{p_\mu}{\mu^2}, \quad D'_{\theta} \frac{p_\mu}{\mu}$$

non vanno all'infinito con μ , come è noto, quindi il termine

$$\frac{A_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\mu^2} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) [p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\sin\theta}]''_{\theta^2} d\theta$$

sarà arbitrariamente piccolo, quale si sia μ , a partire da valore opportuno di n , mentre la quantità

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{b_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\sin\theta} d\theta$$

converge a zero con $\frac{1}{\mu}$ per gli altri valori di n . Quindi:

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu^2} \sum \frac{A_n}{\sqrt{n}} \int_{\delta_1}^{c_1} \cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right) p_\mu \lambda(\cos\theta) \sqrt{\sin\theta} d\theta = 0.$$

Facciamo ora vedere che

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt{\mu} \int_b^c (C_0 x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} \lambda(x) dx = 0.$$

Consideriamo a tal fine l'integrale

$$\int_b^c x^m \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} \lambda(x) dx,$$

nel quale m è un numero intero e positivo o anche lo zero. Si ha

$$\begin{aligned} \int_b^c x^m \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx &= - \int_b^c [m x^{m-1} \lambda(x) + x^m \lambda'(x)] \frac{d X_\mu}{dx} dx \\ &= \int_b^c [m(m-1) x^{m-2} \lambda(x) + 2m x^{m-1} \lambda'(x) + x^m \lambda''(x)] X_\mu dx, \end{aligned}$$

essendo $\lambda(b) = \lambda(c) = \lambda'(b) = \lambda'(c) = 0$. Se si pone poi in luogo di X_μ la sua espressione per mezzo di θ , ne consegue:

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt{\mu} \int_b^c x^m \lambda(x) \frac{d^2 X_\mu}{dx^2} dx = 0,$$

poichè la funzione $\lambda''(x)$ è scevra da infiniti massimi e minimi. Il teorema enunciato a principio di questo paragrafo risulta quindi dimostrato.

Possiamo ora osservare che, data una serie della forma $\sum A_n X_n$ tale, che si abbia $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{\sqrt{n}} = 0$, la somma

$$\begin{aligned} &\frac{A_2}{3 \cdot 5} X_0 + \frac{A_3}{5 \cdot 7} X_1 + \\ &\sum_0^n \left[\frac{A_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{A_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{A_{n+4}}{(2n+5)(2n+7)} + \frac{A_{n+6}}{(2n+7)(2n+9)} \right] X_{n+2} \end{aligned}$$

definisce una funzione continua $l(x)$ nell'intervallo $-1 + 1$, i limiti inclusi.

La quantità A_s poi si può porre sotto l'aspetto di un integrale definito in virtù delle ricerche del paragrafo 10; si ha cioè:

$$A_{2n} = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^{+1} l(x) \frac{d^2 X_{2n}}{dx^2} dx,$$

$$A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2} \int_{-1}^{+1} l(x) \frac{d^2 X_{2n+1}}{dx^2} dx.$$

Ciò posto, è facile vedere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} f(x) X_{2n} dx = 0,$$

Infatti, detti $x_1, x_2, \dots, x_\tau$ i punti posti tra -1 e $+1$ pei quali la $f(x)$ va all'infinito, l'aggregato

$$\sqrt{n} \left(\int_{-1+\varepsilon_1}^{x_1-\rho} + \int_{x_1+\rho}^{x_2-\rho} + \dots + \int_{x_\tau+\rho}^{1-\varepsilon_1} \right) f(x) X_{2n} dx$$

si annulla al certo con $\frac{1}{n}$, ρ essendo una quantità arbitrariamente piccola; basta quindi far vedere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} f(x) X_{2n} dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, \tau.$$

Pel teorema or ora dimostrato si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} \nu(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha f(\beta) d\beta \right) X''_n dx = 0,$$

indicando $\nu(x)$ una funzione continua tra $\overline{x_r-\rho}$ e $\overline{x_r+\rho}$ insieme alla sua derivata prima e seconda e tale, che si abbia

$$\nu(x_r-\rho) = \nu(x_r+\rho) = \nu'(x_r-\rho) = \nu'(x_r+\rho) = 0,$$

mentre $\nu(x) = 1$ quando la variabile x non ecceda i limiti $\overline{x_r-\rho_1}$ e $\overline{x_r+\rho_1}$, $\rho_1 < \rho$.

Ciò posto, abbiamo

$$\sqrt{n} \int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha f(\beta) d\beta \right) \nu(x) X''_n dx =$$

$$-\sqrt{n} \int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} \left[\nu'(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha f(\beta) d\beta \right) + \nu(x) \left(\int_{-1}^x f(\beta) d\beta \right) \right] X'_n dx =$$

$$\sqrt{n} \int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} \left[\nu''(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha f(\beta) d\beta \right) + 2\nu'(x) \left(\int_{-1}^x f(\beta) d\beta \right) + \nu(x) f(x) \right] X_n dx,$$

ed è chiaro che

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt{n} \int_{x_r-\rho}^{x_r+\rho} \left[\nu''(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha f(\beta) d\beta \right) + 2\nu'(x) \left(\int_{-1}^x f(\beta) d\beta \right) + \nu(x) f(x) \right] X_n dx =$$

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt{n} \int_{x_r-\rho_1}^{x_r+\rho_1} \left[\nu''(x) \left(\int_{-1}^x d\alpha \int_{-1}^\alpha f(\beta) d\beta \right) + 2\nu'(x) \left(\int_{-1}^x f(\beta) d\beta \right) + \nu(x) f(x) \right] X_n dx =$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{n} \int_{x_r-\rho_1}^{x_r+\rho_1} f(x) X_n dx.$$

Quindi:

$$c=0,$$

ossia

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

Determiniamo ora la espressione dei coefficienti della forma A_{2n+1} .

Si ha

$$-\frac{A_1}{3 \cdot 5} + \frac{A_3}{5 \cdot 7} = D_1 + \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X_1 dx,$$

$$\frac{A_1}{3 \cdot 5} - \frac{A_3}{5 \cdot 7} + \frac{A_5}{7 \cdot 9} - \frac{A_7}{9 \cdot 11} = \frac{7}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X_3 dx,$$

.....

$$\frac{A_{2n-3}}{(4n-5)(4n-3)} - \frac{A_{2n-1}}{(4n-3)(4n-1)} + \frac{A_{2n+1}}{(4n-1)(4n+1)} - \frac{A_{2n+3}}{(4n+1)(4n+3)} =$$

$$\frac{4n-1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) X_{2n-1} dx,$$

e quindi:

$$-\frac{A_{2n-1}}{(4n-1)(4n+1)} + \frac{A_{2n+1}}{(4n+1)(4n+3)} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) [3X_1 + 7X_3 + \dots + (4n-1)X_{2n-1}] dx + D_1 = \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x) \frac{dX_{2n}}{dx} dx + D_1 = \frac{1}{2} \left[\psi(x) X_{2n} \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) X_{2n} dx + D_1 = \\ & \frac{1}{2} [\psi(+1) - \psi(-1)] - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) X_{2n} dx + D_1 = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) X_{2n} dx, \end{aligned}$$

essendo

$$\psi(+1) + D_1 + D'_1 = 0, \quad \psi(-1) - D_1 + D'_1 = 0.$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{aligned} & -\frac{A_1}{3} + \frac{A_{2n+1}}{4n+3} = \\ & -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) [5X_2 + 9X_4 + \dots + (4n+1)X_{2n}] dx = \\ & -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) \frac{dX_{2n+1}}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi'(x) dx = \\ & -\frac{1}{2} [\psi'(+1) + \psi'(-1)] + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+1} + \frac{1}{2} [\psi(+1) - \psi(-1)] = \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_1 dx. \end{aligned}$$

Ma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+1} dx = 0,$$

quindi:

$$A_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_1 dx, \quad A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) X_{2n+1} dx;$$

il problema che ci siamo proposto è adunque risoluto.